

# Révisions

— Slides : [link](#)

## Project d'analyse données

Un projet d'analyse de données se découpe en cinq étapes :

1. Définition des objectifs
2. Données
3. Élaboration et validation des modèles
4. Mise en oeuvre
5. Suivi de la performance et amélioration

### Remarque

Dans ce cours, on s'intéressera principalement à l'élaboration et à la validation de modèles.

TODO : Planification d'un projet

## Définition des objectifs

Est-ce que l'on veut : visualiser les données ? explorer et émettre des hypothèses ? tester ? regrouper ? comprendre ? prédire ?

Comment fait-on en pratique ? On pose des questions ! Tout d'abord, il faut clarifier les termes. Qui va utiliser le modèle et comment ? Quelle est la population cible ?

### Exemples

1. La Banque National du Canada veut lancer un nouveau produit d'épargne et souhaite mieux connaître ses clients pour prédire s'ils veulent l'acheter.
2. L'équipe de hockey des Canadiens de Montréal souhaite mieux connaître ses ad-

- versaires pour développer des nouvelles tactiques de jeu.
3. Pharmascience souhaite savoir si son nouveau médicament est efficace.

## Données

- Inventaire et qualité
- Constitution de la base de données
- Exploration et traitement préliminaire

Qu'est-ce que l'on veut dire par qualité des données ?

- Est-ce que les données sont représentatives de la population cible ?
- Est-ce que les données permettront de tirer des conclusions de causalité ?
- Est-ce que les données sont fiables ?

Source de données :

Quelques liens pour récupérer des données.

Nettoyage de données : cf R (importation, nettoyage, tidyverse, types de variables, retirer les doublons, uniformiser les modalités, vérifier le format des valeurs spéciales, pivot, opérateur pipe, jointure).

Exploration des données : modalités rares, modalités trop nombreuses, asymétrie, déséquilibre des classes, valeurs extrêmes ou aberrantes, variables fortement corrélées, valeurs manquantes.

Statistiques descriptives

## Révisions d'algèbre linéaire

Cf. cours MAT-1200. Donner quelques références.

Notons  $M$ ,  $N$  et  $P$  des matrices de taille  $n \times m$ ,  $A$  et  $B$  des matrices carrées et  $I_n$  la matrice identité, de dimension  $n \times n$ , et  $u$  et  $v$  des vecteurs colonnes de taille  $n$ .

Propriétés de l'inverse

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

### Propriétés du déterminant

$$\begin{aligned}\det(A^\top) &= \det(A) \\ \det(A^{-1}) &= 1/\det(A) \\ \det(AB) &= \det(A)\det(B)\end{aligned}$$

### Propriétés de la trace

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A+B) &= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \\ \operatorname{tr}(MN) &= \operatorname{tr}(NM)\end{aligned}$$

Propriété de matrices :

- Soit  $A$  une matrice symétrique de dimension  $n \times n$ .  $A$  est définie positive si elle est positive et inversible, c'est-à-dire si  $u^\top Au > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $x \neq 0$ .
- Soit  $A$  une matrice carrée à valeur dans  $\mathbb{R}$ .  $A$  est orthogonale si  $A^\top A = AA^\top = I_n$ .

Valeurs et vecteurs propres :

- Soit  $A$  une matrice carrée de dimension  $n \times n$ . On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  si il existe un vecteur  $u \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$Au = \lambda u.$$

Le vecteur  $u$  est appelé vecteur propre correspondant à la valeur propre  $\lambda$  et l'ensemble des nombres réels  $\lambda$  satisfaisant l'équation est appelé spectre de la matrice  $A$  et noté  $\operatorname{sp}(A)$ .

