[Curs III]

Baze. Dimensiunea unui spațiu vectorial.

K corp, V un K- sp. vectorial

$S \subset V$ notăm $\langle S \rangle = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i : n \in \mathbb{N}^*, v_1, \dots, v_n \in S, a_1, \dots, a_n \in K \}$

- subspațiul vectorial generat de mulțimea S.

[Def] $S \subset V$ este un S.G. pentru V dacă $\langle S \rangle = V$.

[Def] $v_1, \dots, v_n \subset {}_K V$ formează un sistem liniar independent (SLI)

dacă $\forall a_1, \dots, a_n \in K$ a.î. dacă $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$

* Dacă $S \subset V$, spunem că S este S.L.I. dacă orice submulțime finită a sa este SLI.

* Dacă S nu e SLI, spunem că vectorii din S sunt liniar dependenți (SLD) (sau S este sistem liniar dependent).

* Să presupunem că

$v_1, v_2, \dots, v_n \subset V$ sunt vectori liniar dependenți.

Atunci $\exists a_1, \dots, a_n \in K$ nu toți nuli cu:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$$

Să pp că $a_1 \neq 0$

$$a_1 v_1 = -a_2 v_2 - \dots - a_n v_n$$

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \frac{a_3}{a_1} v_3 - \dots - \frac{a_n}{a_1} v_n$$

$$v_1 \in \langle v_2, v_3, \dots, v_n \rangle$$

Obs: $S \subset V$ este SLD $\Leftrightarrow$ unul din vectorii din S este comb. liniară de ceilalți

$\Leftrightarrow \exists x \in S$ cu $x \in \langle S \setminus \{x\} \rangle$

Lemă: Fie $S \subset V$ un SLI și $x \in V$.

Atunci $S \cup \{x\}$ este SLI $\Leftrightarrow x \in V \setminus \langle S \rangle$

- Exemple: 1) $\{0\}$ nu este SLI pt că $\underset{\neq 0_K}{1_K} \cdot 0_V = 0_V$

Fie $a \in K \setminus \{0_K\}$

2) Dacă $S \subset V$ și $0 \in S \Rightarrow S$ nu este SLI.

3) Fie $v \in V$. Atunci $\{v\}$ este SLI $\Leftrightarrow v \neq 0_V$

4). Fie $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$. Atunci $\{v_1, v_2\}$ este SLI $\Leftrightarrow v_1$ și v_2 nu sunt proporționali.

$v_1 v_2$ sunt SLD $\Leftrightarrow v_1 \in \langle v_2 \rangle$ sau $v_2 \in \langle v_1 \rangle$

5). K^n $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0 mai puțin linia i

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este SLI.

Fie $a_1, \dots, a_n \in K$ cu $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = 0$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_i = 0 \ \forall i = \overline{1,n}$$

Prop: Fie $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^m$.

$\{v_1, \dots, v_m\}$ este SLI $\Leftrightarrow$ matricea $\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ are în forma eșalon pivot pe fiecare coloană

Dem: Fie $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ a.î. $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ este SLI $\Leftrightarrow$ sistemul are doar soluția nulă

$\Leftrightarrow$ sistemul este comp. det.

$\Leftrightarrow$ în forma eșalon pt $\left(\begin{array}{cccc|c} | & | & & | & \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n & 0 \\ | & | & & | & \end{array}\right)$ avem pivot pe toate coloanele cu excepția ultimei $\Leftrightarrow$ în forma eșalon pt matricea sistemului avem pivot pe toate coloanele.

[Obs] Fie $\underset{K}{V}$ sp. vectorial.

1). Dacă $S \subset V$ este SLI și $S_1 \subset S$, atunci S_1 este SLI.

2) Dacă $S \subset V$ este S.G. și $S \subseteq S_2 \subset V$, atunci S_2 este SG.

[Def] O submulțime a lui V se numește **bază** pt V. dacă este SLI și SG pentru V.

