指数分布族

如果某概率分布满足以下形式，就属于指数分布族。

$$p(y;\eta) = b(y)exp(\eta^T T(y) - a(\eta))$$

其中

$$\eta \text{为参数向量}$$

$$T(y) \text{为充分统计量}$$

$$exp^{-a(\eta)} \text{起到归一化的作用}$$

伯努利分布：

$$\begin{aligned} p(y;\phi) &= \phi^y (1-\phi)^{1-y} \\ &= exp[y\log\phi + (1-y)\log(1-\phi)] \\ &= exp[y\log\frac{\phi}{1-\phi} + \log(1-\phi)] \end{aligned}$$

把伯努利分布可以写成指数分布族的形式，且

$$\begin{gathered} T(y) = y \\ \eta = \log\frac{\phi}{1-\phi} \\ a(\eta) = -\log(1-\phi) = \log(1+e^{\eta}) \\ b(y) = 1 \end{gathered}$$

可以看到

$$\phi = \frac{1}{1+e^{-\eta}}$$

就是Logistic sigmoid的形式。

高斯分布：

$$\begin{aligned} p(y;u) &= \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}} * \exp(-\frac{1}{2}(y-u)^2) \\ &= \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{1}{2}y^2)\exp(uy - \frac{1}{2}u^2) \end{aligned}$$

对应的

$$\eta = u$$
$$T(y) = y$$
$$a(\eta) = \frac{u^2}{2}$$
$$b(y) = \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{1}{2}y^2)$$

逻辑斯提回归：

LR是二类分类问题，可以选择伯努利分布：

$$p(y/x;\theta) - -Bernoulli(\theta)$$

那么

$$\begin{aligned} h_\theta(x) &= E[y/x;\theta] \\ &= \phi \\ &= \frac{1}{1+e^{-\eta}} \\ &= \frac{1}{1+e^{-\theta^T x}} \end{aligned}$$