

Rapport de Projet: Vibrato and Automatic Differentiation for
High Order Derivatives and Sensitivities of Financial Options (G.
Pagès, O. Pironneau, G. Sall)

Steven François
M2 Probabilités & Finance

Avril 2023

1 Résumé de l'article

1.1 Enjeux et Objectifs de la Méthode Vibrato

Dans l'industrie des produits dérivés, le calcul des sensibilités est une étape incontournable pour de multiples enjeux, pricing, hedging, régulation (Bale III), le problème est essentiellement le suivant : A partir d'un contrat $F(S_T)$ sur un sous-jacent S_t , son Prix est estimé à partir du coût de la réplication de ce dernier, qui lui-même est obtenu par le théorème fondamental de la réplication :

$$C_t(x) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[V(S_T) \middle| S_t = x \right] \quad (1)$$

mais le prix à lui seul est insuffisant, En effet, nous devons être capable d'avoir vendu l'option, de la répliquer, c'est à dire assurer quelque soit les variations du sous-jacent être en mesure de livrer le contrat sans faire faillite tout en proposant un prix attractif sur le marché en clair, une première sensibilité naturelle est d'étudier $\frac{\partial E^{\mathbb{P}}[V(S_T)]}{\partial S_t}$ appelée delta de l'option.

De manière générale, et comme dans l'esprit de l'article, nous désignerons les paramètres par θ_i , et l'objectif principal est d'être en mesure de calculer n'importe quelles sensibilités $\frac{\partial E^{\mathbb{P}}[V(S_T)]}{\partial \theta_i}$ sous des hypothèses d'existence voir des sensibilités d'ordre 2 (Gamma, Cross-GAMMA, Volga)

Il y'a cependant plusieurs contraintes lourdes qui persistent que nous résumons ici :

- La puissance de calcul : L'estimateur Monte carlo classique converge en \sqrt{n} , il est donc très coûteux pour une firme de calculer des sensibilités diverses sur des centaines de produits cotés avec une très grande précision.
- Pour des Options path dépendant, bien que la formule (1) reste valable, elle nécessite de connaître la loi du processus entier et non simplement à l'instant terminal (Cf barrier Options) Il est donc impossible d'utiliser un estimateur Monte carlo classique
- En finance, la régularité de la Fonction V est souvent un problème, en effet elle n'est souvent même pas différentiable une fois, même si sa sensibilité peut exister, il n'existe donc pas de formule fermée sous forme d'espérance pour la calculer explicitement

Avant de décrire le principe de la méthode vibrato pour le calcul des sensibilités, nous résumons rapidement quelques principales méthodes connues et utilisées en pratique.

Monte Carlo Bien qu'ayant les failles exposées plus haut, la méthode de Monte Carlo reste la plus populaire et utilisée, elle permet en outre d'obtenir des intervalles de confiance, Considérons un prix $\mathbb{E}[V(S(\theta))] = C_0$ où le sous-jacent S est supposé dépendre d'un paramètre de marché θ , Alors par la loi forte des grands nombres $\hat{C}_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(S(\theta)_i) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s} C_0$, Le TCL quant à lui fournit des intervalles de confiance pour la qualité de l'estimateur C_0 , il est ensuite possible d'obtenir les sensibilités voulu en utilisant la méthode des différences finies, nous recalculons les Prix monte carlo en faisant varier le paramètre voulu à l'aide d'une boucle, Cependant, en pratique cette pratique s'avère très imprécise en particulier sur les dérivés d'ordres supérieurs où le pas est souvent trop petit d'un point de vue numérique et fait diverger la méthode de différentiation. En outre, la simulation des $S(\theta)_i$ $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ nécessite l'indépendance de chaque trajectoire mais aussi de connaître la loi de S ce qui rend cette formule difficilement utilisable pour des options path dépendant.

Méthode des vraisemblances Supposons que nous voulons calculer $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \mathbb{E}[V(S(\theta))]$ et que nous connaissons la densité de $S(\theta)$ noté $p(\theta, y)$ nous obtenons :

$$\mathbb{E}[V(S(\theta))] = \int_{\mathbb{R}^d} V(y) p(\theta, y) dy \quad (2)$$

p étant une densité, elle est très souvent différentiable, le Payoff quant à lui étant fini, le théorème de dérivation sous le signe somme s'applique et nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} [\mathbb{E}[V(X(\theta))]] = \int_{\mathbb{R}^d} V(y) \frac{\partial \log p}{\partial \theta_i}(\theta, y) p(\theta, y) dy = \mathbb{E} \left[V(X(\theta)) \frac{\partial \log p}{\partial \theta_i}(\theta, X(\theta)) \right] \quad (3)$$

Cette réécriture de la sensibilité sous forme d'espérance nous ramène donc à la première méthode exposée. Cependant, en pratique (type modèle multifactorielles) la densité de S est inconnu.

La méthode de Malliavin pour le calcul de sensibilités est également abordée dans cet article, étant une méthode relativement compliquée d'un point de vue théorique mais aussi d'un point de vue implémentation (les poids de Malliavins étant dépendant de chaque Payoffs) nous avons choisi de ne pas traiter cette partie pour la simplicité de la synthèse.

Comme nous l'avons vu, il existe plusieurs méthodes pour le calcul de sensibilités, chacune ayant des avantages et inconvénient, La méthode Vibrato est une méthode combinant la méthode de Monte carlo et des vraisemblances, elle permet en outre de gommer les défauts des deux autres méthodes comme nous le verrons dans les Applications, son principe est examiné dans la partie suivante

1.2 Principe Théorique de la méthode Vibrato du premier ordre et principaux résultats de stabilités

Nous nous penchons en premier temps sur les Contrat européen, la méthodologie pour les options américaines étant un peu différente.

