Blatt04

Toma-Stefan Cezar (Matr. 7678219), Elham Amini (Matr. 7606587)

November 2022

Neue Abgabegruppen!

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1

1.1 Teil A

Ja die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt, da sie aus zwei weiteren Folgen besteht welche beide beschränkt sind. $(-1)^n$ ist beschränkt da es sich um eine Alternierende Folge handelt, welche die Kriterien $\forall (a_n)_{n\geq 1} \exists S : a_n < S$ (mit S > 1) und $\forall (a_n)_{n\geq 1} \exists D : a_n \leq D$ (mit D > 1) erfüllt. Bei $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ handelt es sich um eine geometrische Folge z^n, wobei $z < 1$, somit ist die Folge konvergent, woraus folgt das diese auch beschränkt ist.

1.2 Teil B

Nein die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht, da der obere Teil $(-3)^n$ alternierend ist und sich somit kein Grenzwert bestimmen lässt, außerdem ist der untere Teil $3^n - \pi$ nicht begrenzt und divergiert somit nach $+\infty$, daher ist die gesamte Folge x_n nicht Konvergent.

2 Aufgabe 2

2.1 Teil A

Der Term $-3n^4$ hat in der Folge $\frac{6-10n^2-3n^4}{7n^3+2n^2+n+4}$ den höchsten Exponenten und wächst daher am schnellsten, somit kann der Rest für den Limes ignoriert werden. $-3n^4$ ist monoton fallend, da die Ungleichung

$$\begin{gathered}
-3n^4 > -3(n+1)^4 \\
-3n^4 + 3(n+1)^4 > 0 \\
-3n^4 + 3(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) > 0 \\
-3n^4 + 3n^4 + 12n^3 + 18n^2 + 12n + 1 > 0 \\
12n^3 + 18n^2 + 12n + 1 > 0
\end{gathered}$$

für alle $n \geq 0$ gilt. Da es sich bei $-3n^4$ um einen negativen ganzrationalen Term mit ausschließlich geraden Exponenten handelt, ist dieser nur nach oben beschränkt. Somit divergiert die Folge nach $-\infty$, da sie monoton fallend und nicht (nach unten) beschränkt ist.

$$\lim_{n\to\infty} -3n^4 \textbf{ Divergiert}$$

Somit ist auch die Folge $\frac{6-10n^2-3n^4}{7n^3+2n^2+n+4}$ divergent.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6-10n^2-3n^4}{7n^3+2n^2+n+4} \textbf{ Divergiert}$$

2.2 Teil B

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{3\cdot(2^n+6^n)+1}{3^n+6^n} \\
&= \frac{3\cdot 2^n + 3\cdot 6^n + 1}{3^n+6^n} \\
&= \frac{6^n(\frac{3}{3^n} + 3 + \frac{1}{6^n})}{6^n(\frac{1}{2^n}+1)} \\
&= \frac{\frac{3}{3^n} + 3 + \frac{1}{6^n}}{\frac{1}{2^n}+1}
\end{aligned}$$

Die Folge $a_n = x^n$ mit $x \in \mathbb{R}, x > 0$ ist nicht beschränkt und monoton steigend, somit divergiert diese nach $+\infty$, daraus folgt das der Kehrwert verschwindend klein wird.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{3^n} + 3 + \frac{1}{6^n}}{\frac{1}{2^n}+1} = \frac{3}{1} = 3$$

Da die Folge $x_n = \frac{3\cdot(2^n+6^n)+1}{3^n+6^n}$ einen Grenzwert hat, ist sie auch Konvergent.

3 Aufgabe 3

3.1 Teil B

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2022}-n$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+2022}-n)\cdot\frac{\sqrt{n^2+2022}+n}{\sqrt{n^2+2022}+n}$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2022-n^2}{\sqrt{n^2+2022}+n}$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{2022}{\sqrt{n^2+2022}+n} = 0$$

Da der untere Teil schneller als der obere Teil (Konstante) wächst, konvergiert die Folge mit dem Grenzwert 0.

3.2 Teil C

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt{n^4-81})$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt{n^4-81})\cdot\frac{\sqrt{n^4+3n^2}+\sqrt{n^4-81}}{\sqrt{n^4+3n^2}+\sqrt{n^4-81}}$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+3n^2-n^4-81}{\sqrt{n^4+3n^2}+\sqrt{n^4-81}}$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-81}{\sqrt{n^4+3n^2}+\sqrt{n^4-81}}$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3-\frac{81}{n^2})}{n^2\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+n^2\sqrt{1-\frac{81}{n^4}}}$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3-\frac{81}{n^2})}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{81}{n^4}}\right)}$$

Da mit $\lim_{n\to\infty}$ die Brüche $\frac{3}{n^2}\to 0$, $\frac{81}{n^2}\to 0$ und $\frac{81}{n^4}\to 0$:

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3)}{n^2(\sqrt{1}+\sqrt{1})}$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{1+1} = \frac{3}{2}$$