Restanţă
Structuri Algebrice în Informatică
06/09/2021

Nume: .... **Punctaj parţial 1.................**

Prenume: .... **Punctaj parţial 2.................**

<u>IMPORTANT!!</u>. Punctul din oficiu este acordat pentru aflarea lui a şi b pe care, ulterior, le veţi înlocui în toate enunţurile problemelor. Pe foile voastre de examen veţi scrie enunţurile problemelor cu a şi b înlocuite cu valorile anterior determinate.

$a = ...,$ $b = ...,$

unde

(1) a este egal cu maximul dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun numele vostru de familie. (de exemplu, dacă numele de familie este Popescu-Simion, atunci $a = 7$, maximul dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Popescu) şi 6 (nr. de litere al cuvântului Simion); dacă numele de familie este Moisescu, atunci $a = 8$)

(2) b este egal cu maximul dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun prenumele vostru. (de exemplu, dacă prenumele este Andreea-Beatrice-Luminiţa, atunci $b = 8$, maximul dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Andreea) şi 8 (nr. de litere atât al cuvântului Beatrice, cât şi al cuvântului Luminiţa).)

Problema	Punctaj	Total
1	1	
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	1	
9	1	
oficiu	1	
Total	10	

Justificaţi toate răspunsurile!

1. Determinaţi numărul de permutări de ordin a din grupul de permutări S_b.

2. Se consideră permutarea $\sigma = (1, \ldots, a)(a+1, \ldots, a+b)$, un produs de 2 cicli disjuncţi de lungime a, respectiv b, din S_{a+b}. Determinaţi toate permutările $\tau \in S_{a+b}$ astfel încât $\tau^{11} = \sigma$.

3. Calculaţi $b^{b^{a^a}} \pmod{23}$.

4. Spunem că un polinom cu coeficienţi întregi $f(X)$ este *Eisenstein modulo* p, unde p este un număr prim, dacă există $d \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(X+d)$ este ireductibil conform criteriului lui Eisenstein aplicat numărului prim p. Determinaţi toate numerele prime p, dacă există, pentru care $f(X) = X^3 - 3aX + 3b$ este Eisenstein modulo p. În plus, pentru fiecare astfel de p, dacă există, precizaţi şi un $d \in \mathbb{Z}$ ca mai sus.

5. Determinaţi numărul elementelor de ordin 6 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{3^a}, +) \times (\mathbb{Z}_{6^b}, +)$.

6. Determinaţi cel mai mic număr natural impar de 4 cifre n care are proprietatea că împărţit la 11 dă restul a şi împărţit la 13 dă restul b.

7. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ dacă } x < 2 \\ x^2 - 7x + 11, \text{ dacă } x \in [2,6] \\ -x + 9, \text{ dacă } x > 6. \end{cases}$$

   Determinaţi mulţimile $\{f(x) | \ x \in (1,b)\}$ şi $\{x \in \mathbb{R} | \ b - a \le f(x) \le b\}$. Este funcţia bijectivă?

8. Determinaţi numerele $c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât clasa de echivalenţă a polinomului $X^3 - cX + d$ în inelul factor $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - aX + b)$ să fie aceeaşi cu clasa de echivalenţă a polinomului $aX - b$.

9. Considerăm polinomul $P(X) = X^3 - aX + b$ care are rădăcinile complexe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Determinaţi polinomul monic cu coeficienţi complecşi, $F(X)$, care are rădăcinile $3\alpha_1 - 2, 3\alpha_2 - 2, 3\alpha_3 - 2$.