

# Algèbre linéaire

Dans cette partie, on présente quelques résultats d'algèbre linéaire utiles dans le cadre de ce cours. Pour plus d'information, vous pouvez vous référer au cours MAT-1200, à Deisenroth, Faisal, et Ong (2020) (en anglais) et à Grifone (2024) (en français).

## 1 Quelques propriétés matricielles

Notons  $M_{n,m}(\mathbb{R})$ , l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $m$  colonnes dont les entrées appartiennent à  $\mathbb{R}$ . Notons  $M_n(\mathbb{R})$ , l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$ , i.e. à  $n$  lignes et  $n$  colonnes dont les entrées appartiennent à  $\mathbb{R}$ . Soient  $M$ ,  $N$  et  $P$  des matrices appartenant à  $M_{n,m}(\mathbb{R})$ . Soient  $A$  et  $B$  des matrices appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$ . Notons  $I_n$  la matrice identité de taille  $n$ , i.e. qui contient des 1 sur la diagonale et des 0 sur les éléments hors de la diagonale. Soient  $u$  et  $v$  appartenant à  $\mathbb{R}^n$ , i.e. des vecteurs colonnes de taille  $n$ .

### Propriétés de l'inverse de matrices

Supposons que les matrices  $A$  et  $B$  soient inversibles. Alors le produit matriciel  $AB$  est inversible et est donné par :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

### Preuve

Posons  $C = AB$  et  $D = B^{-1}A^{-1}$ . Alors

$$\begin{aligned} CD &= ABB^{-1}A^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= I_n \end{aligned}$$

De la même façon, on trouve que  $DC = I_n$ . Ainsi,  $AB$  est inversible et son inverse est donné par  $B^{-1}A^{-1}$ .

### Propriétés du déterminant de matrices

Considérant les matrices définies en début de section, on a :

1.  $\det(A^\top) = \det(A)$ ,
2.  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ,
3.  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .

### Preuve

Les preuves des propriétés 1 et 2 sont techniques et sont omises, mais peuvent être trouvées, par exemple, [ici](#). Pour ce qui est de la troisième propriété, par définition, on a  $AA^{-1} = I_n$ . Le déterminant de  $I_n$  est égale à 1 (produit des éléments sur la diagonale). Donc  $\det(AA^{-1}) = 1$ . Or, d'après la deuxième propriété,  $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ . On a donc bien  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .

### Propriétés de la trace de matrices

Considérant les matrices définies en début de section, on a :

1.  $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^\top)$ ,
2.  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ ,
3.  $\text{tr}(MN^\top) = \text{tr}(N^\top M)$ .

### Preuve

Pour une matrice carré  $A$ , notons  $a_{ij}$ , l'élément de la matrice  $A$  à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$ . La trace de  $A$  est donnée par la somme des éléments diagonaux, i.e.  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

1. La transposition ne changeant pas les éléments diagonaux, le résultat est direct.
2. Notons  $C = A + B$ . Comme  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées,  $C$  est une matrice carrée. On a  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ . Donc

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ii} + b_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{tr}(A) + \text{tr}(B).$$

3. Les matrices  $MN^\top$  et  $N^\top M$  sont carrées, de dimension respectives  $n \times n$  et  $m \times m$ , on peut donc bien calculer leur trace. Notons  $C = MN^\top$  et  $D = N^\top M$ .

$$\text{tr}(MN^\top) = \text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} n_{ji} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n n_{ji} m_{ij} = \sum_{j=1}^m d_{jj} = \text{tr}(D) = \text{tr}(N^\top M).$$

### Définition

1. Soit  $A$  une matrice symétrique appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$ .  $A$  est **définie positive** si  $u^\top A u > 0$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$  tel que  $u \neq 0$ .
2. Soit  $A$  appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$ .  $A$  est **orthogonal** si  $A^\top A = A A^\top = I_n$ .

## 2 Valeurs et vecteurs propres

### Définition

Soit  $A$  appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une **valeur propre** de  $A$  s'il existe un vecteur  $u \in \mathbb{R}^n$  non nul tel que

$$A u = \lambda u. \quad (1)$$

Le vecteur  $u$  est appelé **vecteur propre** de  $A$  correspondant à la valeur propre  $\lambda$ . L'ensemble des nombres réels  $\lambda$  satisfaisant Équation 1 est appelé **spectre** de la matrice  $A$  et noté  $\text{sp}(A)$ .

### Propriété des vecteurs propres

1. Si  $u$  est un vecteur propre de  $A$  correspondant à une valeur propre  $\lambda$ , alors le vecteur  $cu$ ,  $c \in \mathbb{R}^*$  est également un vecteur propre de  $A$  correspondant à  $\lambda$ .
2. Si  $A$  est symétrique et  $u_1$  et  $u_2$  sont des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes de  $A$ , alors  $u_1$  et  $u_2$  sont orthogonaux, i.e.  $u_1^\top u_2 = 0$ .

