第四章　大数定律与中心极限定理

§4.1　随机变量序列的两种收敛性

1. 依概率收敛　设$\{X_n\}$为一随机变量序列,X为一随机变量.如果对任意的$\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1,$$

则称$\{X_n\}$依概率收敛于X,记作$X_n \xrightarrow{P} X$.

2. 依概率收敛与服从大数定律间的关系　设$\{X_n\}$为一随机变量序列,记$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,$E(Y_n)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)$.则$\{X_n\}$服从大数定律等价于$Y_n-E(Y_n)\xrightarrow{P}0$.

3. 依概率收敛的四则运算　如果$X_n\xrightarrow{P}a$,$Y_n\xrightarrow{P}b$,则有

(1) $X_n\pm Y_n\xrightarrow{P}a\pm b$;

(2) $X_n\times Y_n\xrightarrow{P}a\times b$;

(3) $X_n\div Y_n\xrightarrow{P}a\div b\ (b\neq 0)$.

4. 按分布收敛、弱收敛　设$\{F_n(x)\}$是随机变量序列$\{X_n\}$的分布函数列,$F(x)$为X的分布函数.若对$F(x)$的任一连续点x,都有$\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)=F(x)$,则称$\{F_n(x)\}$弱收敛于$F(x)$,记作$F_n(x)\xrightarrow{W}F(x)$.也称$\{X_n\}$按分布收敛于$X$,记作$X_n\xrightarrow{L}X$.

5. 依概率收敛与按分布收敛间的关系

(1) $X_n\xrightarrow{P}X \Rightarrow X_n\xrightarrow{L}X$.

(2) $X_n\xrightarrow{P}c \Leftrightarrow X_n\xrightarrow{L}c$(其中$c$为常数).

§4.2 特征函数

1. 特征函数的定义 设 X 是一个随机变量,称 $\varphi(t)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})$ 为 X 的特征函数,其表达式如下

$$\varphi(t)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})=\begin{cases}\sum\limits_{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}P(X=x_i), & \text{在离散场合},\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}p_X(x)\,\mathrm{d}x, & \text{在连续场合},\end{cases}\quad -\infty<t<+\infty.$$

由于 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}|=\sqrt{\cos^2 tx+\sin^2 tx}=1$,所以随机变量 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 总是存在的.

利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 可把不少问题中的复变函数问题转化为实变函数问题进行处理.

上述由密度函数 $p_x(x)$ 求其特征函数的公式常称为傅里叶变换.

2. 特征函数的性质

(1) $|\varphi(t)|\leqslant\varphi(0)=1$;

(2) $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$,其中 $\overline{\varphi(t)}$ 表示 $\varphi(t)$ 的共轭;

(3) 若 $Y=aX+b$,其中 a,b 是常数,则 $\varphi_Y(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}\varphi_X(at)$;

(4) 若 X 与 Y 是相互独立的随机变量,则 $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)$;

(5) 若 $E(X^l)$ 存在,则 $\varphi_X(t)$ 可 l 次求导,且对 $1\leqslant k\leqslant l$,有 $\varphi^{(k)}(0)=\mathrm{i}^k E(X^k)$;

(6) **一致连续性** 特征函数 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续;

(7) **非负定性** 特征函数 $\varphi(t)$ 是非负定的,即对任意正整数 n,及 n 个实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 和 n 个复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$,有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)z_k\overline{z_j}\geqslant 0$;

(8) **逆转公式** 设 $F(x)$ 和 $\varphi(t)$ 分别为 X 的分布函数和特征函数,则对 $F(x)$ 的任意两个连续点 $x_1<x_2$,有

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t;$$

(9) **唯一性定理** 随机变量的分布函数由其特征函数唯一决定;

（10）若连续随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$，特征函数为 $\varphi(t)$. 如果 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|\mathrm{d}t<+\infty$，则

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

这个公式又称傅里叶逆变换.

（11）分布函数序列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于分布函数 $F(x)$ 的充要条件是 $\{F_n(x)\}$ 的特征函数序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 收敛于 $F(x)$ 的特征函数 $\varphi(t)$.

