问题求解（二）作业（第七周）

161180162 许致明

2018 年 4 月 21 日

CS 第五章

5.1.10

(1) 可将 52 张牌视作 13 张不同牌重复四次得到，则形成顺子需要在这 13 张牌中选出连续的 5 张。这种情况共有 $13-5+1=9$ 种。故加上这 5 张牌的花色，共有 $9\times 4^5=9216$ 种方法。

(2) 记此为事件 A，则：

$$P(A)=\frac{9216}{\binom{52}{5}}=0.0035$$

5.1.12

记两次顶图案相同为事件 A，则 A 发生时，顶部均为正方形、圆或三角形。

$$P(A)=\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{6}\right)^2+\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{7}{18}$$

5.2.4

设至少有一个是红色或白色为事件 A，则 A 的反面是没有任何一个球是红色且没有任何一个球是白色。显见 $P(\overline{A})=0$，故 $P(A)=1-P(\overline{A})=1$。
设至少有一个球为红色为事件 B，则 B 的反面是没有任何一个球是红色，这种情况仅发生在取走的两个球均为红色时，故：

$$P(B)=\frac{1}{\binom{6}{2}}=\frac{1}{15}$$

5.2.10

设每个地点有至少一个值为事件 A，显见当 $k>n$ 时，A 不可能发生，$P(A)=0$；
当 $k\le n$ 时，$P(A)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$

5.3.2

记连续两次出现正面为事件 A，正面向上的次数为偶数为事件 B，则：

$$\begin{aligned}P(A)&=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^3\\&=\frac{3}{8}\\P(B)&=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3\\&=\frac{1}{2}\\P(A|B)&=P(A\cap B)/P(B)\\&=\frac{2}{8}/\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\neq P(A)\end{aligned}$$

故这两个事件不互相独立。

5.3.6

记面答对任意的一道题为事件 A，则：

$$P(A)=60\%\times 1+40\%\times\frac{1}{2}=\frac{4}{5}$$

记此事件为 B，则：

$$\begin{aligned}P(B)&=60\%+40\%\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2\right)\\&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

5.3.12

记男孩为 b，女孩为 g，则所有可能为（先出现的年龄大）：

$$\{(b,b),(b,g),(g,g),(g,b)\}$$

记有两个女孩为事件 A，其中一个是女孩为事件 B，则：

$$P(A) = \frac{1}{4}$$
$$P(B) = \frac{3}{4}$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$
$$\therefore P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{1}{3}$$

记有两个男孩为事件 C，年长的是男孩为事件 D，则：

$$P(C) = \frac{1}{4}$$
$$P(D) = \frac{1}{2}$$
$$P(C \cap D) = \frac{1}{4}$$
$$\therefore P(C|D) = P(C \cap D)/P(D) = \frac{1}{2}$$

5.4.4

可知一共有两种序列满足条件，记此事件为 A，则：

$$P(A) = 0.8^4 \times 0.2 + 0.2 \times 0.8^4 = \frac{512}{3125}$$

记恰好答对 4 道题为事件 B，则：

$$P(B) = \binom{5}{4}(0.8)^4 \times 0.2 = \frac{256}{625}$$

5.4.10

$$E(c) = \sum X_i P(s_i) = c \sum P(s_i) = c$$

5.4.12

不妨设考试共有 N 道题目，此学生掌握了 r 的考试内容（$0 \le r \le 1$）。则记答对的题目个数为 n，答错的题目个数为 m，可得：

$$\begin{aligned} n &= N \cdot r + \frac{1}{5} \cdot N \cdot (1 - r) \\ &= \frac{N}{5}(1 + 4r) \\ \therefore m &= N - n \\ &= \frac{4N}{5}(1 - r) \end{aligned}$$

$$\because n - y \cdot m = Nr$$
$$\frac{N}{5}(1 + 4r) - y \cdot \frac{4N}{5}(1 - r) = Nr$$
$$y = \frac{1}{4}$$

5.4.15

证明.

$$E(cX) = \sum_{s:s \in S} cX(s)P(s) = c \sum_{s:s \in S} X(s)P(s) = cE(X)$$

□