FEJ 论文推导

崔华坤 V1.0

2019 年 8 月 26 日

本文对黄国权老师的论文 [1]（Analysis and Improvement of the Consistency of Extended Kalman Filter based SLAM）进行详细推导，该论文是以 2D 平面上的小车为例，讨论其可观性和不一致性。且假设运动输入为始终沿车头方向的速度 v，和角速度 ω，如图 1所示，世界系为 $W(orld)$，小车系为 $R(obot)$：

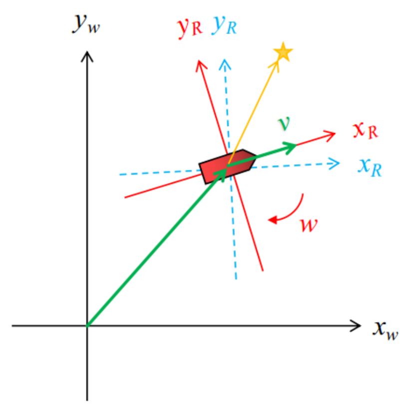

图 1: 2D 小车的运动模型

1　可观性定义

参考 [2] 第 8 章，定义为：**如果根据一系列输入和输出，可以唯一确定系统的初始状态，则称系统可观**。换句话说：如果某个状态的初始值变了，但是我们观测不到（这里的观测即输出），即观测值没变，那么说明我们对这个状态不可观（人家都变了，你还不知道，说明你没法观测到她）。如果观测变化很小，则说明你对这个状态的可观测度低。

2　连续非线性系统的可观性

考虑如下连续时间的非线性系统：

$$\text{过程模型：}\ \dot{x} = f(x) + \sum_{k=1}^{m} u_k g_k(x) \tag{1}$$

$$\text{观测模型：}\ y = h(x) \tag{2}$$

其中，x 和 y 是系统的状态向量和输出，u_k 是输入。

根据文献 [3] 中的定理：对于连续时间非线性系统，给定 x_0，如果

$$\left(\nabla L_{f_s} L_{f_{s-1}} \cdots L_{f_1} z\right)(x), f_i = \{f_1, f_2\} \tag{3}$$

存在 n 个线性独立的行向量，则系统在 x_0 处局部可观。

我们可以从连续线性系统的角度上对上述定理做简单来源分析，我们假设连续时间线性系统为：

$$\text{过程模型：}\ \dot{x} = Ax + Bu \tag{4}$$

$$\text{观测模型：}\ y = C^T x \tag{5}$$

我们可以对观测模型连续对时间求导，可得：

$$y = C^T x \tag{6}$$

$$\dot{y} = C^T Ax + C^T Bu \qquad \Rightarrow \dot{y} - C^T Bu = C^T Ax \tag{7}$$

$$\ddot{y} = C^T A^2 x + C^T ABu + C^T B\dot{u} \qquad \Rightarrow \ddot{y} - C^T ABu - C^T B\dot{u} = C^T A^2 x \tag{8}$$

$$\vdots \tag{9}$$

$$y^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-2} \left(C^T A^{n-2-k} Bu^{(k)}\right) + C^T A^{n-1} x \qquad \Rightarrow y^{(n-1)} - \sum_{k=0}^{n-2} \left(C^T A^{n-2-k} Bu^{(k)}\right) = C^T A^{n-1} x \tag{10}$$

整理上式可得：

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} - C^T Bu \\ \ddot{y} - C^T ABu - C^T B\dot{u} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} - \sum_{k=0}^{n-2}\left(C^T A^{n-2-k} Bu^{(k)}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T x \\ C^T Ax \\ C^T A^2 x \\ \vdots \\ C^T A^{n-1} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T \\ C^T A \\ C^T A^2 \\ \vdots \\ C^T A^{n-1} \end{bmatrix} x = \mathbf{Q}x \tag{11}$$

