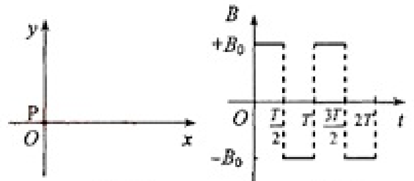
1. (100分)图（a）所示的xoy平面处于匀强磁场中，磁场方向与xoy平面（纸面）垂直，磁感应强度B随时间t变化的周期为T，变化图线如图（b）所示。当B为$+B_0$时，磁感应强度方向指向纸外。在坐标原点O有一带正电的粒子P，其电荷量与质量比值恰好等于$\frac{2\pi}{TB_0}$。不计重力。设P在某时刻t_0以某一初速度沿y轴正向O点开始运动，将它经过时间T到达的点记为A。

（1）若$t_0=0$，则直线OA与x轴的夹角是多少?

（2）若$t_0=T/4$，则直线OA与x轴的夹角是多少?

（3）为了使直线OA与x轴的夹角为$\pi/4$，在$0<t_0<T/4$的范围内，t_0应取何值?



图（a） 图（b）

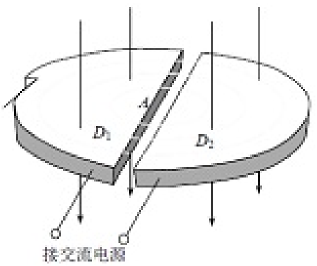
2. (100分)

回旋加速器在核科学、核技术、核医学等高新技术领域得到了广泛应用，有力地推动了现代科学技术的发展。

（1）当今医学成像诊断设备PET/CT堪称“现代医学高科技之冠”，它在医疗诊断中，常利用能放射电子的同位素碳11为示踪原子，碳11是由小型回旋加速器输出的高速质子轰击氮14获得，同时还产生另一粒子，试写出核反应方程。若碳11的半衰期 τ 为$20min$，经$2.0h$剩余碳11的质量占原来的百分之几?（结果取2位有效数字）

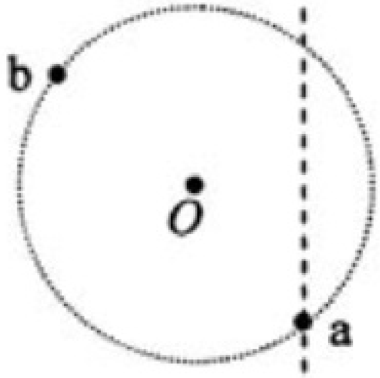
（2）回旋加速器的原理如图，D_1和D_2是两个中空的半径为R的半圆金属盒，它们接在电压一定、频率为f的交流电源上，位于D_1圆心处的质子源A能不断产生质子（初速度可以忽略，重力不计），它们在两盒之间被电场加速，D_1、D_2置于与盒面垂直的磁感应强度为B的匀强磁场中。若质子束从回旋加速器输出时的平均功率为P，求输出时质子束的等效电流I与P、R、f的关系式（忽略质子在电场中运动的时间，其最大速度远小于光速）

（3）试推理说明：质子在回旋加速器中运动时，随轨道半径r的增大，同一盒中相邻轨道的半径之差Δr是增大、减小还是不变?

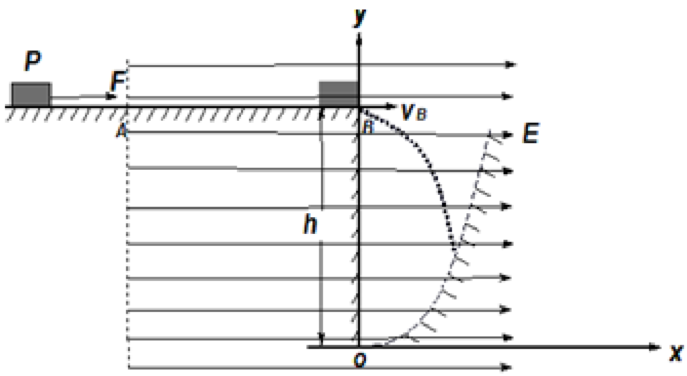


3. (100分)如图，一半径为R的圆表示一柱形区域的横截面（纸面）。在柱形区域内加一方向垂直于纸面的匀强磁场，一质量为m、电荷量为q的粒子沿图中直线在圆上的a点射入柱形区域，在圆上的b点离开该区域，离开时速度方向与直线垂直。圆心O到直线的距离为$\frac{3}{5}R$ 。现将磁场换为平行于纸面且垂直于直

