1. Se dau n cuburi cu laturile **diferite două câte două**. Fiecare cub are o culoare, codificată cu un număr de la 1 la p (p dat). Să se construiască un turn de înălţime maximă de cuburi în care un cub nu poate fi aşezat pe un cub de aceeaşi culoare sau cu latură mai mică decât a sa

Soluţie

Strategia Greedy pentru rezolvarea acestei probleme este următoarea: La primul pas se selectează cubul cu latura cea mai pare. Ulterior, la fiecare pas este selectat cubul cu latura cea mai mare care se poate aşeza peste ultimul cub selectat**.** Pentru aceasta vom ordona cuburile descrescător după latură.

Corectitudine - Similar cu problema spectacolelor (v. curs Greedy)

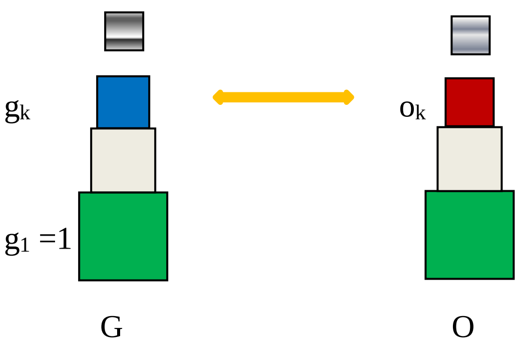
Notăm cu l_i, i=1..n laturile cuburilor şi cu c_i, i=1..n culorile cuburilor.

Renumerotăm cuburile astfel încât $l_1 > l_2 > \ldots > l_n$. Astfel, primul cub selectat de algoritmul greedy este cubul 1.
Fie G = $\{g_1=1, \ldots, g_t\}$, $t \le p$ (cu $g_1 < \ldots < g_t$) soluția Greedy.

Varianta 1 :
Considerăm o soluție optimă O = $\{o_1, \ldots, o_p\}$ (cu cuburile notate astfel încât $o_1 < \ldots < o_p$) care are **un număr maxim de elemente inițiale în comun cu soluția Greedy** G. Presupunem $O \neq G$.
Atunci există un indice $k \le t$ astfel încât $g_k \neq o_k$, altfel am avea $g_1 = o_1, \ldots, g_t = o_t$, adică $G \subseteq O$ şi $t < p$. Dar, deoarece cubul o_{t+1} este compatibil cu cubul $o_t = g_t$, algoritmul greedy ar mai fi avut cuburi compatibile cu g_t din care să selecteze, deci ar fi furnizat o soluţie cu mai multe elemente (un turn mai înalt).
Fie $k \le t$ cel mai mic indice astfel încât $g_k \neq o_k$ (prima poziţie pe care soluţia greedy G şi soluţia optimă O diferă). La pasul la care algoritmul a ales cubul g_k şi cubul o_k era neselectat şi putea fi aşezat peste cubul $g_{k-1} = o_{k-1}$. Deoarece cubul g_k a fost cel selectat, rezultă că $l g_k > l o_k$ (g_k a fost selectat deoarece avea latură mai mare). Avem atunci

$$l g_k > l o_k > l o_{k-1} > \ldots > l o_p$$

Dacă $c_{g_k} = c_{o_k}$ putem înlocui în soluţia optimă O cubul o_k cu g_k şi obţinem tot un turn corect $O' = O - \{o_k\} \cup \{g_k\}$, cu înălţime mai mare decât cel optim dat de O (deoarece $l g_k > l o_k$) , contradicţie.
Dacă $c_{g_k} \neq c_{o_k}$, atunci putem insera în turnul dat de O cubul g_k între $o_{k-1} = g_{k-1}$ şi o_k şi obţinem tot un turn corect $O' = O \cup \{g_k\}$, cu înălţime mai mare decât cel optim dat de O, contradicţie.



Varianta 2 (similar) – Demonstrăm prin inducţie după n că algoritmul greedy construieşte o soluţie optimă.

Pentru $n = 0, 1$ afirmaţia este evidentă.

Fie $n \geq 2$. Presupunem că algoritmul greedy construieşte o soluţie optimă pentru orice mulţime de cel mult $n - 1$ cuburi

Fie S o mulţime de n cuburi.

a) **Există o soluţie optimă pentru S care conţine cubul 1 (primul cub adăugat la soluţie de algoritmul greedy).**

Într-adevăr, fie $O = \{o_1,\dots,o_p\}$ o soluţie optimă pentru S cu cuburile notate astfel încât $o_1 < \dots < o_p$, deci $l_{o_1} > \dots > l_{o_p}$. Dacă cubul 1 aparţine lui O, atunci afirmaţia a) este adevărată. Presupunem că 1 nu aparţine lui O.

Dacă $c_1 = c_{o1}$ putem înlocui în soluţia optimă O cubul o_1 cu 1 şi obţinem tot un turn corect $O' = O - \{o_1\} \cup \{1\}$, cu înălţime mai mare decât cel optim dat de O (deoarece $l_1 > l_{o1}$) , contradicţie.

Dacă $c_1 \neq c_{o1}$ putem insera în turnul dat de O cubul 1 sub cubul o_1 şi obţinem tot un turn corect $O' = O \cup \{1\}$, cu înălţime mai mare decât cel optim dat de O, contradicţie.

b) Fie r primul cub având culoare diferită de cubul 1 (următorul cub ales de algoritmul greedy) şi $S' = \{r, r+1, \dots, n\}$ (mulţimea cuburilor care pot aparţine unui turnul care are la bază cubul 1). Conform ipotezei de inducţie soluţia construită de algoritmul greedy pentru S', anume $G' = G - \{1\}$, este soluţie optimă pentru S'. Rezultă că $G = G' \cup \{1\}$ este soluţie optimă pentru S (altfel, conform punctului a) ar exista o soluţie optimă O pentru S care conţine cubul 1 cu înălţime mai mare decât G; dar atunci $O - \{1\}$ este soluţie posibilă pentru S' cu înălţime mai mare decât $G - \{1\} = G'$, ceea ce contrazice optimalitatea lui G')