对于连续时间下的非线性系统的可观性矩阵可写成：

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{12}$$

首先为了便于说明，我们引入一些符号说明和李导数：

$$\nabla h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} \tag{13}$$

$$L_f h = L_f^1 h = \frac{\partial h}{\partial x} f \tag{14}$$

$$L_f^0 h = h \tag{15}$$

$$L_f^2 h = L_f^1 \left(L_f^1 h\right) \tag{16}$$

$$L_g L_f h = \frac{\partial L_f h}{\partial x} g \tag{17}$$

为了计算可观性矩阵，我们需要推导对于连续时间的非线性系统的观测模型 y 对时间的一阶导数：

$$y = h \tag{18}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x}\left(f + \sum_{k=1}^{m} u_k g_k\right) = L_f h + \sum_{k=1}^{m} u_k L_{g_k} h \tag{19}$$

下面我们重点来推导 y 对时间的二阶导：

$$\ddot{y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(L_f h + \sum_{k=1}^{m} u_k L_{g_k} h\right) = \frac{\partial L_f h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m}\left[\dot{u}_k L_{g_k} h + u_k \frac{\partial L_{g_k h}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\right] \tag{20}$$

$$= \frac{\partial L_f h}{\partial x}\left(f + \sum_{k=1}^{m} u_k g_k\right) + \sum_{k=1}^{m}\left[\dot{u}_k L_{g_k} h + u_k \frac{\partial L_{g_k h}}{\partial x}\left(f + \sum_{s=1}^{m} u_s g_s\right)\right] \tag{21}$$

$$= L_f L_f h + \sum_{k=1}^{m} u_k L_{g_k} L_f h + \sum_{k=1}^{m} \dot{u}_k L_{g_k} h + \sum_{k=1}^{m} u_k L_f L_{g_k} h + \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} u_k u_s L_{g_s} L_{g_k} h \tag{22}$$

3 状态向量

状态向量为小车在世界系中的 2D 位置 $p_{w\leftarrow R}$，和世界系到小车之间的旋转角度 ϕ，以及世界系下的 2D 路标点 p_L：

$$X^{5\times 1} = \begin{bmatrix} p_{w\leftarrow R} \\ \phi_{w\rightarrow R} \\ p_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_w\vec{r}_{w\rightarrow R} \\ \phi_{w\rightarrow R} \\ {}_w\vec{r}_{w\rightarrow L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \phi \\ x_L \\ y_L \end{bmatrix} \tag{23}$$

4 EKF Propagation

根据运动学模型，当前时刻的状态向量对时间的导数为：

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\phi} \\ \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v\cos\phi \\ v\sin\phi \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega = f_1 v + f_2 \omega \tag{24}$$

5 EKF update

观测方程可以用小车系观测到的路标点 $p_{R\leftarrow L}$ 来表示：

$$z = R_{w\leftarrow R}^{T}\left(p_L - p_{w\leftarrow R}\right) \tag{25}$$
$$= R_{w\leftarrow R}^{T}\left({}_{w}\vec{r}_{w\to L} - {}_{w}\vec{r}_{w\to R}\right) \tag{26}$$
$$= R_{w\leftarrow R}^{T}\left({}_{w}\vec{r}_{w\to L} + {}_{w}\vec{r}_{R\to w}\right) \tag{27}$$
$$= R_{w\leftarrow R}^{T}\left({}_{w}\vec{r}_{R\to L}\right) \tag{28}$$
$$={}_{R}\,\vec{r}_{R\to L} \tag{29}$$
$$= p_{R\leftarrow L} \tag{30}$$

根据几何关系，上面观测方程可写成：

$$z = p_{R\leftarrow L} \tag{31}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\phi\left(x_L - x_R\right) + \sin\phi\left(y_L - y_R\right) \\ -\sin\phi\left(x_L - x_R\right) + \cos\phi\left(y_L - y_R\right) \end{bmatrix} \tag{32}$$
$$= \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \tag{33}$$

6 计算可观性矩阵

对于连续时间下的非线性系统的可观性矩阵可写成：

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial X} \\ \frac{\partial \ddot{z}}{\partial X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial X} \\ \frac{\partial h_2}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{h}_1}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{h}_2}{\partial X} \\ \frac{\partial \ddot{h}_1}{\partial X} \\ \frac{\partial \ddot{h}_2}{\partial X} \end{bmatrix} \tag{34}$$

