白癡微幾

Steven Jocker

November 6, 2024

首先，先聲明一件事情，我真的不會微分幾何，我根本不知道微分幾何在衝三小，我寫這個只是萬一我被當了，下學期可以讀得比較沒那個辛苦。不建議想學微分幾何的人看，裡面的內容我猜應該是漏洞百出。

1 弧長參數

首先，假設我們有一個三維曲線，例如 $\alpha(t) = (t,\ 2t,\ 3t)$ 好了。你會發現，不只一種方式來表示這個曲線，例如 $\alpha(x) = (-x,\ -2x,\ -3x)$，或是還有很多其他寫法，都能代表同一條曲線。這意思就是說，取不同的參數，可以表示同一條曲線，但是速度、其他性質就有可能會不同了。

那麼，我們事實上有一個特殊的參數，這就是弧長參數。他有什麼很好的性質呢？就是：使用弧長參數一定會是單位速率。簡單來說啦！就是，令 s 是弧長參數 (以後這邊文章用到 s，都表示是用弧長參數)，則 $|\alpha'(s)| = 1$。那問題來了，這麼好用 (哪裡好用後面就知道了！先接受他很好用就對了。) 的參數，怎麼找呢？首先，因爲如果 s 爲 $\alpha(t_0)$ 到 $\alpha(t)$ 的弧長，那麼我們有以下等式：

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\ dt$$

這就是我們的弧長參數啦！(至於爲什麼 $\alpha(s)$ 是單位速率？我不懶的話我會寫在附錄的證明。) 舉一個例子：令 $\alpha(t) = (5\cos t,\ 5\sin t,\ 12t)$，則 (令 $t_0 = 0$)：

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\ dt = \int_{0}^{t} |(-5\sin t,\ 5\cos t,\ 12)|\ dt = \int_{0}^{t} 13\ dt = 13t,$$

$$\therefore\ t(s) = \frac{s}{13}$$

所以說，

$$\alpha(s) = \alpha(t(s)) = \alpha(\frac{s}{13}) = (5\cos\ \frac{s}{13},\ \sin\ \frac{s}{13},\ \frac{12s}{13})$$

就是我們使用弧長參數的表達式囉！

2 $T,\ N,\ B,\ \kappa,\ \tau$

TNB 基本上指的就是，假設你有一個三維向量 α，那麼，T 的方向，就是切線方向，N 的方向就是法線方向，而 B 的方向是什麼呢？應該同時垂直 T 和 N。

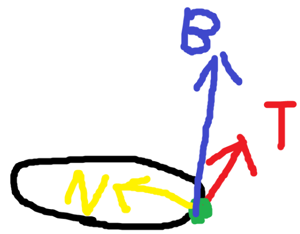

Figure 1: TNB 的示意圖 (我知道我畫得很爛對不起)

但是，向量除了有方向，還有長度不是嗎？那這些向量的長度是多少呢？我們知道，所有不是零的向量，都存在同方向的單位向量。所以我們會希望 TNB 都是單位向量。

另外，我們還希望可以描述這個曲線的曲率 κ(curvature，描述曲線有多彎)，和扭率 τ(torsion，描述曲線往旁邊扭的幅度)。我們剛剛不是有提到弧長參數嗎？以下就是我們的定義 (注意這裡一定要用弧長參數)：

定義 (TNB).

$$T(s) \equiv \alpha'(s)$$
$$\kappa(s) \equiv |\alpha''(s)| = |T'(s)|$$
$$N(s) \equiv \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$
$$B(s) \equiv T(s) \times N(s)$$
$$\tau(s) \equiv -N(s) \cdot B'(s)\ (= N'(s) \cdot B(s))$$

~~因爲打 (s) 很累，所以我~~以後的 (s) 都會被自動省略掉。只要記得這些東西全部都是 s 的函數就好。

上面最後一條式子中括號裡的等號成立原因~~當作 Exersice~~後面再解釋。我們先看到 TNB 的一些性質：首先，由定義可以知道 N 是單位向量。另外，根據前面弧長參數的性質 ($|\alpha'| = |T| = 1$) 可以知道 T 也是單位向量。所以，B 是兩個單位向量的外積，也會是單位向量。另外，有一件重要的事情，就是 T , N, B 是互相垂直的！這是因爲，由 B 的定義可知 B 分別和 T 和 N 垂直。至於 T 跟 N 呢？則是因爲 $|T| = 1$，所以：

$$|T|^2 = T \cdot T = 1$$
$$\therefore\ (T \cdot T)' = T' \cdot T + T \cdot T' = 2T \cdot T' = 2T \cdot (\kappa N) = 2\kappa(T \cdot N) = (1)' = 0$$
$$\therefore\ T \cdot N = 0$$

也就表示 T 跟 N 互相垂直。

順便多嘴說一句，既然 T, N, B 是單位向量又互相垂直，$\{T,\ N,\ B\}$ 是一組 $\mathbb{R}^3$ 的正交單位基底。

3 關於曲線的一些性質

這邊是一些關於曲線的性質，我這裡就不證明了，如果我不懶的話我會附證明在後面。

首先，一條曲線是直線，若且唯若他的曲率是 0。這很直觀吧！(~~除了直線也叫做曲線的部分。~~)

再來，一條曲線會是圓，或是圓的一部分，若且唯若他的曲率是一個正常數，且扭率是 0。(換句話說，每個地方都一樣彎。)

再來，一條曲線落在一個平面上，若且唯若他的扭率是 0。意思就是他不會左右扭來扭去，只會乖乖的在一個平面上。

最後，令 $R = \frac{1}{\kappa}$。則一條曲線會落在一個球上，若且唯若 $k \neq 0,\ k' \neq 0,\ \tau \neq 0$, 且 $R^2 + (\frac{R'}{\tau})^2$ 是一個常數。(~~你加油，我不知道怎麼解釋這個。~~)