Blatt03

Toma-Stefan Cezar (Matr. 7678219), Hai-Yen Van (Matr. 7611734),
Thuy An Le (Matr. 7510768)

November 2022

Neue Abgabegruppen!

Inhaltsverzeichnis

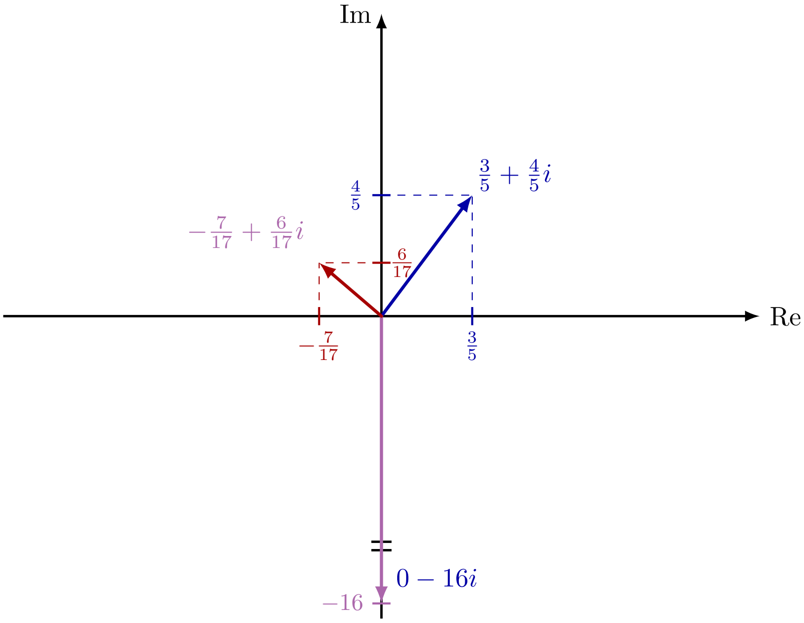
1 Aufgabe 1

1.1 Teil A

$$\frac{5}{(2-i)^2} = \frac{5}{4-4i-1} = \frac{5(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{15+20i}{25} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$(1+i)^6-(i-1)^6 = ((1+i)^2)^3-((1-i)^2)^3 = (1+2i-1)^3-(1-2i-1)^3 = (2i)^3-(-2i)^3 = 16i^3 = 0-16i$$

$$\frac{1+2i}{4-(2+1)^2} = \frac{1+2i}{4-(4+4i-1)} = \frac{1+2i}{1-4i} = \frac{(1+2i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{1-8+4i+2i}{1+16} = -\frac{7}{17} + \frac{6}{17}i$$



1.2 Teil B

$$z^2 = 4i$$
$$(a+bi)^2 = 4i$$
$$4i = a^2 + 2abi - b^2$$

Aus $\mathrm{Re}(4i) = 0$ folgt,

$$a^2 - b^2 = 0$$
$$a^2 = b^2$$
$$\pm a = \pm b \tag{1}$$

Aus $\mathrm{Im}(4i) = 4$ folgt,

$$2abi = 4i$$
$$ab = 2$$
$$a \cdot a \overset{(1)}{=} 2$$
$$a_{1,2} = b_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

Daraus folgt nun,

$$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$
$$z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

1.3 Teil C

$$z^3 + 2z^2 + 2z = 0$$
$$z(z^2 + 2z + 2) = 0$$

Durch Anwenden der Nullproduktregel, erhält man:

$$z_1 = 0$$

$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

Nun kann man in die allgemeine quadratische Gleichung (a-b-c-Formel) einsetzen:

$$z_{2/3} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2}{2} \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$

Die komplexen Lösungen sind $z_1 = 0$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = -1 + i$.

