

小组电子版作业题目

钟德亮老师提供的题目

2017 年 2 月 27 日

下列题目按照难易程度给出了每组最大人数。

1 球对称势的波函数(3–5人)

在三维中考虑薛定谔方程的解。如果系统的势能是球对称的，会发生什么？

1. 写出三维球坐标下的薛定谔方程并分离变量。
2. 设势能 $V_1(r) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$, $V_2(r) = \frac{1}{2}\alpha r^{-2}$, $V_3(r) = \frac{1}{2}\beta r^3$, 按照能量从小到大依次画出系统的波函数。
3. 观察系统的波函数。对于上述三个势能，系统的波函数是否仍然具有球对称性？
4. 系统若不是球对称的，那么有必要单独研究波函数的角部。画出前几个波函数角部的图像。
5. 上述系统的波函数随势能参数 α, β, ω 如何变化？
6. 这三个势能的波函数有什么区别？(提示：在经典力学中，什么样的势能具有闭合轨道？)

2 古典谱与热方程(3–8人)

在古典分析理论中，了解一个算子的方法就是解出其谱序列(本征值)。在现代分析中，这种方法由热核方法所取代。

1. 在一个二维矩形区域 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ 上给定拉普拉斯算符 $\nabla^2 V$ 。试给定一种边界条件，求出拉普拉斯算子的谱。

2. 现在，在同一区域上考虑热方程： $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)V = 0$ 。试给定一个初条件，求出热方程的解。
3. 在 $t \rightarrow \infty$ 时上述热方程的解与拉普拉斯方程的解有什么区别？
4. 如果两个解相同，请换用不同的初值考虑热方程的解。所有的初值在 $t \rightarrow \infty$ 都收敛到拉普拉斯方程的解吗？如果两个解不同，请换用不同的初值考虑热方程的解。存在初值在 $t \rightarrow \infty$ 使之收敛到拉普拉斯方程的解吗？
5. 将上述方法推广到二维圆形区域。
6. (选作)将上述方法推广到三维任意区域。
7. 这种方法实际上可以用来解决某些非线性方程。对于方程： $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)V = f(V)$ ，显然解不满足叠加原理。但是，对于某些特定的 $f(V)$ ，由于在 $t \rightarrow \infty$ 时上述方程的非齐次项可以忽略，因此可以用叠加原理出现。请假设一些 $f(V)$ 的形式并数值求解上述方程。对于怎样的 $f(V)$ 非齐次项在 $t \rightarrow \infty$ 可以忽略？
8. 上述思想实际上可以应用于物理中最重要的散射过程。请阐述这种思想如何应用到散射过程中，并给出具体例子。(提示：S矩阵元的 in 态和 out 态是如何定义的？)

3 角动量相加(3-4人)

在量子力学中，角动量相加一直是重要的问题。通常，角动量相加最后能够转化为球谐函数的加法问题。

1. 用软件给出 $l = 0 \sim 5$ 的所有球谐函数并作图。
2. l 较大的球谐函数可以用 l 较小的球谐函数展开吗？为什么？
3. 给出 $l = 5$ 的球谐函数用低阶球谐函数展开的公式。
4. 高阶球谐函数用低阶球谐函数的乘积展开有什么一般规律？
5. 我们定义高阶球谐函数用低阶球谐函数的乘积展开的系数为CG系数。请给出前100个CG系数。哪些CG系数为0？有什么物理意义？

4 线性斯塔克效应(3–6人)

氢原子在均匀电场中的分裂与场强成正比。

1. 用软件计算抛物坐标的 H_i ，给出抛物坐标中拉普拉斯算符的形式。
2. 均匀电场中的氢原子薛定谔方程为：

$$\left(\frac{1}{2}\nabla^2 + E + \frac{1}{r} - \mathcal{E}z\right)\phi = 0 \quad (1)$$

其中 E 为能量， \mathcal{E} 为电场强度。

在抛物坐标中对上述方程分离变量。

3. 给出上述方程能量数值解。
4. 解析上，可以把含有 E 的项作为微扰。画出零级近似的波函数图形。
5. 求出一级近似的波函数和能量。与数值解对比。
6. 在主量子数 n 很大时谱项能量与能级本身可以相比。因此不适用微扰论。但是这些态都是准经典的，因此适用于波尔-索末菲量子化规则。设分离变量后两个方程的解分别为 f_1, f_2 。
做代换 $f_1 = \frac{\chi_1}{\sqrt{\xi}}, f_2 = \frac{\chi_2}{\sqrt{\eta}}$ 。代入分离变量后的两个方程，给出 χ 满足的方程。
7. 上述方程每一个在形式上都等同于一个一维的薛定谔方程。画出这两个方程的等效的势能。
8. 由波尔-索末菲量子化规则数值求解得到电场中移动能级的能量。
9. (选作)为什么只有氢原子能够发生线性斯塔克效应？其波函数与一般多原子分子有何不同？

5 双球体系的电容(3–5人)

在电动力学中有一个经典问题：求两个相距为 l ，半径为 r_1, r_2 的导体球壳的电容。

1. 在 $r_1 = r_2$ 时数值求解拉普拉斯方程，得到体系的电容。
2. 用电像法计算上述体系的电容。
3. 如果 $r_1 \neq r_2$ ，电像法不适用。请重新数值求解体系的电容。
4. 上述体系实际能在双球坐标下求解。计算出双球坐标的 H_i ，给出双球坐标下的拉普拉斯算符。
5. 分离变量，求解上述问题。给出严格解。画出严格解，与数值解相比较。

6 尖端放电(3-5人)

本题拟探究避雷针为什么能够起作用。

1. 数值计算椭球形导体外的电场分布。如果椭球形导体的短轴长度远远小于长轴,会发生什么现象?
2. 上述体系实际能在椭球坐标下求解。计算出椭球坐标的 H_i ,给出椭球坐标下的拉普拉斯算符。
3. 分离变量求解拉普拉斯方程。
4. 在椭球短轴远小于长轴时,给出上述解的近似形式。求在短轴附近的电场与在长轴附近的电场大小之比。
5. 指出避雷针能够产生尖端放电的原因。