6.1 z 关于 X 的 Jacobian $\frac{\partial z}{\partial X}$

首先，计算观测量 z 关于状态向量 X 的 Jacobian：

$$\nabla h_1 = \frac{\partial h_1}{\partial X} = \begin{bmatrix} -\cos\phi & -\sin\phi & -\sin\phi\left(x_L - x_R\right) + \cos\phi\left(y_L - y_R\right) & \cos\phi & \sin\phi \end{bmatrix} \tag{35}$$
$$\nabla h_2 = \frac{\partial h_2}{\partial X} = \begin{bmatrix} \sin\phi & -\cos\phi & -\cos\phi\left(x_L - x_R\right) - \sin\phi\left(y_L - y_R\right) & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{36}$$

6.2 $\dot{z}$ 关于 X 的 Jacobian $\frac{\partial \dot{z}}{\partial X}$

首先，我们推导观测值 z 对时间的导数：

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \frac{\partial z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} && (37)\\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial X}\left(f_1 v + f_2 \omega\right) \\ \frac{\partial h_2}{\partial X}\left(f_1 v + f_2 \omega\right) \end{bmatrix} && (38)\\
&= \begin{bmatrix} L_{f_1} h_1 v + L_{f_2} h_1 \omega \\ L_{f_1} h_2 v + L_{f_2} h_2 \omega \end{bmatrix} && (39)
\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
L_{f_1} h_1 &= \frac{\partial h_1}{\partial X} f_1 = -\cos^2\phi - \sin^2\phi = -1 && (40)\\
L_{f_2} h_1 &= \frac{\partial h_1}{\partial X} f_2 = -\sin\phi\left(x_L - x_R\right) + \cos\phi\left(y_L - y_R\right) && (41)\\
L_{f_1} h_2 &= \sin\phi\cos\phi - \cos\phi\sin\phi = 0 && (42)\\
L_{f_2} h_2 &= -\cos\phi\left(x_L - x_R\right) - \sin\phi\left(y_L - y_R\right) && (43)
\end{aligned}$$

那么，$\dot{z}$ 可整理成：

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -v + \left[-\sin\phi\left(x_L - x_R\right) + \cos\phi\left(y_L - y_R\right)\right]\omega \\ \left[-\cos\phi\left(x_L - x_R\right) - \sin\phi\left(y_L - y_R\right)\right]\omega \end{bmatrix} \tag{44}$$

最终，$\frac{\partial \dot{z}}{\partial X}$ 可计算为：

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial X} = \begin{bmatrix} \sin\phi & -\cos\phi & -\cos\phi\left(x_L - x_R\right) - \sin\phi\left(y_L - y_R\right) & -\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\phi & \sin\phi & \sin\phi\left(x_L - x_R\right) - \cos\phi\left(y_L - y_R\right) & -\cos\phi & -sin\phi \end{bmatrix}\omega \tag{45}$$

6.3 $\ddot{z}$ 关于 X 的 Jacobian $\frac{\partial \ddot{z}}{\partial X}$

首先，我们计算 z 关于时间的二阶导数：

$$\begin{aligned}
\ddot{z} &= \frac{\partial \dot{z}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} && (46)\\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{z}}{\partial X}\left(f_1 v + f_2 \omega\right) \end{bmatrix} && (47)\\
&= \begin{bmatrix} L_{f_1} L_{f_1} h_1 v^2 + L_{f_1} L_{f_2} h_1 v\omega + L_{f_2} L_{f_1} h_1 v\omega + L_{f_2} L_{f_2} h_1 \omega^2 \\ L_{f_1} L_{f_1} h_2 v^2 + L_{f_1} L_{f_2} h_2 v\omega + L_{f_2} L_{f_1} h_2 v\omega + L_{f_2} L_{f_2} h_2 \omega^2 \end{bmatrix} && (48)\\
&= \begin{bmatrix} L_{f_1} L_{f_2} h_1 v\omega + L_{f_2} L_{f_2} h_1 \omega^2 \\ L_{f_1} L_{f_2} h_2 v\omega + L_{f_2} L_{f_2} h_2 \omega^2 \end{bmatrix} && (49)
\end{aligned}$$