Soit Θ un sous-ensemble de \mathbb{R}^p . On considère les fonctions $b : \Theta \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \Theta \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times q}$ qui sont continues, localement Lipschitz en variable d'espace, et de croissance linéaire, uniformément sur l'ensemble $\theta \in \Theta$. Nous omettons la variable temps dans b et σ , uniquement pour simplifier. On suppose également que $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard q -dimensionnel défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$, Supposons que X est solution de la BDSE suivante :

$$dX_t = b(\theta, X_t) dt + \sigma(\theta, X_t) dW_t, \quad X_0 = x \quad (4)$$

ainsi que son schéma d'euler classique (a pas constant pour $n > 0$ $h = \frac{T}{n}$) défini par :

$$\bar{X}_k^n = \bar{X}_{k-1}^n + b(\theta, \bar{X}_{k-1}^n) h + \sigma(\theta, \bar{X}_{k-1}^n) \sqrt{h} Z_k, \quad \bar{X}_0 = x, \quad k = 1, \dots, n \quad (5)$$

Où $Z_k = \mathcal{N}(0, Id)$

en notant $\mu_{k-1} = \bar{X}_{k-1}^n + b(\theta, \bar{X}_{k-1}^n)$ et $\sigma_{k-1} = \sigma(\theta, \bar{X}_{k-1}^n) \sqrt{h} Z_k$ Nous obtenons un schéma défini par récurrence sur les \bar{X}_k^n , de plus en utilisant le fait que $W_{t_k^n} = \sqrt{h} Z_k + W_{t_{k-1}^n}$, il est clair que la filtration engendré par les $\mathcal{F}_k = \sigma(W_{t_\ell^n}, \ell = 0, \dots, k)$ coïncide avec $\sigma(X_{t_\ell^n}, \ell = 0, \dots, k)$

ces deux points permettent de justifier que \bar{X}_k^n Est une chaine de markov Homogène et d'obtenir que

$$\mathbb{E} [V(\bar{X}_n^n(\theta)) | \bar{X}_{n-1}^n] = \left\{ \mathbb{E}_x [V(\bar{X}_1^n(x, \theta))] \right\}_{|x=\bar{X}_{n-1}^n} = \left\{ \mathbb{E}[V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z)] \right\}_{\substack{\mu = \mu_{n-1}^{(\theta)} \\ \sigma = \sigma_{n-1}^{(\theta)}}} = \varphi(\mu_{n-1}, \sigma_{n-1}) \quad (6)$$

a partir de φ nous pouvons alors obtenir des sensibilités.

Pour la suite nous supposons $d = q = 1$ les écritures étant simplifiées mais le message final restant le même.

Par la règle de la chaîne nous avons :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i}(\mu_{n-1}, \sigma_{n-1}) = \frac{\partial \mu_{n-1}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(\mu_{n-1}, \sigma_{n-1}) + \frac{\partial \sigma_{n-1}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\mu_{n-1}, \sigma_{n-1}) \quad (7)$$

Nous Définissons ensuite le processus Tangent de X_t qui nous sera utile pour obtenir une formule implémentable.

$$dY_t = [b'_{\theta_i}(\theta, X_t) + b'_x(\theta, X_t) Y_t] dt + [\sigma'_{\theta_i}(\theta, X_t) + \sigma'_x(\theta, X_t) Y_t] dW_t, \quad Y_0 = \frac{\partial X_0}{\partial \theta_i}$$

Nous pouvons encore ici écrire son schéma d'euler associé :

$$\bar{Y}_{k+1}^n = [b'_{\theta_i}(\theta, \bar{X}_k^n) + b'_x(\theta, \bar{X}_k^n) \bar{Y}_k^n] h + [\sigma'_{\theta_i}(\theta, \bar{X}_k^n) + \sigma'_x(\theta, \bar{X}_k^n) \bar{Y}_k^n] \sqrt{h} Z_{k+1}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{n-1}}{\partial \theta_i} &= \bar{Y}_{n-1}^n(\theta) + h [b'_{\theta_i}(\theta, \bar{X}_{n-1}^n(\theta)) + b'_x(\theta, \bar{X}_{n-1}^n(\theta)) \bar{Y}_{n-1}^n(\theta)] \\ \frac{\partial \sigma_{n-1}}{\partial \theta_i} &= \sqrt{h} [\sigma'_{\theta_i}(\theta, X_{n-1}^n(\theta)) + \sigma'_x(\theta, X_{n-1}^n(\theta)) Y_{n-1}^n(\theta)]. \end{aligned}$$

En résumé nous avons discretisé X_t ainsi que son processus Tangent pour être en mesure de pouvoir calculer les dérivés partielles de μ et σ

enfin μ et σ étant constant sur chaque sous intervalles de discrétisation, X_{tk} sachant $X_{t(k-1)}$ est un processus gaussien, sa probabilité de transition est alors donnée par $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$,

Nous pouvons alors utiliser la méthode de vraisemblance en utilisant la densité $p(x)$.

La symétrie de la loi conditionnelle de X_{tk} permet alors d'obtenir une formule efficace en terme de variance par la méthode antithétique qui se résume alors par :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \mathbb{E}[V(\bar{X}_n^n(\theta))] = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\frac{\partial \mu}{\partial \theta_i} \mathbb{E} \left[(V(\mu + \sigma\sqrt{h}Z) - V(\mu - \sigma\sqrt{h}Z)) \frac{Z}{\sigma\sqrt{h}} \right] \middle| \begin{matrix} \mu = \mu_{n-1}^{(\theta)} \\ \sigma = \sigma_{n-1}(\theta) \end{matrix} \right] + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta_i} \mathbb{E} \left[(V(\mu + \sigma\sqrt{h}Z) - 2V(\mu) + V(\mu - \sigma\sqrt{h}Z)) \frac{Z}{\sigma\sqrt{h}} \right] \quad (8)$$

A partir de cette approche, nous pouvons énoncer quelques résultats importants sur la régularité de la méthode, et son avantage par rapport à des méthodes de différentiations automatique.

En premier supposons que l'on repart de la formule (6), la symétrie de la loi normale permet d'affirmer que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(\mu, \sigma) = \mathbb{E} \left[f(\mu + \sigma\sqrt{h}Z) \frac{Z}{\sigma\sqrt{h}} \right] = \mathbb{E} \left[(f(\mu + \sigma\sqrt{h}Z) - f(\mu - \sigma\sqrt{h}Z)) \frac{Z}{2\sigma\sqrt{h}} \right] \quad (9)$$

En supposant f Lipschitz nous pouvons ensuite obtenir un contrôle de la variance, d'une part en majorant brutalement la variance par son moment d'ordre 2, puis par l'inégalité triangulaire et en utilisant les moments d'une loi normale nous obtenons que :

$$\text{Var} \left[(f(\mu + \sigma\sqrt{h}Z) - f(\mu - \sigma\sqrt{h}Z)) \frac{Z}{2\sigma\sqrt{h}} \right] \leq [f]_{\text{Lip}}^2 \mathbb{E} \left[\frac{(2\sigma\sqrt{h}Z)^2}{4\sigma^2 h} Z^2 \right] = [f]_{\text{Lip}}^2 \mathbb{E}[Z^4] = 3[f]_{\text{Lip}}^2 \quad (10)$$

Nous pouvons encore affiner ce résultat avec des hyppothèse plus forte notamment si on suppose f' lipzitch ou a croissance polynomiale.

