经典教材辅导用书

经济数学——

线性代数题解

人大社·《线性代数·第三版》(赵树嫄主编)

杨明　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学——线性代数题解/杨明 编
武汉:华中科技大学出版社, 2004 **年** 10 **月**
ISBN 7-5609-3257-6/O151.2-44

Ⅰ.经…
Ⅱ.杨…
Ⅲ.经济数学-线性代数-题解-教学参考
Ⅳ. O

经济数学——线性代数题解 **杨明 编**

策划编辑:周芬娜 **封面设计:张 珉**
责任编辑:吴锐涛
责任校对:朱 霞 **责任监印:**

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 **邮编:**430074 **电话:**(027)87557437

录 排:华大图文设计室
印 刷:

开本:850× 1168 1/32 **印张:** **字数:**
版次:2004 **年** 10 **月第** 1 **版** **印次:**2004 **年** 10 **月第** 1 **次印刷**
ISBN 7-5609--/ ·

内 容 提 要

本书是人大版赵树嫄主编教材《线性代数》(第三版)的自学辅导书。全书由两大部分构成,第一部分是习题解析,第二部分是自测试题及其解答,依教材章节内容分别给出。

习题解析部分给出了教材中全部习题的详细解答,解答方式在与教材方法基本一致的基础上,适当加深处理技巧,便于读者学习和从中得到提高。对线性代数学习中应该深入理解和辨析的基本概念、解题方法、经验与技巧,学习和解题中易出错和混淆的问题,分别以要点的形式给予归纳总结,列于相应的题目解析后,便于读者结合问题学习掌握,力求避免概念、公式的罗列和空泛。

自测试题部分的设计是为了让读者检测自己对各章节内容学习的综合掌握程度。题后配有详细解答,方便读者使用。

本书适用于经济管理类专业的在校大学生,参加经济管理类硕士研究生入学考试的考生,MBA 学生以及人大版线性代数教材的学习、使用者。

前　　言

线性代数作为描述、处理有限维空间中多元线性系统最重要的数学工具，已经广泛应用在经济、管理的理论分析方法，数据处理和数量模型分析中。随着我国经济、管理理论研究科学化水平的提高，数学已经成为经济、管理理论学习和研究者必备的工具，数学中的线性代数课程已经成为经济管理类大学生的必修课，经济管理类硕士研究生、MBA 入学考试的考试科目。本书是在学习线性代数需要的背景下，为人大版赵树嫄主编教材《线性代数》（第三版）配套而编写的自学辅导书。

全书由两大部分构成，第一部分是习题解析，第二部分是自测试题及其解答，依教材章节内容分别给出。

考虑到经济管理类学生与理工类学生的不同特点，本书的习题解析部分给出了教材中全部习题的详细解答。解答方式在与教材方法基本一致的基础上，适当加深处理技巧，便于读者学习和从中得到提高。对线性代数学习中应该深入理解和辨析的基本概念、解题方法、经验与技巧，学习和解题中易出错和混淆的问题，分别以要点的形式给予归纳总结，列于相应的题目解析后，便于读者结合问题学习掌握，提高学习效率，力求避免概念、方法、公式的罗列和空泛。

本书的自测试题部分的设计是为了让读者检测自己对各章节内容学习的综合掌握程度。题后配有详细解答，方便读者使用。

本书的解答和要点叙述力求概念应用准确，方法简洁有效，结合编者多年的经验积累，力求反应线性代数理论、问题和方法的特点。本书是人大版教材的配套学习书，在符号、概念和内容叙述编排上均采用了原教材的体系，便于读者学习和使用。解题是学习数

学的重要步骤,独立思考对解题者理解线性代数的理论和方法,及时纠正对概念的误解和方法的不当使用,真正理解、掌握所学习的理论和方法,提高自身的数学素质修养有不可替代的重要性!线性代数的许多题目都可以有多种解题方法,本书限于篇幅,没有也不可能穷尽所有的方法,这给读者留下了很大的思考余地。读者如能结合自己的独立思考来使用本书,将会有更大的收益。

限于编者水平,书中难免有不妥之处,敬请读者批评指正。

编者

2004 年 7 月

目　　录

第一章 行 列 式

习题解析

(A)

1. **计算下列二阶行列式:**

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

要点 1-1

二阶行列式一般直接用定义计算,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

当行列式中含 x **的多项式时,其计算结果是一个** x **的多项式.**

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4-3\times 1=1$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2-(-1)\times 1=5$

(3) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 6\times 12 - 9\times 8 = 0$

(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab^2 - ba^2 = ab(b-a)$

(5) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+x+1) - x^2$

$= x^3 - x^2 - 1$

(6) $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_a b \cdot \log_b a = 0$

2. **计算下列三阶行列式:**

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$

解　(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ $\times(-1)$

$= 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 6(2+1) = 18$

(2) $$\underset{\times(-1)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 8 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6-1=5$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5-12=-7$$

(4) $$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行展开}} a(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

要点 1-2

尽管三阶行列式可以用定义、借助于画线方法(见教材图 1-2)计算,但适用的计算方法是用行列式的性质把它们化为三角形行列式计算,或者在一行(列)中等于零的元素较多时,选择该行(列)展开后降阶计算.应注意观察行列式的结构,选择适当的计算方法.

3. **证明下列等式:**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

证　**观察等式右边,将行列式按第一行展开则有**

$$\textbf{左边} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+\ c_1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \text{右边}$$

得证.

4. $k=?$ **时** $\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$

解 $D = \begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}$

$$\overset{\text{按第三行展开}}{=} k(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} k & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} k & 3 \\ -1 & k \end{vmatrix}$$

$$= -4k + k^2 + 3 = k^2 - 4k + 3 = (k-1)(k-3)$$

因此　　$D = 0 \quad (k-1)(k-3) = 0$

所以 $k=1$ **或者** $k=3$ **时**, $D=0$.

5. **当** x **取何值时** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$

$$\overset{\text{按第三行展开}}{=} (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{vmatrix} + x(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix}$$

$$= -x^2 + x(3x-4) = 2x^2 - 4x = 2x(x-2)$$

故当 $x \neq 0$ **而且** $x \neq 2$ **时**, $D \neq 0$. **亦即** x **取** 0 **和** 2 **以外的任意实数**, $D \neq 0$.

6. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$　**的充分必要条件是什么**?

解　$$D=\overset{\times(-1)}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}}=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第三列展开}}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{vmatrix}$$

$$=-(a^2-4)=-(a-2)(a+2)$$

故 $D>0$ **的充要条件为** $(a-2)(a+2)<0$，**即** $|a|<2$.

要点 1-3

当行列式中含 a, k, t **之类的参数，讨论参数取值，使行列式大于**0、**等于** 0 **或不等于** 0 **之类的问题时，首先要计算行列式值，得到一个多项式，再由多项式按题目要求，得到相应参数的取值范围.**

7. **求下列排列的逆序数**:

(1) 4 1 2 5 3　(2) 3 7 1 2 4 5 6　(3) 3 6 7 1 5 2 8 4

(4) $n\,(n-1)\cdots 2\ 1$

要点 1-4

求逆序数的方法有多种，常用的是从后向前，对每一个数计算它前面比它大的数的个数，将这些个数求和即得逆序数.

解　(1) $N(4\ 1\ 2\ 5\ 3)=2+0+1+1=4$

即 3 **之前比其大的数有** 2 **个**，5 **之前有** 0 **个**，2 **之前有** 1 **个**，1 **之前有** 1 **个**，4 **之前有** 0 **个**，**共计** 4 **个**.

(2) $N(3\ 7\ 1\ 2\ 4\ 5\ 6)=1+1+1+2+2+0=7$

(3) $N(3\ 6\ 7\ 1\ 5\ 2\ 8\ 4)=4+0+4+2+3+0+0=13$

(4) $N(n\,(n-1)\cdots 2\ 1)=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1$

$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

8. **在** 6 **阶行列式** $|a_{ij}|$ **中，下列各元素乘积应取什么符号**?

(1) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$　(2) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$

(3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$　(4) $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$

(5) $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$

解　行列式中元素乘积项前的符号. 由该项行(列)下标按顺序排列时, 其列(行)下标所给出的排列的逆序数的奇偶性确定, 偶排列取正号, 奇排列取负号.

(1) 因为 $N(5\ 3\ 2\ 4\ 1\ 6)=8$, 故项 $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$ 前取正号.

(2) 因为 $N(1\ 6\ 2\ 4\ 3\ 5)=5$, 故项 $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$ 前取负号.

(3) 因为 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}=a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$ 又 $N(6\ 1\ 4\ 2\ 3\ 5)=7$, 所以该项前取负号.

(4) 因为项 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$ 的列下标是顺序排列, 又 $N(5\ 3\ 1\ 4\ 6\ 2)=8$, 即行下标是偶排列, 故该项前为正号.

(5) 同(4)题, 由于 $N(6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)=\dfrac{5\times 6}{2}=15$, 故该项前为负号.

要点 1-5

(1) 确定行列式中一个乘积项前的符号, 可以利用乘法的交换律, 将该项行(列)下标调整成顺序排列时, 由列(行)下标给出排列的逆序数来定.

(2) 应该注意到行列式中一个乘积项最终的符号是由其前面的符号和元素符号共同决定的, 因此一项前面是正号并不意味着该乘积项一定是正数.

9. 选择 k, l 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为5阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带有负号的项.

解　由该项的列下标的排列 $(3\ k\ 4\ 2\ l)$, $k, l\in\{1, 5\}$, 可相应于两个排列: $(3\ 1\ 4\ 2\ 5)$ 和 $(3\ 5\ 4\ 2\ 1)$. 它们互为对换关系, 因 $N(3\ 1\ 4\ 2\ 5)=3$, 所以应选择 $k=1, l=5$, 可使该项带负号.

10. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为零, 证明该行列式为零.

证　n 阶行列式共有 n^2 个元素，由题意，当为零的元素多于 n^2-n 个时，不为零的元素则少于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个．从而该行列式每一项 n 个元素的乘积中至少有一个元素为零，且每一项乘积的值均为零，故行列式的值为零．

要点 1-6

n 阶行列式 $D_n=0$ 有很多充分条件，它们通常是：

(1) D_n 中一行(列)元素全为 0，则 $D_n=0$．

(2) D_n 中两行(列)元素成比例，则 $D_n=0$．

(3) D_n 中为零的元素多于 n^2-n 个，则 $D_n=0$．

应注意这些条件均不是 $D_n=0$ 的必要条件．

11．用行列式定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

要点 1-7

这些行列式的共同特点是其中等于零的元素比较多. 用定义计算这样的行列式的方法是, 只考虑其中的非零项

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

在非零的元素中依照 n 个元素取自于不同行、不同列的原则选取.

解　(1) D_n **中非零项仅一项, 即** $a_{1n}a_{2\,n-1}a_{3\,n-2}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}$.

因为
$$N(n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

所以, 由定义及 $a_{1n}=1, a_{2\,n-1}=2, \cdots, a_{n1}=n$, **有**

$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$$

(2) D_n **中非零项为** $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1\,n}a_{n1}$.

因为 $N(2\ 3\ \cdots\ n\ 1)=n-1$ **且** $a_{12}=1, a_{23}=2, \cdots, a_{n1}=n$, **所以**

$$D_n=(-1)^{n-1}n!$$

注: 本题若用行列式性质, 按第一列展开计算, 则有

$$D_n=n(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}n!$$

注意到数 $(n-1)$ **与** $(n+1)$ **的奇偶性一样, 即** $(-1)^{n-1}=(-1)^{n+1}$, **因此用两种方法计算结果是一样的.**

(3) **由该行列式的特点可知, 一般项** $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}a_{5i_5}$ **中, 非零项要具有特点** $i_3\neq 3, 4, 5$; $i_4\neq 3, 4, 5$; $i_5\neq 3, 4, 5$. **因此** i_3, i_4, i_5 **只能在** $\{1, 2\}$ **中取值.**

由行列式的项的元素不能在同一列的特点可知, a_{3i_3}, a_{4i_4}, a_{5i_5} 中必有一个元素为0. 因此

$$D_5 = 0$$

(4) 非零项为 $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$, $N(3\ 2\ 4\ 1) = 4$, 故

$$D = a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} = 1$$

(5) D 中非零项只有 $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 和 $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$. 又

$$N(1\ 2\ 4\ 3) = 1, N(1\ 4\ 2\ 3) = 2$$

所以, 代入元素 a_{ij} 的值, 有

$$D = -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} = -1 + 1 = 0$$

12. 用行列式的性质计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 34215 & 35215 \\ 28092 & 29092 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$　　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

解　(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} \overset{\times(-1)}{=} ab\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & b-a \end{vmatrix} = ab(b-a)$

(2) $$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}^{\times(-1)}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & -1 & -2\end{vmatrix}=0\quad\text{(两行成比例)}$$

(3) $$\begin{vmatrix}34215 & 35215\\28092 & 29092\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}34215 & 34215+1000\\28092 & 28092+1000\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}34215 & 34215\\28092 & 28092\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}34215 & 1000\\28092 & 1000\end{vmatrix}$$
$$=0+1000(34215-28092)$$
$$=6123000$$

(4) $$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1 & 1\\-1 & -1 & 1 & 1\\-1 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & 2 & 2\\0 & 0 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2^3=8$$

(5) **第 i 行乘以(-1)加上第 i+1 行(i=3, 2, 1)得**

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3 & 4\\1 & 3 & 6 & 10\\1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 3\\0 & 1 & 3 & 6\\0 & 1 & 4 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1 & 3\\0 & 0 & 1 & 4\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

(6) $$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 1\\3 & 4 & 1 & 2\\4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10 & 2 & 3 & 4\\10 & 3 & 4 & 1\\10 & 4 & 1 & 2\\10 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 3 & 4 & 1\\1 & 4 & 1 & 2\\1 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}^{\times(-1)}$$

$$=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&-3\\2&-2&-2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\\ \\ \\\end{matrix}$$

$$=10\begin{vmatrix}1&1&-3\\0&-4&4\\0&0&-4\end{vmatrix}=10\times16=160$$

(7) $$\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x+2y&y&x+y\\2x+2y&x+y&x\\2x+2y&x&y\end{vmatrix}$$

$$=(2x+2y)\begin{vmatrix}1&y&x+y\\1&x+y&x\\1&x&y\end{vmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\\\times(-1)\\ \\\end{matrix}$$

$$=(2x+2y)\begin{vmatrix}1&y&x+y\\0&x&-y\\0&-y&y-x\end{vmatrix}=(2x+2y)\begin{vmatrix}x&-y\\-y&y-x\end{vmatrix}$$

$$=(2x+2y)[x(y-x)-y^2]=(2x+2y)(xy-x^2-y^2)$$

$$=-2(x^3+y^3)$$

13. **把下列行列式化为上三角形行列式, 并计算其值:**

(1) $$\begin{vmatrix}-2&2&-4&0\\4&-1&3&5\\3&1&-2&-3\\2&0&5&1\end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix}0&4&5&-1&2\\-5&0&2&0&1\\7&2&0&3&-4\\-3&1&-1&-5&0\\2&-3&0&1&3\end{vmatrix}$$

解　(1) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \times(-1)$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \times(-5)$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -13 & -24 \end{vmatrix} \times 3$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -33 \end{vmatrix} \times 4$$

$$
=2\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -135 \\ 0 & 0 & -1 & -33 \end{vmatrix}
$$

$$
=-2\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -33 \\ 0 & 0 & 0 & -135 \end{vmatrix}=-2\times135=-270
$$

(2)
$$
\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 0 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}
$$

$$
=-\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 7 & -4 \\ -5 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} \times 3 \quad \times(-5) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

$$
=-\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 14 & 15 & 7 & 2 \\ 0 & -19 & -26 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -11 & 4 & -8 \\ 0 & -19 & -26 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \times 5 \quad \times 19 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 14 & 14 & 17 \\ 0 & 0 & 69 & 35 & 85 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(-5) \\ \\ \times(-7) \end{matrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 49 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \times 2 \\ \\ \end{matrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 49 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -75 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=-\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -75 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \times(-10) \end{matrix}
$$

$$
=-\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 799 \end{vmatrix} = -799
$$

14. **设行列式** $|a_{ij}| = m\ (i, j = 1, 2, \cdots, 5)$, **依下列次序对** $|a_{ij}|$ **进行变换后, 求其结果.**

交换第一行与第五行, 再转置, 用 2 乘所有元素, 再用(- 3) 乘以第二列加到第四列, 最后用 4 除以第二行各元素.

