

# Algèbre

## Révisions d'algèbre linéaire

Cf. cours MAT-1200. Donner quelques références.

Notons  $M$ ,  $N$  et  $P$  des matrices de taille  $n \times m$ ,  $A$  et  $B$  des matrices carrées et  $I_n$  la matrice identité, de dimension  $n \times n$ , et  $u$  et  $v$  des vecteurs colonnes de taille  $n$ .

### Propriétés de l'inverse

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

### Propriétés du déterminant

$$\begin{aligned}\det(A^\top) &= \det(A) \\ \det(A^{-1}) &= 1/\det(A) \\ \det(AB) &= \det(A)\det(B)\end{aligned}$$

### Propriétés de la trace

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A+B) &= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \\ \operatorname{tr}(MN) &= \operatorname{tr}(NM)\end{aligned}$$

Propriété de matrices :

- Soit  $A$  une matrice symétrique de dimension  $n \times n$ .  $A$  est définie positive si elle est positive et inversible, c'est-à-dire si  $u^\top Au > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $x \neq 0$ .
- Soit  $A$  une matrice carrée à valeur dans  $\mathbb{R}$ .  $A$  est orthogonale si  $A^\top A = AA^\top = I_n$ .

Valeurs et vecteurs propres :

- Soit  $A$  une matrice carrée de dimension  $n \times n$ . On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  si il existe un vecteur  $u \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$Au = \lambda u.$$

Le vecteur  $u$  est appelé vecteur propre correspondant à la valeur propre  $\lambda$  et l'ensemble des nombres réels  $\lambda$  satisfaisant l'équation est appelé spectre de la matrice  $A$  et noté  $\text{sp}(A)$ .

- Si  $u$  est un vecteur propre de  $A$  correspondant à une valeur propre  $\lambda$ , alors  $cu$ ,  $c \neq 0 \in \mathbb{R}$  sera également un vecteur propre de  $A$  correspondant à  $\lambda$ .
- Si  $A$  est symétrique et  $u_1$  et  $u_2$  sont des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes de  $A$ , alors  $u_1$  et  $u_2$  sont orthogonaux, *i.e.*  $u_1^\top u_2 = 0$ .
- Si  $A$  a comme valeurs propres (réelles, mais pas forcément distinctes)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors

$$A = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

- Si  $A$  est symétrique, **toutes** ses valeurs propres sont réelles.
- Si  $A$  est définie positive, alors toutes ses valeurs propres sont positives.

Diagonalisation de matrices :

- Soit  $A$  une matrice carrée de dimension  $n \times n$ . On dit que  $A$  est diagonalisable s'il existe une matrice carrée  $n \times n$  non-singulière  $P$  et une matrice  $n \times n$  diagonale  $D$  telles que

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}.$$

Toute matrice carrée symétrique est diagonalisable par une matrice orthogonale  $P$ .

Théorème de décomposition spectrale :

Soit  $A$  une matrice carrée symétrique de dimension  $n \times n$  et ses  $n$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Alors il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que

$$A = P\Lambda P^\top, \quad \text{où} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Si  $A$  admet  $n$  valeurs propres positives distinctes, alors on peut prendre  $P$  comme la matrice dont la  $k$ ème colonne est le vecteur propre normé correspondant à la  $k$ ème valeur propre  $\lambda_k$ .

Soit deux matrices symétriques,  $A$  et  $M$ , comment déterminer le vecteur  $u$  tel que  $u^\top Au$  soit maximal, sachant que  $u^\top Mu = 1$ ? Il faut prendre  $u$  comme le vecteur propre de  $M^{-1}A$  associé à la valeur propre maximale de  $M^{-1}A$ . On obtient ainsi

$$u^\top Au = u^\top \lambda Mu = \lambda u^\top Mu = \lambda.$$