TP : Révision

Vous pouvez faire les exercices dans le langage de votre choix.

1 Exercice 1 : Estimer π

Dans cet exercice, on se propose d'estimer *pi* grâce à la méthode de Monte-Carlo. Le méthode de Monte-Carlo est une méthode algorithmique permettant d'estimer des quantités en utilisant des tirages aléatoires. Pour estimer π, l'idée est de générer des points dans un carré de façon uniforme et ensuite de compter la proportion de ces points qui sont dans le cercle unité.

1. Générer un nombre n de points (x, y) dans un carré de longueur 2 centré à l'origine, i.e. $x \in [-1, 1]$ et $y \in [-1, 1]$.
2. Pour chaque point n, déterminer si le point appartient au cercle unité.
3. Calculer la proportion du nombre de points dans le cercle unité.
4. À partir du résultat précédent, estimer π.
5. Notons $\widehat{\pi}(n)$, l'estimateur de π utilisant n points générés. Tracer l'erreur d'estimation $|\pi - \widehat{\pi}(n)|$ en fonction de n.

2 Exercice 2 : Estimation d'intégrale

Dans cette exercice, on se propose d'estimer

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx.$$

1. Calculer I en utilisant une primitive.
2. Il est possible d'estimer $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ à l'aide des sommes de Riemann $\hat{I}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}), i = 1, \dots, n$. Estimer I en utilisant les sommes de Riemann.

3. L'intégrale I peut être vu comme l'espérance d'un variable aléatoire. $I = \mathbb{E}[f(U)]$, où $U \sim \mathcal{U}(-1, 1)$. On peut estimer I en utilisant $\tilde{I}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i)$, où les u_i sont des réalisations de la variable aléatoire U. Estimer I en utilisant cette méthode.
4. Comparer la qualité de ces deux estimateurs de I en fonction de n.