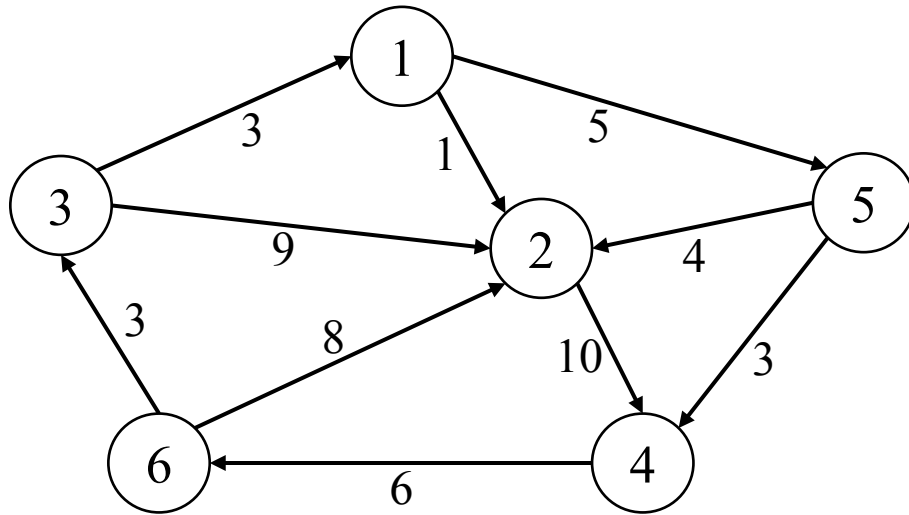


Matrix Multiplication

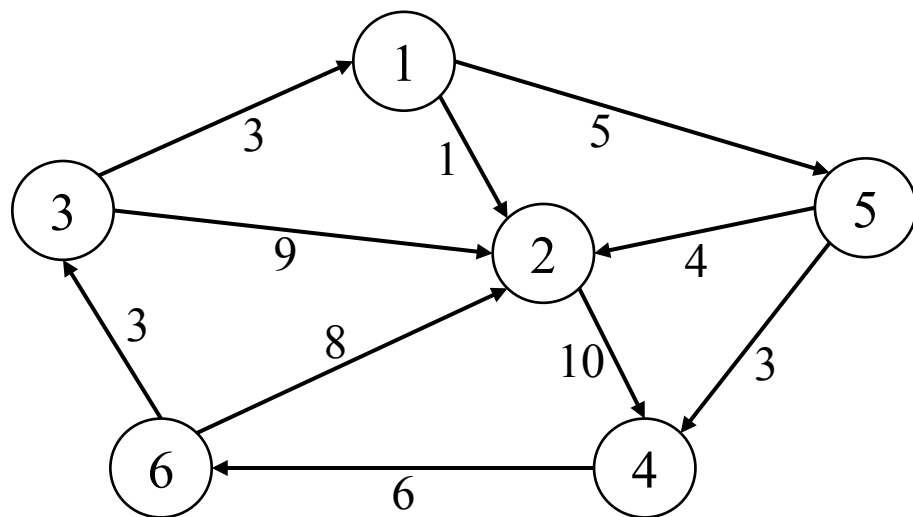
Matrix Multiplication



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Matrix Multiplication

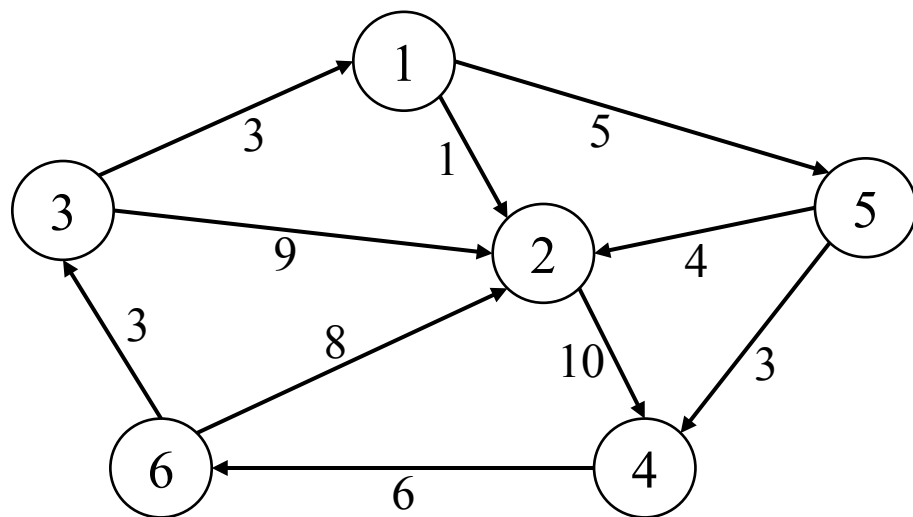


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^{(1)} = D^{(0)} \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Matrix Multiplication