Nous pouvons ensuite regarder le cas ou le Payoff est une fonction indicatrice , comme bien souvent le cas en finance, la dérivé n'existant pas au sens propre , nous procédons autrement :

supposons alors que f est de la forme : $f(x) = \mathbf{1}_{\{x \leq K\}}$

En utilisant le fait que :

$$\mathbf{1}_{\left\{Z \leq \frac{K-\mu}{\sigma\sqrt{h}}\right\}} - \mathbf{1}_{\left\{Z \geq \frac{\mu-K}{\sigma\sqrt{h}}\right\}} = \mathbf{1}_{\left\{Z \notin \left[\frac{K-\mu}{\sigma\sqrt{h}}, \frac{\mu-K}{\sigma\sqrt{h}}\right]\right\}} \quad (11)$$

Il vient :

$$\left| (f(\mu + \sigma\sqrt{h}Z) - f(\mu - \sigma\sqrt{h}Z)) \frac{Z}{\sigma\sqrt{h}} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{h}} |Z| \mathbf{1}_{\left\{Z \notin \left[\frac{K-\mu}{\sigma\sqrt{h}}, \frac{\mu-K}{\sigma\sqrt{h}}\right]\right\}} \quad (12)$$

ainsi , en moajorant la variance par le moment d'ordre 2 , utilisant cauchy schwartz sur le moment d'ordre deux nous obtenons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| (f(\mu + \sigma\sqrt{h}Z) - f(\mu - \sigma\sqrt{h}Z)) \frac{Z}{\sigma\sqrt{h}} \right|^2 \right] &= \frac{1}{2\sigma^2 h} \mathbb{E} \left[Z^2 |f(\mu + \sigma\sqrt{h}Z) - f(\mu - \sigma\sqrt{h}Z)|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\sigma^2 h} \mathbb{E} \left[Z^2 \mathbf{1}_{\left\{Z \notin \left[\frac{K-\mu}{\sigma\sqrt{h}}, \frac{\mu-K}{\sigma\sqrt{h}}\right]\right\}} \right] \\ &\leq \frac{1}{2\sigma^2 h} (\mathbb{E} [Z^4])^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{P} \left(Z \notin \left[\frac{K-\mu}{\sigma\sqrt{h}}, \frac{\mu-K}{\sigma\sqrt{h}} \right] \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2\sigma^2 h} \left(2\mathbb{P} \left(Z \geq \frac{\mu-K}{\sigma\sqrt{h}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (13)$$

Une intégration par partie permet de majorer

$$\mathbb{P} \left(Z \geq \frac{\mu-K}{\sigma\sqrt{h}} \right) = \int_{\frac{\mu-K}{\sigma\sqrt{h}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \quad (14)$$

et nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[(f(\mu + \sigma\sqrt{h}Z) - f(\mu - \sigma\sqrt{h}Z)) \frac{Z}{\sigma\sqrt{h}} \right] &\leq \frac{1}{\sigma^2 h} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{e^{-\frac{(\mu-K)^2}{4\sigma^2 h}}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\mu-K}{\sigma\sqrt{h}}}} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sigma^{\frac{3}{2}} h^{\frac{3}{4}}} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{e^{-\frac{(\mu-K)^2}{4\sigma^2 h}}}{\sqrt{\mu-K}} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq K \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Ainsi même pour des payoffs non differentiable , on obtient un controle de la variance grace a la méthode antithétique, ce qui justifie l'intérêt de cette méthode.

1.3 Vibrato Ordres supérieurs

Dans cette partie nous résumons le principe pour obtenir des sensisibilités d'ordres 2 et plus, les calculs étant plus lourd nous résumons l'article de manière plus courte.

Il y'a deux moments de calculer une sensibilité d'ordre 2 en utilisant Vibrato , la premiere consiste a appliquer Vibrato une seconde fois après avoir calculé notre sensibilité d'ordre 1, la seconde consiste à appliquer une méthode de différenciation automatique après avoir calculé notre sensibilité d'ordre 1, nous résumons ces deux approches dans cette partie.

Commençons par la différenciation automatique appliqué a Vibrato d'ordre 1, Si l'on se donne un autre paramètre , alors nous avons (après calculs détaillé dans l'article) par la règle de la chaine que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \mathbb{E}[V(X_T)] = & \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial \theta^2} \mathbb{E} \left[V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z) \frac{Z}{\sigma \sqrt{h}} \right] \right. \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \mathbb{E} \left[\frac{\partial V}{\partial \theta} (\mu + \sigma \sqrt{h} Z) \frac{Z}{\sigma \sqrt{h}} + V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z) Z \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{h}} \right) \right] \\ & + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \mathbb{E} \left[\frac{\partial V}{\partial \theta} (\mu + \sigma \sqrt{h} Z) \frac{Z^2 - 1}{\sigma \sqrt{h}} + V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z) (Z^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{h}} \right) \right] \\ & \left. + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} \mathbb{E} \left[V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z) \frac{Z^2 - 1}{\sigma \sqrt{h}} \right] \right] \end{aligned} \quad (16)$$

les termes de la forme $\mathbb{E} \left[f(Z) \frac{\partial}{\partial \theta} V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z) \right]$ peuvent être calculés par un calcul que nous n'avons malheureusement pas réussi à justifier et nous obtenons alors pour une sensibilité d'ordre 2 unidimensionnelle tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \mathbb{E}[V(X_T)] = & \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial \theta^2} \mathbb{E} \left[V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z) \frac{Z}{\sigma \sqrt{h}} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \mathbb{E} \left[V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z) \left\{ \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} Z \right) \left(\frac{Z^2 - 1}{\sigma^2 h} \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \left(\frac{2Z}{\sigma^2 h} \right) \right\} \right] + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \mathbb{E} \left[V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z) \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} Z \right) \left\{ \left(-\frac{2Z}{\sigma^2 h} + \frac{Z(Z^2 - 1)}{\sigma^2 h} \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \left(\frac{2Z^2 - 2}{\sigma^2 h} \right) \right\} \right] + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} \mathbb{E} \left[V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z) \frac{Z^2 - 1}{\sigma \sqrt{h}} \right] \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Une approche similaire est fourni dans l'article pour les dérivés croisés , elle est essentiellement plus calculatoire mais l'esprit reste le même : dériver sous l'esperance et obtenir des formules a la main grace a la densité de Z

Une procédure de réduction de variance est ici encore possible mais nous ne la détaillerons pas pour la lisibilité de l'article.

