

# Hierarchique

Certains problèmes de l'algorithme  $k$ -means peuvent être résolu avec des algorithmes de classification hiérarchique. Par exemple, lorsque l'on a à disposition qu'une matrice de similarité/distance entre les observations.

La classification hiérarchique permet d'obtenir des partitions toutes imbriquées les unes dans les autres. Il existe deux types d'algorithmes pour effectuer de la classification hiérarchique :

1. les algorithmes ascendants ;
2. les algorithmes descendants.

Dans les deux cas, on obtient  $n$  partitions hiérarchiques constituées de 1 à  $n$  groupes.

## Algorithme descendant

Un algorithme descendant fonctionne ainsi :

- Au départ, toutes les observations sont dans un seul et même groupe de  $n$  observations ;
- À chaque étape, on divise le groupe le moins homogène en deux groupes.
- À la fin, après  $n$  étapes, chaque observation a son propre groupe, c'est-à-dire qu'on obtient  $n$  groupes contenant une seule observation.

L'exécution de cet algorithme ne donne pas une seule partition, mais  $n$  partitions, que l'on peut résumer à l'aide d'un graphique en forme d'arbre appelé dendrogramme. Certains critères peuvent aider à choisir l'une parmi les  $n$  partitions proposées par l'algorithme. Ils demandent beaucoup de temps de calcul.

## Algorithme ascendant

Un algorithme ascendant fonctionne ainsi :

- Au départ, chaque observation est son propre groupe, c'est-à-dire qu'on démarre avec  $n$  groupes contenant chacun une seule observation.
- À chaque étape, on fusionne les deux groupes les plus similaires.
- À la fin, après  $n$  étapes, on obtient un seul groupe contenant toutes les  $n$  observations.

Différences entre les algorithmes :

- caractère ascendant ou descendant ;
- leur façon de mesurer les distances / similarité entre deux observations ;
- leur façon de mesurer les distances / similarité entre deux groupes.

## Distance entre groupes

Pour mettre en oeuvre les algorithmes précédents, on doit définir la distance entre deux groupes d'observations  $A$  et  $B$ ,  $d(A, B)$ .

Exemple : On sait comment mesurer la distance entre les trois paires possibles de  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  et  $\{3\}$ , mais comment mesurer la distance entre  $\{1, 2\}$  et  $\{3\}$  ?

Il existe plusieurs façons de calculer une telle distance entre deux groupes.

- Méthode du plus proche voisin (single linkage)

$$d(A, B) = \min\{d_{ij} : i \in A, j \in B\}.$$

$$s(A, B) = \max\{s_{ij} : i \in A, j \in B\}.$$

La distance/similarité entre deux groupes d'observations est tout simplement la distance/similarité entre les points de chaque groupe qui sont les plus rapprochés/similaires

Avantages : \* Donne de bons résultats lorsque les variables sont de types différents \* Possède d'excellentes propriétés théoriques \* Permet de créer des groupes dont la forme est très irrégulière \* Est robuste aux données aberrantes

Désavantages : \* Tend à former un grand groupe avec plusieurs petits groupes satellites \* Perd de l'efficacité si les vrais groupes sont de forme régulière \* Possède des propriétés théoriques ne semblant pas se réaliser en pratique dans certaines études

- Méthode du voisin le plus distant (complete linkage)

$$d(A, B) = \max\{d_{ij} : i \in A, j \in B\}.$$

$$s(A, B) = \min\{s_{ij} : i \in A, j \in B\}.$$

La distance/similarity entre deux groupes d'observations est tout simplement la distance/similarity entre les points de chaque groupe qui sont les plus éloignés/dissimilaires.

Avantages : \* Donne de bons résultats lorsque les variables sont de types différents \* Tend à former des groupes de taille égale

Désavantages : \* Est extrêmement sensible aux données aberrantes \* Tend à former des groupes de taille égale \* Est très peu utilisée en pratique

— Méthode de la moyenne (average linkage)

$$d(A, B) = \frac{1}{n_A n_B} \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} d(x_i, x_j).$$

où  $n_A$  est le nombre d'observations dans le groupe  $A$  et  $n_B$  est le nombre d'observations dans le groupe  $B$ .

On doit calculer les  $n_A \times n_B$  distances/similarities possibles entre les points des deux groupes, ensuite on prend la moyenne de ces distances/similarities comme étant celle qui sépare les groupes.