解　由题意知, $|a_{ij}|$ **为 5 阶行列式, 依题目所给定次序的变换及行列式性质.**

$$m = |a_{ij}| \xlongequal[\text{转置}]{\text{交换第一、五行}} -m \xlongequal{\text{用2乘所有元素}} 2^5(-m) \xlongequal{(-3)\text{乘第二列加到第四列}}$$

$$2^5(-m) \xlongequal{4\text{除以第二行}} \frac{2^5}{4}(-m) = 2^3(-m) = -8m$$

于是最后结果为 $-8m$.

15. **用行列式性质证明:**

$$(1)\ \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(2)\ \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

$$(4)\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ * & * & b_{11} & b_{12} \\ * & * & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(注: 其中“ * ”为任意数)

证　(1) $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} kb_1 & c_1 & c_1 \\ kb_2 & c_2 & c_2 \\ kb_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+0+0+0=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & c_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$+0+0+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+0+0+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(3) $\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} y & z+x & x+y \\ x & y+z & z+x \\ z & x+y & y+z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z & z+x & x+y \\ y & y+z & z+x \\ x & x+y & y+z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y & z+x & x \\ x & y+z & z \\ z & x+y & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y & z+x & y \\ x & y+z & x \\ z & x+y & z \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} z & z & x+y \\ y & y & z+x \\ x & x & y+z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z & x & x+y \\ y & z & z+x \\ x & y & y+z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y & x & x \\ x & z & z \\ z & y & y \end{vmatrix}+0+0$$

$$+\begin{vmatrix} z & x & x \\ y & z & z \\ x & y & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

(4) $k=2$, 取前 2 行展开, 用定理 1.6(Laplace 定理). 用 N_{ij} 表示在前 2 行中取第 i, j 列后的代数余子式, 则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ * & * & b_{11} & b_{12} \\ * & * & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} N_{13} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} N_{14}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{vmatrix} N_{23} + \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{vmatrix} N_{24} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} N_{34}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

16. **计算行列式**:

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 观察该行列式的结构, 可知它是一个$(n+1)$阶行列式, 记为 D_{n+1}. 提出各行公因式, 再把各列加到第一列上.

$$D_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{(按第一列展开)}$$

$$
= a_1a_2\cdots a_n(-1)^{n+2}(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & & & \\ -1 & 1 & \ddots & & \\ & -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{n+2}(n+1)a_1a_2\cdots a_n \cdot 1
$$

$$
= (-1)^{n}(n+1)a_1a_2\cdots a_n
$$

17. **计算行列式:**

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}
$$

解　这是一个 n 阶行列式, 观察其结构, 把第 1 行加到下面各行上, 则

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n!
$$

18. **计算行列式:**

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = b_1 b_2 \cdots b_n$$

19. **计算行列式:**

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\
a_1-x & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a_1-x & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_1-x & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_{n-1} & 0 \\
a_1-x & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & a_n-a_{n-1} & 0
\end{vmatrix}_{(n+1)\text{阶}}
$$

$$
\xlongequal{\text{按第}n+1\text{ 列展开}}(-1)^{n+2}\begin{vmatrix}
a_1-x & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_1-x & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_1-x & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_{n-1} \\
a_1-x & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & a_n-a_{n-1}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\times(-1) \\
\\
\vdots \\
\\
\\
\end{array}
$$

$$
=(-1)^{n+2}\begin{vmatrix}
a_1-x & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_2-x & x-a_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & a_2-x & a_3-a_2 & \cdots & x-a_{n-1} \\
0 & a_2-x & a_3-a_2 & \cdots & a_n-a_{n-1}
\end{vmatrix}_{n\text{阶}}
$$

$$
\xlongequal{\text{按第一列展开}}(-1)^{n+2}(a_1-x)
$$

$$
\cdot\begin{vmatrix}
a_2-x & x-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\
a_2-x & a_3-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_2-x & a_3-a_2 & a_4-a_3 & \cdots & x-a_{n-1} \\
a_2-x & a_3-a_2 & a_4-a_3 & \cdots & a_n-a_{n-1}
\end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}
$$

$$
\xlongequal{\text{类似步骤}}\cdots=(-1)^{n+2}(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)
$$

$$
=(-1)^{2n+2}(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)
$$

$$
=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)
$$

20. **解下列方程:**

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-2)-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$

(3) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} = 0$

要点 1-8

当行列式中含 x 时, 其值是一个关于 x 的 m 次多项式 $f(x)$, 求解方程即为求多项式 $f(x)$ 的根. 其方法可以直接利用行列式的性质, 观察并求使得 $f(x)=0$ 的值. 对复杂的行列式, 需要先计算行列式, 得出具体的多项式 $f(x)$, 再求根.

应注意到 m 次多项式有 m 个根. 在利用行列式性质求根时, 应先判别行列式的次数, 以免漏掉解.

解　(1) 该行列式中含因子 $(2-x^2)$ 和 $(9-x^2)$ 项将达到最高次数 4, 它们分别是

$$+a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 1\cdot(2-x^2)\cdot 1\cdot(9-x^2) = (2-x^2)(9-x^2)$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} = -2\cdot(2-x^2)\cdot 2\cdot(9-x^2)$$

$$= -4(2-x^2)(9-x^2)$$

由此可知本题行列式的计算结果是一个关于 x 的 4 次多项式

$f(x)$, 由行列式的性质知.

$$2-x^2=1 \quad 第一、二行相等 \quad f(x)=0$$
$$9-x^2=5 \quad 第三、四行相等 \quad f(x)=0$$

由此得该方程组的解为 $\quad x^2=1, x^2=4$

即 $\quad x=\pm 1, \pm 2$

就是该方程组的解.

(2) 本题含 x 的最高次数项是其主对角线上元素构成的乘积项:

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{k=1}^{n-1}(k-x)$$

当 $k-x=1$ 时　行列式两行相等, 其值为 0.

由此, 方程的解即多项式的根为

$$x=k-1, \quad k=1,2,\cdots,n-1$$

即方程的 n 个解分别为

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\cdots,x_{n-2}=n-3,\ x_{n-1}=n-2$$

(3) 本题的行列式不容易像前两题一样, 直接观察 x 取值, 使行列式两行(列)相等, 达到行列式等于零的目的. 因此, 先计算行列式的值, 利用 19 题的结果, 有

$$D(x)=0 \qquad (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)=0$$

故方程组的解为 $\quad x_1=a_1, x_2=a_2, \cdots, x_n=a_n$

21. 求行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 2 和 -2 的代数余子式.

解　由代数余子式的定义知, 本题中 $2=a_{31}, -2=a_{32}$. 因此

2 的代数余子式为 $\quad (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=0$

-2 的代数余子式为 $\quad (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=29$

22. 已知四阶行列式 D 中第三列元素依次为 $-1, 2, 0, 1$, 它们的余子式依次分别为 $5, 3, -7, 4$, 求 $D=$?

解 由题意,将 D 按第三列元素展开计算,有

$$D = (-1)(-1)^{3+1}5 + 2(-1)^{3+2}3 + 0(-1)^{3+3}(-7) + (-1)^{3+4}4$$
$$= -5 - 6 - 4 = -15$$

23. **按第三列展开下列行列式,并计算其值:**

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$

$$= a\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$+ c\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= a - b\times(-1) + c\times 0 - d\times(-1) = a + b + d$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$+\begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&1\\4&1&3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&1\\3&4&2\end{vmatrix}$$

$$=3\times 4-4\times(-44)-36-2\times(-4)=160$$

(3) $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&0&0&0\\a_{41}&a_{42}&0&0&0\\a_{51}&a_{52}&0&0&0\end{vmatrix}$

$$=a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&0&0\\a_{41}&a_{42}&0&0\\a_{51}&a_{52}&0&0\end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{14}&a_{15}\\a_{31}&a_{32}&0&0\\a_{41}&a_{42}&0&0\\a_{51}&a_{52}&0&0\end{vmatrix}$$

$$=a_{13}a_{25}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}a_{31}&a_{32}&0\\a_{41}&a_{42}&0\\a_{51}&a_{52}&0\end{vmatrix}-a_{23}a_{15}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}a_{31}&a_{32}&0\\a_{41}&a_{42}&0\\a_{51}&a_{52}&0\end{vmatrix}$$

$$=0+0=0$$

24. **计算行列式**:

$$\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$$

解 $\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&1&1&1\\0&1-x&1&1\\0&1&1+y&1\\0&1&1&1-y\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-x&0&0\\0&0&y&0\\0&0&0&-y\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}1-x&1&1\\1&1+y&1\\1&1&1-y\end{vmatrix}$$

$$=xy^2+x\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+y&1\\1&1&1-y\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}-x&1&1\\0&1+y&1\\0&1&1-y\end{vmatrix}$$

$$=xy^2+x\begin{vmatrix}1&1&1\\0&y&0\\0&0&-y\end{vmatrix}-x^2\begin{vmatrix}1+y&1\\1&1-y\end{vmatrix}$$

$$=xy^2-xy^2-x^2(1-y^2-1)=x^2y^2$$

25. **计算 n 阶行列式**:

$$\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\y&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}$$

解　**设该行列式为** D_n, **按第一列展开计算, 则有**

$$D_n=x\begin{vmatrix}x&y&\cdots&0&0\\0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&x&y\\0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}_{(n-1)}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix}y&0&\cdots&0&0\\x&y&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&x&y\end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n$$

26. **计算行列式**:

$$\begin{vmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&&x&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&a_1+x\end{vmatrix}$$

提示:从最后一列开始每列乘以 x 加到前一列.

解　设该行列式为 D_n,按第一列展开计算,则有

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$+ (-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n$$

这样就得到一个递推公式　$D_n = xD_{n-1} + a_n$

利用该公式递推,则有

$$\begin{aligned} D_n &= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n \\ &= x^2(xD_{n-3} + a_{n-2}) + a_{n-1}x + a_n \\ &\ \ \vdots \\ &= x^{n-1}D_1 + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\ &= x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \end{aligned}$$

要点 1-9

当行列式为 n 阶行列式 D_n 时,一般它具有结构特点.当行列式中一行(列)只含有少数非零元素时,选择这些行(列)展开,降阶以后的行列式若具有同样的结构则记为 D_{n-1},如此可得到一个关于阶数的递推公式.解此递推公式,往往可求出 D_n.

本题读者可试用教材上提示方法求解.

27. 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

提示: 各列均加于第一列, 提出公因子, 再从第 n- 1 行乘(- 1)加于第 n 行…直到第一行乘(- 1)加于第二行.

解　本行列式特点是每行元素和相等, 为(1+ 2+ …+ n), 故将各列加到第一列上, 并提取第一列的公因子 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, 再用提示的方法, 有

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \times(-1) \\ \times(-1) \\ \times(-1) \\ \\ \times(-1) \end{array}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$
=\frac{n(n+1)}{2}\begin{array}{l}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & -1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\times(-1) \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}
$$

$$
=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)\cdot(-n)^{n-2}
$$

$$
=(-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}(-1)^{n-1}\frac{n^n+n^{n-1}}{2}
$$

$$
=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^n+n^{n-1}}{2}
$$

28. **用克莱姆法则解下列线性方程组:**

(1) $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x+7y=2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 6x_1-4x_2=10 \\ 5x_1+7x_2=29 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5x_1-7x_2=1 \\ x_1-2x_2=0 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 4x_1+5x_2=0 \\ 3x_1-7x_2=0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \\ 2x-5y+4z=4 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31 \\ 5x_1+x_2+2x_3=29 \\ 3x_1-x_2+x_3=10 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} bx - ay + 2ab = 0 \\ -2cy + 3bz - bc = 0 \\ cx + az = 0 \end{cases}$ 其中 $a, b, c \neq 0$

(8) $\begin{cases} x_1 = 0.5x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 + 10 \\ x_2 = 0.4x_1 + 0.5x_3 + 20 \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.1x_2 + 12 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$

(12) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$

要点 1-10

Cramer 法则:

方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

当系数行列式 $D=|a_{ij}|_n\neq 0$ 时, 方程组有惟一解:

$$x_i=\frac{D_i}{D},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

其中 D_i 是将系数行列式 D 中第 i 列换为常数列 $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$ 后所得的行列式.

解　由 Cramer 法则, 在以下各题中, 分别计算系数行列式 D 和行列式 D_i, 则当 $D\neq 0$ 时, $x_i=\frac{D_i}{D}$.

(1) $D=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=-1,\ D_1=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=-3,\ D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1$

故有
$$x=\frac{D_1}{D}=3,\quad y=\frac{D_2}{D}=-1$$

(2) $D=\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=62$

$$D_1=\begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 29 & 7 \end{vmatrix}=186,\quad D_2=\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 29 \end{vmatrix}=124$$

故有
$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2$$

(3) $D=\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & -7\\0 & -2\end{vmatrix}=-2,\quad D_2=\begin{vmatrix}5 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

故有 $$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{3}$$

(4) $$D=\begin{vmatrix}4 & 5\\3 & -7\end{vmatrix}=-43$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & 5\\0 & -7\end{vmatrix}=0,\quad D_2=\begin{vmatrix}4 & 0\\3 & 0\end{vmatrix}=0.$$

故有 $$x_1=x_2=0$$

(5) $$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\5 & -2 & 7\\2 & -5 & 4\end{vmatrix}=63,\quad D_1=\begin{vmatrix}-3 & 1 & -2\\22 & -2 & 7\\4 & -5 & 4\end{vmatrix}=63$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & -3 & -2\\5 & 22 & 7\\2 & 4 & 4\end{vmatrix}=126,\quad D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\5 & -2 & 22\\2 & -5 & 4\end{vmatrix}=189$$

故有 $$x=\frac{D_1}{D}=1,\quad y=\frac{D_2}{D}=2,\quad z=\frac{D_3}{D}=3$$

(6) $$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\5 & 1 & 2\\3 & -1 & 1\end{vmatrix}=-27,\quad D_1=\begin{vmatrix}31 & 2 & 4\\29 & 1 & 2\\10 & -1 & 1\end{vmatrix}=-81$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 31 & 4\\5 & 29 & 2\\3 & 10 & 1\end{vmatrix}=-108,\quad D_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 31\\5 & 1 & 29\\3 & -1 & 10\end{vmatrix}=-135$$

故有 $$x_1=3,\quad x_2=4,\quad x_3=5$$

(7) **将方程组表示成标准形式**:

$$\begin{cases}bx-ay=-2ab\\-2cy+3bz=bc\\cx+az=0\end{cases}$$

则 $$D=\begin{vmatrix}b & -a & 0\\0 & -2c & 3b\\c & 0 & a\end{vmatrix}=b\begin{vmatrix}-2c & 3b\\0 & a\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}-a & 0\\-2c & 3b\end{vmatrix}=-5abc$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-2ab & -a & 0\\ bc & -2c & 3b\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}=5a^2bc$$

$$D_2=\begin{vmatrix}b & -2ab & 0\\ 0 & bc & 3b\\ c & 0 & a\end{vmatrix}=-5ab^2c$$

$$D_3=\begin{vmatrix}b & -a & -2ab\\ 0 & -2c & bc\\ c & 0 & 0\end{vmatrix}=-5abc^2$$

故有　$x=\dfrac{D_1}{D}=-a,\quad y=\dfrac{D_2}{D}=b,\quad z=\dfrac{D_3}{D}=c$

(8) **将方程表示成标准形式**, **且在各方程两边同乘** 10, **化为整数系数**, **有**

$$\begin{aligned}5x_1-3x_2-4x_3&=100\\ -4x_1+10x_2-5x_3&=200\\ -2x_1-x_2+10x_3&=120\end{aligned}$$

$$D=\begin{vmatrix}5 & -3 & -4\\ -4 & 10 & -5\\ -2 & -1 & 10\end{vmatrix}=229$$

$$D_1=\begin{vmatrix}100 & -3 & -4\\ 200 & 10 & -5\\ 120 & -1 & 10\end{vmatrix}=22900$$

$$D_2=\begin{vmatrix}5 & 100 & -4\\ -4 & 200 & -5\\ -2 & 120 & 10\end{vmatrix}=18320$$

$$D_3=\begin{vmatrix}5 & -3 & 100\\ -4 & 10 & 200\\ -2 & -1 & 120\end{vmatrix}=9160$$

