Stochastic Volatility Modeling - Heston model

Steven François

M2PF

2023

Sommaire

Présentation du modèle

- Historiquement le modèle d'Heston a été crée pour mieux appréhender la volatilité sur les marchés (Calibration du smile/Skew)
- On veut s'intéresser aux modèles à variance forward
- Le modèle d'Heston n'en est pas un mais sert à les appréhender
- Parallèle avec le cours sur le VIX (volatilité implicite et variance forward)

Présentation du modèle

- Le modèle d'Heston est défini par le système d'équations suivantes:

Définition

$$\begin{cases} dS_t = \sqrt{V_t} S_t dW_t \\ dV_t = -k \left(V_t - V^0 \right) dt + \sigma \sqrt{V_t} dZ_t \end{cases} \tag{1}$$

- V_t : Variance instantanée t^{-1} ($\Longleftrightarrow$ σ^2 B.S)
- k : Coeff d'elasticité t^{-1}
- V^0 : Mean revertion value
- σ : "Volatilité de la Volatilité" t^{-1}
- W_t,Z_t Browniens corrélés t.q $\langle W_t, Z_t \rangle = \rho t$

Présentation du modèle

Méthode de Transformée de Fourier inverse sur les moments de $log(S_t)$ pour le prix du Call:

Théorème : Prix du Call dans le Modèle de Heston

$$C\left(t, S_t, v_t, K, T\right) = S_t P_1 - K e^{-r_\tau} P_2$$

$$P_j\left(x_t, v_t; x_T, \ln K\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0 \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i\psi\omega\Lambda} f_j(\phi; t, x, v)}{i\phi}\right) d\phi$$

$$f_j\left(\phi; v_t, x_t\right) = \exp\left[C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi) v_t + i\phi x_t\right]$$

Variance forward

- Variance forward : $\xi_t^T = E_t[V_T]$

- $dV_t = -k\left(V_t - V^0\right)dt + \sigma\sqrt{V_t}dZ_t$ et $\bar{V}_u = E_t[V_u]$ donnent
$$d\bar{V}_T = -k\left(\bar{V}_T - V^0\right)dT$$

- EDO avec $\bar{V}_t = \xi_t^t = V_t$ et $\bar{V}_T = \xi_t^T$ donnent
$$\xi_t^T = V^0 + e^{-k(T-t)}\left(\xi_t^t - V^0\right)$$

- Variance implicite : $\widehat{\sigma}_T^2(t) = \frac{1}{T-t}\int_t^T \xi_t^\tau d\tau$
$$\widehat{\sigma}_T^2(t) = V_t^0 + \frac{1-e^{-k(T-t)}}{k(T-t)}\left(V_t - V^0\right)$$

- Le VIX définissait d'abord la variance implicite à partir du prix du log-contrat (légèrement modifié) puis la variance forward par dérivation mais aussi...

Variance forward

- $\xi_t^T = V^0 + e^{-k(T-t)}\left(\xi_t^t - V^0\right)$ donne
$$\left\{\begin{array}{l} d\xi_t^T = \sigma e^{-k(T-t)}\sqrt{\xi_t^t}dZ_t \\ dS_t = \sqrt{\xi_t^t}S_t dW_t \end{array}\right.$$

- On récupère aussi le ξ dans le S_t et on obtient un modèle "variance forward". Toutes les variances forward ξ_t^T (pour T) sont fonctions de la variance forward du présent ξ_t^t ce qui nous propose un modèle markovien.

- Le modèle paramétrique de Bergomi pour le VIX donnait
$$\left\{\begin{array}{l} d\xi_t^T = \omega\xi_t^T\kappa(T-t)dZ_t \\ \kappa(\tau) = e^{\frac{-\tau}{d}} \end{array}\right.$$

Drift sur la Variance

- Historiquement on calibrait les modèles à variance instantanée en utilisant une prime de risque:
  - $dV_t = \mu(t, S, V, p) + \lambda(t, S, V)dt + \alpha dZ_t \Longrightarrow$
    $dV_t = \mu\left(t, S, V, p^\star\right) dt + \alpha dZ_t$
  - avec $p =$ paramètre du modèle considéré

