Tema colectivă ④ - Grupa 143

Fie I mulțime $\neq \emptyset$

A mulțime

$(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi, $k \in I$

Demonstrație:

1). • $A_k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$

$$\begin{cases} x \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ dacă } k \in I \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i \\ x \in A_k \Rightarrow \exists i = k \in I, x \in A_i \end{cases}$$

$\Downarrow$

$(x \in A_k \Rightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i) \Rightarrow A_k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$

• $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k$

$$\begin{cases} \text{pt } k \in I \Rightarrow x \in A_k \\ x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i \end{cases}$$

$\Downarrow$

$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in A_k \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k$

2). $A \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i \iff (\forall i\in I)(A\subseteq A_i)$

"$\Rightarrow$" $A \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i \Rightarrow (\forall k\in I)(A\subseteq \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k) \iff (\forall k\in I)(A\subseteq A_k)$

$\Rightarrow (\forall i\in I)(A\subseteq A_i)$ (i)

"$\Leftarrow$" $(\forall i\in I)(A\subseteq A_i) \iff (\forall i\in I)(\forall a\in A)(a\in A_i) \iff (\forall i\in I)(\forall a)(a\in A \Rightarrow$

$a\in A_i) \iff (\forall a)(\forall i\in I)(a\in A \Rightarrow a\in A_i) \iff (\forall a)[a\in A \Rightarrow (\forall i\in I)(a\in A_i)]$

$\iff (\forall a)(a\in A \Rightarrow a\in \bigcap_{i\in I} A_i) \iff A\subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow A\subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$

3). $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A \iff (\forall i\in I)(A_i\subseteq A)$

"$\Rightarrow$" $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A \Rightarrow (\forall k\in I)(A_k\subseteq \bigcup_{i\in I} A_i\subseteq A) \Rightarrow (\forall k\in I)(A_k\subseteq A) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall i\in I)(A_i\subseteq A)$ (i)

"$\Leftarrow$" $(\forall i\in I)(A_i\subseteq A) \iff (\forall i\in I)(\forall x\in A_i)(x\in A) \iff (\forall i)(\forall x)(i\in I$ și

$x\in A_i \Rightarrow x\in A) \iff (\forall x)(\forall i)(i\in I$ și $x\in A_i \Rightarrow x\in A) \iff (\forall x)(\forall i\in I)(x\in A_i \Rightarrow$

$x\in A) \iff (\forall x)(\forall i\in I)(x\notin A_i$ sau $x\in A) \iff (\forall x)(\nexists i\in I)(x\in A_i$ și $x\notin A) \iff$

$\iff (\forall x)$ non $[(\exists i\in I)(x\in A_i$ și $x\notin A)] \iff (\forall x)$ non $(x\in \bigcup_{i\in I} A_i$ și $x\notin A) \iff$

$\iff (\forall x)(x\notin \bigcup_{i\in I} A_i$ sau $x\in A) \iff (\forall x)(x\in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow x\in A) \iff \bigcup_{i\in I} A_i\subseteq A$ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i\subseteq A \iff (\forall i\in I)(A_i\subseteq A)$.