问题求解（二）作业（第五周）

161180162 许致明

2018 年 4 月 3 日

CS 第四章

4.1-16

使用相同方法分解后，假设不再成立，归纳法不能证明结论。

4.1-17

$$n_{\text{顶点}} = n_{\text{三角}} + 2$$

假定对于 n 边形成立，则将 n 边形相隔一个点的两个顶点相连，得到了一个 $n-1$ 边形，它的顶点数少 1，且三角形数也少 1，依此推至三角形仍然成立。故上述关系成立。

4.2-8

$$\begin{aligned} T(0) &= 2000 \\ T(n) &= 2 \cdot T(n-1) + 2000,\ n \geq 2 \\ \therefore T(n) &= 1000 \times (2^{n+1} - 2) \end{aligned}$$

4.2-11

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n-1) + n \cdot 2^n,\ T(0) = 1 \\ \rightarrow \frac{T(n)}{2^n} &= \frac{T(n-1)}{2^{n-1}} + n \\ \rightarrow a_n &= \frac{T(n)}{2^n} \\ \rightarrow a_n - a_{n-1} &= n \\ \therefore a_n &= \frac{n(n+1)}{2} + a_0 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1 \\ \therefore T(n) &= 2^n \cdot a_n \\ &= 2^n + 2^{n-1}n(n+1) \end{aligned}$$

4.3-9

Number	Size	Work	Work total
1	n	n	n
8	$n/2$	$n/2$	$4n$
	$\cdots$	$\cdots$	
$8^{\log n} = n^3$	1	1	$1 \cdot n^3 = n^3$

a.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\log n} 4^i n \\
&= n \sum_{i=0}^{\log n} 4^i \\
&= n \frac{1 - 4^{(\log n)+1}}{1-4} \\
&= n\left(\frac{4n^2-1}{3}\right) \\
&= \Theta(n^3)
\end{aligned}
$$

Number	Size	Work	Work total
1	n	n^3	n^3
8	$n/2$	$(n/2)^3$	n^3
	$\cdots$	$\cdots$	
$8^{\log n} = n^3$	1	1	$1 \cdot n^3 = n^3$

b.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\log n} n^3 \\
&= n^3 \sum_{i=0}^{\log n} 1 \\
&= n^3 \cdot \log n \\
&= \Theta(n^3 \log n)
\end{aligned}
$$

Number	Size	Work	Work total
1	n	n	n
3	$n/2$	$n/2$	$3n/2$
	$\cdots$	$\cdots$	
$3^{\log n}$	1	1	$1 \cdot 3^{\log n}$

c.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\log n} \left(\frac{3}{2}\right)^i n \\
&= n \sum_{i=0}^{\log n} \left(\frac{3}{2}\right)^i \\
&= n \cdot \left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{(\log n)+1}}{1-\frac{3}{2}}\right) \\
&= \Theta(3^{\log n})
\end{aligned}
$$

Number	Size	Work	Work total
1	n	1	1
1	$n/4$	1	1
	$\cdots$	$\cdots$	
1	1	1	1

d.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\log n} 1 \\
&= \Theta(\log n)
\end{aligned}
$$

Number	Size	Work	Work total
1	n	n	n
3	$n/3$	$n/3$	n
	$\cdots$	$\cdots$	
$3^{\log n} = n$	1	1	$1 \cdot n = n$

e.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\log n} n \\
&= \Theta(n \log n)
\end{aligned}
$$

4.4-1

a. *Case c:* $T(n) = \Theta(n^3)$

b. *Case b:* $T(n) = \Theta(n^3 \log n)$

c. *Case c:* $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$

d. *Case b:* $T(n) = \Theta(\log n)$

e. *Case a:* $T(n) = \Theta(n^2)$

4.4-6

证明. 第 i 层总花费：

$$
a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^c = n^c \left(\frac{a}{b^c}\right)^i
$$

最底层花费：

$$
\log_b n \times d
$$

则：

$$T(n) = n^c \sum_{i=0}^{\log_b n-1} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i + \log_b n \times d$$

可得：

1. $\log_b a < c$ 时，$a/b^c < 1$，$T(n) = \Theta(n^c)$

2. $\log_b a = c$ 时，$a/b^c = 1$，$T(n) = \Theta(n^c \log n)$

3. $\log_b a > c$ 时，$a/b^c > 1$，$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

□

4.5-8

证明. 对于 $n = 1$ 的基本情况，$T(1) = O(1) = d$ 成立；
假定对于 $n = 2^k$，$T(n) = n^3$ 成立，下证对于 $n = 2^{k+1}$，此解 $T(n) = n^3$ 仍成立：

$$\begin{aligned}
T(2^{k+1}) &= 8T(2^k) + 2^k \log 2^k \\
&= O(8 \cdot (2^k)^3) + 2^k \log 2^k \\
&= O((2^{k+1})^3) + 2^k \log 2^k \\
&= O((2^{k+1})^3) \\
\therefore T(n) &= O(n^3)
\end{aligned}$$

□

4.5-9

证明. 对于 $n = 1$ 的基本情况，$T(1) = d \geq c$ 成立
当 $n = 2$ 时，$T(2) = 8T(1) + 2 = 8d + 2 \geq 8 \cdot 8$
假设

$$T\left(\frac{n}{2}\right) \geq c\left(\frac{n}{2}\right)^3 = c \cdot \frac{n^3}{8}$$

则

$$\begin{aligned}
T(n) &\geq 8 \cdot c\frac{n^3}{8} = \frac{cn^3}{8} \\
\therefore T(n) &= \Omega(n^3) \\
\therefore T(n) &= \Theta(n^3)
\end{aligned}$$

□

4.5-10

证明. 对于 $n = 12$ 的基本情况，$T(12) = 2T(1) + n \leq cn$
假定

$$T\left(\frac{n}{3} - 3\right) lec \left(\frac{n}{3} - 3\right)$$

则

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq 2c\left(\frac{n}{3} - 3\right) + n \\
&= \left(\frac{2}{3}c + 1\right)n - 6c \\
&\leq cn \\
\therefore T(n) &= O(n)
\end{aligned}$$

□