

# 问题求解（二）作业（第三周）

161180162 许致明

2018 年 3 月 17 日

## CS 第一章

### 1.13

设第  $i$  天得到的钱为  $p_i$ ，第  $i$  天拥有钱的总数为  $P_i$ ，则：

$$\begin{aligned} p_1 &= P_1 = 1 \\ p_i &= 2 \cdot p_{i-1}, i \geq 2 \\ \therefore p_i &= 2^{i-1} \quad (\text{乘法原则}) \\ \therefore P_n &= \sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 2^n - 1 \quad (\text{加法原则}) \end{aligned}$$

由此可得，第 20 天钱的总数为  $2^{20} - 1 = 1048575$ ，第  $n$  天钱的总数为  $2^n - 1$ 。

### 2.5

- (1) 当  $k \leq n$  时： $n^k \cdot k!$
- (2) 当  $k > n$  时，要求发出所有的水果，则有人可能得到多于一块。此时方案个数为： $n^k$ 。

### 2.15

若无先后顺序，则有  $(n-1)(2n-1)$  种方式，若考虑先后顺序，则有  $2(n-1)(2n-1)$  种方式。

### 5.4

$n^k$

### 5.12

- (a)  $S(n, n) = 1$ : 将  $n$  个元素分为  $n$  类，则每个元素为一类，一类仅含一个元素。类与类之间不可

区分，因此  $S(n, n) = 1$ 。

$S(n, 1)$ : 所有元素均在一个类中，因此为 1。

- (b)  $S(n, n) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$ : 将  $n$  个元素分为  $k$  个类可以看作两个过程的和：

1.  $n-1$  个元素构成了  $k-1$  个类，则第  $n$  个元素氮素构成一个集合，即  $S(n-1, k-1)$
2.  $n-1$  个元素已经构成了  $k$  个类，则将第  $n$  个元素插入到任意一类中，即  $k \cdot S(n-1, k)$ 。

上述即为此等式的含义。

- (c) 列表如下：

n/k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	65	15	1

### 5.14

运行缓慢的原因是递归程序不断重复计算已经算过的数据。通过猜测并证明可以得到此递归过程的递归式解为指数函数，随着输入数据的增大，算法复杂度上升极快。

一个改进的版本如下：

```
int Binom(int n, int k)
{
    int ret=1;
```

```

if (k>n)
{
    printf("Error: _k_>_n!");
    exit(1);
}
else
{
    int kk=1;
    for (int i=1; i<=k; ++i)
        kk*=i;
    for (int i=n; i>=n-k+1; --i)
        ret*=i;
    ret/=kk;
}
return ret;
}

```

此算法是伪多项式复杂度，对于较小的  $n, k$ ，运行时间为  $O(n)$ ，好于递归版本的指数复杂度。