线的匀强电场，同一粒子以同样速度沿直线在a点射入柱形区域，也在b点离开该区域。若磁感应强度大小为B，不计重力，求电场强度的大小。



4. 如图,粗糙、绝缘的直轨道固定在水平桌面上,B端与桌面边缘对齐,A是轨道上一点,过A点并垂直于轨道的竖直面右侧有大小 $E=2\times10^{6}N/C$,方向水平向右的匀强电场.可视为质点的带负电的小物体P电荷量 $q=2\times10^{-6}C$,质量 $m=0.25kg$,与轨道间动摩擦因数 $\mu=0.4.P$ 由静止开始向右运动,经过 $0.55s$ 到达A点,到达B点时速度是 $5m/s.P$ 在整个运动过程中始终受到水平向右的外力F作用,F大小与P的速率v的关系如表格所示,忽略空气阻力.



$v(m\cdot s^{-1})$	$0\leq v\leq2$	$2<v<5$	$v\geq5$
F/N	2	6	3

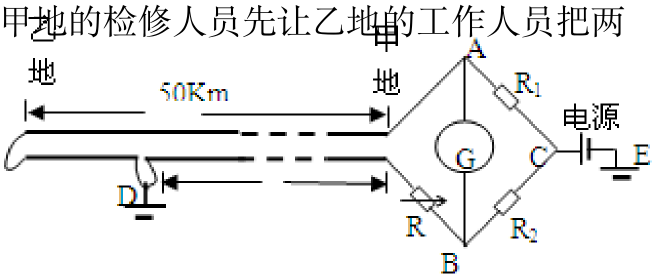
(1)求小物体P从开始运动至A点的速率;

(2)求小物体P从A运动至B的过程,电场力做的功;

(3)小物体P到达B点后,飞向另一侧呈抛物线形状的坡面.如图,以坡底的O点为原点建立坐标系xoy.已知BO高为h,坡面的抛物线方程为 $y=\dfrac{1}{2h}x^{2}$,式中h为常数,且 $h>7$,重力加速度为g.若当小物体P刚到达B点时,通过对其施加一个水平向右的瞬时力,改变其在B点的速度.则欲使P落到坡面时的动能恰好最小,求其在B点时的速度.

5. 甲乙两地相距 $50km$,其间有两条相同的电话线,在D处有一条因绝缘皮被老鼠咬破触地

而发生故障.为了确定触地点到甲地的距离,甲地的检修人员先让乙地的工作人员把两条电话线短接,(图中D、E两点都接地,可以认为两点间用导线连接且电阻不计)然后调节电阻箱的阻值R,使通过理想电流表G的电流为零, $R_1 = R_2$,此时电阻箱的阻值为



360Ω ,已知每 $1km$ 电话线的阻值为 6Ω ,则触地点到甲地的距离为 _ km;若把电阻箱R阻值调大,则通过电流表G的电流方向 _ .

答案解析

1. **答案**（本题提供智能家庭教师服务）

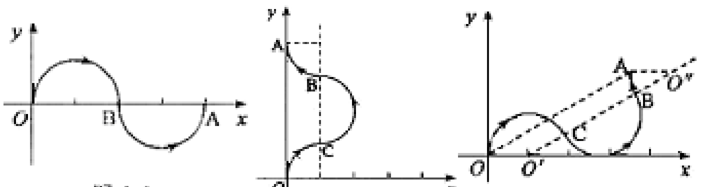
（1）设粒子P的质量、电荷量与初速度分别为m、q与v，粒子P在洛伦兹力作用下，在xy平面内做圆周运动，分别用R与T'表示圆周的半径和运动周期，则有

$$qvB_0 = m\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 R \qquad ①$$

$$v = \frac{2\pi R}{T'} \qquad ②$$

由①②式与已知条件得$T' = T$　　③

粒子P在$t = 0$到$t = T/2$时间内，沿顺时针方向运动半个圆周，到达x轴上B点，此时磁场方向反转；继而，在$t = T/2$到$t = T$时间内，沿逆时针方向运动半个圆周，到达x轴上A点，如图（a）所示.OA与x轴的夹角$\theta = 0$　　④