7 氢原子能级(3-8人)

本题拟探究氢原子的能级。

1. 库仑场形如 $V(r) = \pm \frac{\alpha}{r}$ 。写出薛定谔方程分离变量后的径部函数方程。
2. 采用库伦单位制。令质量、长度、时间的单位 $m = \frac{\hbar^2}{m\alpha} = \frac{\hbar^3}{m\alpha^2} = 1$ 。写出新单位制下的径部方程。
3. 对于离散谱情形,引入 $n = \frac{1}{\sqrt{-2E}}, \rho = \frac{2r}{n}$ 。写出以新变量 ρ 为自变量的方程。
4. 对于很小的 ρ ,给出满足有限性的解 $f_1(\rho)$ 。对于很大的 ρ ,给出渐进解 $f_2(\rho)$ 。
5. 设原方程的解为 $R(\rho) = f_1 f_2 w(\rho)$ 。写出 w 的方程并数值求解。
6. 上述方程存在解析解。解为合流超几何函数 $w = F(-n+l+1, 2l+2, \rho)$ 。用改变 $-n+l+1$ 的值数值求解方程。什么时候方程的解在无穷远收敛?
7. 在解在无穷远收敛的情况下给出本征值。本征值与 n, l 中的哪些参量有关?
8. 计算径部函数的归一化系数。
9. 给出原点附近径部函数的渐进行为。给出无穷远附近径部函数的渐进行为。你会发现径部函数被指数压低。

10. 计算 r^k 的平均值。 $k = \pm 1, \pm 2$ 。有什么有趣的结论?
11. 对于离散谱, $n = \frac{1}{\sqrt{-2E}} = -\frac{i}{k}, \rho = \frac{2r}{n} = 2ikr$ 都是纯虚数。数值给出 r 很大时径部波函数 R_{kl} 的渐进形式。你会发现 $R_{kl} \simeq \frac{2}{r} \sin \left[kr + \frac{1}{k} \ln(2kr) - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right]$ 。
12. 数值给出相移 δ_l 随 l, k 的变化情况。有什么变化规律?
13. 在 $k \rightarrow 0$ 极限下求解上述方程。你会发现径部函数正比于贝塞尔函数。
14. (选作)给出相移的解析表达式。

8 经典非线性谐振子(3-5人)

本题拟探究势能 $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + U(x)$ 的非线性谐振子($m = 1$)的运动情况。 $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+2}$

1. 计算前7阶修正。给出一般解。
2. 与经典谐振子比较。非线性项如何破坏周期性行为? 你可以分别取 $C_1 = 1, C_{n \geq 2} = 0$ 等情况进行讨论。

9 傅里叶级数的性质和Gibbs现象(3-4人)

本题拟探究分段连续函数傅里叶级数的收敛性。

1. 考虑周期性方波 $U(t) = U_0(0 \leq t \leq T)0(T \leq t \leq 2T)$ 和周期性锯齿波 $U(t) = \frac{U_0 t}{T}(0 \leq t \leq T)$ 。给出两个波的傅里叶级数。
2. 取傅里叶级数的前 $n = 1, 3, 10, 100$ 项, 画出图形并与原波形比较。
3. 在间断点 $t = T$ 处傅里叶级数收敛到哪一个值? 你能够得出什么一般结论?
4. 观察间断点。如果取傅里叶级数的足够多项, 级数能够收敛到间断点的值吗?
5. 如果不能。在方波情形下, 选择足够大的 n , 观察级数的值与方波的值的大小。哪一个值比较大?
6. 在间断点处, 级数的值超出或小于原振幅 U_0 的百分比? 你能够得到什么一般性的结论?
7. 试证明你的上述结论。

10 Bessel函数的积分表示(3-6人)

本题拟从Bessel函数的积分表示出发研究其性质。

1. Bessel函数有下列积分表示:

$$J_\nu(z) = k \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_C t^{-\nu-1} e^{t-\frac{z^2}{4t}} dt \quad (2)$$

其中围道如图1所示。

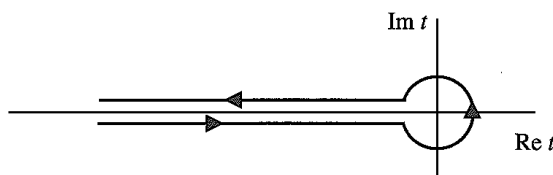


Figure 1: $J_\nu(z)$ 围道示意图

取 n 为正负整数, 对于特定的 z 值数值计算上述积分。与一般的贝塞尔函数的值相比较。

2. 从上述数值结果给出常数 k 的值。(选作)并证明该结论。
3. 可以通过换元将 $n \left(\frac{z}{2}\right)^\nu$ 因子吸收入积分中。做替换 $u = \frac{2t}{z}$, 给出方程的形式。
4. 如果做替换 $u = e^w$, 上述方程的形式? 对于整数值 $\nu = n$ 有什么结论? 你会发现 $J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[n\theta - z \sin(\theta)] d\theta$
5. 给出诺依曼函数 $Y_\nu(z)$ 和第一类汉克尔函数 $H_\nu^1(z) = J_\nu(z) + Y_\nu(z)$ 的积分表示。如果如图2所示选择围道为 C'' , 你会发现

$$H_\nu^1(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{C''} e^{z \sinh w - \nu w} dw \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (3)$$

6. 如果 $\nu, z = x$ 都是实数, 我们可以考虑贝塞尔函数的渐进行为。我们首先考虑 $\nu \rightarrow \infty$ 的行为。给定 x , 数值求解某个大的 ν 的贝塞尔函数的值。并用函数 $\frac{e^{Ax}}{\sqrt{Bx}}$ 进行拟合。观察系数 A, B 对 x, ν 的依赖。
7. 我们其次考虑 $x \rightarrow \infty$ 的行为。给定 ν , 数值求解某个大的 x 的第一类汉克尔函数的值。并用函数 $H_\nu^1(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{Ax}} e^{iBx+C\nu}$ 进行拟合。观察系数 A, B, C 对 x, ν 的依赖。
8. (选作)对于上述问题我们可以使用鞍点法进行计算。试查阅有关资料, 给出鞍点近似后的渐进解。并与数值解相比较。