其中，

$$
\begin{aligned}
L_{f_1}L_{f_2}h_1 &= \frac{\partial L_{f_2}h_1}{\partial X} f_1 && (50)\\
&= \begin{bmatrix}\sin\phi & -\cos\phi & -\cos\phi\,(x_L - x_R) - \sin\phi\,(y_L - y_R) & -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix} f_1 && (51)\\
&= \sin\phi\cos\phi - \cos\phi\sin\phi = 0 && (52)\\
L_{f_2}L_{f_2}h_1 &= \frac{\partial L_{f_2}h_1}{\partial X} f_2 && (53)\\
&= \begin{bmatrix}\sin\phi & -\cos\phi & -\cos\phi\,(x_L - x_R) - \sin\phi\,(y_L - y_R) & -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix} f_2 && (54)\\
&= -\cos\phi\,(x_L - x_R) - \sin\phi\,(y_L - y_R) && (55)\\
L_{f_1}L_{f_2}h_2 &= \frac{\partial L_{f_2}h_2}{\partial X} f_1 && (56)\\
&= \begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & \sin\phi\,(x_L - x_R) - \cos\phi\,(y_L - y_R) & -\cos\phi & \sin\phi\end{bmatrix} f_1 && (57)\\
&= \cos\phi\cos\phi + \sin\phi\sin\phi = 1 && (58)\\
L_{f_2}L_{f_2}h_2 &= \frac{\partial L_{f_2}h_2}{\partial X} f_2 && (59)\\
&= \begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & \sin\phi\,(x_L - x_R) - \cos\phi\,(y_L - y_R) & -\cos\phi & \sin\phi\end{bmatrix} f_2 && (60)\\
&= \sin\phi\,(x_L - x_R) - \cos\phi\,(y_L - y_R) && (61)
\end{aligned}
$$

那么，$\ddot{z}$ 可整理成：

$$
\ddot{z} = \begin{bmatrix} \left[-\cos\phi\,(x_L - x_R) - \sin\phi\,(y_L - y_R)\right]\omega^2 \\ v\omega + \left[\sin\phi\,(x_L - x_R) - \cos\phi\,(y_L - y_R)\right]\omega^2 \end{bmatrix} \tag{62}
$$

最终，$\frac{\partial \ddot{z}}{\partial X}$ 可计算得：

$$
\frac{\partial \ddot{z}}{\partial X} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & \sin\phi\,(x_L - x_R) - \cos\phi\,(y_L - y_R) & -\cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi & \cos\phi\,(x_L - x_R) + \sin\phi\,(y_L - y_R) & \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix} \omega^2 \tag{63}
$$

7 可观性矩阵

最后，我们将可观性矩阵拼凑如下：

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial X} \\ \frac{\partial h_2}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{h}_1}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{h}_2}{\partial X} \\ \frac{\partial \ddot{h}_1}{\partial X} \\ \frac{\partial \ddot{h}_2}{\partial X} \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos\phi & -\sin\phi & -\sin\phi\,(x_L - x_R) + \cos\phi\,(y_L - y_R) & \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi & -\cos\phi\,(x_L - x_R) - \sin\phi\,(y_L - y_R) & -\sin\phi & \cos\phi \\ [\sin\phi & -\cos\phi & -\cos\phi\,(x_L - x_R) - \sin\phi\,(y_L - y_R) & -\sin\phi & \cos\phi]\omega \\ [\cos\phi & \sin\phi & \sin\phi\,(x_L - x_R) - \cos\phi\,(y_L - y_R) & -\cos\phi & -sin\phi]\omega \\ [\cos\phi & \sin\phi & \sin\phi\,(x_L - x_R) - \cos\phi\,(y_L - y_R) & -\cos\phi & -\sin\phi]\omega^2 \\ [-\sin\phi & \cos\phi & \cos\phi\,(x_L - x_R) + \sin\phi\,(y_L - y_R) & \sin\phi & -\cos\phi]\omega^2 \end{bmatrix} \tag{65}$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} \sin\phi & -\cos\phi & -\cos\phi\,(x_L - x_R) - \sin\phi\,(y_L - y_R) & -\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\phi & \sin\phi & \sin\phi\,(x_L - x_R) - \cos\phi\,(y_L - y_R) & -\cos\phi & -\sin\phi \end{bmatrix} \tag{66}$$