图(a)　图(b)　图(c)

（2）粒子P在时刻开始运动，在$t = T/4$到$t = T/2$时间内，沿顺时针方向运动$1/4$个圆周，到达D点，此时磁场方向反转；继而，在$t = T/2$到$t = T$时间内，沿逆时针方向运动半个圆周，到达B点，此时磁场方向再次反转；在$t = T$到$t = 5T/4$时间内，沿顺时针方向运动$1/4$个圆周，到达A点，如图（b）所示，由几何关系可知，A点在y轴上，即OA与x轴的夹角$\theta = \pi/2$　　⑤

（3）若在任意时刻$t = t_0$ $(0 < t_0 < T/4)$粒子P开始运动，在$t = t_0$到$t = T/2$时间内，沿顺时针方向做圆周运动到达C点，圆心O'位于x轴上，圆弧OC对应的圆心角为$\angle OO'C = \dfrac{2\pi}{T}(\dfrac{T}{2} - t_0)$　　⑥

此时磁场方向反转；继而，在$t = T/2$到$t = T$时间内，沿逆时针方向运动半个圆周，到达B点，此时磁场方向再次反转；在$t = T$到$t = T + t_0$时间内，沿顺时针方向做圆周运动到达A点，设圆O''，圆弧BA对应的圆心角为$\angle BO''A = \dfrac{2\pi}{T}t_0$　　⑦

如图(c)所示，由几何关系可知，C、B均在$O'O''$连线上，且$OA//O'O''$　　⑧

若要OA与x轴成$\pi/4$角，则有$\angle OO'C = \dfrac{3\pi}{4}$　　⑨，联立⑥⑨式可得$t_0 = T/8$　　⑩

评分参考：第（1）问40分，①②③④式各10分；第（2）问20分，正确论证10分，⑤式10分；第（3）问40分，正确论证20分，⑩式20分。

解析

过程分析：带电粒子在磁场中做匀速圆周运动，磁场方向改变时，运动轨迹方向相反，绘制出粒子的运动轨迹曲线。

问题求解：

（1）粒子做圆周运动，洛伦兹力提供向心力，结合已知条件可得出粒子圆周运动周期T'与磁感应强度

变化周期为T相等，由左手定则可判断粒子先顺时针运动半个圆周，$\dfrac{T}{2}$后磁场反向，粒子再逆时针运动半个圆周，绘制出粒子运动轨迹图（a），故直线OA与x轴的夹角为0。

（2）粒子从$t_0 = T/4$开始运动，先顺时针运动$\dfrac{1}{4}$圆周，再逆时针运动半个圆周，再顺时针运动$\dfrac{1}{4}$圆周到达A点，绘制出粒子运动轨迹图（b），故直线OA与x轴的夹角为$\dfrac{\pi}{2}$。

（3）类似的可以绘制出粒子在一个周期T内的运动轨迹图（c），判断出OA连线与圆心连线$O'O''$平行后，结合圆周运动规律求出粒子开始运动的时刻t_0。

2. 答案

（1）核反应方程为${}_7^{14}N +{}_1^1 H \to{}_6^{11} C +{}_2^4 He$ ①

设碳11原有质量为m_0，经过$t = 2.0h$剩余的质量为m_t，根据半衰期定义，有:

$$\frac{m_t}{m_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{20}} = 1.6\% \quad ②$$