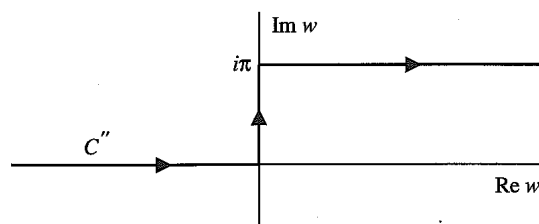


Figure 2: $H_v^1(z)$ 围道示意图

11 湖面结冰(3–6人)

本题拟引导你探究湖面结冰的问题。数学上说，这是一个可变边界的偏微分方程问题。

1. 假设湖面上方温度恒定为 U_1 ，湖面下方温度恒定为 $-U_2$ ，($U_1, U_2 > 0$)。结冰面为 $x = s(t)$ ，结冰温度为 0°C 。简明起见，我们首先假设湖水是无穷深的。设结冰面上方温度为 u_1 ，密度为 ρ_1 ，热容为 c_1 ，结冰面下方温度为 u_2 ，密度为 ρ_2 ，热容为 c_2 。写出 $0 < x < s(t)$ 和 $x > s(t)$ 时的热传导方程。
2. 如果假设相变潜热为 L ，如何表述结冰面的方程？(提示：写出 $\frac{ds}{dt}$ 满足的方程)
3. 写出方程的边界条件。
4. 数值求解方程。观察解的性质。
5. 这个方程其实可以解析求解。在湖面上方，我们可以使用误差函数 erf 作为一个特解。设 $u_1 = A + B\text{erf}(C(x, t))$ ，其中 A, B 为常数， $C(x, t)$ 为 x, t 的函数，在上述条件下给出 A, B, C 的解析表达式。
6. 同理， u_2 可以用余误差函数表示。设 $u_2 = A + B\text{erfc}(C(x, t))$ ，其中 A, B 为常数， $C(x, t)$ 为 x, t 的函数，在上述条件下给出 A, B, C 的解析表达式。
7. 如何确定常数 B ？
8. 由结冰处 $\frac{ds}{dt}$ 的方程和上述结果， $s(t)$ 必须具有怎样的形式？
9. 假设 $s(t) = f(\alpha, t)$ ，其中 α 为常数，给出 α 满足的方程并数值求解。不同的 α 值对应的物理过程有什么不同？
10. 如果湖水深度是有限的，解会如何变化？给出数值解并与无穷深度情形比较。

12 常系数微分方程本征值的渐进分布(3-8人)

本题拟探究一个对物理问题有意义的结果：常系数微分方程的本征值的渐进行为不依赖于区域的形状而依赖于其大小。

1. 在矩形 $0 < x < a, 0 < y < b$ 上解析求解本征值问题 $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ 。分别在 $u|_{\Sigma} = 0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = 0$ 的两种边界条件下求解。把两种情形下小于某界限 λ_0 的本征值个数分别记为 $A(\lambda), B(\lambda)$ 。二者有什么差别？
2. 当 λ 很大时如何对上述方程进行估计？(提示：作图。考虑椭圆围成面积的整点个数。)
3. 求出 $B(\lambda)$ 的渐进表达式。你会发现 $B(\lambda) \sim \lambda C$ 。求出常数 C 的值。
4. 数值求解。按照公式 $B(\lambda) \sim \lambda C + D\sqrt{\lambda}$ 拟合。得到更好的估计。
5. 从上面的结果中似乎能够得到一个一般性的结论。微分方程 $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ 对面积为 S 的矩形区域而言小于界限 λ 的本征值个数 $A(\lambda)$ 渐进的有下列公式成立：

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{f\lambda} = C \quad (4)$$

其中 C 为常数。求出 C 的值。

6. 在立方体上探究上述过程。证明下列公式：

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{V(\lambda)^k} = D \quad (5)$$

其中 k, D 为常数。求出它们的值。

7. 现在考虑一般的自伴随二阶偏微分方程

$$L[u] + \lambda \rho u = (pu_x)_x + (pu_y)_y - qu + \lambda \rho u = 0 \quad (p > 0, \rho > 0) \quad (6)$$

在给定 p 和边界条件(边界为矩形)的情况下改变 q ，数值得到本征值的渐进分布。你得到什么结论？

8. 由于上一问的结论。我们在接下来的讨论中不妨 $q \equiv 0$ 。给出 $A(\lambda)$ 渐进数值解。
9. 你能够得到什么结论？如果我们认为任何区域都能够被分割成很多无穷小的矩形，在每一个小矩形上使用原来的估计，你最后能够得到什么结论？最后请证明，

$$A(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \iint_G \frac{\rho}{p} dx dy \quad (7)$$

10. 对于空间立方区域 G 证明

$$A(\lambda) \sim \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2} \iiint_G \left(\frac{\rho}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx dy dz \quad (8)$$

11. 对于一般的区域上述结论依然成立吗？数值检验上述结论。

12. 为什么在常见的物理问题中在假设空间体积 V 非常大的情况下可以认为区域是矩形的？

13 高密度物质的物态方程(3–5人)

