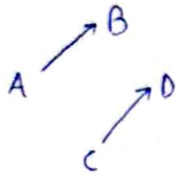
[Curs II]

• *Spații vectoriale*

Exemplu. Spațiu vectorilor din plan



vector = segment orientat

A,B și CD definesc același vector:

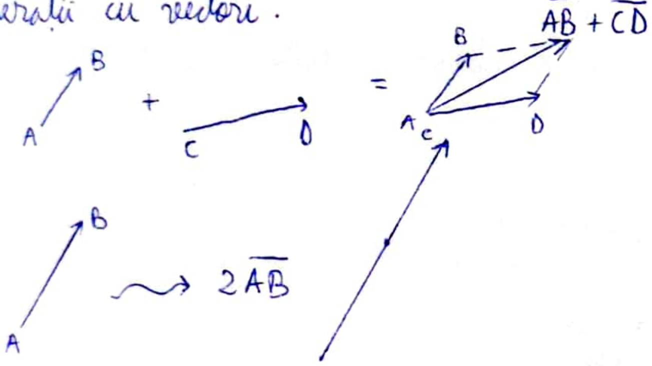
$\vec{AB} = \vec{CD}$

dacă AB și CD sunt paralele

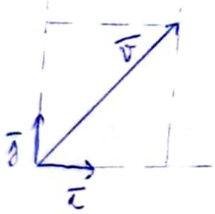
segmentele au aceeași orientare și aceeași lungime

<=> ABDC paralelogram (AD și BC au același mijloc)

* Operații cu vectori.



• o dată fixat un reper în plan, $\bar{i}, \bar{j}$ versorii axelor



$\forall\ \bar{v}$ în plan $\exists!\ a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j}$

[Definiție]: Fie K un corp comutativ (de ex $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p, \ldots$)

O mulțime nevidă V se numește K-spațiu vectorial dacă avem definite:

1. „+": $V \times V \to V$ adunarea a.î. $(V, +)$ grup abelian
2. și „*": $K \times V \to V$ înmulțire cu scalari

$a \in K, b \in V \quad a, b \mapsto a \cdot b$

① $a(v_1+v_2) = av_1 + av_2$ $\quad \forall a \in K$ și $v_1, v_2 \in V$

② $(a+b)v = av + bv$ $\quad \forall a, b \in K$ și $v \in V$

③. $(ab)v = a(bv)$ $\quad \forall a, b \in K$ și $v \in V$

④. $1v = v$ $\quad v \in V$

! $K \to$ scalari, $V \to$ vectori

[Exemple] 1). V vectori din plan : $\mathbb{R}$ - sp. vectorial

2) K corp $K^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in K, \forall i = \overline{1,n}\}$ este un K-sp. vectorial.

$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$

$\underset{\underset{K}{\uparrow}}{\lambda} (a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$

3). $M_{m,n}(K) \leftarrow$ matricile cu m linii și n coloane cu intrări din K

este un K-sp. vectorial

$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ $\quad i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

$\lambda A = \lambda (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$ $\quad i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

4). $K[X]$ polinoamele în nedeterminata X cu coef în corpul K

$\to$ este un K-sp. vectorial

5). $\mathcal{C}((a,b)) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f \text{ cont}\}$ este un $\mathbb{R}$-sp. vectorial

---

[Reguli de calcul într-un spațiu vectorial]

• Fie V un K-sp vectorial :

1. $a(v_1 - v_2) = av_1 - av_2$
2. $(a-b)v = av - bv$
3. $0_K v = 0_V$
4. $a 0_V = 0_V$

$\forall a, b \in K$

$\forall v_1, v_2, v \in V$

5. $(-a) \cdot v = a \cdot (-v) = -av$
6. Dacă $a \in K$ și $v \in V$ a.î. $a \cdot v = 0$ $\Rightarrow a = 0_K$ sau $v = 0_V$

Dem : ③ $0_K = 0_K + 0_K$

$$0_K \cdot v = (0_K + 0_K) v \overset{②}{=} 0_K v + 0_K v \quad / - 0_K \cdot v$$

$$0_V = 0_K \cdot v$$

④ $0_V = 0_V + 0_V \quad / \cdot a$

$$0_V \, a = (0_V + 0_V) a \overset{②}{=} 0_V a + 0_V a \quad / - 0_V a$$

$$0_V = a \cdot 0_V$$

⑤ $(-a) v + a v \overset{②}{=} [\underbrace{(-a) + a}_{0_K}] \, v = 0_K \cdot v = 0_V \Rightarrow$

$\Rightarrow (-a) v = -a v$

Analog $a(-v) + a v = a [\underbrace{(-v) + v}_{0_V}] = 0_V \Rightarrow$

$\Rightarrow a(-v) = -a v$

⑥ $a \cdot v = 0_V$. dacă $a = 0_K \Rightarrow \checkmark$

Să pp $a \neq 0_K \Rightarrow \exists \frac{1}{a} \in K$ $\quad a \cdot v = 0_V \; / \cdot \frac{1}{a}$

$$\frac{1}{a}(a v) = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot 0_V}_{0_V} \Rightarrow v = 0_V$$

Def Fie V un K-sp vectorial. O submulțime pe $W \subseteq V$ s.n subspațiu vectorial în V dacă W cu restricțiile operațiilor are o structură de K-sp. vectorial.

