Seminar 11

Exc 1 Determinați elementele de ordin 8 din $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$, elementele de ordin 4 din $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$, și elementele de ordin 8 din $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{64}$.

Știm (vezi S10) că dacă $\left.\begin{array}{l} ord(x) = n < \infty, x \in G_1 \\ ord(y) = m < \infty, y \in G_2 \end{array}\right| \Rightarrow ord((x,y)) = [n,m]$

$(x,y) \in G_1 \times G_2 \to$ grupul pr. direct

1.1 $\{(\hat{k}, \bar{l}) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \mid ord((\hat{k},\bar{l})) = 8\}$

$ord((\hat{k},\bar{l})) = [ord(\hat{k}), ord(\bar{l})] = 8 \Rightarrow ord(\hat{k}) = 8$ sau $ord(\bar{l}) = 8$

$\left(\begin{array}{l} 40 = 2^3 \cdot 5 \\ 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array} \quad [40, 180] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360 \right)$

Lagrange $\Rightarrow$ $ord(\hat{k}) \mid 6 \Rightarrow ord(\hat{k}) \neq 8$
și $ord(\bar{l}) \mid 10 \Rightarrow ord(\bar{l}) \neq 8$ și

$\Rightarrow$ Nu există elemente de ordin 8 în $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$.

1.2 $\{(\hat{k}, \bar{l}) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15} \mid ord((\hat{k},\bar{l})) = 4\}$

$ord((\hat{k},\bar{l})) = [ord(\hat{k}), ord(\bar{l})] = 4 \Rightarrow (ord(\hat{k}), ord(\bar{l})) \in \{(4,1), (4,2), (4,4), (1,4), (2,4)\}$ (1)

$ord(\hat{k}) = 4$ sau $ord(\bar{l}) = 4$.

Lagrange $\Rightarrow ord(\hat{k}) \mid 12$ și $ord(\bar{l}) \mid 15$

Cum $ord(\bar{l}) \mid 15 \Rightarrow ord(\bar{l})$ nu e par $\overset{(1)}{\Rightarrow} ord(\bar{l}) = 1$.

$\Rightarrow ord(\hat{k}) = 4$. $(4 \mid 12)$

$ord(\bar{l}) = 1 \Rightarrow \bar{l} = \bar{0}$ în $\mathbb{Z}_{15}$

$ord(\hat{k}) = 4$; am văzut în S10 că $ord(\hat{k}) = \frac{12}{(12,k)} \Rightarrow \frac{12}{(12,k)} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (12, k) = 3 \xrightarrow[k<12]{12 = 2^2 \cdot 3} k \in \{3 \cdot 1, 3 \cdot 3\} = \{3, 9\}$

$\Rightarrow$ Elementele de ordin 4 din $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$ sunt $(\hat{3}, \bar{0})$ și $(\hat{9}, \bar{0})$.

Pb Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 4 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$

1) Descompuneți σ în produs de cicli disjuncți și în produs de transpoziții
2) Aflați $\mathrm{sgn}(\sigma)$ și calculați σ^{2021}, $\mathrm{ord}(\sigma)$, σ^{-1}.
3) Determinați toate permutările $\tau \in S_{10}$ a.î. $\tau^2 = \sigma$.
4) Fie $\rho \in S_{10}$ cu $\mathrm{ord}(\rho) = 10$. Poate fi ρ permutare pară?
5) Există permutări de ordin 35 în S_{10}? Dar de ordin 30?

Fie $(i_1 \dots i_k)$ un ciclu de lungime $k \geq 2$ din S_n. Transpoziția e un ciclu de lungime 2.

$(i_1 i_2 \dots i_k) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \cdot \dots (i_{k-1} i_k)$ (orice ciclu de lungime k se scrie ca produs de $k-1$ transpoziții; scrierea nu e unică!)

$\Downarrow$

- orice permutare se scrie ca produs de transpoziții

$\mathrm{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$; $\mathrm{sgn}((i_1 \dots i_k)) = (-1)^{k-1}$ (în particular, signatura unei transpoziții este -1)

Pentru o permutare $\sigma \in S_n$ $\mathrm{sgn}(\sigma)$ = produsul signaturilor ciclilor disjuncți din descompunerea lui σ în produs de cicli disjuncți

Dacă $\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} -1 & , \sigma \text{ s.n. permutare impară} \\ 1 & , \sigma \text{ s.n. permutare pară} \end{cases}$

$\sigma \in S_n$ $(S_n, \circ)$ - grup $\mathrm{ord}(\sigma)$ este ordinul elem. σ din grupul $(S_n, \circ)$

Dacă $\sigma = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \dots \cdot \varepsilon_k$ este descompunerea lui σ în produs de cicli disjuncți (vezi C10; $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i$ $(\forall) i, j \in \{1, \dots, k\}$) $\xRightarrow{\text{vezi}}$ Exc 3 (mai jos)

$\mathrm{ord}(\sigma) = [\mathrm{ord}(\varepsilon_1), \mathrm{ord}(\varepsilon_2), \dots, \mathrm{ord}(\varepsilon_k)]$.