3. 常用分布的特征函数表

分　布	特征函数
退化分布 $P(X=a)=1$	$\varphi(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}ta}$
二项分布 $b(n,p)$	$\varphi(t)=(q+p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n,\quad q=1-p$
泊松分布 $P(\lambda)$	$\varphi(t)=\exp\{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)\}$
几何分布 $Ge(p)$	$\varphi(t)=\dfrac{p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-q\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}},\quad q=1-p$
负二项分布 $Nb(r,p)$	$\varphi(t)=\left(\dfrac{p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-q\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right)^r,\quad q=1-p$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$\varphi(t)=\exp\left\{\mathrm{i}\mu t-\dfrac{\sigma^2t^2}{2}\right\}$
标准正态分布 $N(0,1)$	$\varphi(t)=\mathrm{e}^{-t^2/2}$
柯西分布 $Cau(\mu,\lambda)$	$\varphi(t)=\exp\{\mathrm{i}\mu t-\lambda\lvert t\rvert\}$
均匀分布 $U(a,b)$	$\varphi(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tb}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}ta}}{(b-a)\mathrm{i}t}$
均匀分布 $U(-a,a)$	$\varphi(t)=\dfrac{\sin at}{at}$
指数分布 $Exp(\lambda)$	$\varphi(t)=\left(1-\dfrac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-1}$
伽马分布 $Ga(\alpha,\lambda)$	$\varphi(t)=\left(1-\dfrac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-\alpha}$
贝塔分布 $Be(a,b)$	$\varphi(t)=\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{\Gamma(a+j)(\mathrm{i}t)^j}{\Gamma(a+b+j)\Gamma(j+1)}.$
$\chi^2(n)$ 分布	$\varphi(t)=(1-2\mathrm{i}t)^{-n/2}$

§4.3 大数定律

1. 随机变量序列$\{X_n\}$服从大数定律 设$\{X_n\}$为随机变量序列，若对任意的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

则称$\{X_n\}$服从大数定律.

2. 伯努利大数定律 设μ_n为n重伯努利试验中事件A发生的次数，p为每次试验中A出现的概率，则对任意的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

这是第一个大数定律，它表明：事件发生的频率依概率收敛于该事件的概率，这就是“频率稳定于概率”的含义，也是“用频率去估计概率”的依据.

3. 切比雪夫大数定律 设$\{X_n\}$为一列两两不相关的随机变量序列，若每个X_i的方差存在，且有共同的上界，即$\mathrm{Var}(X_i)\leqslant c, i=1,2,\cdots$，则$\{X_n\}$服从大数定律.

4. 马尔可夫大数定律 对随机变量序列$\{X_n\}$，若有

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\to 0\quad(n\to\infty),$$

则$\{X_n\}$服从大数定律.上式被称为**马尔可夫条件**.

5. 辛钦大数定律 设$\{X_n\}$为一独立同分布的随机变量序列，若X_i的数学期望存在，则$\{X_n\}$服从大数定律.

§4.4 中心极限定理

1. 中心极限定理 研究独立随机变量和的极限分布在什么条件下为正态分布的命题.

2. 林德伯格-莱维中心极限定理 设$\{X_n\}$是独立同分布的随机变量序列，且$E(X_i)=\mu$，$\mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2>0$.记

$$Y_n^* = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

则对任意实数y，有

$$\lim_{n\to\infty}P(Y_n^* \leqslant y)=\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

3. 二项分布的正态近似

(1) **棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理** 设n重伯努利试验中，事件A在每次试验中出现的概率为$p(0<p<1)$，记μ_n为n次试验中事件A出现的次数，且记

$$Y_n^* = \frac{\mu_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

则对任意实数y，有

$$\lim_{n\to+\infty}P(Y_n^* \leqslant y)=\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

(2) **近似中的修正** 因为二项分布是离散分布，而正态分布是连续分布，所以用正态分布作为二项分布的近似计算中，作些修正可以提高精度.若$k_1<k_2$均为整数，一般先作如下修正后再用正态近似

$$\begin{aligned}P(k_1\leqslant\mu_n\leqslant k_2)&=P(k_1-0.5<\mu_n<k_2+0.5)\\&=\Phi\left(\frac{k_2+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).\end{aligned}$$

4. 三类近似计算问题 若记$\beta=\Phi(y)$，则由中心极限定理给出的近似式$P(Y_n^*\leqslant y)\approx\Phi(y)=\beta$可用来解决三类计算问题：

(1) 已知n,y求β(求概率)；

(2) 已知n,β求y(求分位数)；

(3) 已知y,β求n(求样本量).

5. 独立不同分布下的中心极限定理 设$\{X_n\}$为独立随机变量序列，且$E(X_i)=\mu_i$，$\mathrm{Var}(X_i)=\sigma_i^2$，$i=1,2,\cdots$，记

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,\qquad B_n=\sqrt{\mathrm{Var}(Y_n)}=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2}.$$

（1）**林德伯格条件**　若诸 X_i 为连续随机变量，其密度函数为 $p_i(x)$，对任意的 $\tau>0$，称

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\tau^2 B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|x-\mu_i|>\tau B_n}(x-\mu_i)^2 p_i(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

为林德伯格条件.

（2）**林德伯格中心极限定理**　设独立随机变量序列 $\{X_n\}$ 满足林德伯格条件，则对任意的 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)\leqslant x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

（3）假如独立随机变量序列 $\{X_n\}$ 具有同分布和方差有限的条件，则必定满足林德伯格条件，即林德伯格-莱维中心极限定理是林德伯格中心极限定理的特例.

（4）**李雅普诺夫中心极限定理**　设 $\{X_n\}$ 为独立随机变量序列，若存在 $\delta>0$，满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i-\mu_i|^{2+\delta})=0,$$

则对任意的 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$