- Bergomi réfute l'idée de l'existence d'une prime de risque , c'est un concept artificiel et dénoué de sens mathématiquement

Drift sur la Variance

- En effet, son interprétation du drift dans les modèles a vol forward est simple :
- en diffusant la variance forward $d\xi_t^T = \lambda_t^T dZ_t^T$ et en différentiant la variance instantanée on obtient avec la règle de la chaine (ou formule d'ito):
- $dV_t = \left.\frac{d\xi_t^T}{dT}\right|_{T=t} dt + \lambda_t^t dZ_t^T$
- * Pente au temps t des extrémités de V

Propriété : Cohérence avec le modèle de Heston

$$d\xi_t^T = -ke^{-k(T-t)}(\xi_t^T - V^0)dT$$

- Remarque : Commme convenu , en utilisant le fait que $V_t = \xi_t^t$ on retrouve le drift de variance dans le modèle de Heston

Term structure des volatilités de volatilités

- On s'intéresse à la volatilité de la volatilité, on dérive donc :
- $\widehat{\sigma}_T^2(t) = \frac{1}{T-t}\int_t^T \xi_t^\tau d\tau = V_t^0 + \frac{1-e^{-k(T-t)}}{k(T-t)}\left(V_t - V^0\right)$ donne

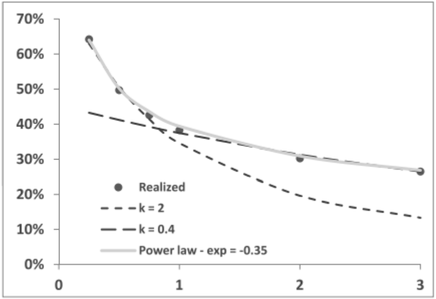
$$d\widehat{\sigma}_T = \bullet dt + \frac{\sigma}{2}\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k(T-t)}\frac{\widehat{\sigma}_t}{\widehat{\sigma}_T}dZ_t \text{ (modèle lognormal)}$$

- vol $(\widehat{\sigma}_T) \propto \frac{1-e^{-k(T-t)}}{k(T-t)}$

- $$\begin{cases} T - t \ll \frac{1}{k} & d\widehat{\sigma}_T \simeq \bullet dt + \frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{k(T-t)}{2}\right)\frac{\widehat{\sigma}_t}{\widehat{\sigma}_T}dZ_t \\ T - t \gg \frac{1}{k} & d\widehat{\sigma}_T \simeq \bullet dt + \frac{\sigma}{2}\frac{1}{k(T-t)}\frac{\widehat{\sigma}_t}{\widehat{\sigma}_T}dZ_t \end{cases}$$

Term structure des volatilités de volatilités

An example of one-factor dynamics: the Heston model



- Le modèle d'Heston propose des volatilités de volatilités qui n'épousent pas l'interpolation des volatilités réelles sur toutes les maturités
- Le réglage du paramètre k permet de fit sur du court terme ou du long terme

Etude du Smile de Vol de Vol

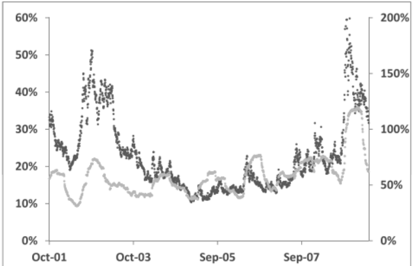
- Dans un modèle a vol locale (Markovien) : $\sigma = \sigma(t, S_t)$
- Par conséquent pour une option O_t, sur de courtes maturités , $\hat{\sigma}_{ATMF} \approx \sigma(t, S_t)$

Propriété : Dynamique de la volatilité dans le modèle de Heston

$$d\sqrt{V} = \bullet dt + \frac{\sigma}{2} dZ_t$$

- Concernant la Vol implicite:

Vol implicite (sombre : gauche) et sa Volatilité lognormale (clair : droite) Euro-Stoxx :



Réalité selon bergomi:

