

# Analyse factorielle des correspondances

L'analyse factorielle des correspondances (AFC) est une méthode d'analyse exploratoire qui vise à représenter graphiquement les relations entre les modalités de deux variables qualitatives. Elle permet de représenter simultanément les **profils-lignes** (dans  $\mathbb{R}^p$ ) et les **profils-colonnes** (dans  $\mathbb{R}^n$ ) d'un tableau de contingences, dans un espace de faible dimension, tout en préservant au mieux la distance du  $\chi^2$ . L'objectif de l'AFC est de trouver une représentation bidimensionnelle (voir tridimensionnelle) dans laquelle les proximités géométriques entre points reflètent au mieux les similarités entre les modalités.

## Remarque

L'AFC peut être vue comme une double ACP : une ACP pondérée appliquée aux profils-lignes et aux profils-colonnes, dans leur espaces respectifs avec une métrique adaptée.

## 1 Notation

On considère un tableau de contingence  $K = (k_{ij})$ , où  $k_{ij}$  est le nombre d'individus appartenant à la classe  $i \in \{1, \dots, n\}$  et à la catégorie  $j \in \{1, \dots, p\}$ . On travaille ensuite avec le tableau des fréquences relatives en normalisant ce tableau. Comme les fréquences sont proportionnelles à la taille d'échantillon  $n$ , le tableau des fréquences relatives contient plus d'information. Notons  $F = (f_{ij})$ , dans lequel

$$f_{ij} = \frac{k_{ij}}{k_{\bullet\bullet}} = \frac{k_{ij}}{\sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p k_{lm}}.$$

Les marges lignes (resp. colonnes) du tableau correspondent à la somme des colonnes pour chaque ligne (resp. à la somme des lignes pour chaque colonne) :

$$f_{i\bullet} = \sum_{j=1}^p f_{ij} = \frac{k_{i\bullet}}{k_{\bullet\bullet}}, \quad 1 \leq i \leq n; \quad (1)$$

$$f_{\bullet j} = \sum_{i=1}^n f_{ij} = \frac{k_{\bullet j}}{k_{\bullet\bullet}}, \quad 1 \leq j \leq p. \quad (2)$$

On a  $f_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^n f_{i\bullet} = \sum_{j=1}^p f_{\bullet j} = 1$ .

### Exemple

Comme exemple, on va considérer la majeure et le type d'admission des étudiants inscrit au cours STT-2200 à l'automne 2025.

TABLE 1 – Tableau de contingence des étudiants inscrit pour le cours STT-2200 (Automne 2025) croisant leur majeure et leur type d'admission.

|             | Collège | Université Laval | Autre université | Hors Québec |
|-------------|---------|------------------|------------------|-------------|
| Actuariat   | 2       | 0                | 0                | 1           |
| Statistique | 2       | 4                | 1                | 0           |
| Bio-info    | 4       | 2                | 0                | 2           |
| Finance     | 2       | 0                | 0                | 0           |
| Maths       | 1       | 0                | 0                | 0           |
| Info        | 2       | 1                | 0                | 1           |

Ici, on trouve  $k_{\bullet\bullet} = 25$ . C'est tout simplement le nombre d'étudiants inscrit au cours. On trouve donc le tableau de fréquences suivant :

TABLE 2 – Tableau de fréquences associé au tableau de contingence précédent.

|                 | Collège | Université Laval | Autre université | Hors Québec | $f_{i\bullet}$ |
|-----------------|---------|------------------|------------------|-------------|----------------|
| Actuariat       | 0.08    | 0                | 0                | 0.04        | 0.12           |
| Statistique     | 0.08    | 0.16             | 0.04             | 0           | 0.28           |
| Bio-info        | 0.16    | 0.08             | 0                | 0.08        | 0.32           |
| Finance         | 0.08    | 0                | 0                | 0           | 0.08           |
| Maths           | 0.04    | 0                | 0                | 0           | 0.04           |
| Info            | 0.08    | 0.04             | 0                | 0.04        | 0.16           |
| $f_{\bullet j}$ | 0.52    | 0.28             | 0.04             | 0.16        | 1              |

## 2 Indépendance statistique

Le tableau des fréquences relatives  $F = (f_{ij})$  peut être interprété comme une estimation des probabilités conjointes des modalités des deux variables qualitatives. Si les deux variables sont statistiquement indépendantes, on s'attend à ce que la probabilité conjointe s'approche du produit des probabilités marginales :

$$f_{ij} \approx f_{i\bullet} f_{\bullet j}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \{1, \dots, p\}.$$

Pour tester si les écarts observés entre  $f_{ij}$  et  $f_{i\bullet}f_{\bullet j}$  sont significatifs, on utilise le test du  $\chi^2$  d'indépendance :

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \frac{(k_{ij} - \mathbb{E}(k_{ij}))^2}{\mathbb{E}(k_{ij})} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \frac{\left(k_{ij} - \frac{k_{i\bullet}k_{\bullet j}}{k_{\bullet\bullet}}\right)^2}{\left(\frac{k_{i\bullet}k_{\bullet j}}{k_{\bullet\bullet}}\right)}.$$

Sous l'hypothèse d'indépendance, cette statistique suit approximativement une loi du  $\chi^2$ . Si les variables sont indépendantes, la statistique  $T$  doit être proche de 0.