故有　$x_1=\dfrac{D_1}{D}=100,\quad x_2=\dfrac{D_2}{D}=80,\quad x_3=\dfrac{D_3}{D}=40$

(9) $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27$

$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81$

$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108$

$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27$

$D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27$

故有　　$x_1=3,\quad x_2=-4,\quad x_3=-1,\quad x_4=1$

(10) $D=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}=-28$

$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}=-18$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&4&-1&1\\4&6&-1&2\\8&12&-3&4\\3&6&-2&-2\end{vmatrix}=-14$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&2&4&1\\4&3&6&2\\8&3&12&4\\3&3&6&-2\end{vmatrix}=42$$

$$D_4=\begin{vmatrix}2&2&-1&4\\4&3&-1&6\\8&3&-3&12\\3&3&-2&6\end{vmatrix}=-6$$

故有 $x_1=\dfrac{9}{14},\quad x_2=\dfrac{1}{2},\quad x_3=-\dfrac{3}{2},\quad x_4=\dfrac{3}{14}.$

(11) $$D=\begin{vmatrix}2&3&11&5\\1&1&5&2\\2&1&3&4\\1&1&3&4\end{vmatrix}=10$$

$$D_1=\begin{vmatrix}2&3&11&5\\1&1&5&2\\-3&1&3&4\\-3&1&3&4\end{vmatrix}=0$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&2&11&5\\1&1&5&2\\2&-3&3&4\\1&-3&3&4\end{vmatrix}=8$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&3&2&5\\1&1&1&2\\2&1&-3&4\\1&1&-3&4\end{vmatrix}=6$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 3 & 11 & 2\\1 & 1 & 5 & 1\\2 & 1 & 3 & -3\\1 & 1 & 3 & -3\end{vmatrix}=-14$$

故有 $x_1=0,\quad x_2=\frac{4}{5},\quad x_3=\frac{3}{5},\quad x_4=-\frac{7}{5}$

(12) $$D=\begin{vmatrix}2 & 3 & 11 & 5\\1 & 1 & 5 & 2\\2 & 1 & 3 & 4\\1 & 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=10$$

$$D_1=\begin{vmatrix}6 & 3 & 11 & 5\\2 & 1 & 5 & 2\\2 & 1 & 3 & 4\\2 & 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=0$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 6 & 11 & 5\\1 & 2 & 5 & 2\\2 & 2 & 3 & 4\\1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=20$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & 6 & 5\\1 & 1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2 & 4\\1 & 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=0$$

$$D_4=\begin{vmatrix}2 & 3 & 11 & 6\\1 & 1 & 5 & 2\\2 & 1 & 3 & 2\\1 & 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=0$$

故有 $x_1=0,\quad x_2=2,\quad x_3=x_4=0$

(13) $$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1\\1&2&3&0&0\\0&1&2&3&0\\0&0&1&2&3\end{vmatrix}=16$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0&1&1&1&0\\0&1&1&1&1\\2&2&3&0&0\\-2&1&2&3&0\\2&0&1&2&3\end{vmatrix}=16$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0&1&1&0\\0&0&1&1&1\\1&2&3&0&0\\0&-2&2&3&0\\0&2&1&2&3\end{vmatrix}=-16$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&0&1&1\\1&2&2&0&0\\0&1&-2&3&0\\0&0&2&2&3\end{vmatrix}=16$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1\\1&2&3&2&0\\0&1&2&-2&0\\0&0&1&2&3\end{vmatrix}=-16$$

$$D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&1&1&0\\1&2&3&0&2\\0&1&2&3&-2\\0&0&1&2&2\end{vmatrix}=16$$

故有 $x_1=1,\quad x_2=-1,\quad x_3=1,\quad x_4=-1,\quad x_5=1$

29. **计算下列方程组的系数行列式,并验证所给的数是它的解:**

(1) $\begin{cases}2x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0\\3x_1-x_2+11x_3-13x_4=0\\4x_1+5x_2-7x_3-2x_4=0\\13x_1-25x_2+x_3+11x_4=0\end{cases}$

$x_1=x_2=x_3=x_4=c$ (c **为任意常数**)

(2) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-x_4=3\\3x_1+2x_2+x_3+x_4=5\\5x_1+5x_2+2x_3=10\\2x_1+3x_2+x_3-x_4=5\end{cases}$

$x_1=1-c,\ x_2=1+c,\ x_3=0,\ x_4=c$ (c **为任意常数**)

解 (1) $D=\begin{vmatrix}2&-3&4&-3\\3&-1&11&-13\\4&5&-7&-2\\13&-25&1&11\end{vmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{各列加到第一列}}\begin{vmatrix}0&-3&4&-3\\0&-1&11&-13\\0&5&-7&-2\\0&-25&1&11\end{vmatrix}=0$$

将 $x_1=x_2=x_3=x_4=c$ **代入各方程,易验证均满足方程.所以** $x_1=x_2=x_3=x_4=c$ **是方程组的解.**

$$(2)\ D=\begin{vmatrix}1&2&3&-1\\3&2&1&1\\5&5&2&0\\2&3&1&-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&-1\\4&4&4&0\\5&5&2&0\\3&5&4&-2\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&1&1\\5&5&2\\1&1&-2\end{vmatrix}=0$$

将 $x_1=1-c, x_2=1+c, x_3=0, x_4=c$ 代入方程组, 各方程均满足, 故它们是原方程组的解.

30. 变量 x_1, x_2, x_3, x_4 与变量 y_1, y_2, y_3, y_4 有下面的线性关系:

$$\begin{aligned}x_1&=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3+a_{14}y_4\\x_2&=a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3+a_{24}y_4\\x_3&=a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3+a_{34}y_4\\x_4&=a_{41}y_1+a_{42}y_2+a_{43}y_3+a_{44}y_4\end{aligned}$$

已知其系数行列式不等于 0, 将 y_1, y_2, y_3, y_4 用 x_1, x_2, x_3, x_4 表示.

解　将线性关系看做一个以 y_i 为变元, x_i 为常数项的线性方程组, 则系数行列式 $D=|a_{ij}|_4$.

$$D_1=\begin{vmatrix}x_1&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\x_2&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\x_3&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\x_4&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}\ \text{按第一列展开}\ \sum_{t=1}^{4}x_tA_{t1}$$

其中 A_{ij} 是行列式 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式. 同理有

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&x_1&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&x_2&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&x_3&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&x_4&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=\sum_{t=1}^{4}x_tA_{t2}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & x_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & x_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & x_4 & a_{44} \end{vmatrix}=\sum_{t=1}^{4} x_t A_{t3}$$

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & x_4 \end{vmatrix}=\sum_{t=1}^{4} x_t A_{t4}$$

$D\neq 0$, 由 Cramer 法则, 有

$$y_j=\frac{D_j}{D}=\frac{\sum_{t=1}^{4} x_t A_{tj}}{D} \quad (j=1,2,3,4)$$

31. 判断齐次线性方程组

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-x_3&=0 \\ x_1-2x_2+4x_3&=0 \\ 5x_1+8x_2-2x_3&=0 \end{aligned}$$

是否仅有零解.

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 8 & -2 \end{vmatrix}=-30\neq 0$, 由 Cramer 法则, 该齐次线性方程组解惟一, 又该齐次方程组有零解, 故方程组仅有零解.

32. 如果下列齐次线性方程组有非零解, k 应取什么值?

$$\begin{aligned} kx+y+z&=0 \\ x+ky-z&=0 \\ 2x-y+z&=0 \end{aligned}$$

解 该方程组有非零解时, 必有

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(k+1)(k-4)=0$$

因此 k 取值为 $k=-1$ 或者 $k=4$.

33. k 取什么值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx+y-z=0 \\ x+ky-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

仅有零解.

解　若方程组仅有零解, 则由 Cramer 法则有

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (k+2)(k-1) \neq 0$$

因此 k 取值为 $k\neq -2$ 而且 $k\neq 1$.

(B)

1. 下列(　　)是奇排列.

(a) 4321　(b) 4123　(c) 1324　(d) 2341

解　选(b),(c),(d).

(a) $N(4\ 3\ 2\ 1)=6$, 是偶排列.

(b) $(4\ 1\ 2\ 3)$ 是由(a)中排列对换 1 与 3 所得, 故为奇排列.

(c) $N(1\ 3\ 2\ 4)=1$, 是奇排列.

(d) $(2\ 3\ 4\ 1)$ 是(c)中排列先对换 1 与 2, 再对换 1 与 4 所得, 故也是奇排列.

从而奇排列为(b),(c),(d).

2. 若 $(-1)^{N(1k4l5)+N(12345)}a_{11}a_{k2}a_{43}a_{l4}a_{55}$ 是五阶行列式 $|a_{ij}|$ 的一项, 则 k,l 之值及该项符号为(　　).

(a) $k=2, l=3$, 符号为正

(b) $k=2, l=3$, 符号为负

(c) $k=3, l=2$, 符号为正

(d) $k=3, l=2$, 符号为负

解　选(b),(c).

因为(1 2 3 4 5)是偶排列,故该项符号由N(1 k 4 l 5)确定.

k=2, l=3时, N(1 2 4 3 5)=1,为奇排列.(a)正号错,(b)对.

k=3, l=2时, N(1 k 4 l 5)=N(1 3 4 2 5)=2.(c)符号为正对,(d)不对.

3. $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$的充分必要条件是(　　).

(a) $k\neq -1$　　(b) $k\neq 3$

(c) $k\neq -1$且$k\neq 3$　　(d) $k\neq -1$或$k\neq 3$

解　选(c).

因为$\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} = (k-1)^2-4=(k-3)(k+1)\neq 0$

$k\neq 3$而且$k\neq -1$.

4. $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$的充分条件是(　　).

(a) $k=2$　　(b) $k=-2$　　(c) $k=0$　　(d) $k=3$

解　选(b),(d).

因为$\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (k+2)(k-3)=0$的充分条件是$k=-2$或者$k=3$.

5. 如果
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M\neq 0$$
$$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \end{vmatrix}$$
那么$D_1=$(　　).

(a) $2M$　　(b) $-2M$　　(c) $8M$　　(d) $-8M$

解　选(d).

因为由行列式性质,得

$$D_1=-2^3D=-8M$$

故(d)是正确答案.

6. 如果
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$$
$$D_1=\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
那么 $D_1=$ (　　).

(a) 8　　(b) -12　　(c) 24　　(d) -24

解　选(b).

因为
$$D_1=4\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} a_{11} & -3a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -3a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=0+4\times(-3)D=-12$$
故正确答案为(b).

7. 下列 $n(n>2)$ 阶行列式的值必为零的有(　　).

(a) 行列式主对角线上的元素全为零

(b) 三角形行列式主对角线上有一个元素为零

(c) 行列式零元素的个数多于 n 个

(d) 行列式非零元素的个数小于 n 个

解　选(b),(d).

注意该题要求选择的是 n 阶行列式值为零的充分条件. 由三角形行列式求值公式,(b)的行列式值为0,由定义知,(d)的行列式值为0. 故正确答案为(b),(d).

8. 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$，则下列(　　)是方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + b_2 = 0 \end{cases}$ 的解.

(a) $x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

(b) $x_1 = -\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

(c) $x_1 = \begin{vmatrix} -b_1 & -a_{12} \\ -b_2 & -a_{22} \end{vmatrix}$, $x_2 = \begin{vmatrix} -a_{11} & -b_1 \\ -a_{21} & -b_2 \end{vmatrix}$

(d) $x_1 = -\begin{vmatrix} -b_1 & -a_{12} \\ -b_2 & -a_{22} \end{vmatrix}$, $x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & -b_1 \\ a_{21} & -b_2 \end{vmatrix}$

解　选(b),(d).

该方程组的标准形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 = -b_1 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2 = -b_2 \end{cases}$$

系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -1$$

由 Cramer 法则有

$$x_i = \frac{D_i}{D} = -D_i \quad (i = 1, 2)$$

从而

$$x_1 = -\begin{vmatrix} -b_1 & -a_{12} \\ -b_2 & -a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & -b_1 \\ a_{21} & -b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

由行列式性质知，(b)，(d)中给出的是解.

9. 如果 $\begin{cases} 3x + ky - z = 0 \\ 4y + z = 0 \\ kx - 5y - z = 0 \end{cases}$ 有非零解，则(　　).

(a) $k=0$　　(b) $k=1$　　(c) $k=-1$　　(d) $k=-3$

解　选(c),(d).

因为方程组有非零解,则系数行列式 $D=0$. **又**

$$D=\begin{vmatrix}3 & k & -1\\0 & 4 & 1\\k & -5 & -1\end{vmatrix}=-(k+1)(k+3)$$

所以有 $k=-1$ **或** $k=-3$, **从而正确答案为**(c)**和**(d).

10. **当(　　)时** $\begin{cases}kx+z=0\\2x+ky+z=0\\kx-2y+z=0\end{cases}$ **仅有零解.**

(a) $k=0$　　(b) $k=-1$　　(c) $k=2$　　(d) $k=-2$

解　选(a),(b),(c).

因为齐次方程组仅有零解的充要条件为 $D\neq 0$. **又**

$$D=\begin{vmatrix}k & 0 & 1\\2 & k & 1\\k & -2 & 1\end{vmatrix}=2k-4=2(k-2)\neq 0 \qquad k\neq 2$$

故正确答案为(a),(b),(d).

自 测 试 题

1. **判断题**

(1) **行列式的各列元素之和为** 0. **则行列式的值为** 0.

(2) **上(下)三角形行列式等于零的充要条件是主对角线上有一个元素为零.**

(3) $$\begin{vmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}$$

(4) $$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & 0\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & 1\end{vmatrix}$$

(5) 若 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 5 & -2\\ 3 & 6 & 7 & 4\end{vmatrix}$, 则元素 a_{ij} 代数余子式 A_{ij} 满足条件 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=0$.

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\ x & 1 & 0 & 0\\ y & 0 & 1 & 0\\ z & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

3. 解方程 $\begin{vmatrix}1+x & 2 & 3\\ 1 & x^2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$

4. 求 k 值, 使齐次方程组

$$\begin{cases}kx+y+z=0\\ x+ky-z=0\\ 2x-y+z=0\end{cases}$$

有非零解.

自测试题解答

1. (1) 正确. 各行加到第一行, 则行列式有一行为 0, 值为 0.

(2) 正确. 三角形行列式值为 $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$, 所以 $a_{ii}=0$, 值为 0.