Abordons maintenant le cas plus intéressant, appliquer vibrato une seconde fois a vibrato ordre 1 :

En utilisant la méthode de vraisemblance sur les dérivés d'ordre 2 , nous obtenons premierement que :

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \mathbb{E}[V(X_T)] = \mathbb{E} \left[V(x) \left(\frac{\partial^2 \ln p}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial \ln p}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln p}{\partial \theta_j} \right) \right] \quad (18)$$

En developpant ce calcul et en écrivant le schéma d'euler associé a X_T , le problème devient essentiellement le calcul de $\frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \mu_{n-1}(\theta_1, \theta_2)$ et $\frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \sigma_{n-1}(\theta_1, \theta_2)$

Pour se faire , on introduit le processus tangeant d'ordre 2 par :

$$\begin{aligned}
dY_t^{(ij)} = & \left[b''_{\theta_i \theta_j}(\theta_1, \theta_2, X_t) + b''_{\theta_i, x}(\theta_1, \theta_2, X_t) Y_t^{(j)} + b''_{\theta_j, x}(\theta_1, \theta_2, X_t) Y_t^{(i)} \right. \\
& + b''_{x^2}(\theta_1, \theta_2, X_t) Y_t^{(i)} Y_t^{(j)} + b'_x(\theta_1, \theta_2, X_t) Y_t^{(ij)} \Big] dt \\
& + \left[\sigma''_{\theta_i \theta_j}(\theta_1, \theta_2, X_t) + \sigma''_{\theta_i, x}(\theta_1, \theta_2, X_t) Y_t^{(j)} + \sigma''_{\theta_j, x}(\theta_1, \theta_2, X_t) Y_t^{(i)} \right. \\
& + \sigma''_{x^2}(\theta_1, \theta_2, X_t) Y_t^{(i)} Y_t^{(j)} + \sigma'_x(\theta_1, \theta_2, X_t) Y_t^{(ij)} \Big] dW_t.
\end{aligned} \tag{19}$$

puis en répétant la procédure Vibrato du premier ordre, nous obtenons alors que :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \mathbb{E}[V(X_T)] = \\
& \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial \theta^2} \mathbb{E} \left[V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z) \frac{Z}{\sigma \sqrt{h}} \right] + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right)^2 \mathbb{E} \left[V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z) \frac{Z^2 - 1}{\sigma^2 h} \right] + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right)^2 \mathbb{E}[V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z)] \right. \\
& \left. \frac{Z^4 - 5Z^2 + 2}{\sigma^2 h} \right] + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} \mathbb{E} \left[V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z) \frac{Z^2 - 1}{\sigma \sqrt{h}} \right] + 2 \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \mathbb{E} \left[V(\mu + \sigma \sqrt{h} Z) \frac{Z^3 - 3Z}{\sigma^2 h} \right] \Big]
\end{aligned} \tag{20}$$

Remarque On peut remarquer que cette formule coincide avec la méthode précédente qui consiste à utiliser une procédure de différentiation automatique sur Vibrato Premier ordre.

2 Applications

2.1 Option européenne dans un modèle Black & Scholes uni-dimensionnel

2.1.1 VAD & Vibrato d'ordre deux

L'algorithme pour appliquer VAD pour le calcul des dérivées du second ordre dans le modèle Black & Scholes pour une option européenne est comme suit. À noter que pour simplifier les notations, vu qu'aucune confusion n'est possible, on note X les valeurs simulées pour le sous-jacent et Y pour les processus tangents.

1. On génère M paths avec le pas $h := T/n$, où T est la maturité de l'option et n le nombre de pas, pour l'underlying X et le processus tangent Y , avec le schéma d'Euler suivant

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + rhX_k + X_k \sigma \sqrt{h} Z_{k+1} \\ Y_{k+1} = Y_k + rhY_k + \partial_\theta(rh)X_k + \left(Y_k \sigma \sqrt{h} + \partial_\theta(\sigma \sqrt{h})X_k \right) Z_{k+1}, \end{cases} \tag{21}$$

avec $Y_0 = \partial_\theta X_0$, i.e. $Y_0 = 1$ si $\theta = x$, le spot initial, et $Y_0 = 0$ sinon. Dessus, on a $(Z_k^i)_{1 \leq k \leq n-1, 1 \leq i \leq M}$, ou les i correspondent au numéro de path, une famille de gaussiennes indépendantes centrées réduites.

2. Pour chaque path $i \in \{1, \dots, M\}$, on fait (en implicitant l'indice i):

a) On génère M_Z valeurs terminales $X_T^j = X_n^j$, $j \in \{1, \dots, M_Z\}$

$$X_n^j = X_{n-1}^j (1 + rh + \sigma \sqrt{h} Z_n^j), \tag{22}$$

avec $Z_n^1, \dots, Z_n^{M_Z}$ des v.a. gaussiennes centrées réduites indépendantes.

b) Pour chacune des M_Z sous-path de la path i , on calcule la dérivée correspondante par rapport au paramètre θ avec la formule Vibrato, ici avec utilisation de variable antithétique,

$$\partial_\theta V_T = \partial_\theta \mu_{n-1} \frac{1}{2} (V_{T,+} - V_{T,-}) \frac{Z_n}{X_{n-1} \sigma \sqrt{h}} + \partial_\theta \sigma_{n-1} \frac{1}{2} (V_{T,+} + V_{T,-} - 2V_{T,\cdot}) \frac{Z_n^2 - 1}{X_{n-1} \sigma \sqrt{h}} \tag{23}$$

avec $V_{T,\pm} = (X_{T,\pm} - K)_+$, où

$$\begin{cases} X_{T,\pm} = X_{n-1}(1 + rh \pm \sigma\sqrt{h}Z_n) \\ X_{T,\cdot} = X_{n-1}(1 + rh) \end{cases} \quad (24)$$

et

$$\begin{cases} \partial_\theta \mu_{n-1} = Y_{n-1}(1 + rh) + X_{n-1}\partial_\theta(rh) \\ \partial_\sigma \mu_{n-1} = Y_{n-1}\sigma\sqrt{h} + X_{n-1}\partial_\theta(\sigma\sqrt{h}) \end{cases} \quad (25)$$

- c) Appliquer une méthode de différentiation automatique à [23](#) afin d'obtenir la dérivée seconde.
- d) Calculer la moyenne des M_Z valeurs obtenues pour la path i

3. Calculer la moyenne empirique des valeurs obtenues pour les M paths.

Remark 1. Dans notre implémentation, afin de diminuer le temps de calcul, tout a été vectorisé et la différentiation automatique a été repoussée en quatrième étape sur la dérivée première obtenue par monte carlo. Si cela permet d'améliorer le temps de calcul, malheureusement nous n'avons du coup pas pu obtenir d'intervalles de confiance pour les dérivées secondes calculées par VAD.