很明显，$rank\,(Q) = 2$。

8 可观性矩阵的零空间

$$nullspace\,(Q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_R \\ 0 & 1 & x_R \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -y_L \\ 0 & 1 & x_L \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \tag{67}$$

那么，对于 n_1, n_2 我们发现，当状态向量改变 $\Delta X = \alpha n_1 + \beta n_2$ 时，相当于小车位置和路标点沿 x 方向移动 α 单位，沿 y 方向移动 β 单位，也就是说，若小车和路标点平移相同的距离，测量值（路标点在小车系下的坐标值）不随状态向量的变化而变化，即测量值对于 X 和 $X + \Delta X$ 这两种状态向量是观测不出来的，即不可观。我们可以称之为：x_R和x_L、以及 y_R和y_L 彼此联合不可观。

对于 n_3，我们可以假设对某一坐标系做一微小的角度扰动 $\delta\phi$，那么，对于该下的一个点 $x = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$，旋转之后的位置为：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_{F' \leftarrow F} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta\phi \\ \delta\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \delta\phi \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \tag{68}$$

根据这个结论，我们让小车和路标点都旋转 $\delta\phi$，那么状态向量可变成：

$$X^{'}=\begin{bmatrix}x_R^{'}\\y_R^{'}\\\phi^{'}\\x_L^{'}\\y_L^{'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_R\\y_R\\\phi\\x_L\\y_L\end{bmatrix}+\delta\phi\begin{bmatrix}-y_R\\x_R\\1\\-y_L\\x_L\end{bmatrix}=X+\delta\phi n_3 \tag{69}$$

因此，对于这种旋转，观测量也是不会随之变化的。因此，对于这样的系统，小车的位移和旋转角度都是不可观的。

9 EKF-SLAM 可观性分析

对于 EKF-SLAM 系统，从 k 时刻到 k+m 时刻的局部可观性矩阵可写成：

$$\mathbf{M}\triangleq\begin{bmatrix}\mathbf{H}_k\\\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{\Phi}_k\\\vdots\\\mathbf{H}_{k+m}\mathbf{\Phi}_{k+m-1}\cdots\mathbf{\Phi}_k\end{bmatrix} \tag{70}$$

其中，运动和观测方程可写成：

$$\text{运动方程：}\ \tilde{\mathbf{X}}_{k+1|k}=\begin{bmatrix}\mathbf{\Phi}_{R_k}&\mathbf{0}_{3\times2}\\\mathbf{0}_{2\times3}&\mathbf{I}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{X}}_{R|k}\\\tilde{\mathbf{p}}_{L_{k|k}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{G}_{R_k}\\\mathbf{0}_{2\times2}\end{bmatrix}\mathbf{w}_k\ \triangleq\mathbf{\Phi}_k\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}+\mathbf{G}_k\mathbf{w}_k \tag{71}$$

$$\text{观测方程：}\ \tilde{\mathbf{z}}_k\simeq[\mathbf{H}_{R_k}\quad\mathbf{H}_{L_k}]\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{X}}_{R_{k|k-1}}\\\tilde{\mathbf{X}}_{L_{k|k-1}}\end{bmatrix}+\mathbf{v}_k\ \triangleq\mathbf{H}_k\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}+\mathbf{v}_k \tag{72}$$

那么，上式的可观性矩阵可化简为：

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}_{R_k}&\mathbf{H}_{L_k}\\\mathbf{H}_{R_{k+1}}\mathbf{\Phi}_{R_k}&\mathbf{H}_{L_{k+1}}\\\vdots&\vdots\\\mathbf{H}_{R_{k+m}}\mathbf{\Phi}_{R_{k+m-1}}\cdots&\mathbf{\Phi}_{R_k}\end{bmatrix} \tag{73}$$

$$=\mathrm{Diag}\left(\mathbf{H}_{L_k},\cdots,\mathbf{H}_{L_{k+m}}\right)\times\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{H}_{L_k}^{-1}\mathbf{H}_{R_k}&\mathbf{I}_2\\\mathbf{H}_{L_{k+1}}^{-1}\mathbf{H}_{R_{k+1}}\mathbf{\Phi}_{R_k}&\mathbf{I}_2\\\vdots&\vdots\\\mathbf{H}_{L_{k+m}}^{-1}\mathbf{H}_{R_{k+m}}\mathbf{\Phi}_{R_{k+m-1}}\cdots\quad\mathbf{\Phi}_{R_k}&\mathbf{I}_2\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \tag{74}$$