(3) 错误.

$$\begin{vmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & b_{12}\\ a_{21} & b_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11} & a_{12}\\ b_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

(4) 正确.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}+1 \end{vmatrix}$$

(5) **正确.**

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}+a_{24}A_{14}=0$$

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x^2-y^2-z^2 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\times(-x)\quad \times(-y)\quad \times(-z)$$

$$=1-x^2-y^2-z^2$$

3. **方程** $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & x^2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$ **中关于** x **的最高次幂含在其主对角线元素的乘积**$(1+x)x^2$ **中, 因此行列式是三次多项式, 方程有三个解, 由行列式性质知,** $x=0, x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2}$ **时, 行列式为** 0. **因此, 方程的解是**

$$x_1=0,\quad x_2=\sqrt{2},\quad x_3=-\sqrt{2}.$$

4. **齐次方程组总是有解** $x=0, y=0, z=0$. **要方程组有非零解, 等价于说方程组解不惟一, 由** Cramer **法则知, 系数行列式**

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (k-4)(k+1)=0$$

即 $k=-1$ **或** $k=4$ **时, 方程组有非零解.**

第二章　矩　　阵

习题解析

(A)

要点 2-1

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$, **则矩阵的线性运算为**

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$$

1. **计算**:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+6\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+8\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

解　(1) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1-2 & 6+0 & 4+1 \\ -4+2 & 2-3 & 8+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-2 & 2+2 \\ 0 & 1-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+6\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+8\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

2. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&1\\1&2&3&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\-2&1&-2&1\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}$$

求: (1) $3A-B$

(2) $2A+3B$

(3) 若 X 满足 $A+X=B$, 求 X

(4) 若 Y 满足 $(2A-Y)+2(B-Y)=0$, 求 Y

解　(1) $3A-B$

$$=\begin{pmatrix}3\times1-4 & 3\times2-3 & 3\times1-2 & 3\times2-1\\ 3\times2+2 & 3\times1-1 & 3\times2+2 & 3\times1-1\\ 3\times1-0 & 3\times2+1 & 3\times3-0 & 3\times4+1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&3&1&5\\8&2&8&2\\3&7&9&13\end{pmatrix}$$

(2) $2A+3B$

$$=\begin{pmatrix}2\times1+3\times4 & 2\times2+3\times3 & 2\times1+3\times2 & 2\times2+3\times1\\ 2\times2+3\times(-2) & 2\times1+3\times1 & 2\times2-3\times2 & 2\times1+3\times1\\ 2\times1+3\times0 & 2\times2-3\times1 & 2\times3+3\times0 & 2\times4-3\times1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}14&13&8&7\\-2&5&-2&5\\2&1&6&5\end{pmatrix}$$

(3) $A+X=B$, 则 $X=B-A$. 故

$$X=\begin{pmatrix}4-1 & 3-2 & 2-1 & 1-2\\ -2-2 & 1-1 & -2-2 & 1-1\\ 0-1 & -1-2 & 0-3 & -1-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&1&1&-1\\-4&0&-4&0\\-1&-3&-3&-5\end{pmatrix}$$

(4) 由 $(2A-Y)+2(B-Y)=0$, 有 $2A-Y+2B-2Y=0$, 故

$$Y=\frac{2}{3}(A+B)=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}5&5&3&3\\0&2&0&2\\1&1&3&3\end{pmatrix}$$

3. **设**

$$A=\begin{pmatrix}x&0\\7&y\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}u&v\\y&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&-4\\x&v\end{pmatrix}$$

且 $A+2B-C=0$, **求** x, y, u, v **的值**.

解 **由题意知** $A+2B-C=0$ **等价于**

$$\begin{pmatrix}x+2u-3&2v+4\\7+2y-x&y+2\times2-v\end{pmatrix}=0\quad\text{即}\quad\begin{cases}x+2u-3=0\\2v+4=0\\7+2y-x=0\\y+4-v=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=-5\\y=-6\\u=4\\v=-2\end{cases}$$

4. **设矩阵** A **为三阶矩阵, 若已知** $|A|=m$, **求** $|-mA|$

解 **由行列式性质知**, A **为三阶矩阵时**

$$|-mA|=(-m)^3|A|=-m^3\cdot m=-m^4$$

5. **计算**

(1) $\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2&-4\\-1&-2&-4\\1&2&4\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\3&0&-1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1, 2, 3)$

(5) $\begin{pmatrix}0&0&1&6\\0&1&0&1\\1&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\4&-6\\-5&4\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}3&1&2&-1\\0&3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&5\\0&2&0\\1&0&1\\0&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\1&5\\0&2\end{pmatrix}$

解 (1) $\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times3-2\times2&3\times4-2\times5\\5\times3-4\times2&5\times4-4\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\7&0\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2&-4\\-1&-2&-4\\1&2&4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1-2+3&-2-4+6&-4-8+12\\-2-4+6&-4-8+12&-8-16+24\\-3-6+9&-6-12+18&-12-24+36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\3&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+9&2+2&2-3\\-2+6&-4+1&1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&4&-1\\4&-3&-1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,2,3)=\begin{pmatrix}1\times1&1\times2&1\times3\\2\times1&2\times2&2\times3\\3\times1&3\times2&3\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&2&-1\\1&4&-6\\3&-5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5&4\\1&4&-6\\6&2&-1\end{pmatrix}$

(6)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 & 17 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 29 \\ 5 & 32 \end{pmatrix}$$

要点 2-2

矩阵乘法不同于数的乘法，其主要差异在于：

(1) **设** $A_{m\times k}$, $B_{k\times n}$, **由** $AB=0$ **一般得不出** $A=0$ **或** $B=0$.

(2) $AX=AY$ **一般得不出** $X=Y$.

(3) **设** A, B **为** n **阶方阵，一般有** $AB\neq BA$.

要点 2-3

设 $R_{m\times m}$, $C_{n\times n}$ **均为初等矩阵，** A **为** n **阶方阵，则**

(1) RA **对** A **施行一次初等行变换，该行变换与从单位矩阵得到** R **的行变换同类型.**

(2) AC **对** A **施行一次初等列变换，该列变换与从单位矩阵得到** C **的列变换同类型.**

6. **设**
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

计算

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A$

(3) $A\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}A$

(5) $A\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&k&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$　　(6) $\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A$

解　注意到本题中左乘或右乘A的矩阵均为单位矩阵或初等矩阵. 从要点2-3可知, 本题矩阵的乘法可以不直接做乘法计算, 而是观察初等矩阵, 将该初等变换做在A的行或列上, 从而得到结果.

(1) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A=A$

(2) **因为** $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=I_3(1,3)$

所以 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\end{pmatrix}$

(3) $A\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=A$

(4) **因为** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=I_3(2,3)$

所以 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\end{pmatrix}$

(5) $A\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&k&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&ka_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&ka_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&ka_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\la_{11}+a_{21}&la_{12}+a_{22}&la_{13}+a_{23}&la_{14}+a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$

7. **用矩阵乘法求连续施行下列线性变换的结果:**

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3\\x_2=y_1+3y_2\\x_3=4y_2-y_3\end{cases}\qquad\begin{cases}y_1=z_1+z_3\\y_2=2z_2-5z_3\\y_3=3z_1+7z_2\end{cases}$$

解　由题意,有

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&3&0\\0&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-5\\3&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&3&0\\0&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-5\\3&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7&12&6\\1&6&-14\\-3&1&-20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

将下列 8 **至** 10 **题用矩阵表示,并用矩阵的运算求出各题要求的结果.**

8. **某厂生产** 5 **种产品,** 1～3 **月份的生产数量及产品的单位价格如表** 2-1:

表 2-1

产量＼产品 月份	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
1	50	30	25	10	5
2	30	60	25	20	10
3	50	60	0	25	5
单位价格(单位: 万元)	0.95	1.2	2.35	3	5.2

(1) **作矩阵**$A=(a_{ij})_{3\times 5}$, **使**a_{ij}**表示** i **月份生产** j **种产品的数量**; $B=(b_j)_{5\times 1}$, **使** b_j **表示** j **种产品的单位价格**; **计算该厂各月份的总产值**.

(2) **作矩阵** $A^T=(a_{ji})_{5\times 3}$, **使** a_{ji}**表示** i **月份生产** j **种产品的数量**; $B^T=(b_j)_{1\times 5}$, **使** b_j **表示** j **种产品的单位价格**; **计算该厂各月份的总产值**.

解　(1) **由题意**

$$A=\begin{pmatrix} 50 & 30 & 25 & 10 & 5 \\ 30 & 60 & 25 & 20 & 10 \\ 50 & 60 & 0 & 25 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.2 \\ 2.35 \\ 3 \\ 5.2 \end{pmatrix}$$

设总产值为 $C=(c_i)_{3\times 1}$, **其中** c_i **表示第** i **月份的总产值**($i=1, 2, 3$). **于是**

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} 198.25 \\ 271.25 \\ 220.5 \end{pmatrix}$$

(2) **设总产值为** $D=(d_1, d_2, d_3)$, d_i **表示第** i **月份的产值**. **由矩阵运算**, $D=C^T$, **故**

$$D = B^T A^T$$

$$= (0.95, 1.2, 2.35, 3, 5.2)\begin{pmatrix} 50 & 30 & 50 \\ 30 & 60 & 60 \\ 25 & 25 & 0 \\ 10 & 20 & 25 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= (198.25, 271.25, 220.5)$$

9. **某 2 种合金均含有某 3 种金属, 其成份如表 2-2:**

表 2-2

含量百分比 金属 / 合金	A	B	C
甲	0.8	0.1	0.1
乙	0.4	0.3	0.3

现有甲种合金 30 吨, 乙种合金 20 吨, 求 3 种金属的数量.

解　设 $A = (a_{ij})_{2\times 3}$, **其中** a_{ij} **表示第** i **种合金中第** j **种金属含量的百分比**, $B = (b_i)_{2\times 1}$, **其中** b_i **表示第** i **种合金的数量. 令 3 种金属的数量表示为**(c_1, c_2, c_3), **则**

$$(c_1, c_2, c_3) = BA = (30, 20)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$= (32, 9, 9)$$

即第 1 种金属数量 32 吨, 第 2 种和第 3 种各 9 吨.

10. **Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ4 个工厂均能生产甲、乙、丙 3 种产品, 其单位成本如表2-3所示. 现要生产产品甲 600 件, 产品乙 500 件, 产品丙 200 件, 问由哪个工厂生产成本最低.**

解　设成本矩阵$A = (a_{ij})_{4\times 3}$, **用**a_{ij}**表示工厂**i**生产产品**j **的生产单位成本**, $B = (600, 500, 200)^T$ **表示总产量**, $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$**表示 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ4 个工厂的生产产量** B **的成本. 则**$C = AB$, **即**

表 2-3

单位成本 产品 / 工厂	甲	乙	丙
Ⅰ	3	5	6
Ⅱ	2	4	8
Ⅲ	4	5	5
Ⅳ	4	3	7

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5500 \\ 4800 \\ 5900 \\ 5300 \end{pmatrix}$$

C 中 c_2 最小, 故工厂 Ⅱ 成本最低.

11. 解下列矩阵方程, 求出未知矩阵 X.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

解　(1) 设 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, 则由

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_{11} + 5x_{21} & 2x_{12} + 5x_{22} \\ x_{11} + 3x_{21} & x_{12} + 3x_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

得
$$\begin{cases} 2x_{11} + 5x_{21} = 4 \\ 2x_{12} + 5x_{22} = -6 \\ x_{11} + 3x_{21} = 2 \\ x_{12} + 3x_{22} = 1 \end{cases}$$

由 Cramer 法则知,系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$x_{11} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad x_{12} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -23$$

$$x_{21} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad x_{22} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

从而
$$X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(2) 设 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$, 由 $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

得
$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{11} + x_{12} - x_{13} = 1 \\ -x_{11} + x_{13} = 3 \\ x_{21} + 2x_{22} + x_{23} = 4 \\ x_{21} + x_{22} - x_{23} = 3 \\ -x_{31} + x_{13} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{31}+2x_{32}+x_{33}=1 \\ x_{31}+x_{32}-x_{13}=2 \\ -x_{31}+x_{33}=5 \end{cases}$$

对上述三个线性方程组,分别用 Cramer 法则,得

$$x_{11}=-5,\quad x_{12}=4,\quad x_{13}=-2$$
$$x_{21}=-4,\quad x_{22}=5,\quad x_{23}=-2$$
$$x_{31}=-9,\quad x_{32}=7,\quad x_{33}=-4$$

从而
$$X=\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -9 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

(3) 由题意知,X 是 3×1 矩阵,设 $X=(x_1, x_2, x_3)^T$,则由

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$
,使用 Cramer 法则,系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=6$$

$$x_1=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad x_2=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}=3$$

$$x_3=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}=2$$

从而
$$X=(1, 3, 2)^T$$

12. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,求所有与 A 可交换的矩阵.

解　因为 $A=I+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,又单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与任何矩阵乘法可交换,设矩阵 C 满足 $CA=AC$,则

$$CA = AC \quad C + C\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = C + \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}C$$

设 $C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$, 则 C 应满足与 $\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ 可交换, 即

$$C\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}C$$

亦即

$$\begin{pmatrix}0 & c_{11}\\0 & c_{21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{21} & c_{22}\\0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 C 的元素应满足 $c_{21}=0$, $c_{11}=c_{22}$, 从而所有与 A 可交换的矩阵具有形式 $C=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\0 & c_1\end{pmatrix}$, c_1, c_2 为任意数.

要点 2-4

对方阵A, B, 如果有AB= BA, 则称A 与B 乘法可交换. 矩阵乘法一般是不可交换, 典型的可交换的矩阵是

(1) 单位矩阵 I 和任何方阵乘法可交换, 即 $AI = IA = A$.

(2) 数量矩阵(kI)与任何方阵乘法可交换, $kIA = AkI$.

(3) A 可逆时, 有 $AA^{-1} = A^{-1}A$.

(4) 对方阵 A, 有 $A^* A = AA^*$.

13. 用矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$, 验证 $(AB)^T = B^T A^T$.

解　$(AB)^T = \left[\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix}3 & 1\\6 & 3\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}3 & 6\\1 & 3\end{pmatrix}$

$B^T A^T = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 6\\1 & 3\end{pmatrix}$

即

$$(AB)^T = B^T A^T$$

14. 计算下列矩阵(其中 n 为正整数):

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$　　(6) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n$

(7) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}^5$

解 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & -30 \\ 45 & 10 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^2$$

$$= I_3 + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= I_3 + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) **设** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, **则** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$

从而

$$A^3 = A^2A = A^2 = A, \cdots, A^n = A$$

故
$$A^n = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

(4) $$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n = \left(I_2 + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)^n = I_2^n + nI_2 \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 0$$
$$= I_2 + n\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(5) 先试计算
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$
可有结果 $A^2 = 2A$. 从而有 $A^3 = 2^2A$, $A^4 = 2^3A$, 由数学归纳法知, 对任意自然数 n, $A^n = 2^{n-1}A$. 因此
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1}\\ 2^{n-1} & 2^{n-1}\end{pmatrix}$$

(6) 本题 A 为对角矩阵, 因此
$$\begin{pmatrix}a & & \\ & b & \\ & & c\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}a^n & & \\ & b^n & \\ & & c^n\end{pmatrix}$$

(7) 设 $A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ a & 0 & 0\\ b & c & 0\end{pmatrix}$, 则 $A^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ ac & 0 & 0\end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

从而
$$A^5 = 0 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

要点 2-5

对一个 k 阶方阵 A, 可以计算 n 次幂 A^n. 一般地, 当 n 比较大时, 求 A^n 是很困难的计算. 在 A^n 计算中, 能简化的是如下几种情形.

(1) A 为对角矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_k \end{pmatrix},\text{则 } A^n=\begin{pmatrix} a_1^n & & & \\ & a_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_k^n \end{pmatrix}$$

(2) 若有结果 $A^2=\lambda A$, 则 $A^n=\lambda^{n-1}A$

(3) $U=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}_{k\times k}$

$$U^n=\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \overset{n+1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & & 1 \\ & & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}, & n<k \\ \mathbf{0}, & n\geqslant k \end{cases}$$

(4) 当 A 可表示为 $A=kI+U$ 时, 由二项式公式

$$A^n=(kI+U)^n=k^nI+nk^{n-1}U+\frac{n(n-1)}{2!}k^{n-2}U^2+\cdots$$

利用(3)有

$$A^n=\begin{pmatrix} k^n & nk^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2!}k^{n-2} & \cdots \\ & k^n & nk^{n-1} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & nk^{n-1} \\ & & & & k^n \end{pmatrix}$$

(5) **如果** A **有如下结构**

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

则 $A^n = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^n \end{pmatrix}P^{-1}$

在第四章我们将学习将方阵A **表示成为上述形式的有关理论**.

15. **已知** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

求: (1) $(A+B)(A-B)$

(2) A^2-B^2

比较(1) **与**(2) **的结果**, **可得出什么结论**?

解　(1) $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} -9 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

(2) $A^2-B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

比较(1) **与**(2), **可以得到结论**: $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.

要点 2-6

由于矩阵乘法没有交换律. 即 $AB \neq BA$. 因此代数中许多公式在矩阵的情形不再成立. 例如

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$$

同时应注意到的是, 一旦两个矩阵乘法可交换, 则代数运算公式都成立. 例如, 在题 14(4) 中, 单位矩阵与任何矩阵乘法可交换, 因此对 $(I+B)^n$ 可使用代数中的二项式公式.

