Projet

Le projet sera réalisé de manière individuelle. Il devra être déposé sur Moodle avant le 12 mai.

Le projet sera écrit en Python3 complété de routines provenant de numpy, scipy ou matplotlib. Le rendu consistera en une archive contenant des fichiers dans lesquels figure votre code source, ainsi qu'un fichier readme.txt expliquant comment se servir de votre code source, et complété éventuellement par des fichiers image (.png,.jpg,.pdf,...).

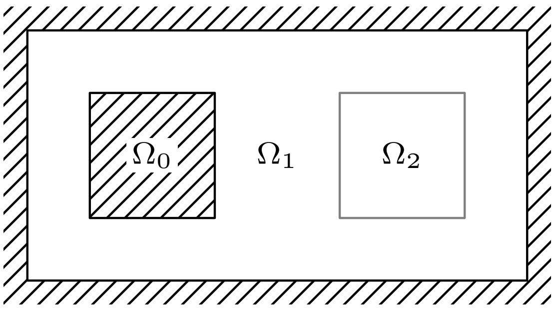
On attend que vous mettiez en place des tests de votre propre initiative pour vous assurer du bon fonctionnement de votre code et de sa conformité au cahier des charges imposé. Vous serez interrogés sur les tests mis en place. Pour les courbes, vous prendrez soin de faire apparaitre une légende et des graduations selon une police suffisamment grosse pour permettre une lecture sans effort.

Géométrie

Dans la suite on supposera que $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ sont trois domaines polygonaux connexes qui ne s'intersectent pas $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$ si $j \neq k$, et qui remplissent un rectangle

$$\begin{aligned} &\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\mathrm{R}} \quad \text{avec} \\ &\mathrm{R} :=]-1,+1[\times]-1/2,1/2[\end{aligned}$$

Le domaine de calcul que nous considérerons sera l'ouvert polygonal satisfaisant $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ ce qui implique en particulier que $\Omega = \mathrm{R} \setminus \overline{\Omega}_0$. On supposera également que $\partial\Omega_2 \cap \partial\mathrm{R} = \emptyset$ et $\partial\Omega_0 \cap \partial\mathrm{R} = \emptyset$. On a alors $\partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\mathrm{R}$. Un exemple d'une telle configuration géométrique est représentée sur la figure ci-dessous.



Pour traiter numériquement ce type de configuration, on considère un format de fichier de maillage légèrement modifié dans lequel, à la fin de chaque ligne représentant un élément on fait figurer un label valant j si l'élément est dans Ω_j. Ce format est décrit ci-dessous et on donne un exemple en appendice. Plusieurs fichiers de maillage de ce format intitulés `configxx.msh` avec `xx`=1,2,...sont à votre disposition avec l'archive du sujet de projet.

```
$Noeuds
nbr_vtx
num_vtx  x_coord y_coord
...

$FinNoeuds
$Elements
nbr_elt
num_elt  num_vtx1 num_vtx2 num_vtx3 label
...

$FinElements
```

Question 1)
Modifiez la fonction `LoadElt` de la question 1.3 du TP 2 de la manière suivante. Cette fonction prendra toujours en argument d'entrée un nom de fichier de maillage (au nouveau format amendé), et renverra en sortie le tableau `elt` (représentant les éléments) ainsi qu'un tableau d'entiers `label` de taille `nbr_elt` et telle que `label[j]=k` si l'élément `j` appartient à Ω_k.

Question 2)
Écrivez une fonction `PlotSubDomain` prenant en argument d'entrée le tableau des noeuds `vtx`, le tableau des triangles `elt`, et le tableau `label` de la question précédente, et qui affiche le domaine Ω avec Ω_1 en bleu et Ω_2 en rouge.

Question 3)
En présupposant la configuration géométrique décrite plus haut, écrivez une fonction `InnerBoundary` prenant en argument les tableaux `vtx` (noeuds) et `elt` (triangles de Ω) et renvoyant en sortie un tableau `Gamma0` représentant le bord intérieur $\partial\Omega_0$ dans lequel chaque arête du bord est représentée par une paire d'entiers (numéros des sommets des arêtes).

