Skriftlig Eksamen
Matematiske Redskaber (DM527/MM524)

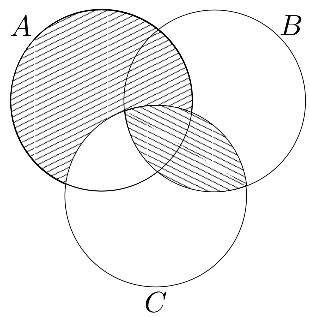
Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Torsdag den 27. oktober 2011 kl. 9–12

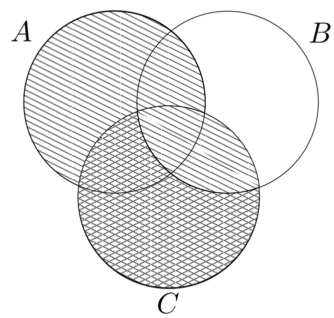
Løsningsforslag

Opgave 1 (10%)

Venn-diagrammer:



$A - C$:
$B \cap C$:
S_1: Alt, hvad der er skraveret



$A \cup C$:
$\overline{B} \cap C$:
S_2: Kun skraveret med

D.v.s. $S_1 = S_2$.

Opgave 2 (10%)

Bevis ved kontraposition:

$$
\begin{array}{ll}
a \text{ og } b \text{ er ulige} & \Rightarrow \\
a = 2m + 1 \wedge b = 2n + 1, \text{ hvor } m, n \in \mathbb{Z} & \Rightarrow \\
ab = (2m + 1)(2n + 1), \text{ hvor } m, n \in \mathbb{Z} & \Rightarrow \\
ab = 2(2mn + 2n + 1) + 1, \text{ hvor } m, n \in \mathbb{Z} & \Rightarrow \\
ab \text{ er ulige} &
\end{array}
$$

Følger også direkte af Lemma 2 i afsnit 3.7.

Opgave 3 (10%)

a)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j &= \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2},\ \text{ifølge Tabel 2 i afsnit 2.4}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i\\ &= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2},\ \text{ifølge Tabel 2 i afsnit 2.4}\\ &= \frac{n(n+1)}{12}(2n+1+3)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\end{aligned}$$

b) Af a) fås:

$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{i} j = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{6} = 220$$

Opgave 4 (10%)

a) Nej, 3 og 6 er ikke indbyrdes primiske.

b) 2 er det mindste heltal, som er en løsning til begge kongruenser.

Opgave 5 (10%)

a) $P(4) = 4^d \bmod n = 4^3 \bmod 33 = 64 - 33 = 31$

b) $p = 3, q = 11$ (eller omvendt)
$d = 3$
$(p-1)(q-1) = 2 \cdot 10 = 20$
$de \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)} \Leftrightarrow 3e \equiv 1 \pmod{20}$
D.v.s. $e = 7$.

D.v.s. den hemmelige nøgle er (33,7)

Opgave 6 (20%)

a) $R = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

b) $R \cup \{(2,1), (3,2), (4,3)\} = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3)\}$

c) Nej, R er anti-symmetrisk, men hverken refleksiv eller transitiv.

d) $\aleph_0$.

Bijektion: $f : \mathbb{N}^+ \to S, f(a) = (a, a+1)$

e) Igen $\aleph_0$.

- Mængden er uendelig
- Rækkefølge:
  Først elementet med $b = 2$. Derefter de to elementer med $b = 3$.
  Så de tre elementer med $b = 4$. O.s.v.
  D.v.s. $(1,2), (1,3), (2,3), (1,4), (2,4), (3,4), \ldots$
  (Minder om beviset for, at de rationale tal er tællelige.)