16. 已知 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶矩阵, 写出:

(1) A^2 的第 k 行第 l 列的元素;

(2) AA^T 的第 k 行第 l 列的元素;

(3) A^TA 的第 k 行第 l 列的元素.

解　设 $(M)_{ij}$ 表示矩阵 M 的第 i 行第 j 列的元素, 则由矩阵乘法定义

(1) $(A^2)_{kl} = \sum\limits_{t=1}^{n} a_{kt}a_{tl}$

(2) $(AA^T)_{kl} = \sum\limits_{t=1}^{n} (A)_{kt}(A^T)_{tl} = \sum\limits_{t=1}^{n} a_{kt}a_{lt}$

(3) $(A^TA)_{kl} = \sum\limits_{t=1}^{n} (A^T)_{kt} \cdot (A)_{tl} = \sum\limits_{t=1}^{n} a_{tk}a_{tl}$

17. 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, A 为 n 阶矩阵, I 为 n 阶单位矩阵. 定义: 　$f(A) = aA^2 + bA + cI$

(1) 已知 $f(x) = x^2 - x - 1$, 　$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $f(A)$.

(2) 已知 $f(x) = x^2 - 5x + 3$, 　$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $f(A)$.

解　(1) $f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 3 & 5 \\ 14 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 11 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) $f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18. **设**A, B **均为**n **阶方阵,且**$A = \frac{1}{2}(B + I)$,**证明**:$A^2 = A$,**当且仅当**$B^2 = I$.

证　因为单位矩阵I **和矩阵**B **乘法可交换,故有**

$$A^2 = \left(\frac{1}{2}(B + I)\right)^2 = \frac{1}{4}(B^2 + 2B + I)$$

从而　$A^2 = A \qquad \frac{1}{4}(B^2 + 2B + I) = \frac{1}{2}(B + I)$

$$B^2 - I = 0$$

$$B^2 = I$$

题得证.

19. **设** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ & b_{22} & b_{23} \\ & & b_{33} \end{pmatrix}$,**验证** aA, $A + B$, AB **仍为同阶同结构上三角形矩阵**.

证　$aA = \begin{pmatrix} aa_{11} & aa_{12} & aa_{13} \\ & aa_{22} & aa_{23} \\ & & aa_{33} \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ & & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ & b_{22} & b_{23} \\ & & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ & & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

要点 2-7

两个上(下)三角形矩阵相加,相乘后仍是上(下)三角形矩阵. 上(下)三角形矩阵可逆的充要条件是其主对角线上的元素全不为零,而且其逆矩阵也是上(下)三角形矩阵.

20. **证明:对任意** $m\times n$ **矩阵** A, A^TA **及** AA^T **都是对称矩阵.**

证　由题意,当 A 为 $m\times n$ 矩阵时, A^TA 为 $n\times n$ 阶方阵, AA^T 为 $m\times m$ 阶方阵. 又

$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$

$$(AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T$$

故 A^TA 和 AA^T 为对称矩阵.

21. **按指定分块的方法,用分块矩阵乘法求下列矩阵的乘积.**

(1) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)$

(2) $\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ \hline 3 & 0 & -2 \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

(3) $\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ \hline 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right)$

解 (1) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times 0 & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times (-1) \\ \hline (0, 3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \times 0 & (0, 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \times (-1) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ \hline 3 & -2 \end{array}\right)$$

(2) $\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ \hline 3 & 0 & -2 \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} (2, 1, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & (2, 1, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} & (2, 1, -1)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \hline (3, 0, -2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & (3, 0, -2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} & (3, 0, -2)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \hline (1, -1, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & (1, -1, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} & (1, -1, 1)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ \hline 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) = \begin{pmatrix} aI_2 & 0 \\ I_2 & bI_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & cI_2 \\ 0 & dI_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aI_2 \times I_2 & aI_2 \times cI_2 \\ I_2 \times I_2 & I_2 \times cI_2 + bI_2 \times dI_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aI_2 & acI_2 \\ I_2 & (a+bd)I_2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & ac & 0 \\ 0 & a & 0 & ac \\ \hline 1 & 0 & c+bd & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c+bd \end{array}\right)$$

要点 2-8

矩阵的分块是一种处理矩阵的技巧. 通过分块能达到使矩阵计法简单、特点突出、计算简化、便于分析规律的目的.

计算分块矩阵的基本原则是对分块矩阵施行加法、数乘矩阵和矩阵乘法等运算时, 如果分块能使得计算可进行, 则可将子块矩阵视为元素, 使用矩阵运算的定义来计算.

在计算中, 将分块后出现的单位矩阵块、数量矩阵块直接用 I 和 kI 记号代入, 往往能使计算简化, 如题 21(3) .

应注意到矩阵分块后的行列式计算一般不能直接将子块矩阵视为元素, 使用行列式计算的定义, 典型的是

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq |AD - CB|$$

上述等式成立的要求是子块矩阵 A 可逆, A 和 C 乘法可交换, 即 $AC = CA$.

22. **判断下列矩阵是否可逆, 如可逆, 求其逆矩阵.**

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad - bc \neq 0)$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　　　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　　　(6) $\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$

$(a_i \neq 0,\quad i = 1, 2, \cdots, n)$

解　(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, **所以** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **可逆**.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{*} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) **因为** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, **由已知** $ad - bc \neq 0$, **所以** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **可逆**.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{*} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **为下三角矩阵, 因其主对角线上元素全不为零, 故矩阵可逆, 用初等变换求逆**.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right)
$$

从而
$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}
$$

(4) 因为 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, 所以 A 可逆, 用初等变换求逆. 又

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \times(-2),\ \times 1 \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-4) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \times 1 \end{array}
$$

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times 1 \\ \times(-1) \end{array}
$$

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)
$$

因此
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(5) 因为 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 所以矩阵可逆, 用初等变换求逆.

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

故
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) $\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n \neq 0$　(已知 $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$)

故矩阵可逆

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

要点 2-9

求逆矩阵的基本方法:

(1) 若 $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ 且 $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n$)

则
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

注意:

$$\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n-1} & & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & \frac{1}{a_n} \\ & & \frac{1}{a_{n-1}} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \frac{1}{a_2} & & & \\ \frac{1}{a_1} & & & \end{pmatrix}$$

(2) **若二阶方阵** $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-bc\neq 0$.

则

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(3) **若** $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$, **且子块矩阵** A_i **可逆**, $i=1, 2, \cdots, k$.

则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^{-1} \end{pmatrix}$$

注意:

$$\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & A_2 & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ A_k & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & A_k^{-1} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & A_2^{-1} & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}$$

(4) **若** A **是三阶以上的数值可逆矩阵, 则求** A^{-1} **适宜用初等变换求逆方法**.

$$\left(A \mid I_n\right) \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left(I \mid A^{-1}\right)$$

23. **按下列分块的方法求下列矩阵的逆矩阵.**

(1) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$　　(2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

解　(1) **设** $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$, **其逆矩阵为** $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, B_i **与** A_i **同阶, 则由**

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1A_1 & B_1A_2 + B_2A_4 \\ B_3A_1 & B_3A_2 + B_4A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & I_2 \end{pmatrix}$$

得

$$B_1A_1 = I_2 \quad ①$$
$$B_3A_1 = 0 \quad ②$$
$$B_1A_2 + B_2A_4 = 0 \quad ③$$
$$B_3A_2 + B_4A_4 = I_2 \quad ④$$

由 A_1 **可逆, 用** A_1^{-1} **右乘①和②得**

$$B_1 = A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = 0$$

由③得 $B_2A_4 = -B_1A_2$, **左乘** A_4^{-1} **得**

$$B_2 = -(B_1A_2)A_4^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

上述结果代入④得

$$B_4A_4 = I_2 \quad B_4 = A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故 $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(2) 设 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$, 其逆矩阵为 $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$,

其中B_i与A_i同阶. 则由

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1A_1 & B_1A_2 + B_2A_4 \\ B_3A_1 & B_3A_2 + B_4A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

得

$$B_1A_1 = I_3 \quad ①$$

$$B_3A_1 = 0 \quad ②$$

$$B_1A_2 + B_2A_4 = 0 \quad ③$$

$$B_3A_2 + B_4A_4 = I_2 \quad ④$$

A_1^{-1} 右乘①, ②得

$$B_1 = A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = 0$$

代入③得

$$B_2 = -B_1A_2 = -\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

代入④

$$B_4 = A_4^{-1} = (1)$$

故

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

要点 2-10

分块矩阵求逆一般取其逆矩阵为待定分块矩阵，解矩阵方程. 当方阵 A, B **为可逆矩阵时，对下列基本类型的矩阵方程，可如下求解：**

$$AX = C \quad X = A^{-1}C$$

$$XA = C \quad X = CA^{-1}$$

$$AXB = C \quad X = A^{-1}CB^{-1}$$

当 A, B **不可逆时，上述方法不可用，但矩阵方程仍可解，可采用题** 11 **的方法.**

24. **用逆矩阵解** 11 **题中的矩阵方程.**

解 (1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

因为 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **可逆，故**

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(2) **由** $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$，**得**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -9 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

(3) **由** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$，**得**

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 6\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$$

25. **解矩阵方程** $AX+B=X$, **其中**

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}$$

解　$AX+B=X$　　$AX-X=-B$

$$(A-I)X=-B$$

$$A-I=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix},\ |A-I|=-3\neq 0,\ \text{故}(A-I)\text{可逆}.$$

上式两边左乘 $(A-I)^{-1}$, **则有**

$$X=-(A-I)^{-1}B$$

使用初等变换方法

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\,|\,\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}-1 & 1 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -2 & 5 & -3\end{array}\right)\begin{matrix}\times(-1)\quad\times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}-1 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 4 & -2\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}-1 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \times\frac{1}{3}\quad\times\left(-\frac{1}{3}\right)\end{matrix}$$

$$
\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}
-1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1
\end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow \\ \times 1 \\ \end{array}
$$

$$
\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}
-1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1
\end{array}\right)\begin{array}{l} \times(-1) \\ \times(-1) \\ \end{array}
$$

$$
\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}
1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1
\end{array}\right)
$$

故
$$
X=-(A-I)^{-1}B=-\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

要点 2-11

解形如题25 **的矩阵方程,求未知矩阵** X **的方法是首先用矩阵代数.将其化为关于** X **的基本方程(见要点**2-10),**最后再代入已知矩阵求** X.

当 X **形如** $X=M^{-1}N$ **或** $X=NM^{-1}$ **时,除分别求** M^{-1},**再计算矩阵乘法的方法以外,还可以用初等变换如下求**:

$$
(M \mid N) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (I \mid M^{-1}N)=(I \mid X)
$$

$$
\frac{M}{N} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \frac{I}{NM^{-1}}=\frac{I}{X}
$$

26. **设** A, B, C **为同阶矩阵,且** C **非奇异,满足** $C^{-1}AC=B$,**求证**: $C^{-1}A^mC=B^m$(m **是正整数**).

证　用数学归纳法对 m **施归纳证明.**

$m=2$ **时**,　　$B^2=C^{-1}AC\cdot C^{-1}AC=C^{-1}A^2C$

设 $m=n$ **时等式成立,则** $m=n+1$ **时**

$$
B^{n+1}=B^n\cdot B=B^nC^{-1}AC=C^{-1}A^nCC^{-1}AC=C^{-1}A^{n+1}C
$$

由数学归纳法.对任意正整数 m, $C^{-1}AC=B$ **时**, $C^{-1}A^mC=B^m$

27. 若 $A^k=0$（k 是正整数），求证：$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证　因为 $A^k=0$ 故 $I-A^k=I$. 又

$$I-A^k=I^k-A^k=(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=I$$

故
$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$$

要点 2-12

方阵 A, B 满足 $AB=I$ 或者 $BA=I$ 时，可得出结论 $A^{-1}=B$. 这是对非数值矩阵求逆或证明逆矩阵的方法之一.

28. 证明：如果对称矩阵 A 为非奇异矩阵，则 A^{-1} 也是对称的.

证　已知 A 对称. 即 $A^T=A$.

因为 $AA^{-1}=I$，两边取转置得

$$(A^{-1})^TA^T=I,\ 即\ (A^{-1})^TA=I.$$

由要点 2-12 得 $(A^{-1})^T=A^{-1}$，即 A^{-1} 也是对称矩阵.

29. 证明：如果 $A^2=A$，但 A 不是单位矩阵，则 A 必为奇异矩阵.

证　用反证法. 反设 A 不是奇异矩阵，即 A 可逆，则存在 A^{-1}，在 $A^2=A$ 两边左乘 A^{-1} 得 $A=I$. 与 A 不是单位矩阵矛盾.

故反设不成立，即 A 是奇异矩阵.

30. 若 n 阶矩阵满足 $A^2-2A-4I=0$，试证 $A+I$ 可逆，并求 $(A+I)^{-1}$.

解　本题 A 不是数值矩阵，由要点 2-12，应找一个矩阵 M，使 $(A+I)M=I$ 或 $M(A+I)=I$. 因此，将 $A^2-2A-4I=0$ 变形为

$$A^2+A-3A-3I=I$$

即
$$A(A+I)-3(A+I)=I\quad (A-3I)(A+I)=I$$

故 $(A+I)$ 可逆，且 $(A+I)^{-1}=A-3I$.

* 31. 若三阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，已知 $|A|=\dfrac{1}{2}$，求 $|(3A)^{-1}-2A^*|$ 的值.

解　$$(3A)^{-1}-2A^{*}=\frac{1}{3}A^{-1}-2\left|A\right|A^{-1}=\left(\frac{1}{3}-2\left|A\right|\right)A^{-1}$$

$$=\left(\frac{1}{3}-1\right)A^{-1}$$

从而　$$\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}\left|A^{-1}\right|$$

$$=-\frac{2^{3}}{3^{3}}\cdot 2=-\frac{16}{27}$$

32. **用初等变换将下列矩阵化为矩阵** D **的标准形式**:

$$D=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$　　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

解　(1) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times\frac{1}{5},\ \times\frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

初等变换标准形为 I_2.

(2) $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1),\ \times\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换标准形为 I_2.

(3) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-3),\ \times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&-2\\0&5&-5\end{pmatrix}\times 5\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&-2\\0&0&-15\end{pmatrix}\times\left(\frac{-1}{15}\right)$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times 2\ \ \times(-2)\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\ \ \times(-1)\\ \\ \end{matrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

初等变换标准形为 I_3.

(4) $$\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&1\\-2&2&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-3)\ \ \times 2\\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{array}{c}\times(-2)\\ \times 1\\ \begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&-5\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\times\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

初等变换标准形为 $\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{matrix}$.

(5) $$\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-3)\\ \\ \end{matrix}\to\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&-5\end{pmatrix}\\ \times 1\\ \times(-2)\end{array}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-5\end{pmatrix}\times\left(-\frac{1}{5}\right)\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

初等变换标准形为 $\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\end{matrix}$.

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \times 1 \quad \times(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \times\frac{3}{5} \quad \times\left(-\frac{1}{5}\right) \end{matrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

初等变换标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

33. 用初等变换判定下列矩阵是否可逆, 如可逆, 求其逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad-bc\neq 0)$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ $(a_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n)$

(6) $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $(a_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n)$

解　(1)　$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \times(-2)\ \times(-5) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -9 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 18 & -18 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times(-3) \\ \\ \end{array}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -9 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \times\left(-\frac{4}{9}\right) \end{array}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 6 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times\frac{2}{6} \\ \\ \end{array}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 6 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times\frac{1}{6} \\ \times\frac{1}{9} \end{array}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right)$$

所以矩阵 A 可逆, 且

$$A^{-1}=\begin{matrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{matrix}$$

(2) **从已知条件** $ad-bc\neq 0$, **可得** a **与** c **不能同时为** 0, **不妨设** $a\neq 0$, **则有** $\frac{ad-bc}{a}\neq 0$.

