Aproximación de integral definida: Regla de Boole

Fabián Crawford Barquero
Irene Muñoz Castro
Luis Morales Rodriguez
Steven Badilla Soto
Adrián Trejos Salazar

La integración numérica es una herramienta para el cálculo de integrales sin solución analítica o cuya solución es muy laboriosa o compleja, que consiste en evaluar la integral definida

$$I_{[a,b]} = \int_a^b f(x)dx$$

Las reglas de integración numérica que se obtienen por medio de interpolación polinómica, reciben el nombre de *Reglas de Newton Cotes* entre ellas nos concentraremos en la **Regla de Boole**.

Para esto suponemos que $f(x)$ es una función acotada entre $[a, b]$ que se puede dividir en n subintervalos:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Entonces podemos realizar una aproximación a la función original por medio de los *Polinomios de Lagrange*

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \ldots + L_n(x)f(x_n)$$

Obteniendo los pesos a partir de las integrales de los polinomios L_i(x) de grado n.

$$I_n f = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i); \qquad w_i = \int_a^b L_i(x)dx$$

1 Regla de Boole

La Regla de Boole es una fórmula cerrada de cinco puntos en donde se toma el intervalo $[a, b]$ de nuestra integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Tomamos el polinomio de interpolación de f en los puntos $x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, 3, 4$, al dividir en cuatro partes iguales el intervalo usando la variable h denotada por su expresión:

$$h = \frac{b-a}{4}$$

encontramos que el polinomio de lagrange de grado 4 con la expresión

$$L_i(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Esto nos da como resultado el Polinomio de Lagrange para encontrar la aproximación del área bajo la función:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

2 Error de Regla de Boole

El cálculo del error en las reglas de Newton Cotes es diferente dependiendo de la paridad de n, es decir del grado del polinomio de Lagrange, entonces:

Si n es par y $f \in \mathrm{C}^{n+2}[a,b], \exists \xi \in (a,b)$ tal que

$$I_n f - If = \mathrm{C}_n h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)$$

donde

$$\mathrm{C}_n = -\frac{1}{(n+2)!}\int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)dt$$

Entonces para la regla de Boole cambiamos n por 4 y calculamos:

$$I_4 f - If = \mathrm{C}_4 h^{4+3} f^{(4+2)}(\xi)$$

$$E(\xi) = \mathrm{C}_4 h^7 f^{(6)}(\xi)$$

$$\mathrm{C}_4 = -\frac{1}{(4+2)!}\int_0^4 t^2(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)dt$$

$$\mathrm{C}_4 = -\frac{8}{945}$$

entonces nuestro error se calcularía con:

$$E(\xi) = -\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi)$$

Por lo tanto para calcular la aproximación de la integral tendríamos:

$$I_{[a,b]} = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) - \frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi)$$

3 Ejemplo numérico

Calcularemos la integral definida en el intervalo $[1,2]$ de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ con la Regla de Boole.

Lo primero que haremos será encontrar los 5 puntos necesarios para trabajar nuestro polinomio de Lagrange de grado 4.

$$h = \frac{b-a}{4}$$

$$h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

Entonces eso nos da que $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.5, x_3 = 1.75, x_4 = 2$.

Esto nos da que al evaluar los puntos en la función$f(x)$, tenemos: $f_0 = 1, f_1 = \frac{4}{5}, f_2 = \frac{2}{3}, f_3 = \frac{4}{7}, f_4 = \frac{1}{2}$

Ahora usando la fórmula de la Regla de Boole:

$$I_{[a,b]} = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

$$I_{[1,2]} = \int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong \frac{2h}{45}(7*1 + 32*\frac{4}{5} + 12*\frac{2}{3} + 32*\frac{4}{7} + 7*\frac{1}{2}) = 0.693147$$

Para calcular el error tenemos:

$$E(\xi) = -\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi)$$

Ocupamos la derivada sexta de $f(x)$ para encontrarlo, entonces lo calculamos:

$$f^(6) = \frac{720}{x^7}$$

Ahora usamos $x_0 \leq \xi \leq x_4$ como el mayor número posible para tener el error más pequeño posible y evaluamos para conseguir el error

$$E(\xi) = -\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(2)$$

$$E(\xi) = -\frac{8}{945} \times (\frac{1}{4})^7 \times \frac{45}{8} = -2.906436 \times 10^{-6}$$

Bibliografía

Tapia, C. Métodos numéricos aplicados a la ingeniería naval. Énfasis en los módulos de integración numérica y ecuaciones diferenciales. Tomado de: https://repositorio.upct.es/xmlui/bitstream/handle/10317/8258/tfg-tap-met.pdf?sequence=1isAllowed=y

González, F., Rodriguez, J., García, M. Resolución de integrales definidas con Excel. XXII Jornadas ASEPUMA. Tomado de: https://docplayer.es/48078890-Resolucion-de-integrales-definidas-con-excel.html

Cifuentes, P. Cálculo Numérico I. Tomado de: http://matematicas.uam.es/ patricio.cifuentes/numerico/notasweb4.pdf