### 3 Profils-lignes et profils-colonnes

Pour analyser les structures dans le tableau de contingence, on introduit la notion de profil. Chaque ligne du tableau peut être vue comme un profil-ligne

$$L_i = \left( \frac{k_{i1}}{k_{i\bullet}}, \dots, \frac{k_{ip}}{k_{i\bullet}} \right) = \left( \frac{f_{i1}}{f_{i\bullet}}, \dots, \frac{f_{ip}}{f_{i\bullet}} \right).$$

Le profil-ligne représente la répartition des modalités  $i$  de la première variable parmi les modalités de la seconde.

De même, chaque colonne du tableau peut être vue comme un profil-colonne

$$C_j = \left( \frac{k_{1j}}{k_{\bullet j}}, \dots, \frac{k_{nj}}{k_{\bullet j}} \right) = \left( \frac{f_{1j}}{f_{\bullet j}}, \dots, \frac{f_{nj}}{f_{\bullet j}} \right).$$

Le profil-colonne représente la répartition des modalités  $j$  de la deuxième variable parmi les modalités de la première.

On peut ensuite s'intéresser au profil-ligne moyen (resp. profil-colonne moyen) obtenus comme la moyenne pondérée des profils-lignes (resp. profils-colonnes). Autrement dit, ils correspondent aux fréquences marginales colonnes (resp. fréquences marginales lignes). Le profil-ligne moyen est donné par

$$\left( \sum_{i=1}^n f_{i\bullet} \frac{f_{i1}}{f_{i\bullet}}, \dots, \sum_{i=1}^n f_{i\bullet} \frac{f_{ip}}{f_{i\bullet}} \right) = (f_{\bullet 1}, \dots, f_{\bullet p}),$$

et le profil-colonne moyen est donné par

$$\left( \sum_{j=1}^p f_{\bullet j} \frac{f_{1j}}{f_{\bullet j}}, \dots, \sum_{j=1}^p f_{\bullet j} \frac{f_{nj}}{f_{\bullet j}} \right) = (f_{1\bullet}, \dots, f_{n\bullet}).$$

Si les variables sont indépendantes, tous les profils sont égaux à leur profils moyens respectifs. Autrement dit, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$\left( \frac{f_{i1}}{f_{i\bullet}}, \dots, \frac{f_{ip}}{f_{i\bullet}} \right) = (f_{\bullet 1}, \dots, f_{\bullet p}) \quad \text{et} \quad \left( \frac{f_{1j}}{f_{\bullet j}}, \dots, \frac{f_{nj}}{f_{\bullet j}} \right) = (f_{1\bullet}, \dots, f_{n\bullet}).$$

Ainsi, plus les profils s'éloignent de leurs moyennes, plus les variables montrent une dépendance.

Pour mesurer la différence entre deux profils-lignes, on utilise la distance du  $\chi^2$  pondérée par les fréquences marginales :

$$d^2(L_i, L_{i'}) = \sum_{j=1}^p \frac{1}{f_{\bullet j}} \left( \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'\bullet}} \right)^2.$$

On peut faire de même pour la différence entre deux profils-colonnes :

$$d^2(C_j, C_{j'}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{i\bullet}} \left( \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}} - \frac{f_{ij'}}{f_{\bullet j'}} \right)^2.$$

On peut écrire cela sous forme matricielle. Notons  $D_n = \text{diag}(f_{i\bullet})$  la matrice diagonale des poids des lignes et  $D_p = \text{diag}(f_{\bullet j})$  la matrice diagonale des poids des colonnes. La matrice  $D_n^{-1}F$  a pour lignes les profils-lignes et la matrice  $D_p^{-1}F^\top$  a pour lignes les profils-colonnes. la distance du  $\chi^2$  entre deux profils-lignes  $L_i$  et  $L_{i'}$  s'écrit alors

$$d^2(L_i, L_{i'}) = (L_i - L_{i'})^\top D_p^{-1} (L_i - L_{i'}),$$

et de manière analogue pour deux profils-colonnes  $C_j$  et  $C_{j'}$

$$d^2(C_j, C_{j'}) = (C_j - C_{j'})^\top D_n^{-1} (C_j - C_{j'}).$$

Ces distances sont à la base de la représentation géométrique dans l'analyse des correspondances, où l'on cherche une projection des profils dans un espace de faible dimension qui conserve au mieux ces distances.