En plus de la méthode VAD, nous avons aussi calculer le Gamma de l'option avec la méthode vibrato du second ordre. Pour Vibrato à l'ordre deux, on a les processus tangents suivants (avec la notation $Y_t^{ij} := \frac{d^2}{d\theta_i d\theta_j} X_t(\theta_i, \theta_j)$):

$$\begin{cases} Y_t^{xx} = rY_t^{xx}dt + \sigma Y_t^{xx}dW_t, Y_0^{xx} = 0 \\ Y_t^{\sigma\sigma} = rY_t^{\sigma\sigma}dt + (2Y_t^\sigma + \sigma Y_t^{\sigma\sigma})dW_t, Y_0^{\sigma\sigma} = 0 \\ Y_t^{\sigma x} = rY_t^{\sigma x} + (Y_t^x + \sigma Y_t^{\sigma x})dW_t, Y_0^{\sigma x} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

On voit notamment que le processus Y^{xx} est constant égal à zéro. On a de plus les dérivées partielles suivantes pour les termes μ_{n-1} et σ_{n-1}

$$\begin{cases} \partial_x \mu_{n-1} = Y_{n-1}^x(1 + rh), \partial_x \sigma_{n-1} = Y_{n-1}^x\sigma\sqrt{h} \\ \partial_\sigma \mu_{n-1} = Y_{n-1}^\sigma(1 + rh), \partial_\sigma \sigma_{n-1} = Y_{n-1}^\sigma\sigma\sqrt{h} + X_{n-1}\sqrt{h} \\ \partial_{xx} \mu_{n-1} = Y_{n-1}^{xx}(1 + rh) = 0, \partial_{xx} \sigma_{n-1} = Y_{n-1}^{xx}\sigma\sqrt{h} = 0 \\ \partial_{\sigma\sigma} \mu_{n-1} = Y_{n-1}^{\sigma\sigma}(1 + rh), \partial_{\sigma\sigma} \sigma_{n-1} = Y_{n-1}^{\sigma\sigma}\sigma\sqrt{h} + 2Y_{n-1}^\sigma\sqrt{h} \\ \partial_{\sigma x} \mu_{n-1} = Y_{n-1}^{\sigma x}(1 + rh), \partial_{\sigma x} \sigma_{n-1} = Y_{n-1}^{\sigma x}\sigma\sqrt{h} + Y_{n-1}^x\sqrt{h} \end{cases} \quad (27)$$

On utilise alors une méthode de Monte Carlo en faisant la moyenne empirique des quantités (nous n'avons pas implémenté de méthode antithétique ici):

$$\partial_{ij} V_T = \partial_{ij} \mu_{n-1} V_T \frac{Z_n}{\sigma\sqrt{h}} + \partial_i \mu_{n-1} \partial_j \mu_{n-1} V_T \frac{Z_n^2 - 1}{\sigma^2 h} + \partial_i \sigma_{n-1} \partial_j \sigma_{n-1} V_T \frac{Z_n^4 - 5Z_n^2 + 2}{\sigma^2 h} \quad (28)$$

$$+ \partial_{ij} \sigma_{n-1} V_T \frac{Z_n^2 - 1}{\sigma\sqrt{h}} + (\partial_i \mu_{n-1} \partial_j \sigma_{n-1} + \partial_j \mu_{n-1} \partial_i \sigma_{n-1}) V_T \frac{Z_n^3 - 3Z_n}{\sigma^2 h} \quad (29)$$

avec ici pour simplifier l'écriture $\sigma := \sigma X_{n-1}$.

Remark 2. Bien sûr, afin d'avoir les greeks, il faut ensuite multiplier le résultat obtenu dans l'algorithme par $\exp(-rT)$.

2.1.2 Tests de la méthode

Afin de tester à la fois la méthode VAD du papier et le vibrato du second ordre, nous les avons comparés à la méthode de calcul des Greeks par différences finies et Monte Carlo sur un call européen avec une dynamique Black & Scholes.

Les paramètres utilisés sont les suivants: $K = 100$, $\sigma = 20\%$, $r = 5\%$, $n = 20$, $T = 1$. Pour le spot, nous avons testé à la fois ATM ($S = 100$), OTM ($S = 90$) et ITM ($S = 110$). Nous avons également testé la méthode VAD avec et sans variable antithétique afin de mesurer la réduction de variance. Nous avons aussi essayé avec $M_Z = 1, 2$. Pour la méthodes par différences finies, le bump est $\varepsilon = 0.0001$ Les résultats ATM sont présentés dans la table 1. A noter que lorsque nous implémentons une méthode avec et sans variable antithétique, nous ne réécrivons pas le temps de calcul qui est à peu près équivalent à celui de l'autre méthode. Aussi, pour VAD et Full vibrato, nous ne rapportons pas le temps de calcul du prix puisqu'il est identique à celui de la méthode par différence finies (monte carlo simple). De plus, pour la méthode utilisant Vibrato du second ordre pour le Gamma, on ne rapporte que les résultats liés au Gamma, puisque ceux liés au delta et au prix sont identiques à VAD.

On peut remarquer que pour le cas ATM, toutes les méthodes, à part le VAD sans variable antithétique semblent calculer un delta correct, dans le sens où la vraie valeur est dans l'intervalle de confiance Monte Carlo. Pour le Gamma, on voit que la méthode VAD approxime correctement celui-ci. Cependant, la méthode vibrato du second ordre rend un Gamma trop élevé. Si la méthode FD renvoie des deltas correct, les résultats sur le Gamma illustrent l'instabilité de cette méthode. En effet, avec antithétique, nous avons un Gamma trop élevé, et sans antithétique, celui-ci était de l'ordre de 10^{-8} . De plus, selon le choix du bump, nous arrivions à des Gamma de l'ordre de plusieurs milliers, montrant là toute l'instabilité de cette méthode et donc l'intérêt du VAD.

Pour ce qui est de la variance, les méthodes avec variable antithétique réduisent bien celle-ci, en effet on passe de 2.85 de variance à 1.67 en utilisant la variable antithétique dans le VAD

Pour le temps de calcul, on voit que la méthode VAD permet de diviser par deux le temps de calcul pour le delta par rapport à FD. Cependant, pour le calcul du Gamma, notre manque de maîtrise des outils de différentiation automatique nous donne des temps de calcul beaucoup plus longs avec VAD.

Les résultats OTM sont rapportés dans la table 2, ceux ITM dans la table 3. Nous ne rapportons pas à nouveau les temps de calcul qui sont identiques aux méthodes correspondantes dans le cas ATM.

