# LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ
# TEMELE COLECTIVE 1 ȘI 2

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2022–2023, Semestrul I

Toate temele colective se adresează AMBELOR SERII.
Rezolvarea fiecărei teme colective trebuie trimisă *într–un singur exemplar* de *fiecare grupă a seriei IF* și *fiecare grupă a seriei ID* ca răspuns la aceste assignments MS Teams.

# Temă colectivă (de programare în Prolog, din primul laborator)

După modelul predicatelor similare din fișierul .PL pentru primul laborator (vedeți și materialul .PDF pentru acest laborator), scrieți predicate în Prolog pentru a demonstra (semantic, i.e. prin tabele de adevăr) că, pentru orice mulțimi $A$, $B$, $C$, $D$, $T$ astfel încât $T \supseteq A$ și $T \supseteq B$, au loc următoarele proprietăți, unde am notat cu $\overline{M} := T \setminus M$ pentru orice $M \in \mathcal{P}(T)$:

- $\emptyset \setminus A = \emptyset$, $A \Delta \emptyset = A$ *și* $(A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B)$
- $(A \subseteq B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C)$ și $(A \subsetneq B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C)$
- $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C \subseteq B \cap C$ și $A \setminus C \subseteq B \setminus C)$
- $(A \subseteq B$ și $C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C \subseteq B \cup D,\ A \cap C \subseteq B \cap D$ și $A \setminus D \subseteq B \setminus C)$
- $[(A \subseteq C$ *și* $B \subseteq C) \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C]$ și $[(A \subseteq B$ *și* $A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C]$
- $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$ *și* $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ și $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- **a doua lege a lui De Morgan:** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $(A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A})$, $(A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B})$ și $(A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A})$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$ și $A \cup \overline{A} = T$
- $(A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B})$ și $(A \cup B = T \Leftrightarrow A \supseteq \overline{B})$
- $(A \cup B = T$ și $A \cap B = \emptyset) \Leftrightarrow A = \overline{B}$

# Temă colectivă (de efectuat matematic, din Cursurile I–II)

Din faptul că $\emptyset$ este mulțimea fără elemente să se deducă faptul că, pentru orice mulțime $A$, $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$. De asemenea, să se demonstreze că produsul cartezian este distributiv față de reuniunea, intersecția, diferența și diferența simetrică între mulțimi (și la stânga, și la dreapta), și păstrează incluziunea, iar produsul cartezian cu mulțimi nevide păstrează și incluziunea strictă, adică, pentru orice mulțimi $A$, $B$ și $C$, au loc:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ și $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ și $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
3. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ și $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$
4. $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$ și $(B \Delta C) \times A = (B \times A) \Delta (C \times A)$
5. $B \subseteq C \Rightarrow [A \times B \subseteq A \times C$ și $B \times A \subseteq C \times A]$
6. dacă $A \neq \emptyset$, atunci: $B \subseteq C \Leftrightarrow A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \times A \subseteq C \times A$
7. dacă $A \neq \emptyset$, atunci: $B \subsetneq C \Leftrightarrow A \times B \subsetneq A \times C \Leftrightarrow B \times A \subsetneq C \times A$

**Indicație:** Se folosesc, în mod direct, definițiile acestor operații cu mulțimi. La 1 se folosește și **distributivitatea conjuncției față de disjuncție**, iar 4 poate fi demonstrată prin calcul direct, pe baza lui 1 și 3. La 3 se pot folosi 6 și o caracterizare a incluziunii stricte din primul seminar.