# Algèbre linéaire

Dans cette partie, on présente quelques résultats d'algèbre linéaire utiles dans le cadre de ce cours. Pour plus d'information, vous pouvez vous référer au cours MAT-1200, à Deisenroth, Faisal, et Ong (2020) (en anglais) et à Grifone (2024) (en français).

## 1 Quelques propriétés matricielles

Notons $M_{n,m}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices à $n$ lignes et $m$ colonnes dont les entrées appartiennent à $\mathbb{R}$. Notons $M_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées de taille $n$, i.e. à $n$ lignes et $n$ colonnes dont les entrées appartiennent à $\mathbb{R}$. Soient $M$, $N$ et $P$ des matrices appartenant à $M_{n,m}(\mathbb{R})$. Soient $A$ et $B$ des matrices appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. Notons $I_n$ la matrice identité de taille $n$, i.e. qui contient des 1 sur le diagonale et des 0 sur les éléments hors de la diagonale. Soient $u$ et $v$ appartenant à $\mathbb{R}^n$, i.e. des vecteurs colonnes de taille $n$.

Propriétés de l'inverse de matrices

Supposons que les matrices $A$ et $B$ soient inversibles. Alors le produit matriciel $AB$ est inversible et est donné par :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Preuve

Posons $C = AB$ et $D = B^{-1}A^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} CD &= ABB^{-1}A^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= I_n \end{aligned}$$

De la même façon, on trouve que $DC = I_n$. Ainsi, $AB$ est inversible et son inverse est donné par $B^{-1}A^{-1}$.

Propriétés du déterminant de matrices

Considérant les matrices définies en début de section, on a :

1. $\det(A^\top) = \det(A)$,
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
3. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Preuve

Les preuves des propriétés 1 et 2 sont techniques et sont omises, mais peuvent être trouvées, par exemple, ici. Pour ce qui est de la troisième propriété, par définition, on a $AA^{-1} = I_n$. Le déterminant de $I_n$ est égale à 1 (produit des éléments sur la diagonale). Donc $\det(AA^{-1}) = 1$. Or, d'après la deuxième propriété, $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$. On a donc bien $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Propriétés de la trace de matrices

Considérant les matrices définies en début de section, on a :

1. $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^\top)$,
2. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$,
3. $\operatorname{tr}(MN^\top) = \operatorname{tr}(N^\top M)$.

Preuve

Pour une matrice carré $A$, notons $a_{ij}$, l'élément de la matrice $A$ à la ligne $i$ et à la colonne $j$. La trace de $A$ est donnée par la somme des éléments diagonaux, i.e. $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

1. La transposition ne changeant pas les éléments diagonaux, le résultat est direct.
2. Notons $C = A + B$. Comme $A$ et $B$ sont des matrices carrées, $C$ est une matrice carrée. On a $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$. Donc
$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ii} + b_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B).$$
3. Les matrices $MN^\top$ et $N^\top M$ sont carrées, de dimension respectives $n \times n$ et $m \times m$, on peut donc bien calculer leur trace. Notons $C = MN^\top$ et $D = N^\top M$.
$$\operatorname{tr}(MN^\top) = \operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} n_{ji} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n n_{ji} m_{ij} = \sum_{j=1}^m d_{jj} = \operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}(N^\top M).$$

Définition

1. Soit $A$ une matrice symétrique appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. $A$ est **définie positive** si $u^\top Au > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $u \neq 0$.
2. Soit $A$ appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. $A$ est **orthogonal** si $A^\top A = AA^\top = I_n$.

## 2 Valeurs et vecteurs propres

Définition

Soit $A$ appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de $A$ s'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que

$$Au = \lambda u. \tag{1}$$

Le vecteur $u$ est appelé **vecteur propre** de $A$ correspondant à la valeur propre $\lambda$. L'ensemble des nombres réels $\lambda$ satisfaisant Équation 1 est appelé **spectre** de la matrice $A$ et noté $\mathrm{sp}(A)$.

Propriété des vecteurs propres

1. Si $u$ est un vecteur propre de $A$ correspondant à une valeur propre $\lambda$, alors le vecteur $cu$, $c \in \mathbb{R}^\star$ est également un vecteur propre de $A$ correspondant à $\lambda$.
2. Si $A$ est symétrique et $u_1$ et $u_2$ sont des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes de $A$, alors $u_1$ et $u_2$ sont orthogonaux, i.e. $u_1^\top u_2 = 0$.

