问题求解（二）作业（第七周）

161180162 许致明

2018 年 4 月 27 日

CS 第五章

5.6.4

$P(A) = P(K) = P(Q) = P(J) = \frac{2}{9}, P(K) = \frac{1}{9}$. 设赢钱的期望为 X，则：

$$\begin{aligned}
&E[X] \\
&= P(A) \cdot (1 + E[X]) + P(J) \cdot 2 + P(Q) \cdot 3 + P(K) \cdot 4 \\
&= \frac{12}{7}
\end{aligned}$$

故理智人最多花 $\frac{12}{7}\$$ 玩这个游戏。

5.6.8

证明.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} E[X|F_i]P(F_i) &= \sum_{x}\sum_{i=1}^{n} xP(X = x|F_i)P(F_i) \\
&= \sum_{x}\sum_{i=1}^{n} x\frac{P(X = x \cap F_i)}{P(F_i)} \cdot P(F_i) \\
&= \sum_{x}\sum_{i=1}^{n} xP(X = x \cap F_i) \\
&= \sum_{x \in S} xP(X = x) \quad (\because \bigcup_{i=1}^{n} F_i = S) \\
&= E[X]
\end{aligned}$$

□

5.7.2

$E[X_i] = P(X_i = 1) = 0.6$. $X_i \sim B(1, 0.6)$, $\therefore D[X] = 0.24$. $\sum_{i=1}^{5} X_i = X$，因为 $X_1, X_2, \ldots, X_5$ 相互独立。

5.7.4

$E[X] = 100 \times 0.6 = 60, D[X] = 100 \times 0.6 \times 0.4 = 24,$
$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = 2\sqrt{6}$

5.7.6

$25:\ D[X] = 25 \times 0.8 \times 0.2 = 4$
$100:\ D[X] = 16$
$400:\ D[X] = 64$
改用标准差。

5.7.12

设题目共有 n 道，$I_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 题答对} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$。则：

$$P(X_i = 1) = 4/5,\ D[X_i] = \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$$

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] = 0.16n$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = 0.4\sqrt{n}$$

$$\therefore 2 \cdot \sigma[X] = 0.05n$$

$$n = 256$$

TC 第五章

5.2.4

设 $I_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个客人拿到了他的帽子} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$，则 $P(I_i = 1) = 1/n, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$。设 X 为最终

拿到自己的帽子的客人数，则：

$$E[X]=\sum_{i=1}^{n}E[I_i]=\sum_{i=1}^{n}P(I_i)=1$$

5.2.5

设 $I_{ij}, i<j$ 为指示器变量，$I_{ij}=\begin{cases}1, & A[i]>A[j]\\ 0, & 否则\end{cases}$。设逆序对的个数为 X，则：

$$\begin{aligned}
E[X] &= E\left[\sum_{i<j} I_{ij}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} I_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P\left(A_i>A_j\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} n-i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= \frac{n(n-1)}{4}
\end{aligned}$$

5.3.2

不能，考虑若 $A=\{1,2,3\}$，则此算法不能生成排列 $\{3,2,1\}$。

5.2.3

产生各种排列的概率并不相等，考虑 $n=3$ 时，循环进行了 3 次，在三个位置选择元素放入，则共有 $3^3=27$ 种方式，它们出现的概率相等。但 3 个元素的全排列共有 $3!=6$ 种，不是 27 的因数，所以这 27 种选择方案不能均等映射到 6 种全排列上。故得到各种全排列的概率不等。

5.2.4

证明. 由 *offset* 等可能的取 $1-n$ 中的所有值，所以 A 中任意元素 $A[i]$ 落在 $B[i+1], B[i+2], \ldots, B[i]$ 的概率均为 $1/n$。

下证此算法得到的全排列概率并不均等：

考虑元素 $A[i], A[i+1], 1\le i\le n-1$，则由于这是两个任意的元素，在 B 中，$A[i]$ 在 $A[i+1]$ 之前或之后的概率相等。而使用此算法得到的排列中，有 $1-\frac{i+1}{n}$ 的概率 $A[i]$ 仍在 $A[i+1]$ 前，$\frac{i+1}{n}$ 的概率 $A[i]$ 在 $A[j]$ 后，与均匀的全排列不符，故此算法得到的排列并不是均匀分布的。 □