Curs I

Rezolvarea sistemelor de ecuații lineare prin metoda eliminării (Gauss-Jordan)

Def Un sistem liniar in necunoscutele $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ coeficienții necunoscutelor} \\ b_j \text{ termeni liberi} \end{array}\right\}$ sunt cunoscute

Def Spunem că $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sunt o soluție pt sistemul $(*)$ dacă satisface toate ecuațiile sistemului.

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to$ matricea sistemului

$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ $\quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\uparrow$ coloana term. liberi $\qquad \uparrow$ coloana necunoscutelor

- Forma matriceală a sistemului $*$: $\boxed{A\underline{x} = \underline{b}}$

Obs: • $\mathbb{R}$ poate fi înlocuit cu $\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$ (p prim), K corp.
- Dacă căutăm soluții în $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n$ (n neprim) : trb. făcute adaptări?

• [Terminologie]

• dacă sistemul
  - **NU** are soluții → s. incompatibil
  - are soluții → s. compatibil
    - → dacă soluția este unică → s. comp. det.
    - → dacă soluția **nu** este unică → s. comp. nedet.

Obs: Toată informația despre sistem este cuprinsă în matricea extinsă a sistemului:

$$\boxed{\bar{A} = (A \mid b)}$$

Exemplu: Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 - 3x_5 = 2 \end{cases}$$

3 ecuații, 5 necunoscute

$x_5 = s \in \mathbb{R} \Rightarrow x_4 = 2 + 3x_5 = 2 + 3s$

$x_3 = 2x_4 - x_5 + 1 = 2(2+3s) - s + 1 = 5s + 5$

$x_2 = t \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -2t + 5s + 5 - 2 - 3s + 5 =$

$x_1 = 3 - 2t + 3s$

{Mulțimea soluțiilor}

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 3-2t+3s \\ t \\ 5 + 5s \\ 2 + 3s \\ s \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}$$

matrice cu formă eșalon

[Def] O matrice spunem că este în formă eșalon.

dacă → liniile nule sunt în partea de [jos] a matricei.

→ pt liniile nenule, cea mai din stânga intrare $\neq 0$ s.n [pivot.]

→ pivotul de pe linia $i+1$ (dacă există) se află la dreapta pivoților de pe liniile anterioare

! Dacă în plus:

→ pivoții sunt toți $= 1$

→ pe coloana fiecărui pivot avem zerouri și sub pivot.

⇒ spunem că matricea este în formă eșalon redusă.

Def: Două sisteme se numesc echivalente dacă au aceleași soluții.

* Tranformări elementare (pe linii) pentru o matrice.

① $L_i \leftrightarrow L_j$ interschimbarea a 2 linii

② $L_i \leftarrow aL_i$; $a \neq 0$ înmulțirea liniei cu $a \neq 0$

③ $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ înmulțirea liniei j cu a și o adaugi la linia i $(i \neq j)$

Aceste transformări efectuate asupra ecuațiilor unui sistem liniar produc un sistem echivalent.

[Teoremă] Orice matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ poate fi adusă la o formă eșalon (redusă) prin transformări elementare pe linii.

* Ex: Aducem la forma eșalon matricea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_2 = L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

este în formă eșalon

∇ pt F.E redusă continuăm:

$$\xrightarrow[L_3 = -\frac{1}{3}L_3]{L_2 = -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[în formă eșalon redusă]

* Dem / Algoritm:

Dacă $A = O_{mn} \Rightarrow$ este în F.E.

Dacă $A \neq O_{mn}$

$\Rightarrow$ parcurgem cu coloana $i = 1$ și iterăm

→ pe coloana i căutăm un element $\neq 0$ (pivotul) sub linia ultimului pivot găsit.

→ notăm linia cu pivotul ales imediat sub linia pivotului anterior după care facem zerouri pe coloana pivotului nou, sub el.

→ până ajungem la ultima coloană

* Pt F.E. Redusă:

continuăm

→ facem pivoți = 1 cu transformări de tipul ②

→ facem zerouri deasupra pivoților

* [Rezolvarea sistemului prin metoda eliminării]

• Dat sistemul liniar $[A\underline{x} = \underline{b}]$ pentru matricea sa extinsă $\bar{A} = (A : b)$

• calculăm forma eșalon $\bar{E}$ și rezolvăm sistemul liniar care are matricea extinsă $\bar{E}$.

* Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases} \qquad A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F.E} \bar{E} = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

. ecuațiile aferente $\bar{E}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ -x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -1 \\ 0 = -3 \text{ fals în } \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ sistemul este incompatibil $[S = \emptyset]$

* sistemul e incompatibil $\Leftrightarrow$ avem pivot pe ultima coloană din $\bar{E}$

Dacă e compatibil:

→ necunoscutele corespunzătoare coloanelor fără pivot în $\bar{E}$ vor fi necunoscutele secundare

→ celelalte necunoscute sunt necunoscute principale care se determină în mod unic în funcție de necunoscutele secundare

* sistemul este compatibil
  - determinat $\Leftrightarrow$ avem pivot în $\bar{E}$ pe toate coloanele cu excepția ultimului
  - nedeterminat ← grad = nr. coloanelor fără pivoți

! Caz particular de sistem

Să pp că avem un sistem determinat cu forma eșalon redusă.

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \dots & & & c_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= c_1 \\ x_2 &= \dots c_2 \\ &\dots \\ x_k &= \dots c_k \end{aligned} \leftarrow \text{soluție unică}$$

* citim soluția sistemului direct din $\bar{E}$

* Aplicație : aflarea inversei unei matrici

Def: O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește inversabilă dacă $\exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î.

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

. dată $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, construim matricea dublă $(A \mid I_n) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$.

pentru care calculăm forma eșalon redusă $(B \mid C)$

Atunci [A este inversabilă] $\Leftrightarrow$ [$B = I_n$], iar atunci $C = A^{-1}$