## 4 Estimation des éléments propres

L'analyse des profils-lignes s'appelle l'analyse directe. On considère les profils-lignes contenus dans la matrice  $D_n^{-1}F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . On projette les profils-lignes dans un espace muni de la métrique du  $\chi^2$  sur les colonnes, définie par

$$\langle x, y \rangle = x^\top D_p^{-1} y.$$

L'analyse des profils-colonnes s'appelle l'analyse duale. On considère les profils-colonnes contenus dans la matrice  $D_p^{-1}F^\top \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . On projette les profils-colonnes dans un espace muni de la métrique du  $\chi^2$  sur les lignes, définie par

$$\langle x, y \rangle = x^\top D_n^{-1} y.$$

Pour l'analyse directe, on cherche le premier axe factoriel, i.e. la direction  $u \in R^p$  qui maximise la variance projetée des profils-lignes, sous contrainte que  $u$  soit normé. On cherche donc

$$\max_u u^\top D_p^{-1} F^\top D_n^{-1} F D_p^{-1} u, \quad \text{s.c.} \quad u^\top D_p^{-1} u = 1.$$

Ce problème d'optimisation revient à chercher le premier vecteur propre de la matrice

$$S = F^\top D_n^{-1} F D_p^{-1}.$$

La matrice  $S$  joue un rôle analogue à la matrice de covariance dans l'ACP. Le premier vecteur propre  $u_1$  vérifie donc la relation

$$S u_1 = F^\top D_n^{-1} F D_p^{-1} u_1 = \lambda_1 u_1,$$

avec  $\lambda_1$  la valeur propre associée à  $u_1$ . Les vecteurs propres de la matrice  $S$  donnent les axes factoriels dans l'espace des colonnes. Les coordonnées des profils-lignes sur le premier axe factoriel sont obtenues par la relation

$$\Phi_1 = D_n^{-1} F D_p^{-1} u_1.$$

On obtient les autres couples de valeurs propres et vecteurs propres, ainsi que les coordonnées des profils-lignes sur les axes factoriels associés de manière similaire.

L'analyse duale se fait de façon similaire. On cherche le premier vecteur propre de la matrice

$$T = F D_p^{-1} F^\top D_n^{-1}.$$

Le premier vecteur propre  $v_1$  vérifie donc la relation

$$T v_1 = F D_p^{-1} F^\top D_n^{-1} v_1 = \mu_1 v_1,$$

avec  $\mu_1$  la valeur propre associée à  $v_1$ . Les vecteurs propres de la matrice  $T$  donnent les axes factoriels dans l'espace des lignes. Les coordonnées des profils-colonnes sur le premier axe factoriel sont obtenues par la relation

$$\Psi_1 = D_p^{-1} F^\top D_n^{-1} v_1.$$

On obtient les autres couples de valeurs propres et vecteurs propres, ainsi que les coordonnées des profils-colonnes sur les axes factoriels associés de manière similaire.

#### Propriété

Les matrices  $S$  et  $T$  ont les mêmes  $r = \min(n - 1, p - 1)$  premières valeurs propres positives. Cela garantit une représentation cohérente des lignes et des colonnes dans le même espace réduit. Pour  $k = 1, \dots, r$ , les relations entre les vecteurs propres  $u_k$  et  $v_k$

sont

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} F^\top D_n^{-1} v_k \quad \text{et} \quad v_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} F D_p^{-1} u_k.$$

Preuve

En partant de l'équation

$$T v_1 = F D_p^{-1} F^\top D_n^{-1} v_1 = \mu_1 v_1,$$

en multipliant à gauche par  $F^\top D_n^{-1}$ , on obtient :

$$F^\top D_n^{-1} F D_p^{-1} F^\top D_n^{-1} v_1 = \mu_1 F^\top D_n^{-1} v_1.$$

Ainsi le vecteur  $F^\top D_n^{-1} v_1$  est un vecteur propre de la matrice  $F^\top D_n^{-1} F D_p^{-1}$  associée à la valeur propre  $\mu_1$ . Comme  $\lambda_1$  est la plus grande valeur propre de  $F^\top D_n^{-1} F D_p^{-1}$ , on en déduit que  $\mu_1 \leq \lambda_1$ . En procédant de la même manière, en partant de  $S u_1 = \lambda_1 u_1$ , on déduit que  $\lambda_1 \leq \mu_1$ . Donc  $\lambda_1 = \mu_1$ . On peut ensuite faire de même pour les  $r$  premières valeurs propres. On en déduit aussi les relations entre les valeurs propres.

Remarque

En centrant les profils, on peut projeter les profils-lignes et les profils-colonnes dans un même repère, facilitant ainsi l'interprétation géométrique conjointe.

