# Skriftlig Eksamen
# Matematiske Redskaber i Datalogi (DM527)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Tirsdag den 6. januar 2009, kl. 9–11

# Løsningsforslag

# Opgave 1 (25%)

a)
- (3) er ækvivalent med (1): $3 \mid (x+y)$ hvis og kun hvis $x+y$ er et multiplum af 3, og det er netop hvad $\exists z \in \mathbb{Z}\colon x+y=3z$ udtrykker.
- (4) er ækvivalent med negationen af (1) ifølge De Morgans Love for kvantorer.
- (2) er ikke ækvivalent med (1); f.eks. har de to udsagn forskellige sandhedsværdier for $A = B = \{1,2\}$. (2) er heller ikke ækvivalent med negeringen af (1), da de to har forskellige sandhedsværdier for f.eks. $A = \{1\}$ og $B = \{2\}$.
- (5) er ikke ækvivalent med (1), da de to udsagn har forskellige sandhedsværdier for $A = \{1\}$ og $B = \{2\}$. (5) er heller ikke ækvivalent med negeringen af (1), da de to udsagn har forskellige sandhedsværdier for $A = B = \{1,2\}$.

b)
- (1) er sandt, fordi udsagnet $\forall x \in \mathbb{N}_0\colon 3 \mid (x+2x)$ er sandt.
- (2) er falsk, da udsagnet $\exists y \in \mathbb{N}_0\colon 3 \mid ((2y+1)+y)$ er falsk.
- (3) er sandt, da det er ækvivalent med (1).
- (4) er falsk, da det er ækvivalent med negeringen af (1).
- (5) er sandt, da $\forall x \in \mathbb{N}\colon 3 \nmid (x+(2x+1))$ er sandt.

# Opgave 2 (15%)

a)
$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{n}(6x^2+2x+1) &= 6\sum_{x=1}^{n}x^2 + 2\sum_{x=1}^{n}x + \sum_{x=1}^{n}1 \\
&= n(n+1)(2n+1) + n(n+1) + n, \text{ iflg. Tabel 2.4.2} \\
&= n(n+1)(2n+2) + n \\
&= 2n^3 + 4n^2 + 3n
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}2^j &= \sum_{i=0}^{n}(2^{i+1}-1), \text{ iflg. Tabel 2.4.2}\\ &= 2\sum_{i=0}^{n}2^i - \sum_{i=0}^{n}1\\ &= 2(2^{n+1}-1)-(n+1)\\ &= 2^{n+2}-(n+3)\end{aligned}$$

# Opgave 3 (15%)

a) $(2,4) \in R$, da $4 = 2 \cdot 2$

$(2,8) \in R^2$, da $(2,4) \in R$ og $(4,8) \in R$

b) Den transitive lukning af $R$ indeholder alle par $(a,b) \in S \times S$, hvor $b = 2^i a$, $i \in \mathbb{N}_+$. Dvs. flg. par:

$(1,2),(1,4),(1,8),(2,4),(2,8),(3,6),(3,12),(4,8),(5,10),(6,12),(7,14)$

# Opgave 4 (13%)

**Basis:** $1 \leq n \leq 2$

$a_1 = 1 = 2^{1-1}$

$a_2 = 2 = 2^{2-1}$

**Induktionsskridt:** $n \geq 3$

Induktionsantagelse: $a_{n-1} = 2^{n-2}$ og $a_{n-2} = 2^{n-3}$.

$$\begin{aligned}a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2}\\ &= 2^{n-2} + 2 \cdot 2^{n-3}, \text{ ifølge ind.ant.}\\ &= 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}\end{aligned}$$

# Opgave 5 (12%)

$5^2 \bmod 7 = 4$

$5^4 \bmod 7 = (5^2 \bmod 7)^2 \bmod 7 = 4^2 \bmod 7 = 2$

$5^8 \bmod 7 = (5^4 \bmod 7)^2 \bmod 7 = 2^2 \bmod 7 = 4$
$5^{16} \bmod 7 = (5^8 \bmod 7)^2 \bmod 7 = 4^2 \bmod 7 = 2$

Dvs. $5^{16} \bmod 7 = 2$.