第一章　随机事件与概率

§1.1　随机事件及其运算

1. 随机现象　在一定的条件下,并不总是出现相同结果的现象.

概率论研究随机现象的模型——概率分布及其性质.数理统计研究随机现象的数据收集、处理和推断.

2. 样本空间　随机现象的一切可能基本结果组成的集合,记为 $\Omega=\{\omega\}$,其中 ω 表示基本结果,又称为**样本点**.

3. 随机事件　随机现象的某些样本点组成的集合.常用大写字母 A,B,C 等表示,Ω 表示必然事件,空集 $\varnothing$ 表示不可能事件.

4. 事件间的关系

(1) **包含关系**　如果属于 A 的样本点必属于 B,即事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称 A 被包含在 B 中,记为 $A\subset B$;

(2) **相等关系**　如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$;

(3) **互不相容**　如果 $A\cap B=\varnothing$,即 A 与 B 不可能同时发生,则称 A 与 B 互不相容.

5. 事件运算

(1) **事件 A 与 B 的并**　事件 A 与 B 中至少有一个发生,记为 $A\cup B$;

(2) **事件 A 与 B 的交**　事件 A 与 B 同时发生,记为 $A\cap B$ 或 AB;

(3) **事件 A 对 B 的差**　事件 A 发生而 B 不发生,记为 $A-B$;

(4) **对立事件**　事件 A 的对立事件,即"A 不发生",记为 $\overline{A}$.

6. 事件的运算性质

(1) 并与交满足结合律和交换律;

(2) 交对并满足分配律

$$A(B\cup C)=AB\cup AC;$$

(3) 并对交满足分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

(4) **德摩根公式**(对偶法则)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

7. 事件域 含有必然事件 Ω,并关于对立运算和可列并运算都封闭的事件类 $\mathscr{F}$ 称为事件域,又称为 σ 代数.

§1.2 概率的定义及其确定方法

1. 概率的公理化定义 定义在事件域 $\mathscr{F}$ 上的一个实值函数 $P(A)$ 满足:

(1) **非负性公理** 若 $A \in \mathscr{F}$,则 $P(A) \geqslant 0$;

(2) **正则性公理** $P(\Omega) = 1$;

(3) **可列可加性公理** 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 互不相容,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率,称三元素 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为**概率空间**.

2. 确定概率的频率方法 它的基本思想是:

(1) 与考察事件 A 有关的随机现象可大量重复进行;

(2) 在 n 次重复试验中,记 $n(A)$ 为事件 A 出现的次数,称

$$f_n(A) = \frac{n(A)}{n}$$

为事件 A 出现的**频率**;

(3) 频率的稳定值就是概率;

(4) 当重复次数 n 较大时,可用频率作为概率的估计值.

3. 确定概率的古典方法 它的基本思想是:

(1) 所涉及的随机现象只有有限个样本点,譬如为 n 个;

(2) 每个样本点发生的可能性相等(称为等可能性);

(3) 若事件 A 含有 k 个样本点,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点的个数}}{\Omega \text{ 中所有样本点的个数}}=\frac{k}{n}.$$

注意:这样确定的概率常称为古典概率.计算其分子与分母常用到排列与组合.

4. 确定概率的几何方法 它的基本思想是:

(1) 如果一个随机现象的样本空间 Ω 充满某个区域,其度量(长度、面积或体积等)大小可用 S_Ω 表示;

(2) 任意一点落在度量相同的子区域内是等可能的;

(3) 若事件 A 为 Ω 中某个子区域,且其度量为 S_A,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}.$$

这样确定的概率常称为几何概率,计算其分子与分母要涉及长度、面积、体积等,有时还需用积分等工具.

5. 确定概率的主观方法 一个事件 A 的概率 $P(A)$ 是人们根据经验,对该事件发生的可能性大小所作出的个人信念.

§1.3 概率的性质

1. $P(\varnothing)=0.$

2. 有限可加性 若有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

3. 对立事件的概率 对任一事件 A,有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

4. 减法公式(特定场合) 若 $A\supset B$,则

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

5. 单调性 若 $A\supset B$,则 $P(A)\geqslant P(B)$.

6. 减法公式(一般场合)　对任意两个事件 A,B,有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

7. 加法公式　对任意两个事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

8. 半可加性　对任意两个事件 A,B,有

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B).$$

9. 事件序列的极限

(1) 对 $\mathscr{F}$ 中任一单调不减的事件序列 $F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_n\subset\cdots$,称可列并 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ 为 $\{F_n\}$ 的**极限事件**,记为

$$\lim_{n\to\infty}F_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n.$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}P(F_n)=P(\lim\limits_{n\to\infty}F_n)$,则称概率 P 是**下连续**的.

(2) 对 $\mathscr{F}$ 中任一单调不增的事件序列 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$,称可列交 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 为 $\{E_n\}$ 的**极限事件**,记为

$$\lim_{n\to\infty}E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n.$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}P(E_n)=P(\lim\limits_{n\to\infty}E_n)$,则称概率 P 是**上连续**的.

§1.4　条件概率

1. 条件概率　设 A,B 是两个事件,若 $P(B)>0$,则称

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为“在事件 B 发生下事件 A 发生的条件概率”,简称条件概率.它满足概率的三条公理.

2. 乘法公式

(1) 若 $P(B)>0$,则

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B).$$

(2) 若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

3. 全概率公式 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互不相容,且 $\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$,如果 $P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,则对任一事件 A 有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

全概率公式提供了计算复杂事件概率的一条有效途径.

4. 贝叶斯公式 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互不相容,且 $\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$,如果 $P(A)>0,P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

在贝叶斯公式中,诸 $P(B_i)$ 称为 B_i 的先验(试验以前)概率,而诸 $P(B_i\mid A)$ 称为 B_i 的后验(试验以后)概率,它表示在已知“事件 A 发生”这个新信息后,对 B_i 的概率作出的修正.

§1.5 独 立 性

1. 两个事件的独立性 如果 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与 B **相互独立**,简称 A 与 B **独立**.否则称 A 与 B **不独立或相依**.

2. 若事件 A 与 B 独立,则 A 与 $\overline{B}$ 独立,$\overline{A}$ 与 B 独立,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

3. 多个事件的独立性 设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,如果对任意的 $1\leqslant i<j<k<\cdots\leqslant n$,以下等式均成立

$$\begin{cases} P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j), \\ P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n), \end{cases}$$

则称此 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

4. 试验的独立性 假如试验 E_1 的任一结果(事件)与试验 E_2 的任一结果(事件)都是相互独立的事件,则称**这两个试验相互独立**.

5. n 重独立重复试验 假如一个试验重复进行 n 次,并各次试验间相互独立,则称其为 **n 重独立重复试验**.假如一个试验只可能有两个结果:A 与 $\overline{A}$,则称其为**伯努利试验**.假如一个伯努利试验重复进行 n 次,且各次试验间相互独立,则称其为 **n 重伯努利试验**.