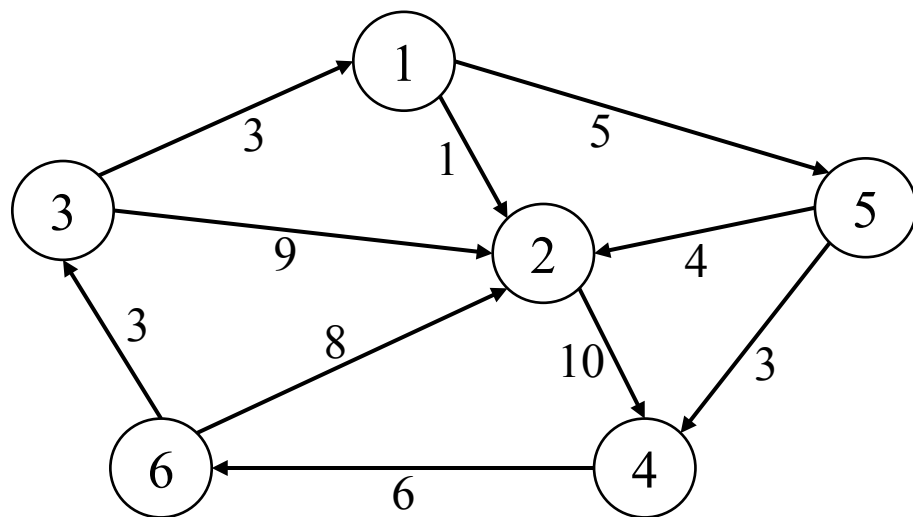


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^{(2)} = D^{(1)} \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 8 & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & 16 \\ 3 & 4 & 0 & 19 & 8 & \infty \\ \infty & 14 & 9 & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 18 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Matrix Multiplication

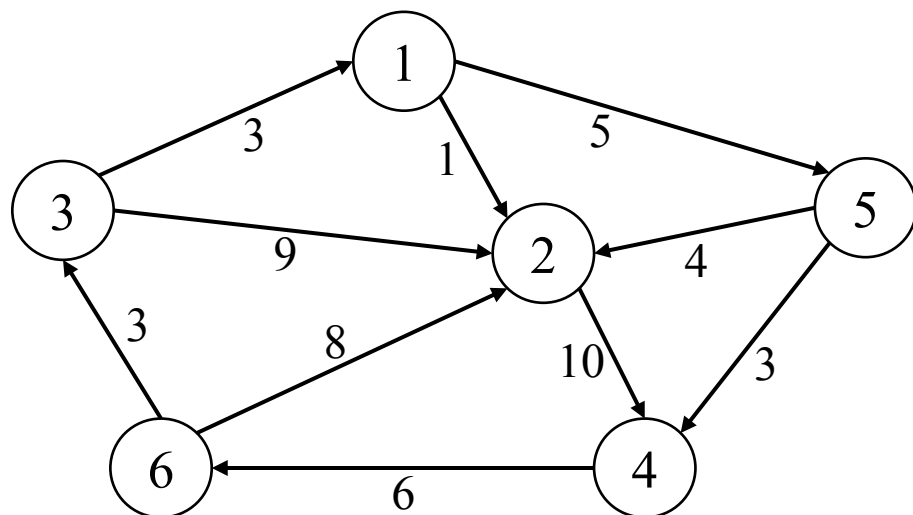


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^{(3)} = D^{(2)} \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 8 & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & 16 \\ 3 & 4 & 0 & 19 & 8 & \infty \\ \infty & 14 & 9 & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 18 & \infty & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 8 & 5 & 14 \\ \infty & 0 & 19 & 10 & \infty & 16 \\ 3 & 4 & 0 & 11 & 8 & 25 \\ 12 & 14 & 9 & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & 12 & 3 & 0 & 9 \\ 6 & 7 & 3 & 18 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrix Multiplication