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0\\ c & d & 0 & 1\end{array}\right)\times\frac{1}{a}\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0\\ c & d & 0 & 1\end{array}\right)\times(-c)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0\\ 0 & d-\frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1\end{array}\right)\times\frac{a}{ad-bc}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{array}\right)\times\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc}\\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{array}\right)$$

所以矩阵 A **可逆, 且**

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

(3)
$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{I}_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\times(-2)\ \times(-1)$$

$$
\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & -3 & -5 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \times(-1)\ \times 1 \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \times(-4) \\ \\
\end{array}
$$

$$
\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \times 4\ \ \times(-1)
\end{array}
$$

$$
\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 4 & -1 & -4 & 3 \\
0 & 1 & -1 & 0 & -16 & 5 & 18 & -12 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \times(-1)\ \times 1 \\ \\
\end{array}
$$

$$
\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -6 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \times(-1) \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3
\end{array}\right)
$$

所以矩阵 A 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}22 & -6 & -26 & 17\\ -17 & 5 & 20 & -13\\ -1 & 0 & 2 & -1\\ 4 & -1 & -5 & 3\end{pmatrix}$$

(4) $$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}_4)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 3 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\times(-2)\ \times(-3)\ \times(-7)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\times(-2)\ \times 5$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -17\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\times(-3)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 11 & -20\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

所以矩阵 A 可逆, 且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 11 & -20\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(5) $$A \mid I_n=\left(\begin{array}{cccc|cccc}a_1 & & & & 1 & & & \\ & a_2 & & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & a_n & & & & 1\end{array}\right)\begin{matrix}\times 1/a_1\\ \times 1/a_2\\ \vdots\\ \times 1/a_n\end{matrix}$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&&&&\frac{1}{a_1}&&&\\&1&&&&\frac{1}{a_2}&&\\&&\ddots&&&&\ddots&\\&&&1&&&&\frac{1}{a_n}\end{array}\right)$$

所以矩阵 A 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1}&&&\\&\frac{1}{a_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\frac{1}{a_n}\end{pmatrix}$$

(6)　$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{I}_n)$

$$=\left(\begin{array}{ccccc|cccccc}0&a_1&0&\cdots&0&1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&a_2&\cdots&0&0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}&0&0&0&\cdots&1&0\\a_n&0&0&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)$$

（最后一行依次与前面的行交换）

$$\to\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}a_n&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&1\\0&a_1&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\ddots&\ddots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}&0&0&\cdots&1&0\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}\times 1/a_n\\\times 1/a_1\\\vdots\\\times 1/a_{n-1}\end{array}$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|ccccc}1&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&\frac{1}{a_n}\\0&1&\cdots&0&\frac{1}{a_1}&&&&\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\ddots&&&\\0&0&\cdots&1&&&&\frac{1}{a_{n-1}}&0\end{array}\right)$$

所以矩阵 A 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & \frac{1}{a_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

34. **求下列矩阵的秩.**

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 4 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$

解　求矩阵秩的实用方法是用初等变换求秩，即用初等变换将矩阵化为阶梯形，则阶梯形中非零行的数目就是矩阵的秩.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故

$$r(A)=2$$

(2) $$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

故
$$r(A) = 4$$

(3) $$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

故
$$r(A) = 3$$

(4) $$\begin{matrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 4 \end{matrix} \to \begin{matrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 692 & 129 & 39 & 113 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

故
$$r(A) = 3$$

(5) $$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

故
$$r(A) = 3$$

要点 2-13

初等变换是线性代数计算中的基本功，需要多做题掌握其中的技巧. 注意如下要点:

(1) **初等变换的目标是把一个矩阵化简为阶梯形，正确识别阶梯形是基本要点.**

(2) **在初等变换的过程中应尽量避免分式运算，当一行第**1 **个元素为**a **时，不要过早地依赖于乘**$\frac{1}{a}$**化**a **为**1, **而要观察**

靠行之间一行乘一个数加到另一行这类变换来产生 1. 如 33 题(3)的第三步.

(3) 当矩阵含形如 a, b, c 等参数时, 初等变换化矩阵为阶梯形是难点, 当用 $\frac{1}{a}$ 乘某一行时, 要确认从条件中已知或可推导出 $a \neq 0$, 否则会导致错误.

(4) 在 $(A \mid I)$ 中用初等变换求 A^{-1} 时, 不能使用列初等变换. 仅用列初等变换求矩阵逆的相应方法是

$$\left(\frac{A}{I}\right) \xrightarrow{\text{列初等变换}} \left(\frac{I}{A^{-1}}\right).$$

(5) 一个矩阵在初等变换下的阶梯形不是惟一的.

(B)

1. 有矩阵 $A_{3\times 2}, B_{2\times 3}, C_{3\times 3}$, 下列(　　)运算可行.

(a) AC　　(b) BC　　(c) ABC　　(d) $AB - BC$

解　选(b), (c).

(a) 中 A 的列数不等于 C 的行数, 不能求 AC. (d) 中 (AB) 为 3×3 矩阵. (BC) 为 2×3 矩阵. 它们因阶数不相等, 而不能相加.

2. 如果已知矩阵 $A_{m\times n}, B_{n\times m}(m \neq n)$, 则下列(　　)运算结果为 n 阶矩阵.

(a) BA　　(b) AB　　(c) $(BA)^T$　　(d) $A^T B^T$

解　选(a), (c), (d).

(b) 中 AB 是 $m\times m$ 阶矩阵.

3. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 下面(　　)不是运算律.

(a) $(A+B)+C=(C+B)+A$　　(b) $(A+B)C=CA+CB$

(c) $(AB)C=A(BC)$　　(d) $(AB)C=(AC)B$

解　选(b), (d).

即其中(b) 和(d) 不是运算律. 应注意对矩阵的乘法, 一般没

有交换律，即一般 $AB \neq BA$，而(b)和(d)中使用了矩阵运算中不成立的交换律，故不是运算律。

4. A, B 均为 n 阶矩阵，当(　　)时，有

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2.$$

(a) $A=I$　　(b) $B=0$　　(c) $A=B$　　(d) $AB=BA$

解　选(a)，(b)，(c)，(d)。

因为　$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$.

所以

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2 \qquad AB=BA.$$

又从(a)，(b)，(c)，(d)中都可推出 $AB=BA$。故它们都是充分条件，从而题目答案为(a)，(b)，(c)，(d)。

应注意其中只有(d)是充分而且必要的条件。

5. A, B, C, I 为同阶矩阵，I 为单位矩阵，若 $ABC=I$，则下列各式中总是成立的有(　　)。

(a) $BCA=I$　(b) $ACB=I$　(c) $CAB=I$　(d) $CBA=I$

解　选(a)，(c)。

本题考查交换律，对方阵 A, B, C 而言 $ABC=I \quad (AB)C=I$ 和 $A(BC)=I$。即从结合律可导出 AB 与 C 互为逆矩阵，A 与 BC 互为逆矩阵，故它们可以交换，从而得出(c)和(a)。

6. 若 A 是(　　)，则 A 必为方阵。

(a) 对称矩阵　　　　(b) 可逆矩阵

(c) n 阶矩阵的转置矩阵　　(d) 线性方程组的系数矩阵

解　选(a)，(b)，(c)。

应注意“对称矩阵”和“可逆矩阵”是只对方阵才建立的概念。一个含 m 个方程，n 个变元的线性方程组，m 不必等于 n。故它们的系数矩阵 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，不一定是方阵。

7. 若 A 是(　　)，则必有 $A^T=A$。

(a) 对角矩阵　　　　(b) 三角形矩阵

(c) 可逆矩阵　　　　(d) 对称矩阵

解　选(a),(d).

因为 $A^T = A$ **是** A **为对称矩阵的定义,而对角矩阵就是对称矩阵.一个上(下)三角形矩阵转置后是下(上)三角矩阵,一般不满足** $A^T = A$.

8. **若** A **为非奇异上三角形矩阵,则(　　)仍为上三角形矩阵.**

(a) $2A$　　(b) A^2　　(c) A^{-1}　　(d) A^T

解　选(a),(b),(c).

上(下)三角形矩阵相乘仍然是上(下)三角形矩阵;它们的逆矩阵仍然是上(下)三角形矩阵.

9. **设** A **为非奇异对称矩阵,则(　　)仍为对称矩阵.**

(a) A^T　　(b) A^{-1}　　(c) $3A$　　(d) AA^T

解　选(a),(b),(c),(d).

一个矩阵是对称矩阵　$A^T = A$.

所以(a) $(A^T)^T = A = A^T$; (b) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$;

(c) $(3A)^T = 3 \cdot A^T = 3A$; (d) $(AA^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = AA^T$,

从而(a)**至**(d)**中矩阵仍然为对称矩阵.**

10. **设** A **为** n **阶可逆矩阵,下列(　　)恒正确.**

(a) $(2A)^T = 2A^T$　　(b) $(2A)^{-1} = 2A^{-1}$

(c) $[(A^{-1})^{-1}]^T = [(A^T)^{-1}]^{-1}$　　(d) $[(A^T)^T]^{-1} = [(A^{-1})^{-1}]^T$

解　选(a),(c).

(b): $(2A)^{-1} = \dfrac{1}{2}A^{-1} \neq 2A^{-1}$

(d): $[(A^T)^T]^{-1} = A^{-1}$, **而** $[(A^{-1})^{-1}]^T = A^T$, **不相等.**

11. **当** $ad \neq bc$ **时,则** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = ($　　$)$.

(a) $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$　　(b) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(c) $\dfrac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$　　(d) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

解　选(b),(c).

对题目所给的二阶矩阵,它的逆矩阵是可由公式表示.(b)中给出的是A^{-1}的公式,(c)是整个公式在分母行列式和分子矩阵中均乘以(-1)的恒等变形.

12. 设A为三阶矩阵,$|A| = a$,则其伴随矩阵A^*的行列式$|A^*| =$ (　　).

(a) a　　(b) a^2　　(c) a^3　　(d) a^4

解　选(b).因为对n阶方阵A而言$|A^*| = |A|^{n-1}$,所以$n = 3$时,$|A^*| = a^2$,故答案为(b).

13. 下列矩阵(　　)是初等矩阵.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解　选(a),(b),(c),(d).初等矩阵是单位矩阵做一次行或列初等变换所得的结果.(a)至(d)都是对I_3施行一次行初等变换所得,本题(a),(b),(c),(d)都是初等矩阵.

14. 已知$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,则(　　).

(a) A为可逆矩阵　　(b) $A^T = A$

(c) AA^{-1}为对称矩阵　　(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

解　选(a),(b),(c),(d).

本题中矩阵A是对称矩阵,又$|A| = -12 \neq 0$,故A为可逆矩阵.

又　$(AA^{-1})^T=(A^{-1})^T\cdot A^T \overset{A^T=A}{=\!=} (A^T)^{-1}A=A^{-1}A=AA^{-1}$

故 AA^{-1} 也是对称矩阵.

(d) 中初等矩阵 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 是由交换单位矩阵的第 1 行和第 3 行而得,用它左乘 A 相当于对矩阵 A 施行交换第 1,3 行的初等变换,故(d)中结论成立.

故(a),(b),(c),(d)均为正确答案.

15. 当 $A=(\quad)$ 时,

$$A\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}-3a_{31}&a_{12}-3a_{32}&a_{13}-3a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

(a) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}0&0&-3\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$

解　选(b).观察到 A 乘一个矩阵 (a_{ij}) 的效果应该是用 (-3) 乘矩阵 (a_{ij}) 的第 3 行再加到第 1 行上.

当把该初等变换施行在单位矩阵 I_3 上时,结果是(b)中矩阵,故答案为(b).

16. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵且 $r(A)=r<m<n$,则(　　).

(a) A 中 r 阶子式不全为 0

(b) A 中每一个阶数大于 r 的子式皆为 0

(c) A 经初等变换可化为 $\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$

(d) A 不可能是满秩矩阵

解　选(a),(b),(c),(d).

应注意的是(a)和(b)都是 $r(A)=r<m<n$ 的必要条件,而不是充分条件.

自 测 试 题

1. 判断题

(1) $A^2+2AB+3A=A(A+2B+3)$

(2) 设 A, B 为 n 阶可逆方阵,则

(a) $A+B=B+A$　　　　(b) $AB=BA$

(c) $|AB|=|BA|$　　　　(d) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(3) 设 A 为可逆矩阵,若 $AB=0$ 则 $B=0$.

(4) 若 n 阶方阵 A, B 之积 AB 不可逆,则 A 与 B 均不可逆.

(5) 设 A, B 均是 n 阶方阵,则有下列命题

(a) 若 A 与 B 都是上(下)三角形矩阵,则(AB)仍是上(下)三角形矩阵.

(b) 若 A 与 B 都是可逆矩阵,则(AB)仍是可逆矩阵.

(c) 若 A 与 B 都是对称矩阵,则(AB)仍是对称矩阵.

(d) 若 A 与 B 都是初等矩阵,则(AB)仍是初等矩阵.

(6) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵.

2. 设 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,求

(1) $|A|$　　(2) A^{-1}　　(3) A^*

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}(2,1,0)$,求 A^n.

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵.

求矩阵 X**, 使** $A^{*}XA = 2XA - 8I$.

5. **设** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, **已知秩** $r(A) = 2$. **求** a **的值**.

6. **设** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} - a_{11} & a_{31} - a_{12} & a_{31} - a_{13} \end{pmatrix}$,

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **求矩阵** P_2**, 使** $P_2P_1A = B$.

7. **设三阶方阵** A **满足条件: 其元素** $a_{ij} = A_{ij}$. **其中** A_{ij} **为** a_{ij} **的代数余子式, 又** $a_{13} = -1$**, 证明** A **为可逆矩阵**.

自测试题解答

1. (1)× 　(**正确为**: $A^2 + 2AB + 3A = A(A + 2B + 3I)$)

(2) (a) √　(b)×　(c) √　(d) √

(3) √　(**在** $AB = 0$ **两边左乘** A^{-1}**, 得** $B = 0$.)

(4)×

(5) (a) √　(b) √　(c)×　(**当** $AB = BA$ **时**, AB **仍对称**)
(d)×

(6) √

2. $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1) $|A| = \left| \dfrac{1}{2}\begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2^3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{3}{8}$$

(2) $A^{-1}=\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\begin{array}{c|cc}3&0&0\\ \hline 0&0&1\\0&1&0\end{array}\right)^{-1}$

$=2\cdot\begin{pmatrix}A_1^{-1}&\\&A_2^{-1}\end{pmatrix}\quad A_1=(3),\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$=2\left(\begin{array}{c|cc}\frac{1}{3}&&\\ \hline &0&1\\&1&0\end{array}\right)$

(3) 因为$|A|\neq 0$, 所以 A 可逆.

$$A^*=|A|A^{-1}=-\frac{3}{8}\times 2\left(\begin{array}{c|cc}\frac{1}{3}&0&0\\ \hline 0&0&1\\0&1&0\end{array}\right)=-\frac{6}{8}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

3. 因为 $A^2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(2,1,0)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(2,1,0)=3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(2,1,0)$

所以 $A^2=3A$, 从而 $A^n=3^{n-1}A$.

$$A^n=3^{n-1}A=3^{n-1}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(2,1,0)=3^{n-1}\begin{pmatrix}2&1&0\\2&1&0\\4&2&0\end{pmatrix}$$

4. 因为题目所给矩阵为 A. 所以首先化简矩阵方程, 使之含 A 而不是 A^*.

为此, 在方程两边左乘 A, 右乘 A^{-1}, 得

$$|A|X=2AX-8I\quad (|A|I-2A)X=-8I.$$

$$|A|I-2A=-2I-2A=-2(I+A)=-2\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&-1&4\\0&0&2\end{pmatrix}$$

所以$(|A|I-2A)$可逆

$$X=-8(|A|I-2A)^{-1}=4\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&-1&4\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&4&-6\\0&-4&8\\0&0&2\end{pmatrix}$$

5. **用初等变换将 A 化为阶梯形**

$$A\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&a+2&-2\\0&-4&5&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&a+2&-2\\0&0&3-a&0\end{pmatrix}$$

由 $r(A)=2$, **则** $3-a=0$, **即** $a=3$.

6. **因为** $A\xrightarrow{r_1\longleftrightarrow r_2}C\xrightarrow{r_3-r_2}B$.

又 $I\xrightarrow{r_1\longleftrightarrow r_2}P_1$, $P_1A=C$. **故** P_2 **是初等矩阵. 由**

$$I\xrightarrow{r_3-r_2}P_2,\quad\text{故}\quad P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

7. **由已知** $a_{ij}=A_{ij}$, **得** $A^*=A^T$.