On peut voir que dans le cas OTM, la méthode VAD donne des résultats beaucoup plus cohérents que la méthode FD. Cela est notamment dû au problème du choix du bump. Sûrement que pour un autre niveau de bump pour FD les résultats seraient plus proches de la réalité. On peut remarquer que la méthode VAD donne également des résultats cohérents dans le cas ITM, illustrant sa robustesse. Ici, on peut de plus noter que la méthode Vib (vibrato d'ordre deux) donne des résultats cohérents dans les cas ITM et OTM, alors qu'elle donnait un Gamma trop élevé dans le cas ATM.

Method:	Price				Delta				Gamma			
	Mean	Var	IC Size	Time	Mean	Var	IC Size	Time	Mean	Var	IC Size	Time
BS	10.4506	/	/	/	0.6368	/	/	/	0.0188	/	/	/
FDAnti	10.4358	200.1929	0.1754	0.0790	0.6375	0.2946	0.0067	0.1609	0.0286	54.0349	0.0911	0.2279
FD	10.4209	214.4514	0.1816	/	0.6368	0.3317	0.0072	/	0.	0.	0.	0.
VadAnti	10.4778	200.0261	0.1753	/	0.6428	1.6715	0.0160	0.0386	0.0186	/	/	1.7643
VadAnti2	10.4372	198.7163	0.1751	/	0.6377	0.9574	0.0121	0.0790	0.0187	/	/	1.9251
Vad	10.4320	212.4292	0.1807	/	0.6795	2.8479	0.021	/	0.180	/	/	/
Vib	/	/	/	/	/	/	/	/	0.0260	2.42	0.0197	0.0810

Table 1: Price, delta and Gamma for a European Call ATM with several methods. For each quantity we report the mean, the variance, the confidence interval size and the time of computation. The methods are: BS (BS formula), FDAnti (Finite difference with antithetic variate in Monte Carlo), FD (Finite difference), VadAnti (VAD with Antithetic variate), VadAnti2 (VAD with antithetic variate and $m_Z = 2$), Vad (VAD), Vib (using second order vibrato for the Gamma).

Method:	Price				Delta				Gamma			
	Mean	Var	IC Size	Time	Mean	Var	IC Size	Time	Mean	Var	IC Size	Time
BS	5.0912	/	/	/	0.4298	/	/	/	0.0218	/	/	/
FDAnti	4.5192	23.2287	0.0598	/	0.4517	0.0666	0.0032	0./	0.0190	18.4971	0.0533	/
VadAnti	5.077	93.2431	0.1197	/	0.4355	1.2313	0.0138	0.0386	0.0220	/	/	/
Vib	/	/	/	/	/	/	/	/	0.0244	0.0430	0.0026	/

Table 2: Price, delta and Gamma for a European Call OTM with several methods. For each quantity we report the mean, the variance, the confidence interval size and the time of computation. The methods are: BS (BS formula), FDAnti (Finite difference with antithetic variate in Monte Carlo), VadAnti (VAD with Antithetic variate), Vib (using second order vibrato for the Gamma).

Method:	Price				Delta				Gamma			
	Mean	Var	IC Size	Time	Mean	Var	IC Size	Time	Mean	Var	IC Size	Time
BS	17.6630	/	/	/	0.7956	/	/	/	0.0129	/	/	/
FDAnti	17.713	22.0555	0.0582	/	0.4517	0.0666	0.0023	/	0.	0.	0.	/
VadAnti	17.7075	333.6004	0.2264	/	0.7933	1.8671	0.0169	/	0.0127	/	/	/
Vib	/	/	/	/	/	/	/	/	0.0112	0.0610	0.0031	/

Table 3: Price, delta and Gamma for a European Call ITM with several methods. For each quantity we report the mean, the variance, the confidence interval size and the time of computation. The methods are: BS (BS formula), FDAnti (Finite difference with antithetic variate in Monte Carlo), VadAnti (VAD with Antithetic variate), Vib (using second order vibrato for the Gamma).

2.2 Option européenne dans un modèle de Heston uni-dimensionnel

2.2.1 VAD pour le modèle Heston

Dans le cadre du modèle Heston, nous n'avons pas implémenté le vibrato à l'ordre 2, mais seulement le VAD. Nous utilisons ici les notations suivantes pour le modèle de Heston

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sqrt{\nu_t} X_t dW_t^1 \\ d\nu_t = \kappa(\eta - \nu_t)dt + \xi \sqrt{\nu_t} dW_t^2 \end{cases} \quad (30)$$

où W^1 et W^2 sont des mouvements Browniens tels que $\mathbb{E}[dW_t^1 dW_t^2] = \rho dt$, avec $\rho \in]-1, 1[$.

L'algorithme est exactement le même que dans le cadre du modèle Black & Scholes, sauf que le schéma implémenté est ici le suivant (avec Y le processus tangent par rapport au spot de départ)

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + rhX_k + X_k \sqrt{\nu_k} \sqrt{h} \bar{Z}_{k+1}^1 \\ Y_{k+1} = Y_k + rhY_k + Y_k \sqrt{\nu_k} \sqrt{h} \bar{Z}_{k+1}^1 \\ \nu_{k+1} = \nu_k + \kappa(\eta - \nu_k)h + \xi \sqrt{\nu_k} \sqrt{h} \bar{Z}_{k+1}^2, \end{cases} \quad (31)$$

avec

$$\begin{pmatrix} \bar{Z}^1 \\ \bar{Z}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^1 \\ Z^2 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

où $(Z_k^1, Z_k^2)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite de variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, I_2)$.

La formule pour le delta par vibrato est alors identique à celle du cas Black & Scholes, à condition de remplacer σ par ν_{n-1} .

2.2.2 Test de la méthode

Afin de tester la méthode VAD sur le modèle Heston, nous avons comparé celle-ci à une méthode par différences finies et Monte Carlo. Les paramètres choisis pour l'implémentation sont les suivants. Ceux déjà utilisés pour le modèle Black & Scholes sont comme dans la section précédente, à la différence qu'ici $n = 10$. Le spot est ici fixé à 100. Pour les paramètres Heston, nous avons choisi $\xi = 0.01$, $\eta = 0.101$, $\kappa = 2.93$, $\rho = 0.4$, $\nu_0 = 2.8\%$.

Les résultats obtenus sont présentés dans la table 4. On peut remarquer que notre implémentation du Vibrato pour le modèle d'Heston semble présenter une erreur dans le sens où le prix est nettement supérieur à celui obtenu par différences finies. On voit tout de même qu'au moins la méthode VAD nous renvoie un gamma alors que la méthode par différence finies renvoie encore un Gamma de l'ordre de 10^{-6} . De plus, le temps de calcul pour le delta est largement plus faible avec la méthode VAD, illustrant son intérêt d'un point de vue computationnel.

