

Algèbre

Révisions d'algèbre linéaire

Cf. cours MAT-1200. Donner quelques références.

Notons M , N et P des matrices de taille $n \times m$, A et B des matrices carrées et I_n la matrice identité, de dimension $n \times n$, et u et v des vecteurs colonnes de taille n .

Propriétés de l'inverse

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Propriétés du déterminant

$$\begin{aligned}\det(A^\top) &= \det(A) \\ \det(A^{-1}) &= 1/\det(A) \\ \det(AB) &= \det(A)\det(B)\end{aligned}$$

Propriétés de la trace

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A+B) &= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \\ \operatorname{tr}(MN) &= \operatorname{tr}(NM)\end{aligned}$$

Propriété de matrices :

- Soit A une matrice symétrique de dimension $n \times n$. A est définie positive si elle est positive et inversible, c'est-à-dire si $u^\top Au > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq 0$.
- Soit A une matrice carrée à valeur dans \mathbb{R} . A est orthogonale si $A^\top A = AA^\top = I_n$.

Valeurs et vecteurs propres :

- Soit A une matrice carrée de dimension $n \times n$. On dit que λ est une valeur propre de A si il existe un vecteur $u \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Au = \lambda u.$$

Le vecteur u est appelé vecteur propre correspondant à la valeur propre λ et l'ensemble des nombres réels λ satisfaisant l'équation est appelé spectre de la matrice A et noté $\text{sp}(A)$.

- Si u est un vecteur propre de A correspondant à une valeur propre λ , alors cu , $c \neq 0 \in \mathbb{R}$ sera également un vecteur propre de A correspondant à λ .
- Si A est symétrique et u_1 et u_2 sont des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes de A , alors u_1 et u_2 sont orthogonaux, *i.e.* $u_1^\top u_2 = 0$.
- Si A a comme valeurs propres (réelles, mais pas forcément distinctes) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors

$$A = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

- Si A est symétrique, **toutes** ses valeurs propres sont réelles.
- Si A est définie positive, alors toutes ses valeurs propres sont positives.

Diagonalisation de matrices :

- Soit A une matrice carrée de dimension $n \times n$. On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice carrée $n \times n$ non-singulière P et une matrice $n \times n$ diagonale D telles que

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}.$$

Toute matrice carrée symétrique est diagonalisable par une matrice orthogonale P .

Théorème de décomposition spectrale :

Soit A une matrice carrée symétrique de dimension $n \times n$ et ses n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors il existe une matrice orthogonale P telle que

$$A = P\Lambda P^\top, \quad \text{où} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Si A admet n valeurs propres positives distinctes, alors on peut prendre P comme la matrice dont la k ème colonne est le vecteur propre normé correspondant à la k ème valeur propre λ_k .

Soit deux matrices symétriques, A et M , comment déterminer le vecteur u tel que $u^\top Au$ soit maximal, sachant que $u^\top Mu = 1$? Il faut prendre u comme le vecteur propre de $M^{-1}A$ associé à la valeur propre maximale de $M^{-1}A$. On obtient ainsi

$$u^\top Au = u^\top \lambda Mu = \lambda u^\top Mu = \lambda.$$