- Si  $u$  est un vecteur propre de  $A$  correspondant à une valeur propre  $\lambda$ , alors  $cu$ ,  $c \neq 0 \in \mathbb{R}$  sera également un vecteur propre de  $A$  correspondant à  $\lambda$ .
- Si  $A$  est symétrique et  $u_1$  et  $u_2$  sont des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes de  $A$ , alors  $u_1$  et  $u_2$  sont orthogonaux, *i.e.*  $u_1^\top u_2 = 0$ .
- Si  $A$  a comme valeurs propres (réelles, mais pas forcément distinctes)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors

$$A = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

- Si  $A$  est symétrique, **toutes** ses valeurs propres sont réelles.
- Si  $A$  est définie positive, alors toutes ses valeurs propres sont positives.

Diagonalisation de matrices :

- Soit  $A$  une matrice carrée de dimension  $n \times n$ . On dit que  $A$  est diagonalisable s'il existe une matrice carrée  $n \times n$  non-singulière  $P$  et une matrice  $n \times n$  diagonale  $D$  telles que

$$P^{-1}AP = D \leftrightarrow A = PDP^{-1}.$$

Toute matrice carrée symétrique est diagonalisable par une matrice orthogonale  $P$ .

Théorème de décomposition spectrale :

Soit  $A$  une matrice carrée symétrique de dimension  $n \times n$  et ses  $n$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Alors il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que

$$A = P\Lambda P^\top, \quad \text{où } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Si  $A$  admet  $n$  valeurs propres positives distinctes, alors on peut prendre  $P$  comme la matrice dont la  $k$ ème colonne est le vecteur propre normé correspondant à la  $k$ ème valeur propre  $\lambda_k$ .

## Révisions de probabilité

Vecteurs aléatoires :

Soit  $X = (X_1, \dots, X_p)^\top$ , un vecteur aléatoire de taille  $p$ .

Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_p) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} := \mu.$$

Matrice de variance/covariance :

$$\text{Var}(X) = \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_1, X_p) & \cdots & \text{Var}(X_p) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1,p} & \cdots & \sigma_p \end{pmatrix} := \Sigma.$$

Matrice de corrélation :

$$\text{Cor}(X) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \text{Corr}(X_1, X_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Corr}(X_1, X_p) & \cdots & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \rho_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1,p} & \cdots & 1 \end{pmatrix} := R.$$

Propriété des moments :

### Propriétés

Soit  $X$  un vecteur aléatoire de moyenne  $\mathbb{E}(X) = \mu$  et de variance  $\text{Var}(X) = \Sigma$ , et soit  $M$  une matrice de constantes et  $v$  un vecteur de constantes.

1.  $\Sigma$  est définie non-négative et symétrique.
2.  $\Sigma = \mathbb{E}[(X - \mu)(X - \mu)^\top] = \mathbb{E}(XX^\top) - \mu\mu^\top$ .
3.  $\mathbb{E}(MX + v) = \mathbb{E}(X) + v$ .
4.  $\text{Var}(MX + v) = \text{Var}(MX) = M\Sigma M^\top$ .
5.  $\Sigma = \Delta R \Delta \iff R = \Delta^{-1} \Sigma \Delta^{-1}$ .

Loi normale multivariée : On dit qu'un vecteur aléatoire  $X$  de dimension  $p$  suit une loi normale multidimensionnelle de moyenne  $\mu$  et de variance  $\Sigma \sim \mathcal{N}_p(\mu, \sigma^2)$ , si sa densité est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \cdot \frac{1}{(\det \Sigma)^{1/2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^p.$$

Estimation avec un échantillon : En pratique, nous ne connaissons pas les valeurs de  $\mu$  et de  $\Sigma$  et nous voulons les estimer à partir d'un échantillon. Soit  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  réalisations indépendantes d'un vecteur aléatoire  $X$  de moyenne  $\mu$  et de variance  $\Sigma$ . On estime  $\mu$  et  $\Sigma$  par :

$$\hat{\mu} = \bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\hat{\Sigma} = S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^\top.$$

Notons  $D = \{\text{diag}(S^2)\}^{1/2}$ , la matrice des écarts-types calculés sur l'échantillon. On peut calculer la matrice des corrélations sur l'échantillon par :

$$\hat{R} = D^{-1} S^2 D^{-1} \iff S^2 = D \hat{R} D.$$