【注意】本题需要一定的平衡态统计物理知识。

本题拟探究球对称物体在引力下的平衡。

1. 假设物体不转动。密度分布中心对称。引力势能满足方程

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (9)$$

在引力场中质量为 m 的粒子满足

$$\mu + m\phi = \text{Constant} \quad (10)$$

由上述公式推导化学势的微分方程。

2. 非相对论性简并电子气的化学势与密度有何关系？给出化学势满足的方程。

3. 函数 $\mu(r)$ 必须具有形式：

$$\mu(r) = \frac{1}{\lambda^2 R^4} f\left(\frac{r}{R}\right) \quad (11)$$

其中 λ 为常数。 R 为物体的半径。为什么？

4. 将上式代入化学势满足的方程，引入无量纲变量 $\xi = \frac{r}{R}$ 。给出函数 $f(\xi)$ 满足的方程和边界条件。

5. 上述方程没有解析解。数值求解。给出平均密度与中心密度的比值。

6. 对于相对论性简并电子气重新进行上述过程。其化学势与密度有何关系？给出化学势满足的方程。

7. 此时，函数 $\mu(r)$ 必须具有形式：

$$\mu(r) = \frac{1}{R\sqrt{\lambda}} f\left(\frac{r}{R}\right) \quad (12)$$

其中 λ 为常数。 R 为物体的半径。为什么？

8. 将上式代入化学势满足的方程，引入无量纲变量 $\xi = \frac{r}{R}$ 。给出函数 $f(\xi)$ 满足的方程和边界条件。
9. 上述方程没有解析解。数值求解。给出平均密度与中心密度的比值。
10. 相对论性气体形成的星体与非相对论性气体形成的星体在密度分布上有何不同？
11. 给出总质量 M_0 。它与太阳质量的关系？假设 $m = 2m_n$, m_n 为中子质量。这个质量 M_0 称为钱德拉塞卡极限。
12. 如果总质量 $M \neq M_0$ 会发生什么？给出数值解。这说明相对论性简并电子气的球体的稳定性如何？

14 流体的阻力(3-6人)

本题拟探究从第一性原理出发解物体在流体中受到的阻力。

1. 对于低雷诺数的流体，纳维-斯托克斯方程可以近似为

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (13)$$

在什么情况下可以忽略上述方程中左边的一项？此时运动方程化为线性的。写出运动方程。

2. 上述方程与连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 一起确定了流动。考虑在无穷远处具有速度 \mathbf{u} 的来流绕静止流体流动的问题。以球体中心建立球坐标。球体表面流体静止。数值给出流体的速度分布。
3. 实际上可以解析求解上述问题。假设

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \nabla \times \nabla \times (f\mathbf{u}) \quad (14)$$

其中 $f(r)$ 是径矢的标量函数。对于线性的运动方程取旋度。得到方程 $\Delta(\nabla \times \mathbf{v} = 0)$ 。其中 Δ 为拉普拉斯算符。将 \mathbf{v} 的试探形式代入，得到 $f(r)$ 满足的方程。

4. 考虑到速度 $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ 在无穷远为零。你最终能够得到

$$f = ar + \frac{b}{r} \quad (15)$$

在球坐标中代入边界条件求出常数 a, b 的值。

5. 给出速度 \mathbf{v} 和压强 p 的表达式。球坐标中 \mathbf{r} 方向单位矢量记做 \mathbf{n} 。
6. 在直角坐标中应力张量为：

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta(\partial_k v_i + \partial_i v_k) \quad (16)$$

给出球坐标中的应力张量形式。在本题目的情况下应力张量哪些分量不为零？

7. 显然，球体受阻力沿 u 方向。并且其大小

$$F = \int (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) dA \quad (17)$$

积分域为整个球面。给出受力的表达式。你最后会得到斯托克斯公式：

$$F = Cu \quad (18)$$

其中 C 为常数。给出 C 。

8. 如果球体改为无穷长圆柱体，用本题一开始提到的方程(13)给出数值解。如果用随后的近似方程会有什么问题？这个问题称为斯托克斯佯谬。如何从量纲分析上看待这个佯谬？
9. 在什么情况下不能忽略方程(13)左边的一项？如果我们考虑这一项，就能够得到在远离物体处的奥森方程：

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (19)$$

显然物体受到的阻力会有变化。数值给出下一阶的结果。你会发现解形如下列形式：

$$F = 6\pi\eta u R \left(1 + A \frac{Ru}{\nu} \right) \quad (20)$$

其中 A 为常数。 $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ 为运动黏度。给出 A 的值。

15 表面张力波(3-6人)

【注意】本题中的拉普拉斯方程可能指 $\nabla^2\phi = 0$ 或者 $p_1 - p_2 = \alpha\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ 。其中 R_1, R_2 为曲面的主曲率。

本题拟探究有表面张力表面的小波长重力波。表面假设为 xy 平面。位于 $z = 0$ 处。液体无穷深。

1. 假设振幅远小于波长。对于速度势，方程仍然为：

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (21)$$

用 $\zeta(x, y)$ 表示液体表面上的点的 z 坐标。 ζ 为小量。

由拉普拉斯公式，

$$p - p_0 = -\alpha\nabla^2\zeta \quad (22)$$

其中 p 为表面附近的液体压强。 p_0 为恒定的外部压强。

由重力场中物体平衡的条件给出 $p = p(\phi, \zeta)$ 。并给出势函数的边界条件。计算中可以近似用 $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ 代替 $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ 。这个近似的物理含义是什么？

2. 数值求解上述方程。如果有一个沿 x 轴传播的平面波解，

$$\phi = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t) \quad (23)$$

那么 k, ω 之间有何关系？(这个关系称为色散关系)画出 ω, k 的关系图像。什么时候可以忽略表面张力的影响？什么时候可以忽略重力场的影响？

3. 对于有限深度的液体，重新数值求解上述方程。色散关系有何变化？
4. 实际上上述问题不难解析求解。由边界条件 $v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$ 给出 ϕ 的解。并代回原方程给出色散关系。在 h 很大时验证上述方程回到无穷深度时的色散关系。做出解析图像并与无穷深的色散关系比较。
5. 对于一个不可压缩球面，拉普拉斯方程可以近似为

$$p - p_0 = -\alpha \left\{ \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\zeta}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\zeta}{\partial\theta} \right) \right] \right\} \quad (24)$$

上式第一项对应什么？给出这种情况下的边界条件。计算中同样可以近似用 $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ 代替 $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ 。