Prop $_K V$ și $W \subseteq V$. Urm. afirm sunt echiv:

1. W este subsp. vectorial în V
2. $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 + w_2 \in W$
3. $\forall a \in K$ și $w \in W : a \cdot w \in W$
4. $\forall w_1, w_2 \in W, \forall a, b \in K : a w_1 + b w_2 \in W$

Dem 1. → 2 → 3

$$\left.\begin{array}{l} a \in K,\ w_1 \in W \Rightarrow a w_1 \in W \\ b \in K,\ w_2 \in W \Rightarrow b w_2 \in W \end{array}\right| \Rightarrow a w_1 + b w_2 \in W$$

3 → 1 $(W, +)$ grup abelian, subgrup $(V, +)$ $\quad \forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 - w_2 =$

$= 1 \cdot w_1 + (-1) w_2 \in W \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

[Exemple] 1) $\{0_V\}$, V subsp. vectoriale în $\underset{K}{V}$

2). $\mathbb{R}_{\leq n}[x] = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grad} f \leq n \} \cup \{0\}$

este subsp. vectorial în $\mathbb{R}[x]$

3) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \leq M_2(\mathbb{R})$ subsp. vectorial

4) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x + 17y = 0 \right\} \leq \mathbb{R}^2$

5). Fie $A \in M_{m,n}(K)$. Notăm

$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n : A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

→ soluțiile sistemului omogen cu matricea A

Atunci $\operatorname{Ker} A$ este un K-sp. vectorial, subsp. vectorial în K^n

Dem: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow \operatorname{Ker} A \neq \emptyset$

Fie $\alpha, \beta \in K$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ și $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$.

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot Ax + \beta Ay = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \operatorname{Ker} A$.

$\operatorname{Ker} A$ este subsp. vectorial în K^n.

"nucleul matricii A"

Obs.: Dacă $W \leq V \Rightarrow 0_V \in W$

Dem: $\emptyset \neq W \Rightarrow \exists x \in W \Rightarrow -x \in W \Rightarrow \underbrace{x + (-x)}_{0_V} \in W$

[Def] Fie V_1 și V_2 subsp. vectoriale în V.

Notăm $V_1 + V_2 = \{ x + y \mid x \in V_1, y \in V_2 \}$

[Prop] $V_1 + V_2$ este un subsp. vectorial în V (numit spațiul sumă)

Dem: Fie $a, b \in K$, $w_1, w_2 \in V_1 + V_2 \Rightarrow w_1 = x_1 + y_1$ cu $x_1 \in V_1$ și $y_1 \in V_2$

$w_2 = x_2 + y_2$ $\quad x_2 \in V_1$ $\quad y_2 \in V_2$

$a w_1 + b w_2 = a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2)$

$= \underbrace{(a x_1 + b x_2)}_{\in V_1} + \underbrace{(a y_1 + b y_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$

[Prop] : $V_1, V_2 \leq V \Rightarrow V_1 \cap V_2$ este subsp vectorial in V.

$$\begin{array}{ccc} & V_1+V_2 & \\ \subseteq & & \supseteq \\ V_1 & & V_2 \\ \supseteq & & \supseteq \\ & V_1 \cap V_2 & \end{array}$$

Analog suma, intersecția unei familii de subspații definim

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \{ x_1 + \ldots + x_n : x_i \in V_i \ \forall i = \overline{1,n} \} \leq V$$

[Prop] Fie $V_1, V_2 \leq V$. Atunci

* $V_1 \cup V_2$ este ~~subgrup~~ subsp. vectorial in $V \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$ sau $V_2 \subseteq V_1$.

[Propoziție] Fie $V_1, V_2, \ldots, V_n \leq V$ a î $V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V$

Urm afirm sunt echiv:

a). $\forall x \in V \ \exists! \ x_i \in V_i \ i = \overline{1,n}$ a î

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

b). $\forall i = \overline{1,n} \quad V_i \cap \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} V_j \Big) = 0$

[Def] In situația anterioară spunem că V este suma directă a subsp $V_1 \ldots, V_n$ și scriem:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$$

Dem : $V_1 + \ldots + V_n = V \Rightarrow \forall x \in V \ \exists \ x_i \in V_i$ cu $x = x_1 + \ldots + x_n$ ...?

$\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ b) și b) $\Rightarrow$ a). Deci a) $\Leftrightarrow$ b)

* Caz particular $V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = V_1 + V_2 \\ V_1 \cap V_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in V \ \exists! \ x_1 \in V_1$ și $x_2 \in V_2$ cu $x = x_1 + x_2$

[Combinații liniare]

Fie V un K-sp. vectorial.

Def: Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ și $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, vectorul

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$ s.n o combinație liniară de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

* Notăm $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \;\; \begin{matrix} a_i \in K \\ \forall i = \overline{1,n} \end{matrix} \right\}$

Mai general, dacă $S \subseteq V$ $\quad \langle S \rangle = span_K(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;\middle|\; \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ x_1, \dots, x_n \in S \\ a_i \in K \; \forall i = \overline{1,n} \end{matrix} \right\}$

[Prop 7: $\langle S \rangle$ este un subsp vectorial în V, numit subsp generat de mulțimea S.

$\rightarrow S \subseteq \langle S \rangle$. Dacă $W \leq V$ cu $S \subseteq W$, atunci $\langle S \rangle \subseteq W$.

Def: Spunem că o mulțime $S \subseteq V$ este sistem de generatori pentru V. (S.G)

dacă $\langle S \rangle = V$.

- în cazul în care pt un V $\exists S$ finită cu $\langle S \rangle = V$, spunem că V este spațiu vectorial finit generat.

Ex: $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \; \forall i = \overline{1,n} \}$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este un sistem ~~pentru~~ de generatori pt $\mathbb{R}^n$.