2 Aufgabe 2

2.1 Teil A

2.1.1 Teil 1

$$z^4 = (a+bi)^4 = \left((a+bi)^2\right)^2$$
$$= (a^2 + 2abi - b^2)^2$$
$$= a^4 + 4a^3bi - 6a^2b^2 - 4b^3i + b^4$$
$$= (a^4 - 6a^2b^2 + b^4) + (4a^3b - 4ab^3)i$$

$$\mathrm{Re}(z^4) = (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)$$
$$\mathrm{Im}(z^4) = (4a^3b - 4ab^3)$$

2.1.2 Teil 2

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(a+bi)^2} = \frac{1}{(a+bi)(a+bi)}$$

$$= \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{1}{a+bi} = \frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} \cdot \frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(a-bi)(a-bi)}{(a^2+b^2)(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{(a-bi)^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{a^2-2abi-b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{-2ab}{(a^2+b^2)^2} i$$

$$\mathrm{Re}(\frac{1}{z^2}) = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$\mathrm{Im}(\frac{1}{z^2}) = \frac{-2ab}{(a^2+b^2)^2}$$

2.2 Teil B

Unter der Annahme $\forall z \in \mathbb{C} : z = x + yi, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$,

$$|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \iff \sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y|$$

$$\iff x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

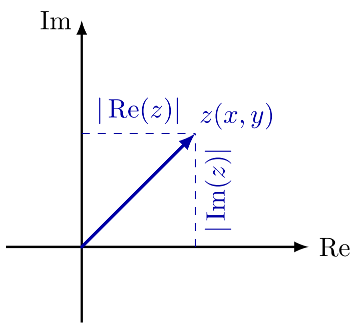
Es gilt $|x^2| = \sqrt{x^2}^2 = x^2$,

$$\iff x^2 + y^2 \leq x^2 + |2xy| + y^2$$

$$\iff 0 \leq |2xy|$$

Diese Aussage stimmt, da der Betrag einer Zahl immer positiv oder Null ist. QED

$\square$



3 Aufgabe 3

3.1 Teil A

3.1.1 Das neutrale Element

Laut der Tabelle, welche die Verknüpfung + definiert:

$$a + a = a$$

$$b + a = b$$

$$c + a = c$$

Somit ist a das neutrale Element der Verknüpfung + in $\mathbb{F}_3$.

3.1.2 Die additiven Inversen

$$\forall x \in \mathbb{F}_3 \exists -x \in \mathbb{F}_3 : x + (-x) = a$$

Laut der Tabelle, welche die Verknüpfung + definiert:

$$a = a + a$$

$$a = b + c$$

$$a = c + b$$

Somit sind die additiven Inversen $-x$,

x	$-x$
a	a
b	c
c	b

3.2 Teil B

3.2.1 Das neutrale Element

Laut der Tabelle, welche die Verknüpfung $\cdot$ definiert:

$$a \cdot b = a$$

$$b \cdot b = b$$

$$c \cdot b = c$$

Somit ist b das neutrale Element der Verknüpfung $\cdot$ in $\mathbb{F}_3$.

3.2.2 Die multiplikativen Inversen

$$\forall x \in \mathbb{F}_3 \exists x^{-1} \in \mathbb{F}_3 : x \cdot x^{-1} = b$$

Laut der Tabelle, welche die Verknüpfung $\cdot$ definiert[1]:

$$b = b \cdot b$$

$$b = c \cdot c$$

Somit sind die multiplikativen Inversen x^{-1},

x	x^{-1}
b	b
c	c

[1] Das neutrale Element von + hat kein multiplikatives Inverses

3.3 Teil C

$$\forall y, z \in \mathbb{F}_3 : c \cdot (y + z) = cy + cz = (y + z) \cdot c$$

Die Gleichung $c(y+z) = (y+z) \cdot c$, stimmt da die Verknüpfungen $+, \cdot$ in $\mathbb{F}_3$ kommutativ sind. Die Gleichung $c(y+z) = cy + cz$, lässt sich durch diese Tabelle beweisen:

y	z	$y+z$	$c(y+z)$	cy	cz	$cy+cz$	$c(y+z) \iff cy+cz$
a	a	a	a	a	a	a	w
a	b	b	c	a	c	c	w
a	c	c	b	a	b	b	w
b	a	b	c	c	a	c	w
b	b	c	b	c	c	b	w
b	c	a	a	c	b	a	w
c	a	c	b	b	a	b	w
c	b	a	a	b	c	a	w
c	c	b	c	b	b	c	w

QED.

$\square$