

# Analyse 1

Steven

November 13, 2018

## 1 Week 1

**Def:**  $\leq$  is totale ordening

**Als:**  $\leq$  partiele ordening

$\forall x : x \leq x$  (reflexief)

$\forall x, y : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$  (transitief)

$\forall x, y : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$  (antisymmetrisch)

**Als:**  $\leq$  totaal is

$\forall x, y : x \leq y \vee y \leq x$

**Def:** geordend lichaam

Een lichaam  $(F, +, *, 0, 1)$  met een totale ordening  $\leq$  op  $F$

**Als:**  $\forall a, b, c \in F : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

**Als:**  $\forall a, b, c \in F : a \leq b \wedge c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$

**Def:**  $b$  is bovengrens

$A \subseteq X, b \in X$

**Als:**  $\forall x \in X : x \leq b$

**Def:**  $A$  is naar boven begrensd

**Als:**  $A$  heeft bovengrens

**Def:**  $a$  is grootste element

$A \subseteq X, a \in A$

**Als:**  $a$  is bovengrens

**Def:** supremum/kleinste bovengrens  $A$

Zij  $A \subseteq X, b \in X$

**Als:**  $b$  bovengrens  $A$

**Als:**  $c \in X$  bovengrens  $A, \forall c : b \leq c$

**Def:** volledig totaal geordende verzameling  $(X, \leq)$

**Als:** Elke naar boven begrensde deelverzameling

$A \subseteq X$  een supremum heeft

**Feit:**  $(\mathbb{Q}, \leq)$  is niet volledig

**Feit:**  $\mathbb{R}$  is de completering van  $(\mathbb{Q})$

**Def:**  $S$  is een Dedekind snede

**Als:**  $S \subseteq \mathbb{Q}$

**Als:**  $\mathbb{Q} \neq S \neq \emptyset$

**Als:**  $x, y \in \mathbb{Q} : x \leq y \wedge y \in S \Rightarrow x \in S$

**Als:**  $S$  heeft geen grootste element

$\forall x \in S \exists y \in S \text{ zdd. } y > x$

**Feit:**  $S, T \in \mathbb{R} : S \leq T \Leftrightarrow S \subseteq T$

**Feit:**  $(\mathbb{R}, +, *, \leq)$  is een volledig geordend lichaam

**Feit:** Zij  $F$  geordend lichaam, dan  $\forall x \in F : x^2 \geq 0$  en  $1 \geq 0$

**Bewijs:**

**Als:**  $x \geq 0$  dan  $x^2 = x * x \geq 0$

**Als:**  $x < 0$  dan  $x^2 = (-x)^2 > 0$

**Als:**  $1 = 1^2 \geq 0 \wedge 1 \neq 0 \Rightarrow 1 > 0$

□

**Stelling:** Als  $R_1, R_2$  volledige geordende lichamen zijn, dan is er een bijectie  $\alpha : R_1 \rightarrow R_2$  die alle structuren behoudt

$x, y \in R_1$

**Als:**  $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$

**Als:**  $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$

**Als:**  $a, b \in R_2 : x \leq y \Leftrightarrow a \leq b$

**Lemma:** Zij  $F$  een willekeurig lichaam, dan is er een unieke afbeelding  $\alpha : \mathbb{Q} \rightarrow F$  zdd  $\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 1, \alpha(m + n) = \alpha(m) + \alpha(n)$

**Bewijs:**

$\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 1, \alpha(s(x)) = \alpha(x) + 1$

Deze afbeelding voldoet automatisch aan:

$\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$

□

**Def:** Als  $\alpha : \mathbb{N}_0 \rightarrow F$  injectief is dan heeft  $F$  karakteristiek nul

Dus:  $\mathbb{N}_0 \subseteq F$

**Feit:** Elk geordend lichaam heeft karakteristiek nul

**Bewijs:**

$\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 1, \alpha(s(x)) = \alpha(x) + 1$

$n \in \mathbb{N}_0 : \alpha(n + 1) = \alpha(s(n)) = \alpha(n) + 1 > \alpha(n)$

$\alpha(0) < \alpha(1) < \alpha(2) \dots$

Dus  $n \neq m \Leftrightarrow \alpha(n) \neq \alpha(m)$  dus injectie

□

**Stelling:**  $\alpha : \mathbb{N}_0 \rightarrow F$  kunnen we uitbreiden naar  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow F$

$(m, n) \in \mathbb{Z}$

Neem  $\alpha(n, m) = \alpha(n) - \alpha(m)$

Als  $(m, n) \sim (a, b) \Rightarrow \alpha((m, n)) = \alpha((a, b))$

**Stelling:**  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow F$  kunnen we uitbreiden naar  $\alpha : \mathbb{Q} \rightarrow F$

$(m, n) \rightarrow \frac{\alpha(m)}{\alpha(n)}$

Dit kan alleen als  $\alpha(m) \neq 0$

Dit kan alleen als  $F$  karakteristiek nul heeft

Dus als  $F$  een geordend lichaam is  $\Rightarrow F$

heeft karakteristiek nul  $\alpha$  is injectie.