### Preuve

1. Soit  $c \in \mathbb{R}^*$  et  $u$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . On a :

$$A(cu) = cAu = c\lambda u = \lambda(cu).$$

Donc, le vecteur  $cu$  est aussi vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

2. Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , les valeurs propres associées à  $u_1$  et  $u_2$ , tel que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . On a  $Au_1 = \lambda_1 u_1$  et  $Au_2 = \lambda_2 u_2$ . Ensuite

$$\lambda_1 u_1^\top u_2 = u_1^\top A u_2 = \lambda_2 u_1^\top u_2.$$

Cela implique que  $(\lambda_1 - \lambda_2)u_1^\top u_2 = 0$ . Or,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Donc, nécessairement,  $u_1^\top u_2 = 0$ .

Cette deuxième propriété nous sera utile lorsque l'on s'intéressera à la réduction de dimension et, en particulier, à l'analyse en composantes principales.

### Caractérisation de matrices avec ses éléments propres

1. Si  $A$  est symétrique, alors **toutes** ses valeurs propres sont réelles.
2. Si  $A$  est définie positive, alors **toutes** ses valeurs propres sont strictement positives.

### Preuve

1. Considérons le cas plus général où  $A$  est une matrice hermitienne. La matrice  $A$  est égale la transposé de son conjugué, noté  $A^*$ . Notons  $\lambda$  une valeur propre associée à un vecteur propre  $u$ , éventuellement complexe. On a :

$$\bar{u}^\top Au = \bar{u}^\top \lambda u = \lambda \bar{u}^\top u, \quad (2)$$

$$\bar{u}^\top Au = \bar{u}^\top A^* u = \overline{Au}^\top u = \bar{\lambda} \bar{u}^\top u. \quad (3)$$

Cela implique que  $(\lambda - \bar{\lambda})\bar{u}^\top u = 0$ . Comme  $u \neq 0$ , on a  $\lambda = \bar{\lambda}$ . Donc  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2. Considérons  $u$ , vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . On a que  $u^\top Au = \lambda u^\top u$ . Or, comme  $u \neq 0$ ,  $u^\top u \neq 0$ . Donc

$$\lambda = \frac{u^\top Au}{u^\top u}.$$

Comme  $A$  est définie positive,  $u^\top Au > 0$  pour tout vecteur  $u$  non nul. On en déduit que  $\lambda > 0$ .

## 3 Diagonalisation de matrices

### Définition

Soit  $A$  appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $A$  est **diagonalisable** s'il existe une matrice  $P$  appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$  non-singulière et une matrice diagonale  $D$  appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$  telles que

$$P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}.$$

### Théorème de décomposition spectrale

Soit  $A$  une matrice symétrique appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , ses  $n$  valeurs propres. Alors, il existe une matrice orthogonale  $P$  appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$  telle que

$$A = P\Lambda P^\top, \quad \text{où } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Si  $A$  admet  $n$  valeurs propres positives distinctes, alors on peut prendre  $P$  comme étant la

matrice dont la  $k$ -ième colonne est le vecteur propre normé correspondant à la  $k$ -ième valeur propre  $\lambda_k$  de  $A$ .

Soit deux matrices symétriques,  $A$  et  $B$ , comment déterminer le vecteur  $u$  tel que  $u^\top Au$  soit maximal, sachant que  $u^\top Bu = 1$ ? Il suffit de prendre  $u$  comme le vecteur propre de  $B^{-1}A$  associé à  $\lambda$  la valeur propre maximale de  $B^{-1}A$ . On obtient ainsi

$$u^\top Au = u^\top \lambda Mu = \lambda U^\top Mu = \lambda.$$

#### Caractérisation du déterminant et de la trace de matrices avec ses éléments propres

Si  $A$  a comme valeurs propres (réelles, mais pas forcément distinctes)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors

1.  $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
2.  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

#### Preuve

En utilisant le théorème de décomposition spectrale, il existe une matrice  $P$  inversible tel que  $A = P\Lambda P^{-1}$ , où  $\Lambda$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres. On a donc, pour le déterminant,

$$\det(A) = \det(P\Lambda P^{-1}) = \det(P)\det(\Lambda)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(\Lambda)\det(P)^{-1} = \det(\Lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

et, pour la trace,

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(P\Lambda P^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}P\Lambda) = \text{tr}(\Lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

## Références

- Deisenroth, Marc Peter, A. Aldo Faisal, et Cheng Soon Ong. 2020. *Mathematics for Machine Learning*. 1 éd. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108679930>.
- Grifone, Joseph. 2024. *Algèbre Linéaire*. 7e édition. Toulouse : CEPADUES.