Method:	Price				Delta				Gamma			
	Mean	Var	IC Size	Time	Mean	Var	IC Size	Time	Mean	Var	IC Size	Time
FDAnti	12.7195	296.3712	0.2134	0.0820	0.6300	0.2989	0.068	0.1660	0.	0.	0.	0.2327
VadAnti	21.3850	481.0815	0.2719	/	0.7223	1.253	0.0169	0.0162	0.092	/	/	0.7338

Table 4: Price, delta and Gamma for a European Call ATM on a Heston asset with several methods. For each quantity we report the mean, the variance, the confidence interval size and the time of computation. The methods are: FDAnti (Finite difference with antithetic variate in Monte Carlo), VadAnti (VAD with Antithetic variate).

2.3 Option Américaine dans un modèle Black & Scholes uni-dimensionnel

2.3.1 VAD dans le cadre de Longstaff Schwartz

Ici, le principe pour appliquer la méthode VAD est très simple. Il suffit de faire un algorithme de type Longstaff-Schwartz, en calculant à chaque time step la Greeks souhaitée par VAD, par exemple le Gamma. Puis, pour les paths où nous updatons la fonction valeur, nous updatons en même temps le Gamma à celui de la time step correspondant à la date d'exercice optimale pour cette path. Ici, nous avons choisi d'approximer la fonction de continuation en utilisant une base polynomiale, de telle sorte que celle-ci soit de la forme:

$$\bar{C}_{k+1}(X_k) = \sum_{p=0}^m \alpha_{k,p} X_k^p, \quad (33)$$

avec m la troncature choisie pour la base polynomiale. On a alors de manière récursive à chaque time step en partant de $n - 1$ jusqu'à 1, $\forall i \in \{1, \dots, M\}$:

$$\begin{cases} V_k^i = \bar{V}_k^i, \Gamma_k^i = \bar{\Gamma}_k, & \text{si } \bar{V}_k^i \geq \bar{C}_{k+1}(X_k^i) \\ V_k^i = e^{-rh} V_{k+1}^i, \Gamma_k^i = e^{-rh} \Gamma_{k+1}^i & \text{sinon.} \end{cases} \quad (34)$$

avec V_k^i le payoff à la time step k pour la path i , et $\bar{\Gamma}_k$ le Gamma de l'option si elle était européenne de maturité la time step k .

2.3.2 Test de la méthode

Nous avons ici fait le choix de tester la méthode sur un Call américain. L'idée derrière est de pouvoir comparer les résultats aux vraies valeurs, qui sont celles d'un call européen donc. Nous avons implémenté ici par différences finies et par VAD. Les résultats obtenus sont détaillés dans la table 5. Au niveau des paramètres, nous faisons une approximation grossière d'une option américaine dans le sens où $T = 1$, mais $n = 10$. Nous avons choisi d'utiliser $m = 5$ pour la base polynomiale, $M = 100000$, et les autres paramètres correspondent au cas du call ATM de la section 2.1.2. Nous avons également testé les cas ITM et OTM, mais les résultats sont sans grand intérêt et ne sont pas présentés ici. Ils sont néanmoins présents dans le notebook sous forme de markdown. A noter que nous n'avons pas implémenté le delta par VAD ici, mais seulement le Gamma.

Au niveau des résultats, on peut voir que le Gamma calculé par VAD est bien proche de la vraie valeur, alors que par différence finies nous obtenions un Gamma de l'ordre de 2000, ce qui est complètement déraisonnable. Il est cependant dommage de ne pas avoir pu obtenir d'intervalle de confiance pour le Gamma par VAD, cela nous aurait permis de confirmer si oui où non la vraie valeur du Gamma se trouve dans cet intervalle.

Au niveau de la complexité, les commentaires sont identiques à ceux des autres produits étudiés, et donc sans grand intérêt puisque l'implémentation ici est simplement une utilisation récursive des méthodes dans le cas européen.

Method:	Price				Delta				Gamma			
	Mean	Var	IC Size	Time	Mean	Var	IC Size	Time	Mean	Var	IC Size	Time
BS	10.4506	/	/	/	0.6368	/	/	/	0.0188	/	/	/
FDAnti	10.213	189.7387	1708	22.32	0.8433	0.1193	0.0043	55.72	/	/	/	/
VadAnti	10.0402	166.9155	0.1601	/	/	/	/	/	0.0197	/	/	/

Table 5: Price, delta and Gamma for an American Call ATM with several methods. For each quantity we report the mean, the variance, the confidence interval size and the time of computation. The methods are: BS (BS formula), FDAnti (Finite difference with antithetic variate in Monte Carlo), VadAnti (VAD with Antithetic variate), Vib (using second order vibrato for the Gamma).

2.4 Option Européenne dans un modèle Black & Scholes multi-dimensionnel

2.4.1 Vad pour Black & Scholes multidimensionnel

Remark 3. L'article original présente plusieurs erreurs de notation dans la partie correspondante à ce cadre. Nous introduisons ici une forme plus propre en termes de notations. De plus, le choix présenté dans l'article de simuler les sous-jacents par la formule explicite au lieu d'un schéma d'Euler ne fait pas sens à nos yeux. En effet, le principe même de la méthode Vibrato repose sur l'utilisation du likelihood ratio, basé sur le fait que l'étape $k + 1$ du schéma d'Euler est gaussienne conditionnellement à l'étape k . Or, pour la formule explicite Black & Scholes, X_{k+1} n'est pas gaussienne conditionnellement à X_k , et l'utilisation de la formule Vibrato ne semble donc pas justifiée.

Pour les raisons précisées dans la remarque au-dessus, nous avons donc procédé comme suit. Si l'on considère la dynamique suivante:

$$dX_t = rX_t dt + \text{diag}(X_t)\bar{\sigma}dW_t, \quad (35)$$

avec W un mouvement brownien standard dans \mathbb{R}^d , alors pour $\sigma := \text{diag}(X_t)\bar{\sigma}$, des calculs triviaux nous donnent la formule suivante, pour le delta vibrato par rapport au sous-jacent $i \in \{1, \dots, d\}$, à implémenter dans l'algorithme puis à moyenner:

$$\bar{\Delta}_i := \frac{1}{2h}(V_{T,+} - V_{T,-})(1 + rh) [(\text{diag}(X_0)\bar{\sigma})^{-1}Z]_i \quad (36)$$

$$+ \frac{1}{2}(V_{T,+} + V_{T,-} - 2V_{T,\cdot})\text{Tr} [\sigma \partial_{x_i} \sigma (\text{diag}(X_0)\bar{\sigma})^{-1}(ZZ^T - I_d)(\text{diag}(X_0)\bar{\sigma})^{-1}], \quad (37)$$

où, $\partial_{x_i} \sigma$ est simplement la matrice dont la ligne i est identique à celle de $\bar{\sigma}$, et où toutes les autres composantes sont nulles. L'algorithme est alors exactement identique à celui du cas Black & Scholes uni-dimensionnel.

