Analyse 1

Steven

November 13, 2018

1 Week 1

Def: $\leq$ is totale ordening
Als: $\leq$ partiele ordening
$\forall x : x \leq x$ (reflexief)
$\forall x, y : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitief)
$\forall x, y : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisymetrish)
Als: $\leq$ totaal is
$\forall x, y : x \leq y \vee y \leq x$

Def: geordend lichaam
Een lichaam $(F, +, *, 0, 1)$ met een totale ordening $\leq$ op F
Als: $\forall a, b, c \in F : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
Als: $\forall a, b, c \in F : a \leq b \wedge c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$

Def: b is bovengrens
$A \subseteq X, b \in X$
Als: $\forall x \in X : a \leq b$

Def: A is naar boven begrensd
Als: A heeft bovengrens

Def: a is grootste element
$A \subseteq X, a \in A$
Als: a is bovengrens

Def: supremum/kleinste bovengrens A
Zij $A \subseteq X, b \in X$
Als: b bovengrens A
Als: $c \in X$ bovengrens $A, \forall c : b \leq c$

Def: volledig totaal geordende verzameling $(X, \leq)$
Als: Elke naar boven begrensde deelverzameling $A \subseteq X$ een supremum heeft

Feit: $(\mathbb{Q}, \leq)$ is niet volledig

Feit: $\mathbb{R}$ is de completering van $(\mathbb{Q}$

Def: S is een Dedekind snede
Als: $S \subseteq \mathbb{Q}$
Als: $\mathbb{Q} \neq S \neq \emptyset$
Als: $x, y \in \mathbb{Q} : x \leq y \wedge y \in S \Rightarrow x \in s$
Als: S heeft geen grootste element
$\forall x \in S \exists y \in S$ zdd. $y > x$

Feit: $S, T \in \mathbb{R} : S \leq T \Leftrightarrow S \subseteq T$

Feit: $(\mathbb{R}, +, *, \leq)$ is een volledig geordend lichaam

Feit: Zij F geordend lichaam, dan $\forall x\ inF : x^2 \geq 0$ en $1 \geq 0$
Bewijs:
Als: $x \geq 0$ dan $x^2 = x * x \geq 0$
Als: $x < 0$ dan $x^2 = (-x)^2 > 0$ $\square$
Als: $1 = 1^2 \geq 0 \wedge 1 \neq 0 \Rightarrow 1 > 0$

Stelling: Als R_1, R_2 volledige geordende lichamen zijn, dan is er een bijectie $\alpha : R_1 \rightarrow R_2$ die alle structuren behoudt
$x, y \in R_1$
Als: $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$
Als: $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$
Als: $a, b \in R_2 : x \leq y \Leftrightarrow a \leq b$

Lemma: Zij F een willekeurig lichaam, dan is er een unieke afbeelding $\alpha : \mathbb{Q} \rightarrow F$ zdd $\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 1, \alpha(m + n) = \alpha(m) + \alpha(m)$
Bewijs:
$\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 1\alpha(s(x)) = \alpha(x) + 1$
Deze afbeelding voldoet automatisch aan: $\square$
$\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$

Def: Als $\alpha : \mathbb{N}_0 \rightarrow F$ injectief is dan heeft F karakteristiek nul
Dus: $\mathbb{N}_0 \subseteq F$

Feit: Elk geordend lichaam heeft karakteristiek nul
Bewijs:
$\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 1\alpha(s(x)) = \alpha(x) + 1$
$n \in \mathbb{N}_0 : \alpha(n + 1) = \alpha(s(n)) = \alpha(n) + 1 > \alpha(n)$
$\alpha(0) < \alpha(1) < \alpha(2)...$ $\square$
Dus $n \neq m \Leftrightarrow \alpha(n) \neq \alpha(m)$ dus injectie

Stelling: $\alpha : \mathbb{N}_0 \rightarrow F$ kunnen we uitbreiden naar $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow F$
$(m, n) \in \mathbb{Z}$
Neem $\alpha(n, m) = \alpha(n) - \alpha(m)$
Als $(m, n) \sim (a, b) \Rightarrow \alpha((m, n)) = \alpha((a, b))$

Stelling: $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow F$ kunnen we uitbreiden naar $\alpha : \mathbb{Q} \rightarrow F$
$(m, n) \rightarrow \frac{\alpha(m)}{\alpha(n)}$
Dit kan alleen als $\alpha(m) \neq 0$
Dit kan alleen als F karakteristiek nul heeft
Dus als F een geordend lichaam is $\Rightarrow F$
heeft karakteristiek nul α is injectie.