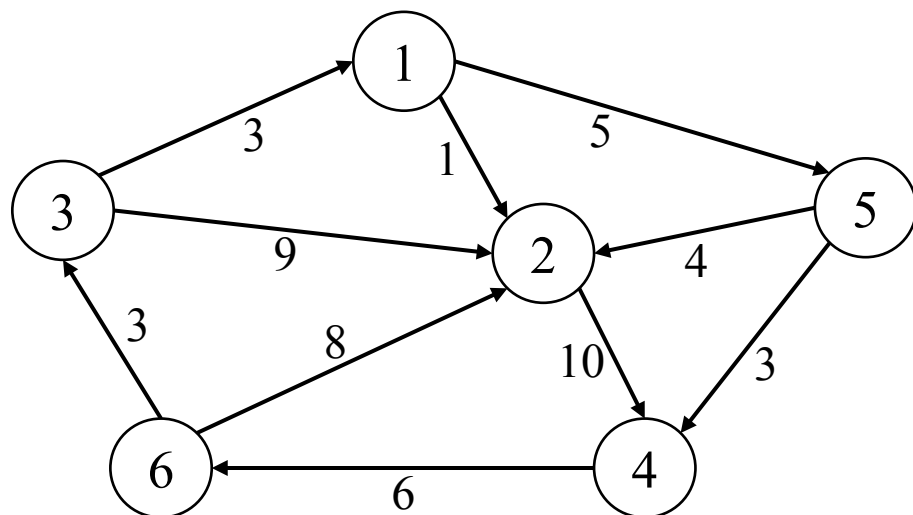


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^{(4)} = D^{(3)} \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 8 & 5 & 14 \\ \infty & 0 & 19 & 10 & \infty & 16 \\ 3 & 4 & 0 & 11 & 8 & 25 \\ 12 & 14 & 9 & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & 12 & 3 & 0 & 9 \\ 6 & 7 & 3 & 18 & 11 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 17 & 8 & 5 & 14 \\ 22 & 0 & 19 & 10 & \infty & 16 \\ 3 & 4 & 0 & 11 & 8 & 17 \\ 12 & 13 & 9 & 0 & 17 & 6 \\ 15 & 4 & 12 & 3 & 0 & 9 \\ 6 & 7 & 3 & 14 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrix Multiplication



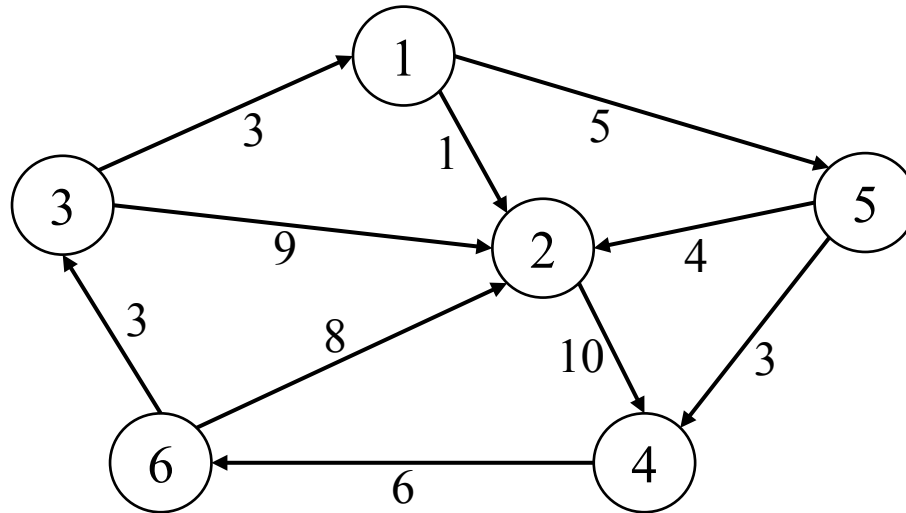
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^{(5)} = D^{(4)} \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 17 & 8 & 5 & 14 \\ 22 & 0 & 19 & 10 & \infty & 16 \\ 3 & 4 & 0 & 11 & 8 & 17 \\ 12 & 13 & 9 & 0 & 17 & 6 \\ 15 & 4 & 12 & 3 & 0 & 9 \\ 6 & 7 & 3 & 14 & 11 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 17 & 8 & 5 & 14 \\ 22 & 0 & 19 & 10 & \textcolor{red}{27} & 16 \\ 3 & 4 & 0 & 11 & 8 & 17 \\ 12 & 13 & 9 & 0 & 17 & 6 \\ 15 & 4 & 12 & 3 & 0 & 9 \\ 6 & 7 & 3 & 14 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

