

Analyse 1

Steven

November 10, 2018

1 Week 1

Def: \leq is totale ordening

Als: \leq partiele ordening

$\forall x : x \leq x$ (reflexief)

$\forall x, y : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitief)

$\forall x, y : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisymmetrisch)

Als: \leq totaal is

$\forall x, y : x \leq y \vee y \leq x$

Def: geordend lichaam

Een lichaam $(F, +, *, 0, 1)$ met een totale ordening \leq op F

Als: $\forall a, b, c \in F : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

Als: $\forall a, b, c \in F : a \leq b \wedge c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$

Def: b is bovengrens

$A \subseteq X, b \in X$

Als: $\forall x \in X : x \leq b$

Def: A is naar boven begrensd

Als: A heeft bovengrens

Def: a is grootste element

$A \subseteq X, a \in A$

Als: a is bovengrens

Def: supremum/kleinste bovengrens A

Zij $A \subseteq X, b \in X$

Als: b bovengrens A

Als: $c \in X$ bovengrens $A, \forall c : b \leq c$

Def: volledig totaal geordende verzameling (X, \leq)

Als: Elke naar boven begrensde deelverzameling

$A \subseteq X$ een supremum heeft

Feit: (\mathbb{Q}, \leq) is niet volledig

Feit: \mathbb{R} is de completering van $(\mathbb{Q}$

Def: S is een Dedekind snede

Als: $S \subseteq \mathbb{Q}$

Als: $\mathbb{Q} \neq S \neq \emptyset$

Als: $x, y \in \mathbb{Q} : x \leq y \wedge y \in S \Rightarrow x \in S$

Als: S heeft geen grootste element

$\forall x \in S \exists y \in S \text{ zdd. } y > x$

Feit: $S, T \in \mathbb{R} : S \leq T \Leftrightarrow S \subseteq T$

Feit: $(\mathbb{R}, +, *, \leq)$ is een volledig geordend lichaam

Feit: Zij F geordend lichaam, dan $\forall x \in F : x^2 \geq 0$ en $1 \geq 0$

Bewijs:

Als: $x \geq 0$ dan $x^2 = x * x \geq 0$

Als: $x < 0$ dan $x^2 = (-x)^2 > 0$

Als: $1 = 1^2 \geq 0 \wedge 1 \neq 0 \Rightarrow 1 > 0$

□

Stelling: Als R_1, R_2 volledige geordende lichamen zijn, dan is er een bijectie $\alpha : R_1 \rightarrow R_2$ die alle structuren behoudt

$x, y \in R_1$

Als: $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$

Als: $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$

Als: $a, b \in R_2 : x \leq y \Leftrightarrow a \leq b$

Lemma: Zij F een willekeurig lichaam, dan is er een unieke afbeelding $\alpha : \mathbb{Q}_0 \rightarrow F$ zdd $\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 1, \alpha(m + n) = \alpha(m) + \alpha(n)$

Bewijs:

$\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 1, \alpha(s(x)) = \alpha(x) + 1$

Deze afbeelding voldoet automatisch aan:

$\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$

□

Def: Als $\alpha : \mathbb{N}_0 \rightarrow F$ injectief is dan heeft F karakteristiek nul

Dus: $\mathbb{N}_0 \subseteq F$

Feit: Elk geordend lichaam heeft karakteristiek nul

Bewijs:

$\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 1, \alpha(s(x)) = \alpha(x) + 1$

$n \in \mathbb{N}_0 : \alpha(n + 1) = \alpha(s(n)) = \alpha(n) + 1 > \alpha(n)$

$\alpha(0) < \alpha(1) < \alpha(2) \dots$

Dus $n \neq m \Leftrightarrow \alpha(n) \neq \alpha(m)$ dus injectie

□

Stelling: $\alpha : \mathbb{N}_0 \rightarrow F$ kunnen we uitbreiden naar $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow F$

$(m, n) \in \mathbb{Z}$

Neem $\alpha(n, m) = \alpha(n) - \alpha(m)$

Als $(m, n) \sim (a, b) \Rightarrow \alpha((m, n)) = \alpha((a, b))$

Stelling: $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow F$ kunnen we uitbreiden naar $\alpha : \mathbb{Q} \rightarrow F$

$(m, n) \rightarrow \frac{\alpha(m)}{\alpha(n)}$

Dit kan alleen als $\alpha(m) \neq 0$

Dit kan alleen als F karakteristiek nul heeft

Dus als F een geordend lichaam is $\Rightarrow F$

heeft karakteristiek nul α is injectie.

Def: Een geordend lichaam heet Archimedis

Als: $\forall x \in F \exists n \in \mathbb{N} \text{ zdd } x \leq \alpha(n)$

Stelling: Elk volledig geordend lichaam is Archimedis

Bewijs:

Als: $x \leq 0$ dan is $n = 0$ goed

Als: $x > 0$

Neem $j = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$

Duidelijk: 0 is een ondergrens voor j want

$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \frac{1}{n}$

Lemma: 0 is infimum voor J

J heeft ondergrens l (want 0)

J heeft infimum (def. volledigheid:

elke deelverzameling met een ondergrens

heeft een kleinste ondergrens)

$l = \inf(J) \geq 0$ (want 0 is ondergrens)

Stel $l > 0$

dan $2l = l + l > l \Rightarrow 2l$ is geen ondergrens

$\exists n \in \mathbb{N}$ zdd $\frac{1}{n} < 2l \Rightarrow J \ni \frac{1}{2n} < l$

Tegenspraak dus: $l = 0$

Als: $x > 0$

dan $\frac{1}{x} > 0$ dus $\frac{1}{x}$ is geen ondergrens voor

j (want $\inf(J) = 0$)

dus $\exists n \in (n)$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{x}$ dus $n > x$

□

Stelling: Zij F volledig geordend lichaam: $x, y \in F \wedge x < y : \exists r \in \mathbb{Q}$ zdd $x < r < y$

Bewijs:

Als: $x < 0 < y : r = 0$

Als: $x < y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -y < -x$

Stel de uitspraak is bewezen voor

$0 \leq x \leq y \Rightarrow -y < r < -x \Rightarrow x < -r < y$

Stel $0 \leq x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ zdd $\frac{1}{n} < y - x$. (archimedis)

Def $A = \{k \in \mathbb{N}_0 | k \leq nx\} \neq \emptyset$ (archimedis)

Def $a = \max(A) \in \mathbb{N}_0$: nu $a \leq nx < a + 1$

$\frac{a}{n} \leq x < \frac{a+1}{n=r}$

$r = \frac{a}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) < y$

□

Propositie: Zij F volledig geordend lichaam: $x, y \in F \wedge x < y : \exists r \in \mathbb{Q}$ zdd $x < r < y$

Bewijs:

Als: $x < 0 < y : r = 0$

Als: $x < y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -y < -x$

Stel de uitspraak is bewezen voor

$0 \leq x \leq y \Rightarrow -y < r < -x \Rightarrow x < -r < y$

Stel $0 \leq x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ zdd $\frac{1}{n} < y - x$. (archimedis)

Def $A = \{k \in \mathbb{N}_0 | k \leq nx\} \neq \emptyset$ (archimedis)

Def $a = \max(A) \in \mathbb{N}_0$: nu $a \leq nx < a + 1$

$\frac{a}{n} \leq x < \frac{a+1}{n=r}$

$r = \frac{a}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) < y$

□