Def: Een geordend lichaam heet Archimedis
Als: $\forall x \in F \exists n \in \mathbb{N}$ zdd $x \leq \alpha(n)$

Stelling: Elk volledig geordend lichaam is Archimedis
Bewijs:

Als: $x \le 0$ dan is $n = 0$ goed
Als: $x > 0$
Neem $j = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$
Duidelijk: 0 is een ondergrens voor j want
$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le \frac{1}{n}$
Lemma: 0 is infimum voor J
J heeft ondergrens l (want 0)
J heeft infimum (def. volledigheid:
elke deelverzameling met een ondergrens
heeft een kleinste ondergrens)
$l = inf(J) \ge 0$ (want 0 is ondergrens)
Stel $l > 0$
dan $2l = l + l > l \Rightarrow 2l$ is geen ondergrens
$\exists n \in \mathbb{N}$ zdd $\frac{1}{n} < 2l \Rightarrow J \ni \frac{1}{2n} < l$
Tegenspraak dus: $l = 0$
Als: $x > 0$
dan $\frac{1}{x} > 0$ dus $\frac{1}{x}$ is geen ondergrens voor
j (want $inf(J) = 0$
dus $\exists n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{n} < \frac{1}{x}$ dus $n > x$

□

Stelling: Zij F volledig geordend lichaam: $x, y \in F \wedge x < y : \exists r \in \mathbb{Q}$ zdd $x < r < y$
Bewijs:
Als: $x < 0 < y : r = 0$
Als: $x < y \le 0 \Rightarrow 0 \le -y < -x$
Stel de uitspraak is bewezen voor
$0 \le x \le y \Rightarrow -y < r < -x \Rightarrow x < -r < y$
Stel $0 \le x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ zdd $\frac{1}{n} < y - x$.(archimedis)
Def $A = \{k \in \mathbb{N}_0 | k \le nx\} \ne \emptyset$ (archimedis)
Def $a = max(A) \in \mathbb{N}_0$: nu $a \le nx < a + 1$
$\frac{a}{n} \le x < \frac{a+1}{n=r}$
$r = \frac{a}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) < y$

□

Propositie: Zij F volledig geordend lichaam: $x, y \in F \wedge x < y : \exists r \in \mathbb{Q}$ zdd $x < r < y$
Bewijs:
Als: $x < 0 < y : r = 0$
Als: $x < y \le 0 \Rightarrow 0 \le -y < -x$
Stel de uitspraak is bewezen voor
$0 \le x \le y \Rightarrow -y < r < -x \Rightarrow x < -r < y$
Stel $0 \le x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ zdd $\frac{1}{n} < y - x$.(archimedis)
Def $A = \{k \in \mathbb{N}_0 | k \le nx\} \ne \emptyset$ (archimedis)
Def $a = max(A) \in \mathbb{N}_0$: nu $a \le nx < a + 1$
$\frac{a}{n} \le x < \frac{a+1}{n=r}$
$r = \frac{a}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) < y$

□

2 Week 2

Stelling: Zij K,L volledig geordende lichamen, dan is er een bijectie $\alpha : K \to L$ die de ordening behoudt en de lichaamsoperatie
Er is maar één geordend lichaam $x, y \in K$
$x < y \Rightarrow \alpha(x) < \alpha(y)$ $\alpha(0) = 0$ $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$
Bewijs:
(Schets) Zij $x \in K$ def $C_x = \{r \in \mathbb{Q} | r < x\} \subseteq \mathbb{Q}$
K is Archimedis, dus $\exists n \in \mathbb{N}$ zdd $n \ge x$
Nu is n is een bovengrens voor C_x
$(n \in \mathbb{N}) \in C_x \subseteq \mathbb{Q} \subseteq L$
L is volledig, dus elke naar boven begrensde
verzameling heeft een supremum
$y_x = sup(C_x) \in L$
$x \in K \wedge y_x \in L$ dus $K \xrightarrow{\alpha} L$
α voldoet aan de eisen:
Als: $x < y$
Moet gelden dat: $\Rightarrow \alpha(x) < \alpha(y)$
Zij $x, y \in K$ met $x < y$
Dan $\exists r \in \mathbb{Q}$ zdd $x < r < s < y$
Dus $r \in C_y$ maar $r \notin C_x$
$C_x \subseteq C_y$, dus $C_x \subset C_y$
dus $C_x < C_y$ (orde van $\mathbb{R}$)
dus $\alpha(x) = sup(C_x) \le r < s \le sup(C_y) = \alpha(y)$
dus $\alpha(x)$ is injectief en orde behoudend!
Omgekeerd werkt dit ook met $\beta : L \to K$
is een inverse afbeelding van α
dus $\beta(\alpha(x)) = x$ en $\alpha(\beta(y)) = y$
dus $\alpha \wedge \beta$ zijn bijecties!
$\beta(\alpha(x)) = sup(\{r \in \mathbb{Q} | r < sup(\{s \in \mathbb{Q} | s < x\})\}) = x$

□