Blatt02

Toma-Stefan Cezar (Matr. 7678219), Elham Amini (Matr. 7606587)

November 2022

Neue Abgabegruppen!

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1A **2**
1.1 Induktionsanfang . . . 2
1.2 Induktionsschritt . . . 2

2 Aufgabe 1B **3**
2.1 Teil 1 . . . 3
2.1.1 Induktionsanfang . . . 3
2.1.2 Induktionsschritt . . . 3
2.2 Teil 2 . . . 3
2.2.1 Induktionsanfang . . . 3
2.2.2 Induktionsschritt . . . 3
2.2.3 Zusammenfassung . . . 3

3 Aufgabe 2 **4**
3.1 Induktionsanfang . . . 4
3.2 Induktionsschritt . . . 4

4 Aufgabe 3A **5**

5 Aufgabe 3B **5**

1 Aufgabe 1A

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

1.1 Induktionsanfang

Die Aussage gilt für $n = 1$, da

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = \frac{1}{3}(1+1)(1+2)$$

$$1(1+1) = \frac{6}{3}$$

$$2 = 2$$

1.2 Induktionsschritt

$$z.z : \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) \stackrel{!}{=} \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

Angenommen die Induktionsvoraussetzung iv : $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ stimmt.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = (\sum_{k=1}^{n} k(k+1)) + (n+1)(n+2) \stackrel{\text{iv}}{=} \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)$$

$$= (n+1)(n+2)(\frac{1}{3}n+1)$$

$$= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

Somit ist der Induktionsschritt $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$ beweisen. QED $\square$

2 Aufgabe 1B

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : 2n \leq n^2 - 1 \leq 2^n - 1$$

2.1 Teil 1

2.1.1 Induktionsanfang

Die Aussage gilt für $n = 4$, da

$$2 \cdot 4 \leq 4^2 - 1 \iff 8 \leq 15$$

2.1.2 Induktionsschritt

$$z.z : 2(n+1) \leq (n+1)^2 - 1$$

Angenommen die Induktionsvoraussetzung iv $2n \leq n^2 - 1$ stimmt.

$$\begin{gathered} 2(n+1) \leq (n+1)^2 - 1 \\ \iff 2n + 2 \leq n^2 + 2n \\ \overset{\text{iv}}{=} (n^2 - 1) + 2 \leq n^2 + 2n \\ \iff n^2 + 1 \leq n^2 + 2n \\ \iff 1 \leq 2n \end{gathered}$$

Diese Aussage ist erfüllt, da $2n$ für $n \geq 4$ immer größer ist.

2.2 Teil 2

2.2.1 Induktionsanfang

Die Aussage gilt für $n = 4$, da

$$4^2 - 1 \leq 2^4 - 1 \iff 15 \leq 15$$

2.2.2 Induktionsschritt

$$z.z : (n+1)^2 - 1 \leq 2^{n+1} - 1$$

Angenommen die Induktionsvoraussetzung iv $n^2 - 1 \leq 2^n - 1 \implies n^2 \leq 2^n$ stimmt.

$$\begin{gathered} (n+1)^2 - 1 \leq 2^{n+1} - 1 \\ \iff n^2 + 2n \leq 2^n \cdot 2^1 - 1 \\ \overset{\text{iv}}{=} n^2 \leq 2n^2 - 1 \\ \iff n^2 + 2n + 1 \leq 2n^2 \\ \iff 2n + 1 \leq n^2 \end{gathered}$$

Durch Ableiten erhält man.

$$\begin{gathered} \frac{d}{dn} 2n + 1 = 2 \\ \frac{d}{dn} n^2 = 2n \end{gathered}$$

Anhand dieser Gleichungen lässt sich erkennen, dass n^2 für $n > 1$ schneller wächst als $2n + 1$, deswegen gilt die Aussage $(n+1)^2 - 1 \leq 2^{n+1} - 1$ für alle $n \geq 4$.