- Pour de courtes maturités
  - $\hat{\sigma}_{atm} = +\hat{\sigma}^{\gamma}_{atm} dZ_t$
  - $\gamma > 1$ vs $Heston = 0$
  - Pour de courtes maturités
- Quid des maturités + longues ?
- $\rightarrow d\widehat{\sigma}_T \simeq \bullet dt + \frac{\sigma}{2} \frac{1}{k(T-t)} \frac{\widehat{\sigma}_t}{\widehat{\sigma}_T} dZ_t$
- En utilisant la formule fermée sur la Variance implicite nous avons comme borne basse :
- $\hat{\sigma}_T(t) > \sqrt{V^0} \sqrt{1 - \frac{1-e^{-k(T-t)}}{k(T-t)}} = \hat{\sigma}^{min}_T(t)$

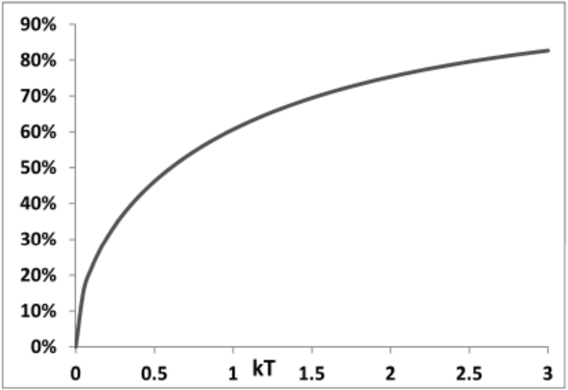


Figure 6.3: $\frac{\widehat{\sigma}_T^{\min}(t)}{\sqrt{V^0}}$ as a function of $k(T-t)$.

Skew ATMF - Smile ordre 1

- $\widehat{\sigma}_{KT} = \widehat{\sigma}_T(0, V) + \delta\widehat{\sigma}_{KT}$
- $\widehat{\sigma}_T = \widehat{\sigma}_T(0, V) = \sqrt{V^0 + (VV^0)\,\frac{1-e^{-kT}}{kT}}$
- $\delta\widehat{\sigma}_{KT} = \left(\frac{dP_{BS}}{d\widehat{\sigma}}\right)^{-1} \delta P$
- $\delta\widehat{\sigma}_{KT} = \frac{1}{\widehat{\sigma}_T^3 T^2} \left[\frac{\rho\sigma}{2} \int_0^T V_\tau^\alpha(V) \frac{1-e^{-k(T-\tau)}}{k} d\tau\right] \left(\frac{\widehat{\sigma}_T^2 T}{2} + \ln \frac{K}{F_T}\right)$
- $\begin{cases} \widehat{\sigma}_{F_T T} = \widehat{\sigma}_T \left(1 + \frac{\widehat{\sigma}_T T}{2} \mathcal{S}_T\right) \\ \mathcal{S}_T = \left.\frac{d\widehat{\sigma}_{KT}}{d \ln K}\right|_{F_T} = \frac{1}{\widehat{\sigma}_T^3 T^2} \frac{\rho\sigma}{2} \int_0^T V_\tau \frac{1-e^{-k(T-\tau)}}{k} d\tau \end{cases}$

Skew ATMF - Smile ordre 1

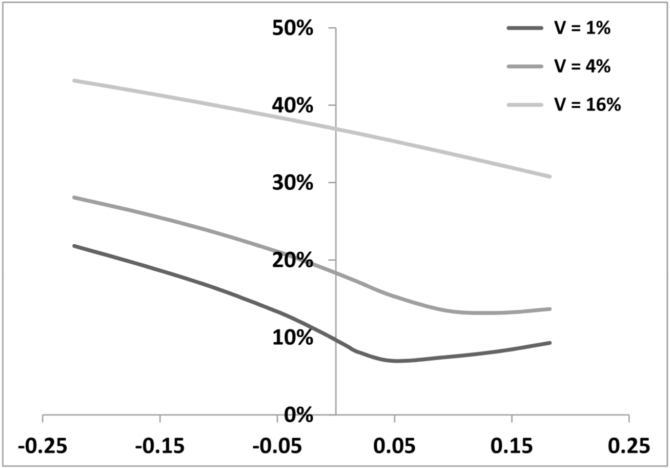
- $kT \ll 1$

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{\sigma}_{F_T T} &= \sqrt{V}\left(1 + \frac{\rho\sigma T}{8}\right) \\ \mathcal{S}_T &= \frac{\rho\sigma}{4\sqrt{V}} = \frac{\rho\sigma}{4\widehat{\sigma}_{F_T T}} \end{aligned} \right.$$