6. 数值求解上述方程。可能的振动频率是什么？

7. 寻求驻波形式的解：

$$\phi = e^{-i\omega t} f(f, \theta, \phi) \quad (25)$$

其中 f 满足拉普拉斯方程 $\Delta f = 0$ 。

8. 色散关系是什么？如果称频率相同的不同振动为简并的，本系统有多少重简并？

9. 显然 f 正比于球谐函数。液滴最小的振动频率对应 l 是多少？为什么没有更小的 l ？这一事实有什么物理意义？

10. 下面我们来推导平均曲率的方程。已知分界面面积的总变化为：

$$\delta A = \int \delta \zeta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dA \quad (26)$$

若 $z = \zeta(x, y)$ 是曲面的方程且 ζ 为小量，曲面面积

$$A = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2} dxdy \simeq \int \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy \quad (27)$$

对上式变分并分部积分。与公式(26)对比，得到平均曲率 $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ 的表达式。

11. 在球坐标中，曲面 $r = r(\theta, \phi)$ 的面积为积分：

$$A = \iiint \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \phi} \right)^2} r \sin \theta d\theta d\phi \quad (28)$$

考虑与球面相近的曲面 $r = R + \zeta$ 。代入，得到面积的近似解。

12. 对 ζ 求变分并分部积分,求出平均曲率并与公式(24)对比。在近似到一阶情况，你可以用下列公式：

$$\delta \zeta dA \simeq \delta \zeta R(R + 2\zeta) \sin \theta d\theta d\phi \quad (29)$$

16 宇宙暴涨(3–6人)

本题拟探究极早期宇宙的性质并初步了解暴涨模型。本题不需要广义相对论基础。

(a) 在最简单的弗里德曼宇宙中，FRW度规的形式为：

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\Sigma^2 \quad (30)$$

其中 $d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2$, 其中 $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ 是空间部分的度规。我们看到，空间部分的尺度与膨胀因子 $a(t)$ 有关。

我们首先来探究 $a(t)$ 是如何变化的。代入爱因斯坦方程 $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ ，并假设空间部分为理想流体， $T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$ ，我们得到弗里德曼方程：(对时间求导)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} &= \frac{8\pi G}{3} \rho \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \Lambda &= -8\pi G p \end{aligned} \quad (31)$$

我们首先需要了解宇宙的临界密度。引入状态参量 $w = \frac{p}{\rho}$ ，哈勃因子 $H = \frac{\dot{a}}{a}$ 请给出密度 ρ 满足的微分方程，并解出 $\rho \propto a^{c+dw}$ 。给出参数 c, d 的值。

- (b) 将密度的解代回弗里德曼方程。给出尺度因子 $a(t)$ 的表达式。作图表现 $a(t)$ 与 w, t 参数的依赖关系。
- (c) 对于一般的非相对论性物质，辐射和宇宙学常数给出不同情况下的 w 值和相应的 $a(t)$ 值并作图。
- (d) 宇宙暴涨需要尺度因子 $a(t)$ 满足什么条件？为什么？
- (e) 在上述条件下，证明下面两个条件与上述条件等价：

$$\frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} < 0 \quad \rho + 3p > 0 \quad (32)$$

- (f) 从物理上来看，暴涨需要宇宙在极短时间内指数膨胀。这需要负压强的源或者接近常数的能量密度。我们接下来探讨这个条件如何在一般物理系统中出现。

暴涨宇宙学最简单的模型是一个标量场 ϕ ，称为暴涨子(inflaton)。系统的作用量为：

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (33)$$

其中 $V(\phi)$ 为系统的势能。如果假设度规具有FRW形式，最后可以解得系统的密度与压强为：

$$\begin{aligned}\rho_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \\ p_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\end{aligned}\tag{34}$$

证明，这个标量场产生暴涨的条件是系统的势能 $V(\phi)$ 大于动能 $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ 。

(g) 我们首先考虑一个最简单情形。此时 $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ ，系统的运动方程如下：

$$\begin{aligned}H^2 &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{m^2}{6}\phi^2 \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi &= 0\end{aligned}\tag{35}$$

假设 $t = 0$ 时刻 $\phi = \phi_0$ ，数值求解上述运动方程。做出尺度因子 $a(t)$ 随时间变化的图像。

(h) 暴涨实际对应于 ϕ 很大并且变化缓慢。在最低阶近似下可以认为 ϕ 为常数。给出尺度因子的解析表达式。这个宇宙方程解称为德西特(de Sitter)宇宙解。

(i) 对于一般的势能函数 $V(\phi)$ ，系统的运动方程为：

$$\begin{aligned}H^2 &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right) \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0\end{aligned}\tag{36}$$

如果在上一问中的二次势能项中加入宇宙学常数 Λ ，就可以近似描述具有暗能量的暴胀宇宙。请重复上述过程给出尺度因子的数值解并在最低阶近似下给出解析解。暗能量如何影响暴涨？

(j) 下面我们探讨几种更接近真实的宇宙暴涨模型。首先是**Large – field inflation**：

$$V(\phi) = V_0\phi^p\tag{37}$$

重复上面的讨论。给出这种势能下的宇宙演化。

(k) 另一种重要的**Large – field inflation**是自然暴涨(natural inflation)：

$$V(\phi) = V_0\left(\cos\frac{\phi}{f} + 1\right)\tag{38}$$

重复上面的讨论。给出这种势能下的宇宙演化。

(l) 另一大类暴涨模型**Small – field inflation**。这种情况下势能为通常的Higgs势能：

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^2 \right]^2 \approx V_0 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^p \right] \quad (39)$$

重复上面的讨论。给出这种势能下的宇宙演化。

(m) 一个更著名的**Small – field inflation**势能为Coleman-Weinberg势能：

$$V(\phi) = V_0 \left[\left(\frac{\phi}{\mu} \right)^4 \left(\ln \frac{\phi}{\mu} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \right] \quad (40)$$

重复上面的讨论。给出这种势能下的宇宙演化。

(n) 比较上述结果。暴涨与势能有什么关系？上述名称中的Large和Small分别指什么？

17 弹性物体的形变和弹性波(3–6人)

本题拟探究弹性物体发生小形变的性质。

(a) 假设物体中定点形变前后位置矢量分别为 \mathbf{r} , \mathbf{r}' 。定义 $\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ 为形变矢量。无穷小线元长度由形变前的