（2）设质子质量为m，电荷量为q，质子离开加速器时速度大小为v，由牛顿第二定律知:

$$qvB = m\frac{v^2}{R} \quad ③$$

质子运动的回旋周期为: $T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi m}{qB}$ ④

由回旋加速器工作原理可知，交变电源的频率与质子回旋频率相同，由周期T与频率f的关系可得:

$$f = \frac{1}{T} \quad ⑤$$

设在t时间内离开加速器的质子数为N，则质子束从回旋加速器输出时的平均功率

$$P = \frac{N \cdot \frac{1}{2}mv^2}{t} \quad ⑥$$

输出时质子束的等效电流为: $I = \dfrac{Nq}{t}$ ⑦

由上述各式得$I = \dfrac{P}{\pi BR^2 f}$

若以单个质子为研究对象解答过程正确的同样给分

（3）方法一:

设k（$k \in N^*$)为同一盒子中质子运动轨道半径的序数，相邻的轨道半径分别为r_k，r_{k+1}（$r_k > r_{k+1}$)，$\Delta r_k = r_{k+1} - r_k$，在相应轨道上质子对应的速度大小分别为$v_k$，$v_{k+1}$，$D_1$、$D_2$之间的电压为$U$，由动能定理知$2qU = \dfrac{1}{2}m{v_{k+1}}^2 - \dfrac{1}{2}mv_k^2$ ⑧

由洛伦兹力充当质子做圆周运动的向心力，知$r_k = \dfrac{mv_k}{qB}$，则$2qU = \dfrac{q^2B^2}{2m}({r_{k+1}}^2 - r_k^2)$ ⑨

整理得 $\Delta r_k = \dfrac{4mU}{qB^2(r_{k+1} - r_k)}$ ⑩

因U、q、m、B均为定值，令$C = \dfrac{4mU}{qB^2}$，由上式得$\Delta r_k = \dfrac{C}{r_k + r_{k+1}}$ ⑪

相邻轨道半径r_{k+1}，r_{k+2}之差$\Delta r_{k+1} = r_{k+2} - r_{k+1}$

同理 $\Delta r_k = \dfrac{C}{r_{k+1} + r_{k+2}}$

因为$r_{k+2}>r_k$，比较Δr_k，Δr_{k+1}得$\Delta r_{k+1}<\Delta r_k$

说明随轨道半径r的增大，同一盒中相邻轨道的半径之差Δr减小

方法二:

设k $(k\in N^*)$为同一盒子中质子运动轨道半径的序数，相邻的轨道半径分别为r_k，r_{k+1} $(r_k>r_{k+1})$，$\Delta r_k=r_{k+1}-r_k$，在相应轨道上质子对应的速度大小分别为v_k，v_{k+1}，D_1、D_2之间的电压为U

由洛伦兹力充当质子做圆周运动的向心力，知$r_k=\dfrac{mv_k}{qB}$，故$\dfrac{r_k}{r_{k+1}}=\dfrac{v_k}{v_{k+1}}$ ⑫

由动能定理知，质子每加速一次，其动能增量$\Delta E_k=qU$ ⑬

以质子在D_2盒中运动为例，第k次进入D_2时，被电场加速$(2k-1)$次

速度大小为$v_k=\sqrt{\dfrac{(2k-1)2qU}{m}}$ ⑭

同理，质子第$(k+1)$次进入D_2时，速度大小为$v_{k+1}=\sqrt{\dfrac{(2k+1)2qU}{m}}$

综合上述各式可得$\dfrac{r_k}{r_{k+1}}=\dfrac{v_k}{v_{k+1}}=\sqrt{\dfrac{2k-1}{2k+1}}$

整理得$\dfrac{r_k^2}{r_{k+1}^2}=\dfrac{2k-1}{2k+1}$，$\dfrac{r_{k+1}^2-r_k^2}{r_{k+1}^2}=\dfrac{2}{2k+1}$

$$\Delta r_k=\frac{2r_{k+1}^2}{(2k+1)(r_k+r_{k+1})}$$

同理，对于相邻轨道半径r_{k+1}，r_{k+2}，$\Delta r_{k+1}=r_{k+2}-r_{k+1}$，整理后有

$$\Delta r_{k+1}=\frac{2r_{k+1}^2}{(2k+1)(r_{k+1}+r_{k+2})}$$

由于$r_{k+2}>r_k$，比较Δr_k，Δr_{k+1}得$\Delta r_{k+1}<\Delta r_k$

说明随轨道半径r的增大，同一盒中相邻轨道的半径之差Δr减小，用同样的方法也可得到质子在D_1盒中运动时具有相同的结论。

解析

问题求解:

（1）由半衰期的定义，代入数值即可求得。

（2）粒子在离开加速器之前作匀速圆周运动，由匀速圆周运动公式，以及洛伦兹力公式，可求得周期。由周期与频率的关系，进而求得频率。再与平均功率和等效电流的公式联立，可以解得电流公式。

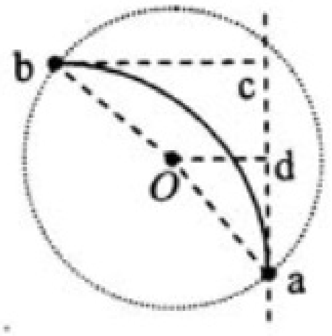
（3）要解此题，需要找出Δr_k 的表达式，相邻两次圆周运动，中间经过一次电场加速过程。

方法一：在此过程中，由动能定理，以及圆周运动的半径公式，可以推导出Δr_k 的表达式。即可求解。

方法二：从第一次算起，到第k次圆周运动，对这个过程运用动能定理，可以求得第k次圆周运动的速度，进而求出半径，进而求出相邻两次圆周运动的半径的比值表达式，从表达式中即可得到结果。

3. 答案 （本题提供智能家庭教师服务）

解：粒子在磁场中做圆周运动。



设圆周的半径为r，由牛顿第二定律和洛仑兹力公式得

$qvB = m\frac{v^2}{r}$ ①

式中v为粒子在a点的速度。

过b点和O点作直线的垂线，分别与直线交于c和d点。由几何关系知，线段$\overline{ac}$、$\overline{bc}$和过a、b两点的轨迹圆弧的两条半径（未画出）围成一正方形。因此$\overline{ac} = \overline{bc} = r$②

设$\overline{cd} = x$，由几何关系得

$\overline{ac} = \frac{4}{5}R + x$③

$\overline{bc} = \frac{3}{5}R + \sqrt{R^2 - x^2}$④

联立②③④式得 $r = \frac{7}{5}R$

再考虑粒子在电场中的运动。设电场强度的大小为E，粒子在电场中做类平抛运动。设其加速度大小为a，由牛顿第二定律和带电粒子在电场中的受力公式得qE=ma ⑥

粒子在电场方向和直线方向所走的距离均为r，由运动学公式得

$r = \frac{1}{2}at^2$ ⑦

$r = vt$ ⑧

式中t是粒子在电场中运动的时间。联立①⑤⑥⑦⑧式得$E = \frac{14}{5}\frac{qRB^2}{m}$⑨

解析

问题求解:

（1）电场部分需求电场强度，考虑粒子在电场中做类平抛运动，可列出电场方向和垂直于电场方向的两式 。此两式解出需要知道ab的电场方向距离和垂直于电场方向的距离。

（2）由（1）分析可知，我们需要利用粒子在磁场运动的条件解出ab电场方向距离和垂直于电场方向的距离。由粒子在磁场b点速度方向垂直于在磁场a点的方向，可知需作出bc，磁场是圆形的，粒子运动方向也是圆形的，可知两圆的圆形连线是对称轴，作出ab两点粒子运动的半径，根据正方形的几何关系，知$ab = bc = r$。

（3）问题转化为求解r。题中还有圆心O到直线的距离为 $\frac{3}{5}R$条件未使用，作出圆心O到直线的距离Od，利用未知的cd表示r，即可解出答案。

4. 答案

解:(1)物体P在水平桌面上运动时,竖直方向上只受重力mg和支持力N作用,因此其滑动摩擦力大小为:

$F_f = \mu mg = 1N$

根据表格数据可以知道,物体P在速率 $0 \leq v \leq 2m/s$ 时,所受水平外力 $F_1 = 2N > F_f$.因此,在进入电场区域之前,物体P做匀加速直线运动,设加速度为 a_1 ,不妨设经时间 t_1 速度为 $v_1 = 2m/s$ 时,物体P还未进入电场区域.