因此，当且仅当 **M** 满秩时，系统为局部可观。易知，$rank\,(\mathbf{M})=rank\,(\mathbf{N})$，因此，接下来我们只要分析 **N** 的秩和零空间即可。

10 理想 EKF-SLAM 的系统可观性

当 EKF-SLAM 的 Jacobian 线性化点均为真值时，有：

$$\check{\Phi}_{R_{k+i-1}}\check{\Phi}_{R_{k+i-2}}\cdots\check{\Phi}_{R_k}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_2 & \mathbf{J}\left(\mathbf{p}_{R_{k+i}}-\mathbf{p}_{R_k}\right)\\ \mathbf{0}_{1\times 2} & 1\end{bmatrix} \tag{75}$$

另外，根据更新的 Jacobian：

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{R_k}&=\left(\nabla\mathbf{h}_k\right)\mathbf{C}^T\left(\hat{\phi}_{R_{k|k-1}}\right)\left[-\mathbf{I}_2 \quad -\mathbf{J}\left(\hat{\mathbf{p}}_{L_{k|k-1}}-\hat{\mathbf{p}}_{R_{k|k-1}}\right)\right]\\ \mathbf{H}_{L_k}&=\left(\nabla\mathbf{h}_k\right)\mathbf{C}^T\left(\hat{\phi}_{R_{k|k-1}}\right)\end{aligned} \tag{76}$$

可计算出：

$$\check{\mathbf{H}}_{L_{k+i}}^{-1}\check{\mathbf{H}}_{R_{k+i}}\check{\Phi}_{R_{k+i-1}}\cdots\check{\Phi}_{R_k} \tag{77}$$

$$=\mathbf{C}^{-T}\left(\phi_{R_{k+i}}\right)\left(\nabla\check{\mathbf{h}}_{k+i}\right)^{-1}\left(\left(\nabla\check{\mathbf{h}}_{k+i}\right)\mathbf{C}^T\left(\phi_{R_{k+i}}\right)\left[-\mathbf{I}_2 \quad -\mathbf{J}\left(\mathbf{p}_L-\mathbf{p}_{R_{k+i}}\right)\right]\right)\begin{bmatrix}\mathbf{I}_2 & \mathbf{J}\left(\mathbf{p}_{R_{k+i}}-\mathbf{p}_{R_k}\right)\\ \mathbf{0}_{1\times 2} & \mathbf{1}\end{bmatrix} \tag{78}$$

$$=\mathbf{C}\left(\phi_{R_{k+1}}\right)\left(-\mathbf{C}^T\left(\phi_{R_{k+1}}\right)\left[\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{J}\left(\mathbf{p}_L-\mathbf{p}_{R_k}\right)\right]\right) \tag{79}$$

$$=-\left[\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{J}\left(\mathbf{p}_L-\mathbf{p}_{R_k}\right)\right] \tag{80}$$

$$=\mathbf{C}\left(\phi_{R_k}\right)\left(-\mathbf{C}^T\left(\phi_{R_k}\right)\left[\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{J}\left(\mathbf{p}_L-\mathbf{p}_{R_k}\right)\right]\right) \tag{81}$$

$$=\mathbf{C}^{-T}\left(\phi_{R_k}\right)\left(\nabla\check{\mathbf{h}}_k\right)^{-1}\left(\left(\nabla\check{\mathbf{h}}_k\right)\mathbf{C}^T\left(\phi_{R_k}\right)\left[-\mathbf{I}_2 \quad -\mathbf{J}\left(\mathbf{p}_L-\mathbf{p}_{R_k}\right)\right]\right) \tag{82}$$

