<u>Metoda Divide et Impera</u>

Problemele trebuie rezolvate folosind metoda Divide et Impera. Complexitatea algoritmilor trebuie justificată

1. Se dă un vector $a=(a_1,\ldots a_n)$ de tip munte (există un indice i astfel încât $a_1<a_2<\ldots<a_i > a_{i+1}>\ldots>a_n$; a_i se numește vârful muntelui). Propuneți un algoritm O(log n) care determină vârful muntelui (în calculul complexității algoritmului nu se consideră și citirea vectorului). **[1] exc 1,cap. 5**

date.in	date.out
5 4 8 10 11 5	11

2. Scrieți o funcție nr_aparitii cu complexitate O(log(n)) care primește ca parametru o listă de numere întregi ordonată crescător și un număr x și returnează numărul de apariții ale unei valori x în listă. De exemplu, nr_aparitii([1, 1, 2, 2, 2, 2, 6, 9, 9, 20], 2) va returna 4.

3. Se citește de la tastatură un număr natural N. Se consideră o tablă (matrice) pătratică de dimensiuni 2^N*2^N pe care se scriu numerele naturale de la *1* si 2^N*2^N prin vizitarea **recursivă** a celor patru cadrane ale tablei în ordinea indicată și în figura alăturată: dreapta-sus, stânga-jos, stânga-sus, dreapta-jos. De exemplu, daca *N=2*, tabla este completată astfel:

3	**1**
2	**4**

```
11  9  3  1
10 12  2  4
7   5 15 13
6   8 14 16
```

Să se afișeze în fișierul tabla.out matricea completată după regulile precizate.

intrare	tabla.out
2	11 9 3 1 10 12 2 4 7 5 15 13 6 8 14 16

4. Se consideră un vector cu n elemente. Se numește inversiune semnificativă a vectorului o pereche perechi (i, j) cu proprietatea că i < j și $a_i > 2*a_j$. Să de determine **numărul** de inversiuni semnificative din vector. De exemplu, vectorul 4, 8, 11, 3, 5 are 3 inversiuni semnificative: (8,3), (11,3), (11,5) - **O(n log n) [1] exc. 2, cap. 5 + v. curs**

date.in	date.out
5 4 8 11 3 5	3

5. Se dau doi vectori a și b de lungime n (ambii), cu elementele ordonate crescător. Propuneți un algoritm cât mai eficient pentru a determina mediana vectorului obținut prin interclasarea celor doi vectori **O(log(n))** Mediana unui vector ordonat crescător cu număr impar de elemente este elementul din mijloc, iar pentru un vector ordonat crescător cu număr par de elemente este media aritmetică a celor două elemente din mijloc. Astfel, pentru vectorii

1 12 15 16 38

și

2 13 17 30 45

vectorul obținut prin interclasare este 1 2 12 13 15 16 17 30 38 45 și mediana lui va fi (15+16)/2=15,5.

6. Se dau n valori distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi ponderi asociate lor $w_1, w_2, \ldots$, respectiv $w_n \in (0, 1]$ cu $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1$. Să se determine mediana ponderată a acestor valori, adică acea valoare x_k cu proprietăţile: $\sum_{x_i < x_k} w_i < 0,5$, $\sum_{x_i > x_k} w_i \le 0,5$.

De **exemplu**, pentru valorile

x = 5 1 3 2 9 6 11 şi ponderile asociate

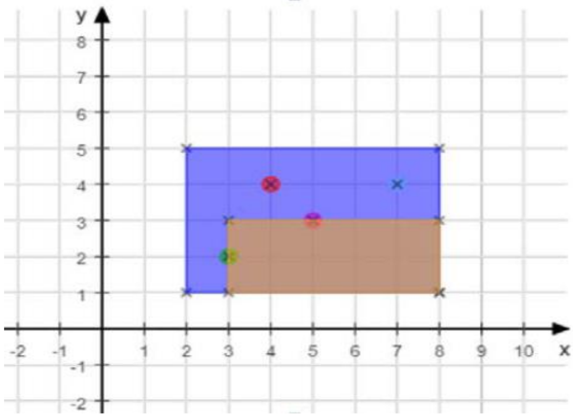
w = 0,1 0,12 0,05 0,1 0,2 0,13 0,3

mediana ponderată este $x_k = 6$, deoarece $\sum_{x_i < x_k} w_i = 0,12 + 0,1 + 0,05 + 0,1 = 0,37$, $\sum_{x_i > x_k} w_i = 0,5$

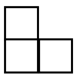
Weighted median, problema 10-2 din [3] - complexitate caz mediu/defavorabil **O(n)**

date.in	date.out
7 5 1 3 2 9 6 11 0.1 0.12 0.05 0.1 0.2 0.13 0.3	6

7. Într-o zonă rezidenţială se află o pădure foarte frumoasă, de forma unui dreptunghi. Un investitor isteţ s-a gândit să-şi construiască o vilă chiar în pădure, dar, fiind un ecologist convins, nu ar vrea să taie niciun copac. Din acest motiv, el ar vrea să afle zona dreptunghiulară din pădure cu suprafaţă maximă şi în care nu este niciun copac. Investitorul are o hartă a întregii zone, în care sunt date coordonatele dreptunghiului corespunzător pădurii, precum şi coordonatele tuturor copacilor din ea.



copaci.in	copaci.out	Explicație
2 1 8 5 3 2 4 4 5 3 7 4	Dreptunghiul: 3 1 8 3 Aria maxima: 10	Pădurea este un dreptunghi având colțul stânga-jos de coordonate (2,1) și colțul dreapta-sus de coordonate (8,5). În pădure sunt 4 copaci, având coordonatele (3,2), (4,4), (5,3) și (7,4). Dreptunghiul cu suprafața maximă de 10 și care nu conține nici un copac are coordonatele (3,1) pentru colțul stânga-jos și (8,3) pentru colțul dreapta-sus.

8. (suplimentar) Fie o tablă cu pătrăţele de dimensiune $2^n x 2^n$ (n dat). Pe această tablă există o gaură la o poziţie dată prin linia şi coloana sa (lg, cg) (liniile şi coloanele se consideră numerotate de la 1). Pentru acoperirea acestei table avem la dispoziţie piese de forma 

Aceste piese pot fi rotite cu 90°, 180° sau 270°. Să se afişeze o acoperire completă a tablei (cu excepţia găurii). Piesele vor fi reprezentate prin numere de la 1 la n, iar gaura prin 0 (cele 3 căsuţe ocupate de a i-a piesă pusă vor primi valoarea i) $\mathbf{O(2^{2n})}$

date.in	date.out (un exemplu, soluţia nu este unică)
2 3 1	1 1 2 2 1 3 3 2 0 4 3 5 4 4 5 5

Bibliografie

1. Jon Kleinberg, Éva Tardos, **Algorithm Design**, Addison-Wesley 2005 http://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/
2. S. Dasgupta, C.H. Papadimitriou, and U.V. Vazirani, **Algorithms**, McGraw-Hill 2006
3. T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.R. Rivest **– Introducere în algoritmi**, MIT Press, trad. Computer Libris Agora