问题求解作业讲解

EX9-EX10

助教：徐寅

EX9-4.3.4.9

- 参照引理4.3.4.8的证明，根据4.28得到下面这个式子

$$
\begin{aligned}
d &= \sum_{i\in U} w_i - \sum_{j\in T^*} w_j \\
&= \frac{\sum_{i\in U} w_i - \sum_{j\in T^*} w_j}{\sum_{j\in T^*} w_j} \sum_{j\in T^*} w_j \\
&\le \varepsilon \sum_{j\in T^*} w_j \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

- 然后完成推导：

$$
\begin{aligned}
R(I,\varepsilon) &\le 1 + \frac{d(1+\delta)}{cost(T^*)} \\
&\le 1 + (1+\delta)\frac{\varepsilon \sum_{j\in T^*} w_j}{cost(T^*)} \\
&\le 1 + (1+\delta)^2 \frac{\varepsilon \sum_{j\in T^*} w_j}{\sum_{j\in T^*} w_j} \\
&\le 1 + (1+\delta)^2 \varepsilon
\end{aligned}
$$

EX9-4.3.4.13

- 有兴趣的同学可以参考paper《**Fast Approximation Algorithms for the Knapsack and Sum of Subset Problems**》
- 首先设计一个近似比为2的算法：
  - 将所有物品按照价格重量比从大到小排序，然后拿到拿不下为止，作为解法1；
  - 价格最高的单个物品作为解法2；
  - 输出解法1和解法2中更好的那个，记为C
- 令 $d = \frac{\varepsilon C}{(1+\varepsilon)n}$，剩余证明部分参照4.3.4.12

EX9-附加题

完整地写出 MOD-SKP 是解 $\mathbf{KP}_\delta$ 的 PTAS 的证明。

- PTAS的定义：误差率为ε的算法，其时间复杂度要多项式于输入规模|x|。
- 根据ex4.3.4.9，我们已经有了$\varepsilon(1+\delta)^2$的误差率，δ为常数的情况下，可以很轻松地完成证明。

EX10-4.3.5.6

- 第一问：只需在原图中添加权重为0的边qs，然后运行算法4.3.5.1即可。
  - 要说明此时最小生成树必定包含qs（为什么？）
  - DFS时要先走qs保证路径中qs相邻。
- 第二问：感兴趣的同学可以查看论文《**Analysis of Christofides' heuristic: some paths are more difficult than cycles**》，于1991年提出。
  - 更感兴趣的同学可以查看2011年的论文《**Improving Christofides' Algorithm for the s-t Path TSP**》，将近似比进一步压缩到了$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

EX10-4.3.5.11

- 直接回顾算法4.3.5.1的证明，我们先对最小生成树T添加重边，然后根据DFS的遍历路径上的点序缩边。Distance影响的便是缩完边之后相比原来的路径长度可能会增大(1+r)倍，而添加完重边的树T‘的总边长必不大于两倍的最优解，因此近似比为2(1+r)
- 而CHRISTOFIDES算法的近似比是r的平方项，所以当r足够大时4.3.5.1的输出更优。

EX10-4.3.5.13

- 参照Lemma 4.3.5.12的证明，将原版4.3.5.1算法的证明中4.32步替换为

$$cost(T) = \sum_{e \in E(T)} c(e) \leq (1+r)^{\lceil \log_2 n \rceil} \cdot cost(H_{Opt})$$

- 代入证明最终得到

$$\begin{aligned} cost(\overline{H}) &\leq 2 \cdot (1+r)^{\lceil \log_2 n \rceil} \cdot cost(H_{Opt}) \\ &= O\left(n^{\log_2(1+r)}\right) \cdot cost(H_{Opt}) \end{aligned}$$

EX10-附加题

设计一个找最小完美匹配的算法。

- 解法开放，合理即可。
- 例：直接将权值取反后使用最大权匹配算法，如Edmond的带花树算法。