- $kT \gg 1$

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{\sigma}_{F_T T} &= \sqrt{V^0}\left(1 + \frac{\rho\sigma}{4k}\right) + \frac{1}{2kT}\left(\frac{V - V^0}{\sqrt{V^0}} + \frac{\rho\sigma}{4k}\frac{V - 3V^0}{\sqrt{V^0}}\right) \\ \mathcal{S}_T &= \frac{\rho\sigma}{2\sqrt{V^0}}\frac{1}{kT} \end{aligned} \right.$$

Skew ATMF - Exemple



Courbe des $\widehat{\sigma}_{KT}$ selon la logmoneyness-forward pour maturité 3 mois et paramètres $V^0 = 0.04$, $k = 1$, $\sigma = 0.6$, $\rho = -80\%$

Skew ATMF - Exemple

V	1%	4%	16%
S_T^{real}	-8.1	-6.0	-3.1
S_T^{approx}	-8.8	-5.5	-3.0

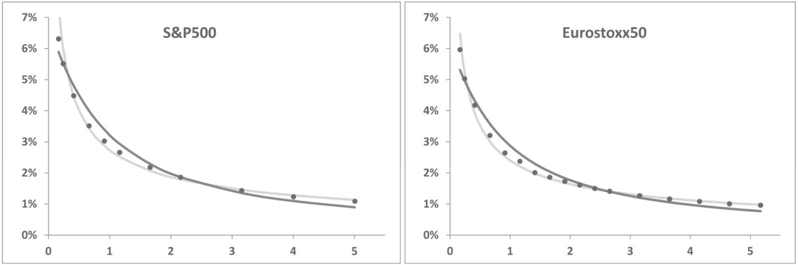
Valeur du skew ATMF pour les mêmes paramètres

V	1%	4%	16%
$\widehat{\sigma}_T$	11.6	20	38.2
$(\widehat{\sigma}_{F_T T} - \widehat{\sigma}_T)_{\text{real}}$	-1.9	-1.7	-1.2
$(\widehat{\sigma}_{F_T T} - \widehat{\sigma}_T)_{\text{approx}}$	-0.1	-0.3	-0.5

Comparaisons des volatilités pour les mêmes paramètres

Skew ATMF - Term structure

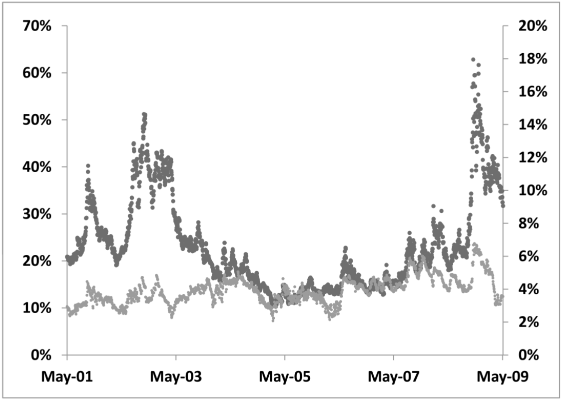
- Les courtes maturités proposent un skew constant alors que les maturités longues proposent un skew décroissant en $\frac{1}{T}$. Cela vient du caractère de retour à la moyenne du processus V et de résultats du chapitre précédent.



- De nouveau, le modèle d'Heston n'arrive pas à fit tout le long des maturités.

Skew ATMF - Volatilité et skew

- En maturité courte, nous avions obtenu un skew inversement proportionnel à la volatilité implicite.
- Cependant, les données réalisées semblent plutôt proposer une maigre corrélation qui est positive et non négative.



Conclusion

Le modèle d'Heston est un modèle à volatilité stochastique simple pour comprendre le smile de volatilité

Cependant

- étant un modèle à 1 facteur il est très peu flexible
- il ne reproduit malheureusement pas les dynamiques réelles des données historiques sur le marché (smile/skew)
- Il est aussi peu utilisé en pratique car sa dynamique est souvent hors sujet pour des problèmes de pricing et hedging.