$\mathrm{ord}((i_1 \dots i_k)) = k$ (ordinul unui ciclu de lungime k este egal cu k)

Exc3 Fie $(G,\cdot)$ un grup și $x,y\in G$ a.î. $x\cdot y = y\cdot x$. Dacă $ord(x)=n<\infty$, $ord(y)=m<\infty \Rightarrow ord(x\cdot y)=[n,m]:=t$.

Dem $(n,m)=d \Rightarrow \begin{matrix} n=dn_1 \\ m=dm_1 \end{matrix}$ $(n_1,m_1)=1$; $t=[n,m]=dn_1m_1$.

$$(x\cdot y)^t \xlongequal[x\cdot y=y\cdot x]{} x^t\cdot y^t \quad \Big((x\cdot y)^t = \underbrace{(xy)(xy)\cdot\ldots\cdot(xy)}_{t \text{ ori}} = (x\cdot x\, yy)\cdot(xy)\cdot\ldots\cdot(xy) \xlongequal[ind]{} x^t y^t \Big)$$

$$= x^{dn_1m_1}\cdot y^{dn_1m_1} = (x^n)^{m_1}\cdot(y^m)^{n_1} = 1\cdot 1 = 1$$

Pp prin reducere la absurd că $(\exists)\ t_1\in\mathbb{N}^*$ $\underline{t_1<t}$ a.î. $(x\cdot y)^{t_1}=1$

$(x\cdot y)^{t_1} = x^{t_1}\cdot y^{t_1} = 1 \Rightarrow y^{t_1}$ este inversul lui x^{t_1}.

Avem 2 cazuri: ① $x^{t_1}=1$ și ② $x^{t_1}\neq 1$.

① $x^{t_1}=1 \Rightarrow y^{t_1}=1$.

$$\left.\begin{matrix} x^{t_1}=1 \xRightarrow{Exc1} ord(x)=n \mid t_1 \\ y^{t_1}=1 \xRightarrow{S10} ord(y)=m \mid t_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow \underbrace{[n,m]}_{=t} \mid t_1 \xRightarrow{t_1\neq 0} t_1\geq t \ \text{ contradicție}$$

② $x^{t_1}\neq 1$ $\quad ord(x^{t_1}) \xlongequal[Exc2]{S10} \dfrac{ord(x)}{(ord(x),t_1)} = \dfrac{n}{(n,t_1)}$

$\boxed{\text{Dacă } ord(x)=n<\infty \text{ în } (G,\cdot) \text{ atunci } ord(x^{-1})=n}$

y^{t_1} este inversul lui $x^{t_1} \Rightarrow ord(y^{t_1}) = ord(x^{t_1}) = \dfrac{n}{(n,t_1)}$

S10 || Exc2

$$\frac{ord(y)}{(ord(y),t_1)} = \frac{m}{(m,t_1)} \Rightarrow$$

• $\dfrac{n}{(n,t_1)} = \dfrac{m}{(m,t_1)} \Rightarrow n\cdot(m,t_1) = m\cdot(n,t_1)$

$\cancel{d}n_1\cdot(dm_1,t_1) = \cancel{d}m_1\cdot(dn_1,t_1)$

$n_1\cdot(dm_1,t_1) = m_1\cdot(dn_1,t_1)$

$(n_1,m_1)=1$

$\Rightarrow n_1 \mid (dn_1,t_1) \Rightarrow m_1 \mid (dm_1,t_1) \Rightarrow$

(Ipoteză e că $t_1<t$ ($=dn_1m_1$))

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow n_1 \mid t_1 \\ \Rightarrow m_1 \mid t_1 \end{matrix}\right| \xRightarrow[(n_1,m_1)=1]{} n_1m_1 \mid t_1 \Rightarrow t_1 = k n_1 m_1 \quad k\in\mathbb{N}^*$$

$m_1 \cdot (dm_1, t_1) = m_1 \cdot (dm_1, t_2)$ $\qquad \boxed{t_1 = km_1m_2}$

$\cancel{m_1} \cdot \cancel{m_1} (d, km_1) = \cancel{m_1} \cdot \cancel{m_1} (d, km_2)$ $\qquad (dm_2, km_1m_2) = m_1 \cdot (d, km_1)$

$\qquad (dm_1, km_1m_1) = m_1 \cdot (d, km_2)$

$(d, km_2) = (d, km_2) = a$

$\begin{cases} m = dm_1 \\ n = dm_2 \end{cases}$ $(m_1, m_2) = 1$ $\qquad (d, km_2) = (d, km_2)$

$\left.\begin{array}{l} a \mid km_1 \\ a \mid km_2 \end{array}\right| \Rightarrow a \mid (km_2, km_1) = k(m_1, m_2) = k \Big| \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} a \mid k \\ a \mid d \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a \mid (d, k)}$ ...

$\boxed{\text{Exc 2}}$ $\qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 4 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$

① $\sigma = (1\ 2\ 9) \cdot (3\ 5\ 10\ 8\ 6) \cdot (4\ 7)$ $\to$ desc. în produs de cicli disj.