Avantages : \* Tend à former des groupes de faible variance

Désavantages : \* Tend à former des groupes de même variance

— Méthode du centroïde (centroid method)

$$d(A, B) = d(\bar{x}_A, \bar{x}_B).$$

où

$$\bar{x}_A = \frac{1}{n_A} \sum_{i \in A} x_i, \quad \text{et} \quad \bar{x}_B = \frac{1}{n_B} \sum_{j \in B} x_j$$

La moyenne  $\bar{x}_{AB}$  du nouveau groupe résultant de la fusion des groupes  $A$  et  $B$  se calcule comme suit :

$$\bar{x}_{AB} = \frac{n_A \bar{x}_A + n_B \bar{x}_B}{n_A + n_B}.$$

Avantages : \* Est très robuste aux données aberrantes

Désavantages : \* Est peu efficace en l'absence de données aberrantes

— Méthode de la médiane (median method)

À une étape donnée, nous avons toujours à notre disposition la distance entre les groupes déjà formés. On fusionne les deux groupes les moins distants/les plus similaires, disons  $A$  et  $B$  pour obtenir un groupe  $AB$ . On met à jour la matrice des distances : la distance entre le nouveau groupe  $AB$  et tout autre groupe  $C$  est donnée par

$$d(AB, C) = \frac{d(A, C) + d(B, C)}{2} - \frac{d(A, B)}{4}.$$

Avantages : \* Est encore plus robuste en présence de données aberrantes

Désavantages : \* Est très peu efficace en l'absence de données aberrante

— Méthode de Ward (Ward's method)

Variante de la méthode du centroïde pour tenir compte de la taille des groupes. Elle a été conçue pour être optimale si les  $n$  vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  suivent des lois normales multivariées de  $K$  moyennes différentes mais toutes de même matrice de variance-covariance.

Basée sur les sommes des carrées

$$SC_A = \sum_{i \in A} (x_i - \bar{x}_A)^\top (x_i - \bar{x}_A).$$

$$SC_B = \sum_{j \in B} (x_j - \bar{x}_B)^\top (x_j - \bar{x}_B).$$

$$SC_{AB} = \sum_{k \in A \cup B} (x_k - \bar{x}_{AB})^\top (x_k - \bar{x}_{AB}).$$

où  $\bar{x}_A$ ,  $\bar{x}_B$  et  $\bar{x}_{AB}$  sont calculées comme dans la méthode du centroïde. On regroupe les classes  $A$  et  $B$  pour lesquelles

$$I_{AB} = SC_{AB} - SC_A - SC_B = \frac{d^2(\bar{x}_A, \bar{x}_B)}{\frac{1}{n_A + \frac{1}{n_B}}}$$

est minimale.

Avantages : \* Est optimale si les observations sont approximativement distribuées selon une loi normale multidimensionnelle de même matrice de variances-covariances

Désavantages : \* Est sensible aux données aberrantes \* Tend à former des groupes de petite taille \* Tend à former des groupes de même taille

— Méthode flexible

Les auteurs de cette méthode ont remarqué que pour plusieurs méthodes connues, on a les relations suivantes :

$$d(C, AB) = \alpha_A d(C, A) + \beta d(C, B) + \beta d(A, B) + \gamma |d(C, A) - d(C, B)|.$$

Méthode	$\alpha_A$	$\alpha_B$	$\beta$	$\gamma$
Plus proche	1/2	1/2	0	-1/2
Plus distant	1/2	1/2	0	1/2
Médiane	1/2	1/2	-1/4	0
Moyenne	$\frac{n_A}{n_A+n_B}$	$\frac{n_B}{n_A+n_B}$	0	0
Centroïde	$\frac{n_A}{n_A+n_B}$	$\frac{n_B}{n_A+n_B}$	$-\frac{n_A n_B}{n_A+n_B}$	0
Ward	$\frac{n_A+n_C}{n_A+n_B+n_C}$	$\frac{n_B+n_C}{n_A+n_B+n_C}$	$-\frac{n_C}{n_A+n_B+n_C}$	0

Avec la méthode flexible, on impose arbitrairement les contraintes suivantes :

$$\alpha_A + \alpha_B + \beta = 1, \quad \alpha_A = \alpha_B, \quad \gamma = 0.$$

Ainsi,

$$\alpha_A = \alpha_B = \frac{1 - \beta}{2}.$$

Et il ne reste qu'à choisir  $\beta$ . Les auteurs suggèrent de poser  $\beta = -0.25$  sauf quand on soupçonne la présence de données aberrantes où l'on suggère  $\beta = -0.5$ .