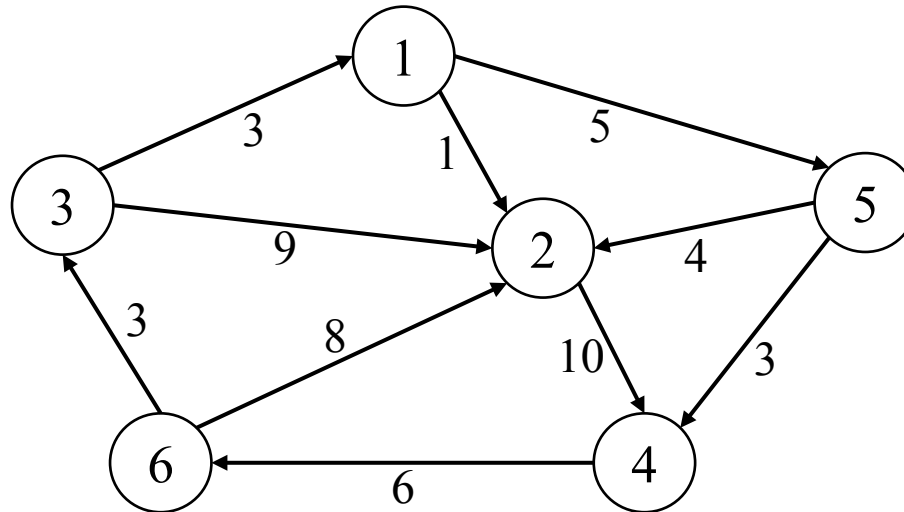
Floyd-Warshall Algorithm

Floyd-Warshall Algorithm



$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Floyd-Warshall Algorithm

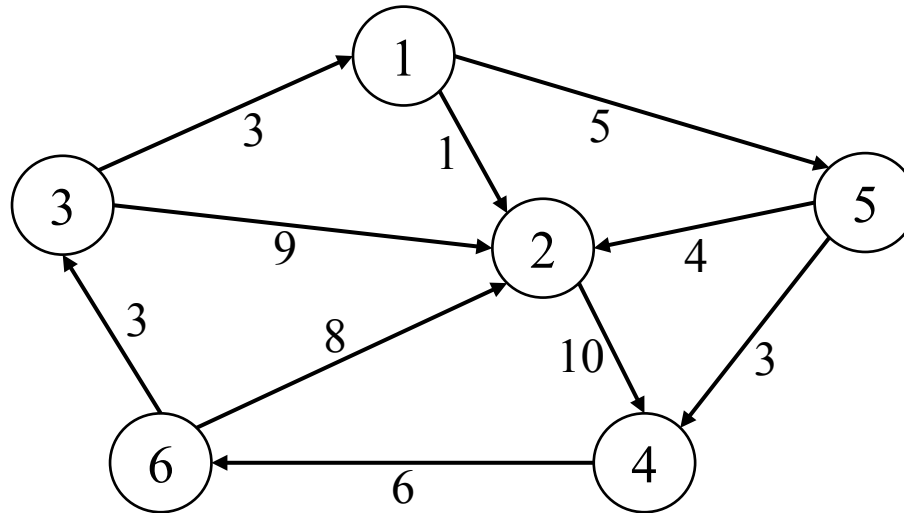


Consider Node 1

$C =$

0	1	∞	∞	5	∞
∞	0	∞	10	∞	∞
3	4	0	∞	8	∞
∞	∞	∞	0	∞	6
∞	4	∞	3	0	∞
∞	8	3	∞	∞	0

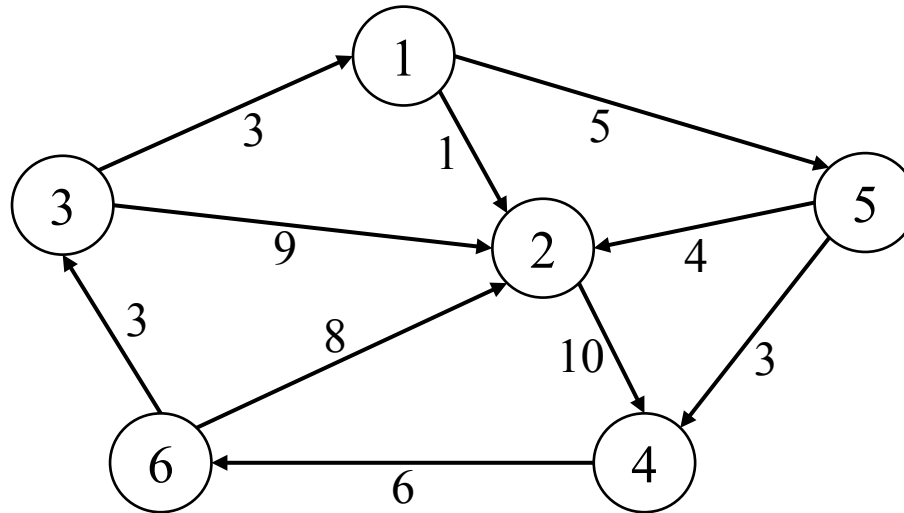
Floyd-Warshall Algorithm



Consider Node 2

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 11 & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 4 & 0 & 14 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 8 & 3 & 18 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

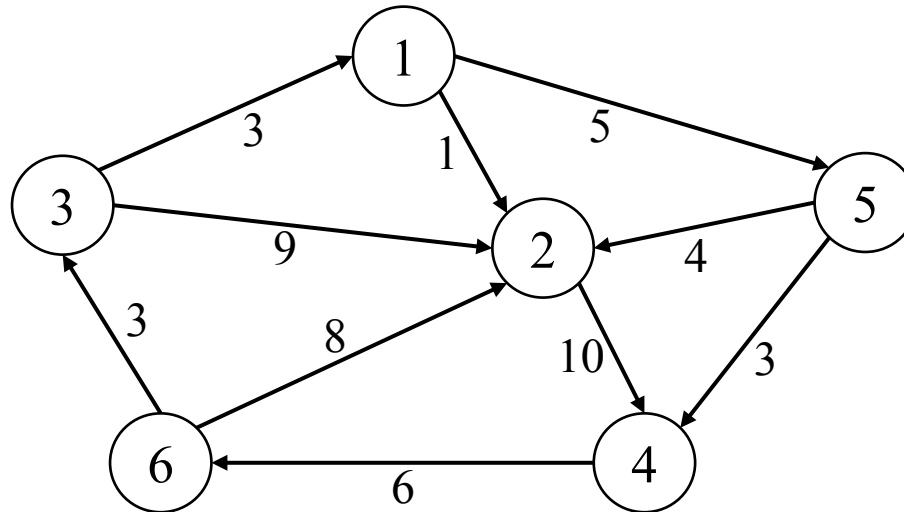