. Nr. de elemente dintr-o bază a lui V se numește dimensiunea spațiului vectorial V, notăm $\dim_K V$

Intrebari: 1) Există baze în orice spațiu vectorial?

2). Este adevarat că orice două baze au aceleași nr de elemente?) DA

3) Cum găsim ~~un~~ o bază într-un spațiu vectorial?

[Teoremă] Fie V un K-sp vectorial și $S \subseteq V$ submulțime:

UASE ① S este o bază

② S este un SLI maximal în raport cu incluziunea

③ S este un SG. pentru V minimal față de incluziune

Dem: ① ⇒ ② Arătam că S este S.G. pt V.

Dacă R.A. S nu este SG. pt $V \Rightarrow \exists x \in V \setminus \langle S \rangle$.

Dar S este SLI $\underset{\text{lemă}}{\Rightarrow} S \cup \{x\}$ este SLI ↯

Deci $\langle S \rangle = V$.) X greșit

② ⇒ ① Vrem $\langle S \rangle = V$. Dacă RA. $\exists x \in V \setminus \langle S \rangle \underset{\text{lemă}}{\Rightarrow} S \cup \{x\}$ este SLI ↯

① ⇒ ② S este SLI maximal. Fie $x \in V \setminus S$

S este SG. pt $V \Rightarrow x \in \langle S \rangle = V$

$\Rightarrow S \cup \{x\}$ nu e SLI ⇒ S este SLI maximal

① ⇒ ③ S este SG minimal pt V

Fie $x \in S$. Cum S este SLI ⇒ $x \notin \langle S \setminus \{x\} \rangle$

Deci $\langle S \setminus \{x\} \rangle \subsetneq V$ ⇒ $S \setminus \{x\}$ nu e SG pt V.

③ ⇒ ① S este SG.

S este SLI. Dacă R.A, $\exists x \in S$ cu $x \in \langle S \setminus \{x\} \rangle$ (Temă)

[Teorema Schimbului] (Steinitz) Fie V un K-sp. vectorial,

$S = \{u_1, \dots, u_s\}$ un SLI în V.

$S_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$ un SG în V. Atunci:

① $s \leq m$

② Eventual renumerotam vectorii din S_1.

$\{u_1, \dots, u_s, v_{s+1}, \dots, v_m\}$ este SG pt V.

[Corolar]. Fie V un K-sp. vectorial. Atunci orice 2 baze din V au același nr. de elemente.

În particular, dacă V este bine definit.

[Teoremă]. Orice spațiu vectorial are o bază.

Pornim cu un SG finit pt V și eliminăm, pe rând din S vectori care sunt combinații liniare de ceilalți. (pt găsirea unei baze)

Ex 1) în K^n $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este baza canonică din K^n

⇒ $\dim_K K^n = n$

2) $\dim V = 0$ ⇔ $\emptyset$ este bază ⇔ $V = \{0_V\}$

3) $K[X]$ $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ formează o bază în $_K K[X]$

⇒ $\dim_K K[X] = \infty$

[Cum construim o bază?]

Fie $v_1, v_2, \dots, v_n \in K^m$

① Construim matricea $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.

pentru care calculăm forma eșalon E.

! Atunci $\{v_i :$ pe coloana i din E avem pivot$\}$ este o bază

pentru $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \leq K^m$.

În particular: [dim V = nr de pivoți din E]

Dem. Ideea. Pe coloana i din E nu găsim pivot $\Leftrightarrow v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$.

În general, în forma eșalon pt matricea $(w_1, w_2, \dots, w_p \ v)$

nu găsim pivot pe ultima coloană $\Leftrightarrow$ sistemul $a_1 w_1 + \dots + a_p w_p = v$ are soluție

$\Leftrightarrow v \in \langle w_1, \dots, w_p \rangle$

[Prop] ① Orice SLI se extinde la o bază

② Din orice SG pt V se poate extinde o bază pt V.