Preuve

1. Soit $c \in \mathbb{R}^\star$ et $u$ un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$. On a :

$$A(cu) = cAu = c\lambda u = \lambda(cu).$$

   Donc, le vecteur $cu$ est aussi vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$.
2. Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$, les valeurs propres associées à $u_1$ et $u_2$, tel que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On a $Au_1 = \lambda_1 u_1$ et $Au_2 = \lambda_2 u_2$. Ensuite

$$\lambda_1 u_1^\top u_2 = u_1^\top Au_2 = \lambda_2 u_1^\top u_2.$$

   Cela implique que $(\lambda_1 - \lambda_2)u_1^\top u_2 = 0$. Or, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Donc, nécessairement, $u_1^\top u_2 = 0$.

Cette deuxième propriété nous sera utile lorque l'on s'intéressera à la réduction de dimension et, en particulier, à l'analyse en composantes principales.

Caractérisation de matrices avec ses éléments propres

1. Si $A$ est symétrique, alors **toutes** ses valeurs propres sont réelles.
2. Si $A$ est définie positive, alors **toutes** ses valeurs propres sont strictement positives.

Preuve

1. Considérons le cas plus général où $A$ est une matrice hermitenne. La matrice $A$ est égale la transposé de son conjugué, noté $A^*$. Notons $\lambda$ une valeur propre associée à un vecteur propre $u$, éventuellement complexe. On a :

$$\overline{u}^\top Au = \overline{u}^\top \lambda u = \lambda \overline{u}^\top u, \tag{2}$$
$$\overline{u}^\top Au = \overline{u}^\top A^* u = \overline{Au}^\top u = \overline{\lambda}\overline{u}^\top u. \tag{3}$$

   Cela implique que $(\lambda - \overline{\lambda})\overline{u}^\top u = 0$. Comme $u \neq 0$, on a $\lambda = \overline{\lambda}$. Donc $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Considérons $u$, vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$. On a que $u^\top Au = \lambda u^\top u$. Or, comme $u \neq 0$, $u^\top u \neq 0$. Donc

$$\lambda = \frac{u^\top Au}{u^\top u}.$$

   Comme $A$ est définie postive, $u^\top Au > 0$ pour tout vecteur $u$ non nul. On en déduit que $\lambda > 0$.

# 3 Diagonalisation de matrices

Définition

Soit $A$ appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. On dit que $A$ est **diagonalisable** s'il existe une matrice $P$ appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ non-singulière et une matrice diagonale $D$ appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telles que
$$P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}.$$

Théorème de décomposition spectrale

Soit $A$ une matrice symétrique appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ses $n$ valeurs propres. Alors, il existe une matrice orthogonal $P$ appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P\Lambda P^\top, \quad \text{où} \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Si $A$ admet $n$ valeurs propres positives distinctes, alors on peut prendre $P$ comme étant la matrice dont la $k$-ième colonne est le vecteur propre normé correspondant à la $k$-ième valeur propre $\lambda_k$ de $A$.

Soit deux matrices symétriques, $A$ et $B$, comment déterminer le vecteur $u$ tel que $u^\top Au$ soit maximal, sachant que $u^\top Bu = 1$ ? Il suffit de prendre $u$ comme le vecteur propre de $B^{-1}A$ associé à $\lambda$ la valeur propre maximale de $B^{-1}A$. On obtient ainsi

$$u^\top Au = u^\top \lambda Mu = \lambda U^\top Mu = \lambda.$$

Caractérisation du déterminant et de la trace de matrices avec ses éléments propres

Si $A$ a comme valeurs propres (réelles, mais pas forcément distinctes) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors

1. $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
2. $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Preuve

En utilisant le théorème de décomposition spectrale, il existe une matrice $P$ inversible tel que $A = P\Lambda P^{-1}$, où $\Lambda$ est une matrice diagonale contenant les valeurs propres. On a donc, pour le déterminant,

$$\det(A) = \det(P\Lambda P^{-1}) = \det(P)\det(\Lambda)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(\Lambda)\det(P)^{-1} = \det(\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

et, pour la trace,

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P\Lambda P^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}P\Lambda) = \operatorname{tr}(\Lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

## Références

Deisenroth, Marc Peter, A. Aldo Faisal, et Cheng Soon Ong. 2020. *Mathematics for Machine Learning*. 1 éd. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781108679930.

Grifone, Joseph. 2024. *Algèbre Linéaire*. 7e edition. Toulouse : CEPADUES.