从而 $$|A^*|=|A^T|,\text{即}|A|^2=|A|.$$

解得 $$|A|=0\quad\text{或}\quad|A|=1.$$

又 $$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+1>0$$

从而 $$|A|=1\neq0.$$

即 A 为可逆矩阵.

第三章　线性方程组

习题解析

(A)

1. **用消元法解下列线性方程组:**

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 12x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$

解　(1) **对增广矩阵**$(A \mid b)$**施以行初等变换**

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -13 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & -13 & -6 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -8 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & -13 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & -5 & 19 & 9 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以方程组有惟一解　$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

(2) $(A \mid b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

从最后一行可知方程组无解.

(3) $(A \mid b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

得原方程的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 - x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

设 $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$, 则

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + c_1 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = \dfrac{1}{2} + c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

向量形式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ \dfrac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4) $$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

所以原方程无解.

(5) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \\ 1 & -3 & -12 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & -16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&4&-2\\0&4&-5&4\\0&0&-5&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&4&0\\0&4&-5&0\\0&0&-5&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&4&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

故原方程组解为 $x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0$.

(6) $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&-2&-1\\3&-1&5\\2&2&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-4\\0&0&10\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故原方程组解为 $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0$.

(7) $A=\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\1&-1&2&-1&0\\4&-2&6&3&-4\\2&4&-2&4&-7\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&1&-1&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&0&-2\\0&1&-1&0&-\frac{5}{6}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此得原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{7}{6}x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 - \frac{5}{6}x_5 = 0 \\ x_4 - \frac{1}{3}x_5 = 0 \end{cases}$$

方程组有 5 **个变元**, 3 **个方程**, **于是有** 5 - 3 = 2 **个自由变元**.

令 $x_3 = c_1$, $x_5 = c_2$, **得解**

$$\begin{cases} x_1 = -c_1 + \frac{7}{6}c_2 \\ x_2 = c_1 + \frac{5}{6}c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = \frac{1}{3}c_2 \\ x_5 = c_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

要点 3-1

线性方程组的求解方法是用消元法. 一般是用行初等变换将方程组的增广矩阵化为阶梯形求解. 在实用中, 更进一步应化为简化阶梯形, 即在阶梯形中, 每行首位非零的数为 1, **它所在的列中其余元素为** 0 **的阶梯形.**

方程组解的可能性有 3 **种**: (1) **无解**; (2) **有惟一解**; (3) **有无穷多个解. 其解的具体情况很容易从增广矩阵变换后所**

得的简化阶梯形判断如下:

(1) 方程组无解　　简化阶梯形中含行$(0\ 0\ \cdots\ 0 \mid 1)$.

(2) 方程组惟一解　　$r(A \mid b) = r(A) = n$(变元数).

(3) 方程组有无穷个解　　$r(A \mid b) = r(A) = r < n$.

当$r < n$时,方程组解中有$n - r$个自由变元.注意到简化阶梯形中.第i列为x_i前的系数.则若取每行打头的1以外的列对应的变元为自由变元,则很容易直接从简化阶梯形得到解由自由变元表示的形式.如第1题(7)的方法.

将最后的解写成向量形式是很重要的,有利于求出基础解系,应注意掌握.

2. 确定a, b的值使下列线性方程组有解,并求其解.

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = a \end{cases}$

(2) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = a \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = b \end{cases}$

(4) $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 1 \\ (b-1)x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + (1-b)x_3 = 3 - 2b \end{cases}$

解　(1) 对增广矩阵施以行初等变换化为阶梯形:

$$(A \mid b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{a=5}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{12}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

故 $a=5$ **时方程组有解, 且有无穷多个解, 解为**

$$\begin{cases} x_1=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}c_1-\frac{6}{5}c_2 \\ x_2=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}c_1-\frac{7}{5}c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) **系数矩阵** A **为方阵.**

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(2+a)(a-1)^2$$

由 Cramer **法则**, $a \neq -2$ **而且** $a \neq 1$ **时, 方程组有惟一解**:

$$x_1=\frac{3}{a+2}, \quad x_2=-\frac{a+1}{a+2}, \quad x_3=\frac{2}{a+2}$$

当 $a=1$ **时**

$$(A \mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以方程组有无穷解:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c_1, c_2 **为任意常数**)

当 $a = -2$ **时**

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

所以方程组无解.

(3) **对增广矩阵施以行初等变换**:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & a \\ 1 & -1 & 1 & 5 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{a=1\text{ 和 }b=-1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

故当 $a = 1$ **而且** $b = -1$ **时方程组有解. 解为**:

$$\begin{cases} x_1 = -4c_2 \\ x_2 = c_1 + c_2 + 1 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c_1, c_2 **为任意常数**)

(4) **系数矩阵** A **为方阵, 且含参数** a, b.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 2 \\ 0 & b-1 & 1 \\ a & b & 1-b \end{vmatrix} = -a(b-1)(b+1)$$

(i) 由 Cramer 法则, 当 $a\neq 0$ 而且 $b\neq\pm 1$ 时, 方程组解惟一.

惟一解为 $x_1=\dfrac{5-b}{a(b+1)}$, $x_2=-\dfrac{2}{b+1}$, $x_3=\dfrac{2(b-1)}{b+1}$.

$$(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1\\ 0 & b-1 & 1 & 0\\ a & b & 1-b & 3-2b \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1\\ 0 & b-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{b=1}\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(ii) 当 $b=1$ 时, 方程组有无穷多解.

当 $a\neq 0$ 时, 其解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}c_1\\ x_2=c_1\\ x_3=0 \end{cases}$$

当 $a=0$ 时, 其解为

$$\begin{cases} x_1=c_1\\ x_2=1\\ x_3=0 \end{cases}$$

(iii) 当 $a=0$ 时

$$(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 2 & 1\\ 0 & b-1 & 1 & 0\\ 0 & b & 1-b & 3-2b \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -b-1 & 2-2b \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{(1-b)(b-5)}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{b=5} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以 $a=0$ 而且 $b=5$ 时, 有无穷解:

$$x_1 = c$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} \quad \text{(注: 此时 } b\neq 1\text{, 因为 } a=0 \text{ 且 } b=1 \text{ 已讨论过.)}$$

$$x_3 = \frac{4}{3}$$

综合上述情形, 即可得无穷解和惟一解.

要点 3-2

对一个含参数的线性方程组, 确定其中的参数取值, 使方程组无解、有惟一解、有无穷多解是方程组求解中的一类典型问题. 上述三种解的可能情形把参数的取值范围划分为三个不相交的集合. 解这类题目的技巧是根据题目的具体情况, 首先定出易于得出结论的参数集合, 然后讨论该集合以外的其余参数值, 将它们代入增广矩阵定出其他解的情形.

例如第 2 题(2), A 是三阶方阵. 用 Cramer 法则, 从 $|A|\neq 0$. 容易定出使方程组有惟一解的参数集: $a\neq -2$ 和 $a\neq 1$. 再讨论其余情形: $a=-2$ 或 $a=1$. 这时 a 为具体值. 代入增广矩阵的讨论已成为较简单的问题了.

当问题中含有两个或两个以上的参数时. 问题的讨论较为困难, 需借助于逻辑分析讨论取值与结论.

3. 已知向量

$\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (3, 2, 1)$

$\alpha_3 = (-2, 0, 2)$, $\alpha_4 = (1, 2, 4)$

求 (1) $3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3 + 4\alpha_4$

(2) $5\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$

解　(1) $3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3+4\alpha_4$

$$=(3,6,9)+(6,4,2)+(10,0,-10)+(4,8,16)$$

$$=(23,18,17)$$

(2) $5\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=(5,10,15)+(6,4,2)+(2,0,-2)$

$$+(-1,-2,-4)$$

$$=(12,12,11)$$

4. **已知向量**

$\alpha=(3,5,7,9)$,　　　　$\beta=(-1,5,2,0)$

(1) **如果** $\alpha+\xi=\beta$, **求** ξ;

(2) **如果** $3\alpha-2\eta=5\beta$, **求** η.

解　(1) **从** $\alpha+\xi=\beta$ **得** $\xi=\beta-\alpha$,

即　$\xi=(-1,5,2,0)-(3,5,7,9)=(-4,0,-5,-9)$

(2) **从** $3\alpha-2\eta=5\beta$ **得** $\eta=\dfrac{1}{2}(3\alpha-5\beta)$, **即**

$$\eta=\frac{1}{2}[(9,15,21,27)+(5,-25,-10,0)]$$

$$=\left(7,-5,\frac{11}{2},\frac{27}{2}\right)$$

5. **已知向量**

$\alpha_1=(2,5,1,3)$,　　　　$\alpha_2=(10,1,5,10)$

$\alpha_3=(4,1,-1,1)$

如果 $3(\alpha_1-\xi)+2(\alpha_2+\xi)=5(\alpha_3+\xi)$, **求** ξ.

解　**从** $3(\alpha_1-\xi)+2(\alpha_2+\xi)=5(\alpha_3+\xi)$, **得**

$$\xi=\frac{1}{6}(3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3)$$

$$=\frac{1}{6}[(6,15,3,9)+(20,2,10,20)+(-20,-5,5,-5)]$$

$$=(1,2,3,4)$$

6. **将下列各题中向量 β 表示为其他向量的线性组合**.

(1) $\beta=(3,5,-6)$,　　　　$\alpha_1=(1,0,1)$

$\alpha_2 = (1,\ 1,\ 1)$,　　$\alpha_3 = (0,\ -1,\ -1)$

(2) $\beta = (2,\ -1,\ 5,\ 1)$,　　$\varepsilon_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$

$\varepsilon_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0)$,　　$\varepsilon_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$

$\varepsilon_4 = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$

解　(1) 求线性组合，即为求 x_1, x_2, x_3，使

$$(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \beta^T$$

因为

$$\left(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T \mid \beta\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 = -11,\quad x_2 = 14,\quad x_3 = 9$$

即

$$\beta = -11\alpha_1 + 14\alpha_2 + 9\alpha_3$$

(2) 与(1)同理可得

$$\left(\varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T, \varepsilon_3^T, \varepsilon_4^T \mid \beta\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

故

$$\beta = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 5\varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

7. 已知向量 γ_1, γ_2 由向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性表示式为

$$\gamma_1 = 3\beta_1 - \beta_2 + \beta_3$$
$$\gamma_2 = \beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3$$

向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性表示式为

$$\beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3$$
$$\beta_2 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$$

$$\beta_3 = -\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$$

求向量 γ_1, γ_2 由向量 α_1, α_2, α_3 的线性表示式.

解　由题意,将线性表示用矩阵运算表示成

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & -5\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -5\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4 & 4 & -17\\ 0 & 23 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\alpha_1 + 4\alpha_2 - 17\alpha_3\\ 23\alpha_2 - 7\alpha_3\end{pmatrix}$$

故

$$\gamma_1 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 - 17\alpha_3$$

$$\gamma_2 = 23\alpha_2 - 7\alpha_3$$

8. 已知向量组(B): β_1, β_2, β_3 由向量组(A): α_1, α_2, α_3 的线性表示式为

$$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$$

$$\beta_3 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

试将向量组(A)的向量由向量组(B)的向量线性表示.

解　由题意所给的线性表示式,可依赖于分块矩阵建立矩阵关系

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

从而

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

即

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_3$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_3$$

要点 3-3

用矩阵作为工具,讨论或求解向量组线性组合是很有效的方法,应注意掌握. 主要技巧有:

(1) **线性组合** $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = \beta$

可借助于矩阵分块运算表示为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \beta$$

(2) **当** m **个向量** $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ **可由** n **个向量** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ **线性表示时,即有**

$$\beta_i = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

这 m 个等式可借助于矩阵运算合写为一个矩阵等式:

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{2n} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

因此当 m 个向量 $\{\beta_i\}$ 是 n 个向量 $\{\alpha_i\}$ 的线性组合时, 存在 $n \times m$ 阶矩阵 C, 使成立

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)C.$$

其中矩阵 C 的第 i 列, 由向量 β_i 表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性组合的组合系数构成.

9. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关.

(1) $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (-2, 2, 0)$, $\alpha_3 = (3, -5, 2)$

(2) $\alpha_1 = (1, 1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (3, -1, 2, 4)$, $\alpha_3 = (2, 2, 7, -1)$

解　(1) 对矩阵 $(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T)$ 施以初等行变换化为阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 < 3$. 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(2) 对矩阵 $(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T)$ 施以初等行变换化为阶梯形阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = 3$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

10. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关(其中 $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$).

(1) $\alpha_1 = (a_{11}, 0, 0, \cdots, 0, 0)$

$\alpha_2 = (0, a_{22}, 0, \cdots, 0, 0)$

$\vdots$

$\alpha_n = (0, 0, 0, \cdots, 0, a_{nn})$

(2) $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{n-1\,1}, a_{n1})$

$\alpha_2 = (0, a_{22}, a_{32}, \cdots, a_{n-1\,2}, a_{n2})$

$\vdots$

$\alpha_n = (0, 0, 0, \cdots, 0, a_{nn})$

解　题目所讨论的向量组含 n 个 n 维向量, 可以用以它们为列(行)向量构成的行列式讨论.

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

由题意 $a_{ii} \neq 0$, 故得上述行列式非零, 即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线

性无关.

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$$

从而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

要点 3-4

当向量组由具体给定分量的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 构成时, 讨论它们线性相关性的方法是求矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 的秩. 当秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = m$ 时, 向量组线性无关, 当秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) < m$ 时, 向量组线性相关.

当向量组含 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 时, 矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是 n 阶方阵, 还可借助于矩阵的行列式讨论向量组的线性相关性.

$|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n| \neq 0$　秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = n$, 则向量组线性无关.

$|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n| = 0$　秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) < n$, 则向量组线性相关.

11. 设 $\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = -\alpha_1 + 3\alpha_2$

验证: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

解　易于验证 $4\beta_1 - 5\beta_2 + 3\beta_3 = 0$

由定义, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

12. 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 试证: 向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \cdots, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 线性无关.

证　令 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \cdots, \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, 则由题意

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

取任意实数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 作线性组合

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\beta}_n = 0,$$ 则有

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$$

由已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 可得线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$$

因为系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$ 从而上述线性方程组只有零解,

即

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0.$$

由定义 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

13. **已知向量组** $\alpha_1=(k,2,1)$, $\alpha_2=(2,k,0)$, $\alpha_3=(1,-1,1)$. **试求** k **为何值时, 向量组** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性相关? 线性无关?**

解　**以** α_i **为列向量构成矩阵** A.

$$A=\begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

而且 $|A|=(k+2)(k-3)$.

因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性无关当且仅当** $|A|=(k+2)(k-3)\neq 0$. **即** $k\neq -2$ **而且** $k\neq 3$ **时**, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性无关**.

从而 $k=-2$ **或者** $k=3$ **时**, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性相关**.

14. **下列各题给定向量组** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, **试判定** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **是一个极大无关组, 并将** α_4 **由** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性表示**.

(1) $\alpha_1=(1,0,0,1)$, $\alpha_2=(0,1,0,-1)$

$\alpha_3=(0,0,1,-1)$, $\alpha_4=(2,-1,3,0)$

(2) $\alpha_1=(1,0,1,0,1)$, $\alpha_2=(0,1,1,0,1)$

$\alpha_3=(1,1,0,0,1)$, $\alpha_4=(-3,-2,3,0,-1)$

解　**对矩阵** $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)$ **施以初等行变换, 将其化为简化阶梯形**:

$$(1)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由简化阶梯形知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **是一个极大线性无关组, 且**

$$\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$$

$$(2)\ A=\begin{pmatrix}1&0&1&-3\\0&1&1&-2\\1&1&0&3\\0&0&0&0\\1&1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-3\\0&1&1&-2\\0&1&-1&6\\0&0&0&0\\0&1&0&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&-3\\0&1&1&-2\\0&0&-2&8\\0&0&-1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由简化阶梯形知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是极大线性无关组, 且

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\alpha_3$$

15. 求下列向量组的一个极大无关组, 并将其余向量用此极大无关组线性表示.