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 \quad (41)$$

变为形变后的

$$ds'^2 = \sum_i dx_i'^2 \quad (42)$$

在一阶近似下，给出形变前后线元的关系为：

$$ds'^2 = ds^2 + 2u_{ij} dx^i dx^j \quad (43)$$

其中 u_{ij} 与形变矢量有关，称为**应变张量**。求出应变张量的表达式。

(b) 给出柱坐标，球坐标中应变张量的分量。

(c) 可以推导得到，如果物体的应力张量为 σ_{ij} ，应力张量和应变张量有下列关系：

$$u_{ij} = \frac{1}{9K} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{kk} \right) \quad (44)$$

其中系数 K, μ 分别称为**压缩模量**和**剪切模量**。 δ_{ij} 为克罗内克符号。重复指标代表求和。

首先考虑均匀应变情形。假设一根杆沿 z 方向，两端施加反向拉力，单位面积受力为 p 。由杆侧表面不受力和杆端表面单位面积受力为 p ，给出此时直角坐标下的非零的应变张量分量。

- (d) 杆沿 z 轴相对伸长为 u_{zz} 。显然 $u_{zz} = \frac{p}{E}$ 。其中 E 为系统的**杨氏模量**。杆横向压缩与纵向伸长之比称为**泊松比**。 $u_{xx} = -\sigma u_{zz}$ 。给出这两个量与一般的**压缩模量**和**剪切模量**之间的关系。
- (e) 物体静力平衡时受合力为零。假设外力场(体积力)为 F_i ，面力场为 P_i ，写出形变后物体的平衡方程。(提示：无外力时有 $\partial_j \sigma_{ij} = 0$)。
- (f) 将以杨氏模量和泊松比表示的应力-应变张量关系代入平衡方程。得到物体的平衡方程。
- (g) 假设所有外力都为零。证明形变 u 满足双调和方程：

$$\Delta \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (45)$$

- (h) 我们先考虑一个最简单情形。在重力场中竖直放置的长杆。长度为 l ，在自身重力下发生形变。解析求解平衡方程并作图。这个结果在什么情况下退化到最简单的重力场中的细杆情形？(什么情况下截面的变化可以忽略？)
- (i) 利用上面的方法，确定半径为 R 的实心球在自身引力场作用下的形变。
- (j) 利用上面的方法，确定内外半径分别为 R_1, R_2 的空心球在内部压强为 p_1 ，外部压强为 p_2 时的形变。首先做出数值解，然后尝试解析求解。
- (k) 利用上面的方法，确定内外半径分别为 R_1, R_2 的空心圆柱在内部压强为 $p_1 = p$ ，外部压强为 $p_2 = 0$ 时的形变。首先做出数值解，然后尝试解析求解。
- (l) 我们可以看出，如果要考虑弹性物体的一般形变是非常复杂的。但是，在小形变情况下我们可以认为物体是绝热的，此时物体内运动方程为：

$$\rho \ddot{u}_i = \partial_k \sigma_{ik} \quad (46)$$

对于各项同性弹性介质，由平衡方程给出运动方程。

- (m) 验证当形变只发生在 x 方向时矢量 u 满足的运动方程退化为两个独立的波动方程(u_y, u_z 方程相同)。两个方程的波传播的速度是多少？它们之间的大小关系如何？
- (n) 我们来推广上述方法。请给出半径为 R 的弹性球径向震动的本征频率。作图并给出本征频率对各参数的依赖。

(o) 在真实的晶体中情况会更加复杂。在晶体中，有：

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn} u_{mn} \quad (47)$$

其中 λ_{ijmn} 满足 $\lambda_{iklm} = \lambda_{kil m} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}$ 。假设有单色弹性波解，即解形如：

$$u_i = u_i^0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (48)$$

给出频率 ω 与波矢量 k 的关系。这个关系称为**色散方程**。

(p) 我们这里只考虑最简单情形。对于立方晶体，非零的弹性模量(注意能够通过置换得到的分量也不为零)为：

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_1 \quad \lambda_{xxyy} = \lambda_2 \quad \lambda_{xyxy} = \lambda_3 \quad (49)$$

坐标轴 x, y, z 沿着立方体的楞边。假设波沿着 xy 平面传播， θ 为该平面的波矢量 \mathbf{k} 与 x 轴夹角，试求解色散方程。作图，给出三个分支的色散关系并给出偏振方向。并在 $\theta = 0$ 时讨论三个分支的偏振方向。

18 同步辐射(3-6人)

本题拟探究同步辐射的性质和贝塞尔函数在这个问题上的巧妙应用。

(a) 理论推导给出在 t 时刻，单位径矢 \mathbf{n} 的方向上接收到一个位置为 $\mathbf{r}(t)$ ，速度为 $\mathbf{v}(t)$ 的粒子在 T 时刻发出的辐射的功率为：

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P(T)}{d\omega d\Omega} &= \frac{\omega^2 e^2}{4\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \left[\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \left(T + \frac{\tau}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \left(T - \frac{\tau}{2} \right) - 1 \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ i \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \cdot \left[\mathbf{r} \left(T + \frac{\tau}{2} \right) - \mathbf{r} \left(T - \frac{\tau}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

我们首先考虑粒子做圆周运动。 $\mathbf{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ 。 $\mathbf{r} = (R \cos(\omega_0 t), R \sin(\omega_0 t), 0)$

证实下列公式的正确性，其中 $\beta = \frac{v}{c}$ ：

$$\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \left(T + \frac{\tau}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \left(T - \frac{\tau}{2} \right) = \beta^2 \cos \omega_0 \tau \quad (50)$$

并利用贝塞尔函数的产生函数将辐射功率公式化为下列公式：

$$\begin{aligned}\frac{d^2 P(T)}{d\omega d\Omega} &= \frac{\omega^2 e^2}{4\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} [\beta^2 \cos \omega_0 \tau - 1] \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} i^m e^{im\omega_0(T+\frac{\tau}{2})} J_m\left(\frac{\omega}{c} R \sin \theta\right) \\ &\times (-i)^{m'} e^{-im'\omega_0(T-\frac{\tau}{2})} J_{m'}\left(\frac{\omega}{c} R \sin \theta\right)\end{aligned}$$

