Restanţă
Structuri Algebrice în Informatică
06/06/2021

Nume: .... **Punctaj parţial 1................**

Prenume: .... **Punctaj parţial 2................**

<u>IMPORTANT!!</u>. Punctul din oficiu este acordat pentru aflarea lui a şi b pe care, ulterior, le veţi înlocui în toate enunţurile problemelor. Pe foile voastre de examen veţi scrie enunţurile problemelor cu a şi b înlocuite cu valorile anterior determinate.

$a = ...,$ $b = ...,$

unde

(1) a este egal cu suma dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun numele vostru de familie. (de exemplu, dacă numele de familie este Popescu-Simion atunci $a = 7 + 6 = 13$, suma dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Popescu) şi 6 (nr. de litere al cuvântului Simion); dacă numele de familie este Moisescu atunci $a = 8$)

(2) b este egal cu suma dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun prenumele vostru. (de exemplu, dacă prenumele este Andreea-Beatrice-Luminiţa atunci $b = 7+8+8 = 23$, suma dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Andreea), 8 (nr. de litere al cuvântului Beatrice) şi 8 (nr. de litere al cuvântului Luminiţa).)

Problema	Punctaj	Total
1	1	
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	1	
9	1	
oficiu	1	
Total	10	

Justificaţi toate răspunsurile!

1. Există permutări de ordin $a \cdot b + 1$ în grupul de permutări S_{a+b}?

2. Se consideră permutarea $\sigma = (1, \ldots, b)(b+1, \ldots, b+a)$, un produs de 2 cicli disjuncţi de lungime b, respectiv a, din S_{a+b}. Determinaţi toate permutările $\tau \in S_{a+b}$ astfel încât $\tau^2 = \sigma$.

3. Calculaţi $b^{b^{a^a}} \pmod{29}$.

4. Spunem că un polinom cu coeficienţi întregi $f(X)$ este *Eisenstein modulo* p, unde p este un număr prim, dacă există $d \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(X+d)$ este ireductibil conform criteriului lui Eisenstein aplicat numărului prim p. Determinaţi toate numerele prime p pentru care $f(X) = X^3 + b$ este Eisenstein modulo p. În plus, pentru fiecare astfel de p, precizaţi şi un $d \in \mathbb{Z}$ ca mai sus.

5. Determinaţi numărul elementelor de ordin 24 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{2^a}, +) \times (\mathbb{Z}_{3^b}, +)$.

6. Considerăm pe $\mathbb{R}$ relaţia binară ρ dată astfel: $x\rho y$ dacă $x + y = a + b$. Să se arate că ρ este relaţie de echivalenţă, să se calculeze clasele de echivalenţă ale lui a şi 2021 şi să se determine un sistem complet de reprezentanţi pentru această relaţie de echivalenţă. Este $f : \mathbb{R}/\rho \mapsto \mathbb{R}$, $f(\widehat{x}) = 4x^2 - 4ax - 4bx + 4 + a^2 + 2ab + b^2$ o funcţie bine definită?

7. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} ax - b, & \text{dacă } x < -2, \\ 3x^2 + 6x + 3 - 2a - b, & \text{dacă } x \geq -2. \end{cases}$$

   Decideţi dacă funcţia f este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă. Calculaţi $f^{-1}([-a-1, a+1])$ şi $f([-3, 0])$.

8. Determinaţi toate morfismele de grupuri de la $(\mathbb{Z}_a, +)$ la $(\mathbb{Z}_b, +)$. Precizaţi care dintre aceste morfisme sunt injective.

9. Determinaţi un generator al idealului din $\mathbb{Q}[X]$ generat de polinoamele $X^a - 1$, $X^b - 1$, $X^{a+b} - 1$.