## 5 Centre de gravité et inertie

Dans les sorties des logiciels de statistique, le nuage des points issus d'une AFC est généralement centré en  $(0,0)$ . Cette convention reflète une analyse relative aux centres de gravité des profils-lignes et des profils-colonnes. Ce centrage est à la fois pratique et interprétable. En effet, il fait apparaître les distances entre les modalités par rapport à leur moyenne pondérée, i.e. par rapport au comportement moyen dans la population.

Chaque modalité (ligne ou colonne) est associée à un poids, correspondant à sa fréquence marginale : le poids de la  $i$ ème ligne est  $f_{i\bullet}$  et le poids de la  $j$ ème colonne est  $f_{\bullet j}$ . Le centre de gravité des lignes est la moyenne pondérée des profils-lignes :

$$G_L = (g_1, \dots, g_p)^\top, \quad \text{où} \quad g_j = \sum_{i=1}^n f_{i\bullet} \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}} = \sum_{i=1}^n f_{ij} = f_{\bullet j}, \quad j \in \{1, \dots, p\}.$$

De même, le centre de gravité des colonnes est

$$G_C = (f_{1\bullet}, \dots, f_{n\bullet})^\top.$$

Pour recentrer les profils autour du centre de gravité, on soustrait leur valeur moyenne :

$$\frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}} - g_j = \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}} - f_{\bullet j} = \frac{f_{ij} - f_{i\bullet}f_{\bullet j}}{f_{i\bullet}}.$$

Ce centrage garantit que chaque profil-ligne  $i \in \{1, \dots, n\}$  est moyenné à zéro :

$$\sum_{j=1}^p \frac{f_{ij} - f_{i\bullet}f_{\bullet j}}{f_{i\bullet}} = 0.$$

L'AFC ne se fait donc plus sur la matrice  $S$  mais plutôt sur une matrice centrée  $S^* = (s_{jj}^*)$ , où

$$s_{jj}^* = \sum_{i=1}^n \frac{(f_{ij} - f_{i\bullet}f_{\bullet j})(f_{ij'} - f_{i\bullet}f_{\bullet j'})}{f_{i\bullet}f_{\bullet j'}}.$$

Par définition, la trace de la matrice  $S^*$  donne l'inertie totale :

$$\text{tr}(S^*) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \frac{(f_{ij} - f_{i\bullet}f_{\bullet j})^2}{f_{i\bullet}f_{\bullet j}}.$$

Celle-ci correspond à la statistique du  $\chi^2$  normalisée que l'on utilise pour tester l'indépendance entre les variables.

#### Propriété

On a que, pour tout  $j, j' \in \{1, \dots, p\}$ ,  $s_{jj'}^* = s_{jj'} - f_{\bullet j}$ , où

$$s_{jj'} = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}f_{ij'}}{f_{i\bullet}f_{\bullet j'}}.$$

#### Preuve

La propriété précédente entraîne que les matrices  $S$  et  $S^*$  ont les mêmes vecteurs propres pour les  $p$  premières dimensions, ce qui permet d'effectuer l'analyse factorielle sur la version centrée.

## 6 Coordonnées factorielles

On a que, pour tout  $k = 1, \dots, r$ ,

$$\Phi_k = D_n^{-1} F D_p^{-1} u_k \quad \text{et} \quad \Psi_k = D_p^{-1} F^\top D_n^{-1} v_k.$$

Or, on a aussi vu les relations entre les vecteurs propres  $u_k$  et  $v_k$ ,

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} F^\top D_n^{-1} v_k \quad \text{et} \quad v_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} F D_p^{-1} u_k.$$

On en déduit donc les relations entre les coordonnées factorielles des profils-lignes et celles des profils-colonnes :

$$\Phi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} D_n^{-1} F \Psi_k \quad \text{et} \quad \Psi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} D_p^{-1} F^\top \Phi_k.$$

On peut maintenant examiner ces relations sur chacune des composantes :

$$[\Phi_k]_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{j=1}^p \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}} [\Psi_k]_j \quad \text{et} \quad [\Psi_k]_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}} [\Phi_k]_i,$$

où  $[\Phi_k]_i$  désigne la coordonnée du profil-ligne  $L_i$  sur le  $k$ e axe factoriel et  $[\Psi_k]_j$  désigne la coordonnée du profil-colonne  $C_j$  sur le même axe factoriel. Ces relations expriment, à un facteur  $1/\sqrt{\lambda_k}$  près, que chaque profil-ligne est au barycentre des projections des profils-colonnes affectés du poids de la colonne  $j$  dans la ligne  $i$  et que chaque profil-colonne est au barycentre des projections des profils-lignes affectés du poids de la ligne  $i$  dans la colonne  $j$ .

### Remarque

Ainsi, en AFC, nous avons une double représentation barycentrique. Sur les axes factoriels, chaque point d'un nuage est au barycentre des points de l'autre nuage.