$$\triangleq\check{\mathbf{H}}_{L_k}^{-1}\check{\mathbf{H}}_{R_k} \tag{83}$$

那么，可观性矩阵可写成：

$$\check{\mathbf{N}}=\begin{bmatrix}\check{\mathbf{H}}_{L_k}^{-1}\check{\mathbf{H}}_{R_k} & \mathbf{I}_2\\ \check{\mathbf{H}}_{L_k}^{-1}\check{\mathbf{H}}_{R_k} & \mathbf{I}_2\\ \vdots & \vdots\\ \check{\mathbf{H}}_{L_k}^{-1}\check{\mathbf{H}}_{R_k} & \mathbf{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mathbf{I}_2 & -\mathbf{J}\left(\mathbf{p}_L-\mathbf{p}_{R_k}\right) & \mathbf{I}_2\\ -\mathbf{I}_2 & -\mathbf{J}\left(\mathbf{p}_L-\mathbf{p}_{R_k}\right) & \mathbf{I}_2\\ \vdots & & \vdots\\ -\mathbf{I}_2 & -\mathbf{J}\left(\mathbf{p}_L-\mathbf{p}_{R_k}\right) & \mathbf{I}_2\end{bmatrix} \tag{84}$$

易知，$rank\left(\check{\mathbf{N}}\right)=2$，因此，理想 EKF-SLAM 系统也是不可观的。

10.1 实际 EKF-SLAM 的系统可观性

对于实际系统，Jacobian 的线性化点通常在状态向量的估计值位置，如果重复上面的计算过程，会发现 $rank\left(\mathbf{N}\right)=3$。通过分析 $\mathbf{N}$ 的右零空间可知：

$$\text{null}(\mathbf{N})=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2\end{bmatrix} \tag{85}$$

对比之前计算的可观性矩阵的零空间即公式 (67) 易知，原来的 n_3 所表示的小车的旋转角度不可观这一信息丢失了，即实际 EKF-SLAM 认为小车的旋转角度 ϕ 是可观的，也就是说该系统引入一些虚假的观测信

息。

11 FEJ

针对实际 EKF-SLAM 的可观性变化问题，黄老师提出 FEJ，认为即使 Jacobian 不能在真值处线性化，只要保证在同一点处进行线性化，就可以解决可观性变化问题。具体操作方法为：

1. 在第 k+1 时刻传播时的线性化点，不采用第 k 时刻更新后的状态向量，即 $\hat{X}_{k|k}$ 的后验作为线性化点，而是仍然用先验 $\check{X}_{k|k-1}$；

2. 观测时，对于同一个路标点在不同时刻的线性化点（如 p_{L_k}、$p_{L_{k+1}} \cdots p_{L_{k+m}}$），都采用第一次观测到该路标点时的值 p_{L_k} 作为线性化点。

经过上面两步计算得到的 $\mathbf{N}^{'}$ 为：

$$\mathbf{N}' = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_2 & -\mathbf{J}\left(\hat{\mathbf{p}}_{L_{\ell|\ell}} - \hat{\mathbf{p}}_{R|k-1}\right) & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & -\mathbf{J}\left(\hat{\mathbf{p}}_{L_{\ell|\ell}} - \hat{\mathbf{p}}_{R|k-1}\right) & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & -\mathbf{J}\left(\hat{\mathbf{p}}_{L_{\ell|\ell}} - \hat{\mathbf{p}}_{R_{k|k-1}}\right) & \mathbf{I}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\mathbf{I}_2 & -\mathbf{J}\left(\hat{\mathbf{p}}_{L_{\ell|\ell}} - \hat{\mathbf{p}}_{R_{k|k-1}}\right) & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \tag{86}$$

则回归到：$rank\left(\mathbf{N}^{'}\right) = 2$。

12 参考文献

参考文献

[1] Anastasios I. Mourikis Guoquan Huang and Stergios I. Roumeliotis. Analysis and improvement of the consistency of extended kalman filter based slam. ICRA, 2007.

[2] 全权. 多旋翼飞行器设计与控制. 电子工业出版社, 2018.

[3] Vidyasagar M. Nonlinear systems analysis. page 418. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2002.