## Pratique

L'exécution d'un algorithme nous donne une séquence de  $n$  partitions ayant de  $n$  à 1 groupes.

Quelle partition de cette séquence devrions-nous choisir ?

L'une des  $n$  partitions est-elle particulièrement interprétable ? L'une des  $n$  partitions a-t-elle un sens pratique ? Visions-nous séparer la population en un nombre  $K$  de groupes ?

S'il n'y a pas de réponse claire à ces questions, des critères peuvent nous guider ...

Il y a plusieurs indications pour nous aider dans le choix du nombre de classe (surtout si les variables sont continues). La librairie **NbClust** en contient une trentaine : <https://www.rdocumentation.org/packages/NbClust/versions/3.0.1/topics/NbClust>

— Les indicateurs basées sur l'inertie

$$I_{tot} = I_{intra-groupe} + I_{inter-groupe}$$

Ces indicateurs sont plus pertinents avec des variables continues. Prendre garde au poids des variables et à la standardisation.

— Pseudo-  $R^2$

$$Pseudo - R^2 = \frac{I_{inter-groupe}}{I_{tot}}$$

— Statistique de Caliliski-Harabasz (CH) :

$$CH = \frac{I_{inter-groupe}/(k-1)}{I_{intra-groupe}/(n-k)}$$

— Indice de Dunn : On maxime l'indice suivant :

$$D = \frac{\text{Distance minimale entre 2 groupes}}{\text{Distance maximale dans un groupe}}$$

L'indice de Dunn cherche donc à créer des groupes denses et bien séparés.

— Indice de silhouette

La silhouette de l'observation  $i$  mesure la confiance dans le choix du groupe pour l'observation  $i$  :

$$S(i) = \frac{b_i - a_i}{\max(b_i, a_i)}$$

où  $a_i$  est la distance moyenne entre l'observation  $i$  et les autres observations de son groupe et  $b_i$  est la distance moyenne entre l'observation  $i$  et les observations du groupe le plus proche de  $i$ . On souhaite maximiser la silhouette moyenne des observations.

— Critère de classification cubique (CCC)

On fait un graphique avec le CCC en ordonnée et le nombre de groupes en abscisse. Pour le nombre de groupes, on ne considère que les partitions de  $K = 1$  à  $K = n/10$ . Si  $CCC > 2$ , on est en présence d'une classification de bonne qualité. Si  $0 < CCC < 2$ , on est en présence d'une classification de qualité moyenne. Si  $CCC < 0$ , on est en présence d'une classification de mauvaise qualité. Pour choisir le nombre de classes à retenir, on peut considérer les nombres de classes associés aux fortes hausses du critère CCC entre deux nombres de classes subséquents. On considère les pics, atteignant des valeurs du critère supérieures à 2 ou à 3 comme étant de fortes hausses de ce critère.

Il ne faut pas utiliser le critère CCC avec la méthode du plus proche voisin, ou lorsque l'on suspecte que les groupes sont de forme très allongée ou irrégulière. Le critères ne fonctionne pas bien quand le nombre d'observations dans certains groupes est inférieur à 10.

— Statistique pseudo- $F$

Statistique presque distribuée selon une loi  $F$  lorsque la loi des données pas trop loin de la normale multivariée avec variances égales dans toutes les classes. Même si on est loin de la normalité, en pratique cette statistique peut quand-même être informative. On cherche des nombres de classes pour lesquels la statistique du pseudo- $F$  se démarque par une grande valeur. Sur un graphique de la statistique du pseudo- $F$  en fonction du nombre de classes, ceci se traduit par la recherche de pics. Il ne faut pas utiliser la statistique du pseudo- $F$  avec la méthode du plus proche voisin.

— Statistique du pseudo- $t^2$

Statistique presque distribuée selon une loi  $t$  lorsque loi des données pas trop loin de la normale multivariée avec des variances égales dans toutes les classes. En pratique, on regarde le graphique de la statistique du pseudo- $t^2$  en fonction du nombre de classes de droite à gauche, on essaie de trouver des valeurs de la statistique qui sont beaucoup plus élevées que la valeur précédente. Supposons que la forte hausse se produit entre  $k$  et  $k - 1$  classes. On choisit  $k$  classes dans le partitionnement de nos observations. Il ne faut pas utiliser la statistique du pseudo- $t^2$  avec la méthode du plus proche voisin.