Floyd-Warshall Algorithm



Consider Node 3

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 11 & 5 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 4 & 0 & 14 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 6 & 7 & 3 & 17 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

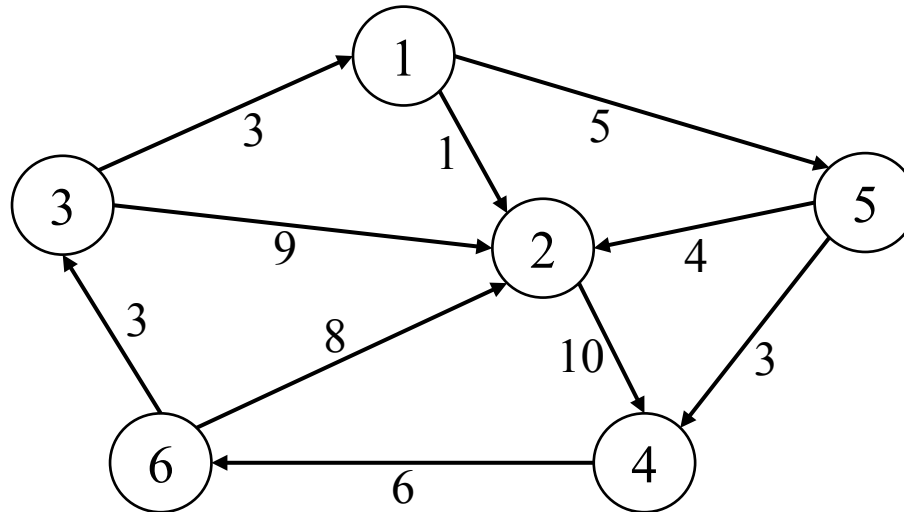
Floyd-Warshall Algorithm



Consider Node 4

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 11 & 5 & 17 \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & 16 \\ 3 & 4 & 0 & 14 & 8 & 20 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & 9 \\ 6 & 7 & 3 & 17 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

