LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ
TEMELE COLECTIVE 3, 4 ȘI 5

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2022–2023, Semestrul I

Toate temele colective se adresează AMBELOR SERII.
Rezolvarea fiecărei teme colective trebuie trimisă *într–un singur exemplar* de *fiecare grupă a seriei IF* și *fiecare grupă a seriei ID* ca răspuns la aceste assignments MS Teams.

Temă colectivă (din Cursurile I-II)

Demonstrați că operațiile cu numere cardinale și relațiile între numere cardinale sunt **bine definite**, i.e. **nu depind de reprezentanții claselor de cardinal echivalență**, adică: pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$), au loc:

- $|A \coprod B| = |A' \coprod B'|$
- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|B^A| = |(B')^{(A')}|$
- $|A| \leq |B|$ ddacă $|A'| \leq |B'|$
- $|A| < |B|$ ddacă $|A'| < |B'|$

Indicație: Dacă $\varphi : A \to A'$ și $\psi : B \to B'$ sunt bijecții, atunci funcțiile $f : A \coprod B \to A' \coprod B'$, $g : A \times B \to A' \times B'$ și $h : B^A \to (B')^{(A')}$, definite prin: pentru orice $a \in A$, orice $b \in B$ și orice $p : A \to B$, $f(a, 1) := (\varphi(a), 1)$, $f(b, 2) := (\psi(b), 2)$, $g(a, b) := (\varphi(a), \psi(b))$ și $h(p) := \psi \circ p \circ \varphi^{-1}$, sunt, de asemenea, bijecții (vedeți și Seminarul I, partea a doua); în plus, o funcție $\iota : A \to B$ este injecție, respectiv bijecție ddacă funcția $\gamma := \psi \circ \iota \circ \varphi^{-1} : A' \to B'$, care satisface $\iota = \psi^{-1} \circ \gamma \circ \varphi$, este injecție, respectiv bijecție.

Am folosit **licența de scriere (convenția)** ca în scrierea funcțiilor aplicate unor perechi de elemente să eliminăm o pereche de paranteze: de exemplu, scriem $g(a, b)$ în loc de $g((a, b))$.

Temă colectivă (din Cursurile I–II)

Fie I o mulțime nevidă, A o mulțime, $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi și $k \in I$. Să se demonstreze că:

- $A_k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ și $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k$
- $A \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$ ddacă $(\forall\, i \in I)\,(A \subseteq A_i)$
- $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A$ ddacă $(\forall\, i \in I)\,(A_i \subseteq A)$

Observație: Pentru $I = \emptyset$ proprietățile din tema de mai sus nu sunt satisfăcute.

Temă colectivă (din Cursurile I–II)

Fie A și I mulțimi, iar $(B_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi. Să se demonstreze că:

- $A \times (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \times B_i)$ și $(\bigcup_{i\in I} B_i) \times A = \bigcup_{i\in I}(B_i \times A)$
- $A \times (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A \times B_i)$ și $(\bigcap_{i\in I} B_i) \times A = \bigcap_{i\in I}(B_i \times A)$, considerând, pentru cazul $I = \emptyset$, o mulțime T astfel încât $(B_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$, iar $(A \times B_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A \times T)$ și $(B_i \times A)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T \times A)$

Indicație: Tratați separat, folosind o temă anterioară, respectiv cursul, cazul $I = \emptyset$.