Tema colectivă 3 - Grupa 143

Fie A, B, A', B' mulțimi a.î. $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'| \iff A \simeq A'$ și $B \simeq B'$

Demonstrați că:

1). $|A \amalg B| = |A' \amalg B'|$ ($\iff A \amalg B \simeq A' \amalg B'$)

2). $|A \times B| = |A' \times B'|$ ($\iff A \times B \simeq A' \times B'$)

3). $|B^A| = |(B')^{(A')}|$ ($\iff B^A \simeq B'^{A'}$)

4). $|A| \leq |B| \iff |A'| \leq |B'|$

5). $|A| < |B| \iff |A'| < |B'|$

Considerăm 2 bijecții: $A \xrightarrow{\varphi} A'$ și $B \xrightarrow{\psi} B'$

1). · Folosim reprezentarea sumei directe:

$A \amalg B = (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}) = \{(a,1) \mid a \in A\} \cup \{(b,2) \mid b \in B\}$

$A' \amalg B' = (A' \times \{1\}) \cup (B' \times \{2\}) = \{(a',1) \mid a' \in A'\} \cup \{(b',2) \mid b' \in B'\}$

· Def funcția:

$A \amalg B \xrightarrow{f} A' \amalg B'$; $\begin{cases} f(a,1) := (\varphi(a), 1) & \forall a \in A \\ f(b,2) := (\psi(b), 2) & \forall b \in B \end{cases}$

· Trb să dem că f este bijecție

- f injecție

Fie $(x,i), (y,j) \in A \amalg B$ a.î. $f(x,i) = f(y,j)$

(*). $f(x,i) = \begin{cases} (\varphi(x), 1) &, i = 1 \\ (\psi(x), 2) &, i = 2 \end{cases}$

$$f(y,j) = \begin{cases} (\varphi(y),1), & j=1 \\ (\psi(y),2), & j=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow i = j$

① Dacă $i = j = 1 \Rightarrow x, y \in A$ și $(\varphi(x),1) = f(x,i) = f(j,i) =$

$= (\varphi(y),1) \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\varphi(x) = \varphi(y) \\ \varphi \text{ inj}\end{array}\right| \Rightarrow x = y$

②. Dacă $i = j = 2 \Rightarrow x, y \in B$ și $(\psi(x),2) = f(x,i) = f(j,i) =$

$= (\psi(y),2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\psi(x) = \psi(y) \\ \psi \text{ inj}\end{array}\right| \Rightarrow x = y$

⓪.①.② $\Rightarrow (x,i) = (y,j) \Rightarrow f$ e injectivă (i)

- f surjecție

$$\begin{cases} \forall a' \in A', \exists a \in A \text{ a.î. } f(a,1) = f(\varphi^{-1}(a'),1) = (\varphi(\varphi^{-1}(a')),1) = (a',1) \\ \forall b' \in B', \exists b \in B \text{ a.î. } f(b,2) = f(\psi^{-1}(b'),2) = (\psi(\psi^{-1}(b')),2) = (b',2) \end{cases}$$

$\Downarrow$

f este surjectivă (ii)

Din (i) și (ii) $\Rightarrow f$ este bijecție $\Rightarrow A \amalg B \simeq A' \amalg B' \Rightarrow |A \amalg B| = |A' \amalg B'|$

2). $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ și $b \in B\}$

$A' \times B' = \{(a',b') \mid a' \in A'$ și $b' \in B'\}$

· Def funcția:

$g : A \times B \to A' \times B'$; $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ $\quad g(a,b) := (\varphi(a), \psi(b))$

· Dem că g este bijecție

- g injecție

Fie $(a,b), (x,y) \in A \times B$ a.î. $g(a,b) = g(x,y) \Leftrightarrow (\varphi(a), \psi(b)) =$