根据匀变速直线运动规律有: $v_1 = a_1 t_1 \ldots$ ①

根据牛顿第二定律有: $F_1 - F_f = ma_1 \ldots$ ②

由(1)(2)式联立计算得出: $t_1 = \frac{mv}{F_1 - F_f} = 0.5s < 0.55s$,

所以假设成立,即小物体P从开始运动至速率为 $2m/s$ 所用的时间为 $t_2 = 0.5s$.

当物体P在速率 $2 < v < 5m/s$ 时,所受水平外力 $F_1 = 6N$,

设先以加速度 a_1 再加速 $t_3 = 0.05s$ 至A点,速度为 v_A ,

根据牛顿第二定律有: $F_2 - F_f = ma_2 \ldots$ ③

根据匀变速直线运动规律有: $v_A = v_1 + a_2 t \ldots$ ④

由(3)(4)式联立计算得出: $v_A = 3m/s$

(2)物体P从A点运动至B点的过程中,根据题意可以知道,所受水平外力仍然为 $F_2 = 6N$ 不变,

设位移为s,加速度为 a_3 ,

根据牛顿第二定律有: $F_3 - qE - F_f = ma_3 \ldots$ ⑤

根据匀变速直线运动规律有: $V_B^2 - V_A^2 = 2a_3 s \ldots$ ⑥

由(5)(6)式联立计算得出: $s = 2m$

所以电场力做的功为: $W = -qEs = -8J$

(3)根据表格数据可以知道,当物体P到达B点时,水平外力为 $F_3 = qE = 3N$,因此,物体P离开桌面做平抛运动.

设物体P在空中运动的时间为t,在坡面上落点的横坐标为x,纵坐标为y.

由运动学公式和已知条件得, $x=v_Bt\dots$ ⑦

$h-y=\frac{1}{2}gt^2\dots$ ⑧

根据题意有 $y=\frac{1}{2h}x^2\dots(9)$

由机械能守恒,落到坡面时的动能为 $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_B^2+mg(h-y)\dots(10)$

联立(7)(8)(9)(10)式得:

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(v_B^2+\frac{2g^2h^2}{v_B^2+gh})$$

上式可以改写为:

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(v_B^2+gh+\frac{2g^2h^2}{v_B^2+gh}-gh)$$

利用基本不等式可得当: $v_B^2+gh=\frac{2g^2h^2}{v_B^2+gh}$ 时,动能最小.

此时, $v_B=\sqrt{(\sqrt{2}-1)gh}$

答:(1)小物体P从开始运动至A点的速率为 $3m/s$;

(2)小物体P从A运动至B的过程,电场力做的功为 $-8J$;

(3)在B点时的速度为 $\sqrt{(\sqrt{2}-1)gh}.$

解析

(1)根据牛顿第二定律计算加速度的大小,根据运动学的公式计算速度的大小;
(2)牛顿第二定律和运动学的公式计算位移的大小,根据电场力做功的公式计算做功的大小;
(3)物体P离开桌面做平抛运动,最后落到斜面上,根据平抛运动的规律和机械能守恒计算动能最小的时候B的速度的大小.

5. 答案

20
B到A
解:设D点到甲地的距离为x.

由题,理想电流表G的电流为零,桥式电路平衡,则有

$$\frac{6\times(100-x)}{6x+R}=\frac{R_1}{R_2}$$

$R_1=R_2$, $R=360\Omega$

计算得出, $x=20km$

原来理想电流表G的电流为零,说明A、B两点的电势相等;

把电阻箱R阻值调大,电阻 R_2 的电压减小,而电阻 R_1 的电压不变,因为A、B两点的电势都低于C点,则B点的电势将高于A点的电势,通过电流表G的电流方向由B到A.

因此, 本题正确答案是:20,B到A

解析

理想电流表G的电流为零,桥式电路平衡,根据电路中电阻关系,求出触地点D到甲地之间导线的电阻,即可得到距离;若把电阻箱R阻值调大,分析电阻 R_1 、 R_2 上电压的变化,判断AB两点电势的高低,即可判断通过电流表的电流方向.