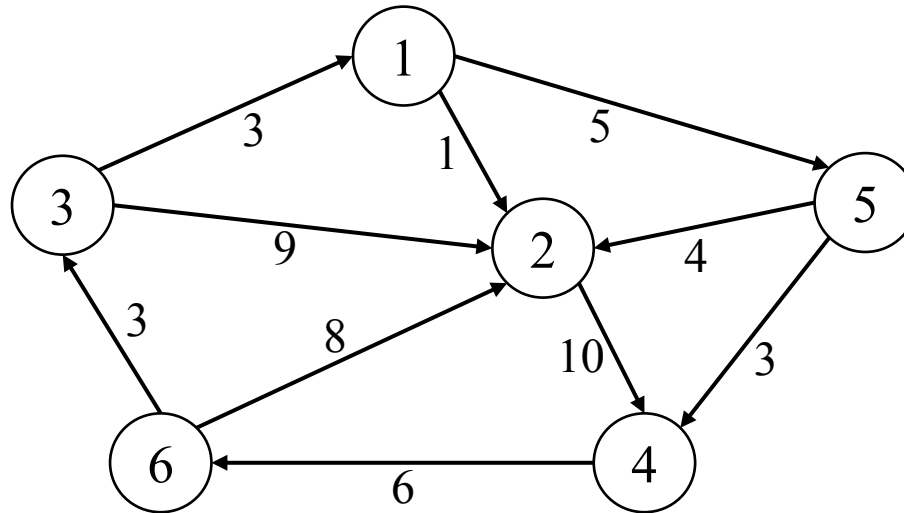
Floyd-Warshall Algorithm



Consider Node 5

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 8 & 5 & 14 \\ \infty & 0 & \infty & 10 & \infty & 16 \\ 3 & 4 & 0 & 11 & 8 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & 9 \\ 6 & 7 & 3 & 14 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

Floyd-Warshall Algorithm

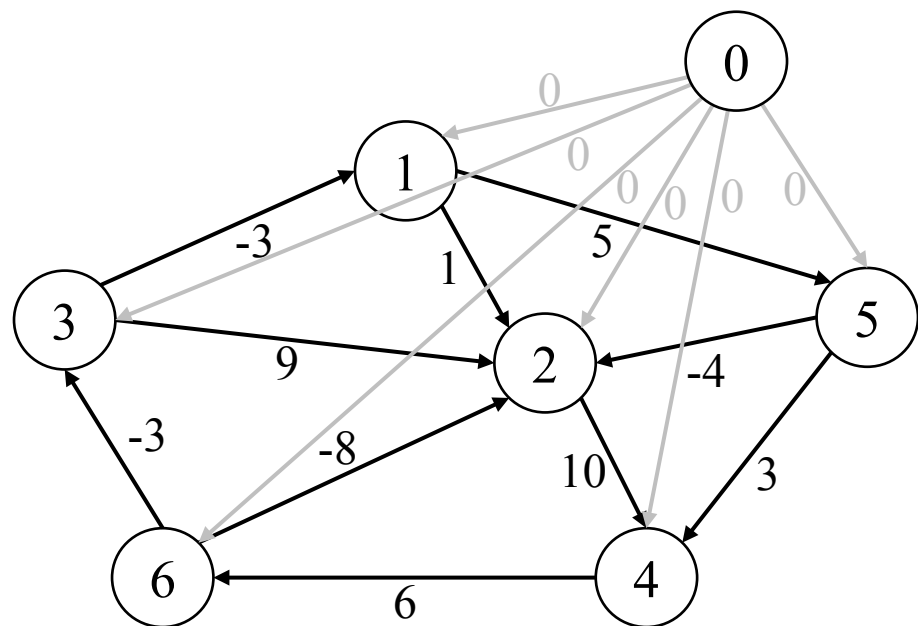


Consider Node 6

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 17 & 8 & 5 & 14 \\ 22 & 0 & 19 & 10 & 27 & 16 \\ 3 & 4 & 0 & 11 & 8 & 17 \\ 12 & 13 & 9 & 0 & 17 & 6 \\ 15 & 4 & 12 & 3 & 0 & 9 \\ 6 & 7 & 3 & 14 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

Johnson's Algorithm

Johnson's Algorithm



Bellman-Ford Algorithm with Source Node 0

Node	0	1	2	3	4	5	6
h[.]	0	-6	-8	-3	0	-1	0
Pre	0	3	6	6	0	1	0

Reweight: $w(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$