**Def:** Een geordend lichaam heet Archimedis

**Als:**  $\forall x \in F \exists n \in \mathbb{N} \text{ zdd } x \leq \alpha(n)$

**Stelling:** Elk volledig geordend lichaam is Archimedis

**Bewijs:**

**Als:**  $x \leq 0$  dan is  $n = 0$  goed

**Als:**  $x > 0$

Neem  $j = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$

Duidelijk: 0 is een ondergrens voor  $j$  want

$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \frac{1}{n}$

**Lemma:** 0 is infimum voor  $J$

$J$  heeft ondergrens  $l$  (want 0)

$J$  heeft infimum (def. volledigheid:

elke deelverzameling met een ondergrens

heeft een kleinste ondergrens)

$l = \inf(J) \geq 0$  (want 0 is ondergrens)

Stel  $l > 0$

dan  $2l = l + l > l \Rightarrow 2l$  is geen ondergrens

$\exists n \in \mathbb{N}$  zdd  $\frac{1}{n} < 2l \Rightarrow J \ni \frac{1}{2n} < l$

Tegenspraak dus:  $l = 0$

**Als:**  $x > 0$

dan  $\frac{1}{x} > 0$  dus  $\frac{1}{x}$  is geen ondergrens voor

$j$  (want  $\inf(J) = 0$ )

dus  $\exists n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{x}$  dus  $n > x$

□

**Stelling:** Zij  $F$  volledig geordend lichaam:  $x, y \in F \wedge x < y : \exists r \in \mathbb{Q}$  zdd  $x < r < y$

**Bewijs:**

**Als:**  $x < 0 < y : r = 0$

**Als:**  $x < y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -y < -x$

Stel de uitspraak is bewezen voor

$0 \leq x \leq y \Rightarrow -y < r < -x \Rightarrow x < -r < y$

Stel  $0 \leq x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$  zdd  $\frac{1}{n} < y - x$ . (archimedis)

Def  $A = \{k \in \mathbb{N}_0 | k \leq nx\} \neq \emptyset$  (archimedis)

Def  $a = \max(A) \in \mathbb{N}_0$ : nu  $a \leq nx < a + 1$

$\frac{a}{n} \leq x < \frac{a+1}{n=r}$

$r = \frac{a}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) < y$

□

**Propositie:** Zij  $F$  volledig geordend lichaam:  $x, y \in F \wedge x < y : \exists r \in \mathbb{Q}$  zdd  $x < r < y$

**Bewijs:**

**Als:**  $x < 0 < y : r = 0$

**Als:**  $x < y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -y < -x$

Stel de uitspraak is bewezen voor

$0 \leq x \leq y \Rightarrow -y < r < -x \Rightarrow x < -r < y$

Stel  $0 \leq x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$  zdd  $\frac{1}{n} < y - x$ . (archimedis)

Def  $A = \{k \in \mathbb{N}_0 | k \leq nx\} \neq \emptyset$  (archimedis)

Def  $a = \max(A) \in \mathbb{N}_0$ : nu  $a \leq nx < a + 1$

$\frac{a}{n} \leq x < \frac{a+1}{n=r}$

$r = \frac{a}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) < y$

□

## 2 Week 2

**Stelling:** Zij  $K, L$  volledig geordende lichamen, dan is er een bijectie  $\alpha : K \rightarrow L$  die de ordening behoudt en de lichaamsoperatie

Er is maar één geordend lichaam  $x, y \in K$

$x < y \Rightarrow \alpha(x) < \alpha(y)$   $\alpha(0) = 0$   $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$

**Bewijs:**

(Schets) Zij  $x \in K$  def  $C_x = \{r \in \mathbb{Q} | r < x\} \subseteq \mathbb{Q}$

$K$  is Archimedis, dus  $\exists n \in$

□