$(1\ 2\ 9) = (1\ 2) \cdot (2\ 9)$

$(3\ 5\ 10\ 8\ 6) = (3\ 5) \cdot (5\ 10) \cdot (10\ 8) \cdot (8\ 6)$

$\sigma = (1\ 2) \cdot (2\ 9) \cdot (3\ 5) \cdot (5\ 10)\ (10\ 8) \cdot (8\ 6) \cdot (4\ 7)$ $\to$ o desc. în produs de transpoziții.

② $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}((1\ 2\ 9)) \cdot \operatorname{sgn}((3\ 5\ 10\ 8\ 6)) \cdot \operatorname{sgn}((4\ 7)) =$
$= (-1)^{3-1} \cdot (-1)^{5-1} \cdot (-1)^{2-1} = (-1)^2 \cdot (-1)^4 \cdot (-1) = -1 \Rightarrow$

σ e permutare impară

$\operatorname{ord}(\sigma) = [\operatorname{ord}((1\ 2\ 9)), \operatorname{ord}((3\ 5\ 10\ 8\ 6)), \operatorname{ord}((4\ 7))] = [3, 5, 2] =$
$= 30.$

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 6 & 7 & 3 & 8 & 4 & 10 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 9\ 2)(3\ 6\ 8\ 10\ 5)(4\ 7)$

Obs! $(i_1\ i_2 \ldots i_k) = (i_2\ i_3 \ldots i_k\ i_1) = \ldots = (i_k\ i_1 \ldots i_{k-1})$

(același ciclu de lungime k poate fi scris în k moduri)

$\tau = (1\ 2\ 9) = (2\ 9\ 1) = (9\ 1\ 2)$ $\qquad (3\ 5\ 10\ 8\ 6)^{-1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \| \quad \checkmark$

$\tau^{-1} = (9\ 2\ 1)$ $\qquad (1\ 9\ 2) = (9\ 2\ 1) = (2\ 1\ 9)$ $\qquad (6\ 8\ 10\ 5\ 3) =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 9 \\ 9 & 1 & & 2 \end{pmatrix} = (1\ 9\ 2)$ $\qquad (3\ 6\ 8\ 10\ 5) =$

$= (8\ 10\ 5\ 3\ 6) = (10\ 5\ 3\ 6\ 8) = (5\ 3\ 6\ 8\ 10)$

Obs $(i_1\, i_2 \dots i_k)^{-1} = (i_k\, i_{k-1} \dots i_1)$ (Exc!)

$$\sigma^{2021} = \sigma^{30\cdot 67+11} = (\sigma^{30})^{67}\cdot\sigma^{11} = e^{67}\cdot\sigma^{11} = \sigma^{11}$$

$$\begin{array}{r|l} 2021 & 30 \\ \underline{180} & \overline{67} \\ 221 & \\ \underline{210} & \\ 11 & \end{array}$$

Pt σ^{11} → brute force (Exc!)

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 4 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 4 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 10 & 4 & 8 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \sigma^4 = \dots \quad \sigma^8 = \dots \quad \sigma^{10} = \sigma^8\sigma^2$$

$$\sigma^{11} = \sigma^{10}\sigma = \dots$$

$$\sigma^{11} = \big((1\,2\,9)\cdot(3\,5\,10\,8\,6)\cdot(4\,7)\big)^{11} \underset{\text{disjuncți comută}}{\overset{\text{orice 2 cicli}}{=\!=\!=}} (1\,2\,9)^{11}\cdot(3\,5\,10\,8\,6)^{11}\cdot(4\,7)^{11}$$

$\mathrm{ord}((1\,2\,9)) = 3 \Rightarrow (1\,2\,9)^{11} = (1\,2\,9)^2 = (1\,9\,2)$

$\mathrm{ord}((3\,5\,10\,8\,6)) = 5 \Rightarrow (3\,5\,10\,8\,6)^{11} = (3\,5\,10\,8\,6)^{5\cdot 2+1} = (3\,5\,10\,8\,6)$

$\mathrm{ord}((4\,7)) = 2 \Rightarrow (4\,7)^{11} = (4\,7)$

$\Rightarrow \sigma^{11} = (1\,9\,2)(3\,5\,10\,8\,6)(4\,7).$

③ Det permutările $\tau \in S_{10}$ a.î. $\tau^2 = \sigma$.

Deoarece $\mathrm{sgn}(\tau^2) = 1$ (vezi C11) și $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1 \Rightarrow$ Nu există permutări $\tau \in S_{10}$ a.î. $\tau^2 = \sigma$.

④ Fie $\rho \in S_{10}$ a.î. $\mathrm{ord}(\rho) = 10$. Poate fi $\mathrm{sgn}(\rho) = 1$?

vezi mai devreme

c.m.m.m.c. al lungimii ciclilor din desc. lui ρ în produs de cicli disjuncți.

$$10 = [10, 1] = [5, 2] = \dots$$