$= (\varphi(x), \psi(y)) \Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\psi(b) = \psi(y) \\ \psi \text{ inj}\end{array}\right| \Rightarrow b = y \\ \left.\begin{array}{l}\varphi(a) = \varphi(x) \\ \varphi \text{ inj}\end{array}\right| \Rightarrow a = x \end{array}\right| \Rightarrow (a,b) = (x,y) \Rightarrow g$ injecție (i)

- g surjecție

$\forall (a';b') \in A' \times B'$, $\exists (a,b) \in A \times B$ a.î. $g(a,b) = g(\varphi^{-1}(a'), \psi^{-1}(b')) =$

$= (\varphi(\varphi^{-1}(a')), \psi(\psi^{-1}(b')) = (a',b') \Rightarrow g$ surjecție (ii)

Din i și ii $\Rightarrow g$ bijecție $\Rightarrow A \times B \simeq A' \times B' \Rightarrow |A \times B| = |A' \times B'|$

3). $B^A := \{ \phi \mid \phi : A \to B \}$

$(B')^{(A')} := \{ \phi' \mid \phi' : A' \to B' \}$

- $\varphi : A \to A'$ bijecție $\Rightarrow \exists\, \varphi^{-1} : A' \to A$

  $\psi : B \to B'$ bijecție $\Rightarrow \exists\, \psi^{-1} : B' \to B$

  $\varphi^{-1} \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^{-1} = id_A$, $id_A : A \to A$

  $id_A(a) = a$

  $\psi^{-1} \circ \psi = \psi \circ \psi^{-1} = id_B$, $id_B : B \to B$

  $id_B(b) = b$

- Def fct h:

$$\underbrace{A' \xrightarrow{\varphi^{-1}} A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} B'}_{h(\phi)}$$

$h : B^A \to B'^{A'}$, $h(\phi) := \psi \circ \phi \circ \underset{\varphi}{\cancel{\phi}}^{-1}$ $\forall \phi \in B^A$

- Def fct k:

$$\underbrace{A \xrightarrow{\varphi} A' \xrightarrow{\phi'} B' \xrightarrow{\psi^{-1}} B}_{k(\phi') = h^{-1}(\phi')}$$

$k : B'^{A'} \to B^A$, $k(\phi') := \psi^{-1} \circ \phi^{-1} \circ \varphi$ $\forall \phi' \in B'^{A'}$

- Dem că h și k sunt inverse:

$$\left.\begin{array}{l} \forall \phi \in B^A \quad k(h(\phi)) = \psi^{-1} \circ \psi \circ \phi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \phi \\ \forall \phi' \in B'^{A'} \quad h(k(\phi')) = \psi \circ \psi^{-1} \circ \phi' \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \phi' \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow k = h^{-1} \Rightarrow h$ este inversabilă $\Rightarrow h$ bijecție

$\Rightarrow B^A \simeq B'^{A'} \Rightarrow |B^A| = |(B')^{(A')}|$

4). $|A| \le |B| \Leftrightarrow |A'| \le |B'|$

"$\Rightarrow$" $\left.\begin{array}{l} |A| \le |B| \\ |A| = |A'| \\ |B| = |B'| \end{array}\right| \Rightarrow |A'| \le |B'|$ ①

"$\Leftarrow$" $\left.\begin{array}{l} |A'| \le |B'| \\ |A'| = |A| \\ |B'| = |B| \end{array}\right| \Rightarrow |A| \le |B|$ ②

① + ② $\Rightarrow |A| \le |B| \Leftrightarrow |A'| \le |B'|$

5) $|A| < |B| \Leftrightarrow |A'| < |B'|$

"$\Rightarrow$" $\left.\begin{array}{l} |A| < |B| \\ |A| = |A'| \\ |B| = |B'| \end{array}\right| \Rightarrow |A'| < |B'|$ ①

"$\Leftarrow$" $\left.\begin{array}{l} |A'| < |B'| \\ |A'| = |A| \\ |B'| = |B| \end{array}\right| \Rightarrow |A| < |B|$ ②

① + ② $\Rightarrow |A| < |B| \Leftrightarrow |A'| < |B'|$