Problèmes aux limites

Question 4)
On note $1_{\Omega_2} : \Omega \to \mathbb{R}_+$ la fonction indicatrice de Ω_2 définie par $1_{\Omega_2}(\boldsymbol{x}) = 0$ pour $\boldsymbol{x} \in \Omega_1$

et $1_{\Omega_2}(\boldsymbol{x}) = 1$ pour $\boldsymbol{x} \in \Omega_2$. Calculez à la main et représentez graphiquement la solution exacte u_{EX} du problème suivant

$$\begin{aligned}
&\text{Trouvez } u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ such that}\\
&-\Delta u + 1_{\Omega_2} u = 1_{\Omega_2} \quad \text{dans } \ \Omega\\
&\partial_{\boldsymbol{n}} u = 0 \quad \text{sur } \partial \mathrm{R}\\
&\partial_{\boldsymbol{n}} u + u = 1 \quad \text{sur } \partial\Omega_0
\end{aligned} \tag{1}$$

Question 5)
Résolvez par éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange le problème (1) ci-dessus, dont on notera u_h la solution discrète, et représentez graphiquement la différence $u_{\text{EX}} - u_h$.

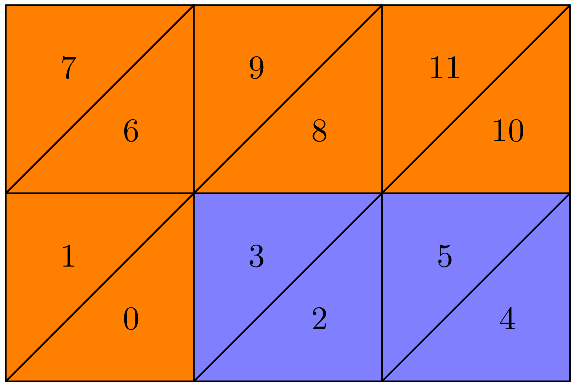
Question 6)
Calculez $\|u_{\text{EX}} - u_h\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$. Qu'est-ce qui explique un tel niveau d'erreur ?

Question 7)
Résolvez le problème suivant par éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange et représentez graphiquement la solution.

$$\begin{aligned}
&\text{Trouvez } u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ such that}\\
&-\Delta u + u = 1_{\Omega_2} \quad \text{dans } \ \Omega\\
&\partial_{\boldsymbol{n}} u = 0 \quad \text{sur } \partial \mathrm{R}\\
&\partial_{\boldsymbol{n}} u + u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_0
\end{aligned} \tag{2}$$

Annexe : format de maillage modifié

```
$Noeuds
12
0   0.0  0.0
1   1.0  0.0
2   2.0  0.0
3   3.0  0.0
4   0.0  1.0
5   1.0  1.0
6   2.0  1.0
7   3.0  1.0
8   0.0  2.0
9   1.0  2.0
10  2.0  2.0
11  3.0  2.0
$FinNoeuds
$Elements
12
0   0   1   5    1
1   0   5   4    1
2   1   2   6    2
3   1   6   5    2
4   2   3   7    2
5   2   7   6    2
6   4   5   9    1
7   4   9   8    1
8   5   6   10   1
9   5   10  9    1
10  6   7   11   1
11  6   11  10   1
$FinElements
```




```
vtx =
[[0.0,  0.0]
  [1.0,  0.0]
  [2.0,  0.0]
  [3.0,  0.0]
  [0.0,  1.0]
  [1.0,  1.0]
  [2.0,  1.0]
  [3.0,  1.0]
  [0.0,  2.0]
  [1.0,  2.0]
  [2.0,  2.0]
  [3.0,  2.0]]
```

```
elt =
[[0,  1,   5  ]
  [0,  5,   4  ]
  [1,  2,   6  ]
  [1,  6,   5  ]
  [2,  3,   7  ]
  [2,  7,   6  ]
  [4,  5,   9  ]
  [4,  9,   8  ]
  [5,  6,   10]
  [5,  10,  9  ]
  [6,  7,   11]
  [6,  11,  10]]
```

```
label = [1,1,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1]
```