2.2.3 Zusammenfassung

Da 2.1 und 2.2 bewiesen sind, ist auch $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : 2n \leq n^2 - 1 \leq 2^n - 1$ bewiesen. QED $\square$

3 Aufgabe 2

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 1 : \sum_{j=0}^{m} (2j+1)(2j+3) = \frac{1}{3}(m+1)(4m^2+14m+9)$$

3.1 Induktionsanfang

Die Aussage gilt für $m = 1$, da

$$\sum_{j=0}^{1} (2j+1)(2j+3) = \frac{1}{3}(1+1)(4 \cdot (1)^2 + 14 \cdot 1 + 9)$$
$$(2 \cdot 0 + 1)(2 \cdot 0 + 3) + (2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1 + 3) = \frac{1}{3}(1+1)(4 \cdot (1)^2 + 14 \cdot 1 + 9)$$
$$(1 \cdot 3) + (3 \cdot 5) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (4 + 14 + 9)$$
$$18 = \frac{1}{3} \cdot 54$$
$$18 = 18$$

3.2 Induktionsschritt

$$z.z: \sum_{j=0}^{m+1} (2j+1)(2j+3) \stackrel{!}{=} \frac{1}{3}((m+1)+1)(4(m+1)^2 + 14(m+1) + 9) \tag{1}$$
$$= \frac{1}{3}(m+2)(4((m+1)(m+1)) + 14(m+1) + 9)$$
$$= \frac{1}{3}(m+2)(4((m^2+2m+1^2) + 14m + 14 + 9)$$
$$= \frac{1}{3}(m+2)(4m^2 + 8m + 4 + 14m + 23)$$
$$= \frac{1}{3}(4m^3 + 8m^2 + 4m + 14m^2 + 23m + 8m^2 + 16m + 8 + 28m + 46)$$
$$= \frac{1}{3}(4m^3 + 30m^2 + 71m + 54)$$

Angenommen die Induktionsvoraussetzung iv : $\sum_{j=0}^{m}(2j+1)(2j+3) = \frac{1}{3}(m+1)(4m^2+14m+9)$ stimmt.

$$\sum_{j=0}^{m+1} (2j+1)(2j+3) = \sum_{j=0}^{m} (2j+1)(2j+3) + (2(m+1)+1)(2(m+1)+3) \tag{2}$$
$$\stackrel{\text{iv}}{=} \frac{1}{3}(m+1)(4m^2+14m+9) + (2(m+1)+1)(2(m+1)+3)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \big((m+1)(4m^2+14m+9)\big) + (2m+3)(2m+5)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \big((m+1)(4m^2+14m+9)\big) + (2m)^2 + 10m + 6m + 15$$
$$= \frac{1}{3} \cdot (4m^3 + 14m^2 + 9m + 4m^2 + 14m + 9) + 4m^2 + 10m + 6m + 15$$
$$= \frac{(4m^3 + 14m^2 + 9m + 4m^2 + 14m + 9)}{3} + \frac{3 \cdot (4m^2 + 10m + 6m + 15)}{3}$$
$$= \frac{4m^3 + 14m^2 + 9m + 4m^2 + 14m + 9 + 12m^2 + 48m + 45)}{3}$$
$$= \frac{1}{3}(4m^3 + 30m^2 + 71m + 54)$$

Da (1) und (2) gleich sind ist der Induktionsschritt bewiesen. QED □

4 Aufgabe 3A

Seien A, B, C, D Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen, dann definieren die Verknüpfungen $(h \circ g) \circ f$ und $h \circ (g \circ f)$ beide die Funktion $h(g(f(x)))$ bzw. die Abbildung $h \circ g \circ f : A \to D$.

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$
$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f))(x = h(g(f(x)))$$
$$h \circ g \circ f : A \to D, x \mapsto (h \circ g \circ f) := h(g(f(x)))$$

Da beide Verknüpfungen die selbe Abbildung ergeben, ist das Verknüpfen von Abbildern assoziativ. QED

□

5 Aufgabe 3B

Beweis durch Gegenbeispiel: Angenommen $f : A \to B$ ist surjektiv, so muss jedes Element von A einem Element aus B zugeordnet sein $\forall a \in A \exists b \in B : f(a) = b$. Die Abbildung $g : B \to A$ ordnet nun jedem Element aus B mindestens ein Element aus A zu, daher ist $(f \circ g) : B \to B = \mathrm{Id}_B$. Wenn f nicht surjektiv ist, muss es mindestens ein Element in B geben, zu welchem kein Element aus A zugeordnet werden kann, somit kann das Abbild $g : B \to A$ nicht existieren, da es mindestens einem Wert aus B keinen Wert zuweisen kann. QED

□