Remark 4. Ci-dessus, pour simplifier, nous avons considéré un schéma à une seule time step (comme dans l'article).

2.4.2 Test de la méthode

Nous avons implémenté l'algorithme précédent pour une option Basket européenne, avec les paramètres suivants. $K = 100$, $M = 100000$, $n = 1$, $d = 7$, le vecteur des poids est $w := (1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7)$, la matrice de corrélation est issue de la matrice suivante (en lui ajoutant sa transposée et en soustrayant 1 à la diagonale ensuite)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9477 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8494 & 0.7558 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8548 & 0.7919 & 0.982 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8719 & 0.8209 & 0.9505 & 0.9378 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6169 & 0.6277 & 0.6141 & 0.64 & 0.6417 & 1 & 0 \\ 0.7886 & 0.7354 & 0.9303 & 0.8902 & 0.8424 & 0.4927 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur des volatilités est donné par $(0.146, 0.1925, 0.1712, 0.1679, 0.1688, 0.2192, 0.2068)$, celui des spots par $(100, 120, 90, 85, 145, 120, 102)$, la maturité est $T = 1$. La matrice $\bar{\sigma}$ de la section précédente est la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance obtenue à partir du vecteur des volatilités et de la matrice de covariance.

Pour ce cadre là, nous avons implémenté VAD et la méthode par différences finies. Les résultats sont présentés dans la table 6. Comme nous utilisons une option basket, le delta total est calculé comme la moyenne des deltas de chaque sous-jacent, pondérés par leurs poids.

Pas d'interprétations très intéressantes ici, si ce n'est que la méthodes par différences finies donne un Gamma tout à fait irréaliste avec une variance énorme. On peut encore remarqué la rapidité de calcul du delta de VAD par rapport aux différences finies.

Method:	Price				Delta				Gamma			
	Mean	Var	IC Size	Time	Mean	Var	IC Size	Time	Mean	Var	IC Size	Time
FDAnti	15.6530	12.6317	0.0440	0.05	0.8339	0.0055	0.0009	0.74	298	1143707	13.3	1.15
VadAnti	15.6482	12.5145	0.0439	/	0.8092	34.1091	0.07	/	0.0136	/	/	0.5

Table 6: Price, delta and Gamma for a Basket European Call with several methods. For each quantity we report the mean, the variance, the confidence interval size and the time of computation. The methods are: FDAnti (Finite difference with antithetic variate in Monte Carlo), VadAnti (VAD with Antithetic variate).

3 Organisation du code

Pour l'implémentation, nous avons fait le choix d'utiliser Python. Le notebook est découpée en 4 parties avec quelques préliminaires au début.

Parmi ces préliminaires, on retrouve notamment une fonction "monte_carlo", qui prend en input un tensor pytorch ainsi qu'un niveau de confiance et renvoie moyenne empirique, variance empirique et intervalle de confiance associé pour le tensor pytorch d'input. Nous avons également codé les formules de Black & Scholes explicites pour le prix, le delta et le gamma d'un call européen, afin de pouvoir comparer les résultats obtenus par les diverses méthodes avec les valeurs cibles. Vous trouverez aussi des classes de Payoffs dotées chacune d'une méthode ComputePayoff, afin de permettre plus de flexibilité dans la suite de l'implémentation.

Finalement, vous trouverez aussi une classe FD1D, qui prend en input les différents paramètres de l'option et permet de calculer son prix par Monte Carlo et son delta, son gamma, son Vega et la dérivée du Vega par rapport à la vol en utilisant des différences finies. Cette classe prend à la fois en charge les options européennes et américaines. Attention, pour les options américaines seuls le prix, le delta et le gamma sont codés.

Remark 5. L'utilisation de ces classes pose problème pour la différentiation automatique avec autograd de pytorch. Vous pourrez donc remarquer que dans certaines classes suivantes l'objet payoff a été remplacé par une formule.

La première partie du notebook correspond au cas d'un call européen pour un modèle Black& Scholes uni-dimensionnel. On y retrouve:

- class BlackScholes1D: simule les trajectoires d'un modèle Black Scholes en une dimension, jusqu'à l'avant dernière Time step.
- class EuropeanVibrato1D: calcule les dérivées premières du prix de l'option par rapport à: spot, vol, taux d'intérêt. Pour obtenir ces dérivées, utiliser la méthode ComputeVibrato.

Nous avons aussi implémenté le calcul du Gamma par vibrato d'ordre 2 avec la méthode ComputeVibratoSecondOrdre. Pour les dérivées du premier ordre, un paramètre isAnti booléen permet de choisir d'implémenter avec variable antithétique ou non. Pour l'implémentation de VAD, il suffit de calculer la dérivée du premier ordre avec cette fonction, puis de calculer le gradient par rapport au paramètre de notre choix en utilisant l'outil de différenciation automatique de pytorch.

Remark 6. l'objet de type EuropeanVibrato1D doit avoir en input un objet de type BlackScholes1D avec des paths déjà simulées à l'aide de la méthode BlackScholes1D.Simulate(...)

La seconde partie est le cas d'un call Européen dans un modèle d'Heston. L'organisation de cette partie est exactement la même que pour la première partie. La génération des paths pour le modèle Heston se fait par un objet de la classe Heston1D. Le calcul Vibrato se fait par un objet de la classe A EuropeanHestonVibrato1D. Nous n'avons pas implémenté le calcul du Gamma par vibrato du second ordre et utilisons seulement la VAD.

La troisième partie correspond au cas d'une option américaine dans le modèle Black Scholes.

L'unique classe ici est AmericanVibrato1D, qui calcule le gamma de l'option américaine sous une dynamique de type Black Scholes. Nous avons implémenté à la fois le calcul du Gamma par vibrato du second ordre (méthode ComputeVibrato) et par VAD (méthode ComputeVAD).

La quatrième partie correspond au cas d'une option Basket dans un modèle Black & Scholes en d dimensions. Le fonctionnement est exactement le même que pour le call Black & Scholes en dimension 1.

Ici, les classes à appeler sont `FDND` pour les différences finies, `BlackScholesND` puis `EuropeanVibratoND` pour la méthode VAD.