(b) 接受时间 T 实际上是很多周期的平均。我们有 $\langle e^{i(m-m')\omega_0 T} \rangle = \delta_{m,m'}$ 。化简上式。

(c) 我们实际上有一个更加巧妙的方法。试从贝塞尔函数的性质出发证明下面公式：

$$\begin{aligned}&\left\langle \exp \left\{ i \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \cdot \left[\mathbf{r} \left(T + \frac{\tau}{2} \right) - \mathbf{r} \left(T - \frac{\tau}{2} \right) \right] \right\} \right\rangle_{\text{one period}} \\ &= \left\langle \exp \left[i \frac{\omega}{c} R \sin \theta \left(-2 \sin \omega_0 T \sin \frac{1}{2} \omega_0 \tau \right) \right] \right\rangle_{\text{one period}} \\ &= J_0 \left(\frac{2\omega R}{c} \sin \theta \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \right) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[J_m \left(\frac{\omega R}{c} \sin \theta \right) \right]^2 e^{im\omega_0 \tau}\end{aligned}$$

(提示：使用贝塞尔函数的积分表示和加法公式。)

(d) 对频率进行积分。你会得到公式：

$$\frac{d^2 P(t)}{d\omega d\Omega} = \sum_{m=1}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0) \frac{dP_m(t)}{d\Omega} \quad (51)$$

给出 $\frac{dP_m(t)}{d\Omega}$ 的表达式。

(e) 由贝塞尔函数递推关系对上式进行化简。证明下列公式：

$$\frac{dP_m}{d\Omega} = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{e^2}{R} \beta^3 m^2 \left\{ [J'_m(m\beta \sin \theta)]^2 + \left[\frac{J_m(m\beta \sin \theta)}{\beta \tan \theta} \right]^2 \right\}$$

并数值给出图形。数值积分得到总功率。

(f) 我们下面计算总功率。首先对 $P_m(t)$ 进行计算。我们引入下列变量 s :

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{r} \left(T + \frac{\tau}{2} \right) - \mathbf{r} \left(T - \frac{\tau}{2} \right) \\ |s| &= \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \omega_0 \tau} = 2R \left| \sin \frac{1}{2} \omega_0 \tau \right| \end{aligned}$$

对全空间立体角积分。并证明:

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{e^2}{R} m \omega_0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-im\phi} (\beta^2 \cos \phi - 1) \frac{\sin \left(2m\beta \sin \frac{\phi}{2} \right)}{\sin \frac{\phi}{2}} \\ &= \frac{e^2}{R} m \omega_0 \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{\pi} \cos m\phi \left(\beta^2 - 1 - 2\beta^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \right) \frac{\sin \left(2m\beta \sin \frac{\phi}{2} \right)}{\sin \frac{\phi}{2}} \end{aligned}$$

(g) 利用贝塞尔函数的积分表示, 将上式化简为:

$$P_m = \frac{e^2}{R} m \omega_0 \left[2\beta^2 J'_{2m}(2m\beta) - (1 - \beta^2) \int_0^{2m\beta} dz J_{2m}(z) \right]$$

(h) 求出总辐射功率。在积分中遇到的积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega e^{-i\omega\lambda} = 2\pi i \delta'(\lambda) \quad (52)$$

其中 δ' 是 δ 函数的导数。

(i) 定义变量 $y = \phi + 2\lambda\beta \sin \frac{\phi}{2}$ 。形式的计算

$$\int_{-1}^1 d\lambda \delta''(y) \quad (53)$$

如何通过这个积分化简总辐射功率公式?

(j) 证明辐射总功率为:

$$P = -\frac{e^2}{2R} \omega_0 \beta \int_{-1}^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\beta^2 \cos \phi - 1}{1 + \lambda\beta \cos \frac{\phi}{2}} \delta''(y)$$

(k) 注意到 y 的零点正好位于 ϕ 的零点。因此, 对 δ'' 分部积分两次, 并积分出 y , 最后证明著名的总辐射公式:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{R} \omega_0 \frac{\beta^3}{(1 - \beta^2)^2} \quad (54)$$

- (l) 在极端相对论情形 $\beta \simeq 1$, 给出 P_m 的近似形式。你需要使用贝塞尔函数导数的渐进形式。如果不知道这个渐进展开的话请数值拟合下列公式:

$$P_m \simeq A \frac{e^2 \omega_0}{R} m^B \quad (55)$$

给出常数A,B的值。

- (m) 在 m 很大时上述展开表现不好。更好的展开方式是:

$$J'_{2m}(2m\beta) \sim \frac{1}{2} \frac{(1-\beta^2)^{1/4}}{\sqrt{\pi m}} e^{-\frac{2}{3}m(1-\beta^2)^{3/2}}, \quad m(1-\beta^2)^{3/2} \gg 1$$

请数值验证这个公式的正确性。对于很大的 β 做出 $2mJ'_{2m}(2m\beta)$ 的图形。

19 氧气扩散(3-5人)

本题拟探究氧气的扩散问题。数学上来说这是一个隐含的自由边界问题。这个问题目前只能够数值求解。

- (a) 背景如下。我们考虑一个介质, 它以恒定的速率吸收氧气。在介质表面的氧气进气量保持恒定。在一段时间后, 氧气会穿透入这个物质并达到某一个深度(自由边界指这个最深的表面)。一旦系统处于这个稳定状态, 我们就将介质表面完全遮挡住, 这样系统内部的氧气由于吸收会渐渐减少, 自由边界又会回到介质表面。达到稳定后我们重新让介质表面以恒定的速率吸气。如此循环。我们拟探究如何求解表面的变化。

假设 $C(X, T)$ 代表 T 时刻介质内 X 处的氧气浓度, m 为介质单位时间单位体积对氧气的浓度吸收率。在计算中可以认为 m 是常数。扩散率为 D 。

在进气一段时间后系统达到稳态。这时 $\frac{\partial C}{\partial T} = 0$ 。请写出这时的扩散方程。假设自由边界位于 $X = X_0$ 处。 $X = 0$ 处氧气浓度恒定为 C_0 。

- (b) 系统达到上述稳态后介质表面被完全遮挡住。写出这时的扩散方程, 给出边界条件和初始条件。自由界面位于 $X = X_0(t)$ 处。
- (c) 在求解之前最好最上述方程进行无量纲化。引入变量

$$x = \frac{X}{X_0} \quad t = D \frac{X_0^2}{T} \quad c = \frac{C}{2C_0} \quad (56)$$

写出无量纲化后的扩散方程, 给出边界条件和初始条件。

- (d) 记此时的自由边界为 $s(t)$ 。我们看到, 与湖面结冰问题不同, 方程不含有 $s(t)$ 的约束。我们需要某种方式把问题化为显含 $s(t)$ 的问题。

- (e) 我们首先对上述方程进行数值解。系统的边界是如何变化的？观察边界的运动。以及边界的稳定行为。

20 从物理观点看Black - Scholes公式(3-5人)

本题拟从物理的观点出发探究金融中最重要的Black - Scholes公式的一些性质。最后问题中涉及到的简单路径积分可以参考Zee, A. (2010). Quantum field theory in a nutshell. Princeton university press. 只需要第一章。

- (a) 假设股票价格为 $s(t)$ 。它满足随机微分方程：

$$\frac{ds(t)}{dt} = \phi s(t) + \sigma s R(t) \quad (57)$$

其中常数 ϕ 代表期待回报。常数 σ 代表市场波动。 $R(t)$ 为高斯噪声。

我们首先来探究在随机过程中微分有何不同。从导数的定义($\varepsilon \rightarrow 0$)出发，利用白噪声公式

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sigma^2 s^2 R^2 + O(1) = \frac{1}{\varepsilon} s^2 R^2 + O(1) \quad (58)$$

证明对于函数 $f(t, S(t))$,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 R^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \phi s \frac{\partial f}{\partial s} + \sigma s R \frac{\partial f}{\partial t} \quad (59)$$

- (b) 考虑一个投资组合 Π

$$\Pi = c - \frac{\partial c}{\partial s} s \quad (60)$$

求出 $\frac{d\Pi}{dt}$ 。

- (c) 上述投资组合不能套利要求有 $\frac{d\Pi}{dt} = r\Pi$ 。推导Black - Scholes公式：

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0 \quad (61)$$

这个方程不含 ϕ 说明了什么？

- (d) 下面的步骤是寻找一个力学系统使得它的运动方程为Black - Scholes公式。在上式中作欧拉变换 $s = e^x$, 得到Black - Scholes - Schrodinger方程:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = H_{BS}c \quad (62)$$

给出Black - Scholes哈密顿量的具体形式。它是厄米算符吗? 为什么?

- (e) 这个哈密顿量可以用来推导价格核(pricing kernel)。然后推导传播子。就是说, 我们要计算

$$p_{BS}(x, \tau | x') = \langle x | e^{-H_{BS}\tau} | x' \rangle \quad (63)$$

这可以用通常的方法完成。在上式中插入一组完备基 $\int \frac{dp}{2\pi} |p\rangle \langle p|$ 并考虑到 $\langle x | p \rangle = e^{ipx}$ 计算价格核并作图。

- (f) 一般的初值无非是价格核与初值的卷积。对于不同的初值计算含时演化并作图。
- (g) 考虑一个欧式看涨期权。这个期权的价格 s 如果小于给定的值 e^B 就会一文不值。我们考虑用哈密顿方法给出它的演化。相应的势垒函数是什么?
- (h) 完整的哈密顿量 $H = H_{BS} + V$ 。这时的价格核是什么? 数值模拟并作图。注意“波函数”在 $0 < x < B$ 为零。注意方程的边界条件。
- (i) 我们接下来自然要探究系统的拉格朗日量。这个拉格朗日量可以通过随机量子化的方法得到。

我们考虑一个稍微不同的系统(预期利率 $r(t)$), 满足郎之万方程:

$$\frac{dr}{dt} = a(r, t)r + \sigma(r, t)R(t) \quad (64)$$

其中 $R(t)$ 为白噪声。

证明, 系统的哈密顿量为:

$$H_F = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sigma^2(r) + a(r) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial a}{\partial r} \quad (65)$$

如果要考虑系统之前的状态, 我们定义 $H_B = H_F^\dagger$ 。二者相同吗?

- (j) 如果我们通过路径积分的方法，同时对白噪声和利率积分，二者的约束用泛函 δ 函数表示，我们有：

$$\begin{aligned} Z_B &= \int DR D\dot{r} \prod_{t=t_0}^T \delta \left[\frac{dr}{dt} - a(r, t) - \sigma(r, t)R(t) \right] e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^T R^2(t) dt} \\ &= \int D\dot{r} e^{S_B} \end{aligned}$$

计算 S_B 和相应的拉格朗日量。(提示：这个计算是trivial 的，但是你需要参考有关文献了解各符号的含义。)

- (k) 一个著名的严格可解模型是Vasicek模型。在这个模型中

$$\frac{dr}{dt} = a(b - r) + \sigma R(t) \quad r(t_0) = r_0 \quad t_0 < t < T \quad (66)$$

请写出作用量 S_V 。

- (l) 可以证明传播子 $P(t_0, T) = \frac{1}{Z} \int D\dot{r} e^{S_V} e^{-\int_{t_0}^T r(t) dt}$ 。定义传播时间 $\theta = T - t_0$,请证明

$$P(t_0, T) = A(\theta) e^{-B(\theta)r_0} \quad (67)$$

其中

$$\begin{aligned} B(\theta) &= \frac{1 - e^{-a\theta}}{a} \\ A(\theta) &= \exp \left[\left(\frac{\sigma^2}{2a^2} - b \right) (\theta - B(\theta)) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(\theta) \right] \end{aligned}$$