(1) $\alpha_1 = (1, 1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (-1, 1, -1, 3)$

$\alpha_3 = (5, -2, 8, -9)$, $\alpha_4 = (-1, 3, 1, 7)$

(2) $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (1, -1, 1, 1)$

$\alpha_3 = (1, 3, 3, 5)$, $\alpha_4 = (4, -2, 5, 6)$

$\alpha_5 = (-3, -1, -5, -7)$

解 (1) 对矩阵 $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T)$ 施以初等行变换, 化为简化阶梯形:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&2&-7&4\\0&4&-14&8\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3/2&1\\0&1&-7/2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

从简化阶梯形可知 α_1, α_2 为一个极大线性无关组, 而且

$$\alpha_3 = \frac{3}{2}\alpha_1 - \frac{7}{2}\alpha_2, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2$$

(2) 对矩阵 $A = [\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T]$ 施以初等行变换, 化为简化阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从简化阶梯形可知. α_1, α_2 是一个极大线性无关组, 而且

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2, \quad \alpha_5 = -2\alpha_1 - \alpha_2$$

要点 3-5

求一组向量的极大线性无关组, 将其余向量表示成极大线性无关组线性组合问题的最有效的方法是遵循以下程序:

(1) 以所给向量组中向量为列向量构成矩阵 A.

(2) 对矩阵 A 仅施以初等行变换, 将 A 化为简化阶梯形.

(3) 取简化阶梯形中打头的 1 所在列对应的列向量组成一个极大线性无关组.

(4) 依照简化阶梯形中, 每行打头的 1 以外的列向量表示成每行打头的 1 所在列的线性组合, 写出对应 A 的列向量关于极大无关向量组的线性组合.

应注意一个向量组的极大线性无关组不是惟一的, 依上述方法取出的极大无关组是其中的一个极大线性无关组.

16. **求下列齐次线性方程组的一个基础解系.**

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

解 (1) **对增广矩阵**$(A \mid 0)$**施以初等行变换, 化为简化阶梯形:**

$$(A \mid 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

故原方程组与以简化阶梯形为增广矩阵的方程组等价, 即

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

从而基础解系为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) **对增广矩阵**$(A \mid 0)$**施以初等行变换, 化为简化阶梯形:**

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -7/8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -5/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 5/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

从等价的方程组有

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{7}{8}x_5 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{5}{8}x_5 \\ x_3 = \dfrac{1}{2}x_4 - \dfrac{5}{8}x_5 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \dfrac{7}{8} \\ \dfrac{5}{8} \\ -\dfrac{5}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而基础解系为 $\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{7}{8} \\ \dfrac{5}{8} \\ -\dfrac{5}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **或** $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

(3) **对增广矩阵**$(A \mid 0)$**施以初等行变换, 化为简化阶梯形**:

$$
(A \mid 0) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

从等价的线性方程组, 有

$$
\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

从而基础解系为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

要点 3-6

Gauss-Jordan **消元法是求解线性方程组的实用方法. 使用该方法一般是用初等行变换至上而下将增广矩阵化为阶梯形, 再自下而上化为简化阶梯形. 简化阶梯形对应的方程组与原方程组等价, 而易于求解.**

在求解简化阶梯形对应的线性方程组时, 应注意到矩阵的第 i 列是变元x_i **前的系数, 一般是将打头的**1 **所在列对应的变元视为因变元. 非打头** 1 **所在列对应的变元视为自由变元. 将因变元解出以自由变元表示, 自由变元** x_i **则表示为** $x_i = x_i$ **的形式. 以表示**x_i**可取任意值. 这样可以得到解向量以自由**

变元表示的形式. 将解向量写成向量形式时, 则得到一般解(通解)表示成为基础解系线性组合的形式. 组合中的常向量就是基础解系.

值得注意的是基础解系是一个向量的集合, 它不是惟一的, 当 $r(A)=r$ 时, 任意 $n-r$ 个线性无关的解都可以作为基础解系.

17. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times s}$. 证明: $AB=0$ 的充分必要条件是矩阵 B 的每一列向量都是齐次方程组 $AX=0$ 的解.

证　(　) 设 $AB=0$, 将 B 按列向量分块写为 $B=(b_1, b_2, \cdots, b_s)$, 则 $AB=(Ab_1, Ab_2, \cdots, Ab_s)$. 从而 $AB=0$ 等价于 $(Ab_1, Ab_2, \cdots, Ab_s)=0$.

即
$$Ab_i=0, \quad i=1, 2, \cdots, s.$$

故 B 的每一列都是 $AX=0$ 的解.

(　) 若 B 的每一列 b_i 都是 $AX=0$ 的解. 即 $Ab_i=0$.

则
$$AB=(Ab_1, Ab_2, \cdots, Ab_s)=(0, 0, \cdots, 0)=0$$

即乘积 $AB=0$.

18. 设矩阵 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 n 阶矩阵. 已知 $r(A)=n$, 试证:

(1) 若 $AB=0$, 则 $B=0$.

(2) 若 $AB=A$, 则 $B=I$.

证　(1) 若 $AB=0$, 则由题 17 的结果: B 的每一列 b_i 都是线性方程组 $AX=0$ 的解, 当 $r(A)=n$ 时, $AX=0$ 只有零解, 从而 $b_i=0$, 即 $B=0$.

(2) 若 $AB=A$, 则有 $AB-A=0$, 即 $A(B-I)=0$, 由(1)的结果, 有 $B-I=0$, 即 $B=I$.

19. 用基础解系表示出下列线性方程组的全部解.

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$

解 对各题中增广矩阵$(A \mid b)$施以初等行变换, 化为简化阶梯形, 依要点3-6所述方法求解.

(1) $(A \mid 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -15/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

简化阶梯形中打头1所对应的因变元是x_1, x_2, x_3, 自由变元是x_4. 解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{15}{2}x_4 \\ x_2 = 12x_4 \\ x_3 = -2x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}，即 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ 12 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x_4 \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

从而一般解形式为

$$X = k \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (k\ \text{取任意常数}).$$

(2) $(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & -3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

解出

$$\begin{cases} x_1 = x_4 + 5x_5 - 16 \\ x_2 = -2x_4 - 6x_5 + 23 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

k_1, k_2 为任意自由变元.

$$(3)\ (A \mid b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

解出 $\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}x_5 \\ x_2=-\frac{1}{2}x_5-1 \\ x_3=0 \\ x_4=-\frac{1}{2}x_5-1 \\ x_5=x_5 \end{cases}$，**即** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}x_5\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

故一般解形式为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (k **为任意常数**).

注　齐次线性方程组的一般解可以表示为基础解系的线性组合. 非齐次线性方程组是没有基础解系的概念的. 从(2)、(3)题可以看到它们的一般解在结构上可以看做是令其中常数项等于0, 所得到的相应齐次线性方程组的基础解系的线性组合加上非齐次线性方程组的一个特解构成的.

20. **证明线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$, **并在有解的情况下, 求它的一般解.**

证　对增广矩阵 $(A \mid b)$ **施以初等行变换化为阶梯形**

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i \end{array}\right)$$

方程组有解充要条件是 $r(A) = r(A \mid b)$, **即** $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$.

当 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$ **时**

$$(A \mid b) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & a_2 + a_3 + a_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & a_3 + a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

通解为
$$X = k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_1+a_2+a_3+a_4\\a_2+a_3+a_4\\a_3+a_4\\a_4\\0\\-a_5\end{pmatrix}$$
$$= k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_2+a_3+a_4\\a_3+a_4\\a_4\\0\end{pmatrix} \quad (k\text{ 为任意常数})$$
$$[a_5 = -(a_1+a_2+a_3+a_4)]$$

21. 设 $u_1, u_2, \cdots, u_t$ 是某一非齐次线性方程组的解，试证 $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_tu_t$ 也是它的一个解，其中 $c_1 + c_2 + \cdots + c_t = 1$.

证　设 u_i 是方程组 $AX = b(b \neq 0)$ 的解，则
$$Au_i = b, \quad i = 1, 2, \cdots, t$$
当 $c_1 + c_2 + \cdots + c_t = 1$ 时
$$A(c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_tu_t) = c_1Au_1 + c_2Au_2 + \cdots + c_tAu_t$$
$$= (c_1 + c_2 + \cdots + c_t)b = b$$
故 $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_tu_t$ 也是 $AX = b$ 的解.

22. 已知某经济系统在一个生产周期内产品的生产与分配如表 3-1(货币单位).

(1) 求各部门最终产品 y_1, y_2, y_3.

(2) 求各部门新创造的价值 z_1, z_2, z_3.

(3) 求直接消耗系数矩阵.

解　(1) 已知部门间流量矩阵
$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix}100 & 25 & 30\\80 & 50 & 30\\40 & 25 & 60\end{pmatrix}$$

表 3-1

部门间流量 消耗部门 / 生产部门	1	2	3	最终产品	总产品
1	100	25	30	y_1	400
2	80	50	30	y_2	250
3	40	25	60	y_3	300

总产品

$$X = \begin{pmatrix} 400 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix}$$

由 $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$ 得

$$Y = X - \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} x_{1j} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{2j} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{3j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 155 \\ 160 \\ 125 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 245 \\ 90 \\ 175 \end{pmatrix}$$

得

$$y_1 = 245,\ y_2 = 90,\ y_3 = 175$$

(2) 由 $z_j = x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ 得

$$Z = X - \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} x_{i1} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i2} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 220 \\ 100 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix}$$

即
$$z_1 = 180,\ z_2 = 150,\ z_3 = 180$$

(3) 由 $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ 得直接消耗系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{100}{400} & \frac{25}{250} & \frac{30}{300} \\ \frac{80}{400} & \frac{50}{250} & \frac{30}{300} \\ \frac{40}{400} & \frac{25}{250} & \frac{60}{300} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

23. 已知某经济系统在一个生产周期内直接消耗系数及最终产品如表 3-2(货币单位).

(1) 求各部门总产品 x_1, x_2, x_3.

(2) 列出平衡表, 即再求出 x_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), 及 z_j ($j = 1, 2, 3$).

表 3-2

直接消耗系数 / 消耗部门 / 生产部门	1	2	3	最终产品	总产品
1	0.2	0.1	0.2	75	x_1
2	0.1	0.2	0.2	120	x_2
3	0.1	0.1	0.1	225	x_3

解　已知直接消耗系数矩阵 A, 最终产品向量 Y 分别为

$$A=\begin{pmatrix}0.2&0.1&0.2\\0.1&0.2&0.2\\0.1&0.1&0.1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}75\\120\\225\end{pmatrix}$$

(1) 因为 X 满足矩阵方程 $(I-A)X=Y$，具体为

$$\begin{pmatrix}0.8&-0.1&-0.2\\-0.1&0.8&-0.2\\-0.1&-0.2&0.9\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}75\\120\\225\end{pmatrix}$$

解该方程组得 $X=(200,250,300)^T$

即 $x_1=200,\ x_2=250,\ x_3=300$

(2) 由 $x_{ij}=a_{ij}x_j$，得矩阵

$$(x_{ij})_{3\times 3}=\begin{pmatrix}0.2\times 200&0.1\times 250&0.2\times 300\\0.1\times 200&0.2\times 250&0.2\times 300\\0.1\times 200&0.1\times 250&0.1\times 300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40&25&60\\20&50&60\\20&25&30\end{pmatrix}$$

又由 $z_j=x_j-\sum_{i=1}^{n}x_{ij}$ 得

$$Z=X-\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{3}x_{i1}\\\sum_{i=1}^{3}x_{i2}\\\sum_{i=1}^{3}x_{i3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\\250\\300\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}80\\100\\150\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120\\150\\150\end{pmatrix}$$

即 $z_1=120,\ z_2=150,\ z_3=150$

平衡表如表 3-3 所示.

表 3-3

部门间流量 x_{ij} 产出(至) j→ 投入(自) i↓		中间产品 消耗部门 1	2	3	合计	最终产品合计	总产量
生产部门	1	40	25	60	125	75	200
	2	20	50	60	130	120	250
	3	20	25	30	75	225	300
	合计	80	100	150	330	420	750
新创造价值							
	合计	120	150	150	420		
总产值		200	250	300	750		

24. **一个包括三个部门的经济系统，已知报告期直接消耗系数矩阵为**

$$A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0.3125\\ 0.14 & 0.15 & 0.25\\ 0.16 & 0.5 & 0.1875\end{bmatrix}$$

(1) **如计划期最终产品为** $Y=\begin{bmatrix}60\\ 55\\ 120\end{bmatrix}$，**求计划期的各部门总产品** X.

(2) **如计划期最终产品改为** $Y=\begin{bmatrix}70\\ 55\\ 120\end{bmatrix}$，**求计划期各部门的总产品** X.

解　(1) **已知直接消耗系数矩阵** A **和最终产品** Y，**则**

$$X=(I-A)^{-1}Y=\begin{pmatrix}0.8 & -0.2 & -0.3125\\ -0.14 & 0.85 & -0.25\\ -0.16 & -0.5 & 0.8125\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}60\\55\\120\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1.5827 & 0.8919 & 0.8832\\ 0.4302 & 1.6789 & 0.6821\\ 0.5764 & 1.2088 & 1.8244\end{pmatrix}\begin{pmatrix}60\\55\\120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}250\\200\\320\end{pmatrix}$$

(2) 当 $Y=\begin{pmatrix}70\\55\\120\end{pmatrix}$ 时, 由(1)知

$$X=(I-A)^{-1}Y$$

$$=\begin{pmatrix}1.5827 & 0.8919 & 0.8832\\ 0.4302 & 1.6789 & 0.6821\\ 0.5764 & 1.2088 & 1.8244\end{pmatrix}\begin{pmatrix}70\\55\\120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}265.827\\204.302\\325.764\end{pmatrix}$$

(B)

1. $\lambda=$ (　　　), 下面方程组有惟一解.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=\lambda-1\\ 2x_2-x_3=\lambda-2\\ x_3=\lambda-3\\ (\lambda-1)x_3=-(\lambda-3)(\lambda-1)\end{cases}$$

(a) 1　　　(b) 2　　　(c) 3　　　(d) 4

解　选(a), (c).

直接写出该方程组的增广矩阵

$$(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & \lambda-1\\ 0 & 2 & -1 & \lambda-2\\ 0 & 0 & 1 & \lambda-3\\ 0 & 0 & \lambda-1 & -(\lambda-3)(\lambda-1)\end{array}\right)$$

本题适宜直接验证.

若 $\lambda=1$, $(A \mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$, $r(A)=r(A \mid b)=3$, 解惟一.

若 $\lambda=2$, $(A \mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$, 无解.

若 $\lambda=3$, $(A \mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$,

$r(A)=r(A \quad b)=3$, 解惟一.

若 $\lambda=4$, $(A \mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6\end{array}\right)$, 无解.

2. $\lambda=$ (　　), 下面方程组有无穷多解.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=\lambda-1 \\ 3x_2-x_3=\lambda-2 \\ \lambda x_2-x_3=(\lambda-3)(\lambda-4)+(\lambda-2)\end{cases}$$

(a) 1　　(b) 2　　(c) 3　　(d) 4

解　选(c).

本题中系数矩阵为三阶方阵, 取行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)$$

由 Cramer 法则, 方程组解不惟一时, $|A| = 0$, 故 $\lambda = 3$. 又 $\lambda = 3$ 时,

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

故 $\lambda = 3$ 时, 方程组有无穷多解.

3. $\lambda =$ (　　), 下面方程组无解.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2)x_3 = (\lambda - 3)(\lambda - 4) \end{cases}$$

(a) 1　　(b) 2　　(c) 3　　(d) 4

解　选(a), (b).

本题系数矩阵 A 为三阶方阵, 取行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 2) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

由 Cramer 法则, $|A| = 0$, 即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 2$ 时, 解不惟一, 又

$\lambda = 1$ 时

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right), \ r(A) \neq r(A \mid b), \text{无解.}$$

$\lambda = 2$ 时

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \ r(A) \neq r(A \mid b), \text{无解.}$$

从而 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 2$ 时, 方程组无解.

4. 有向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 0, 1)$, $\beta =$ (　　) 时, β 是

α_1,α_2 的线性组合.

(a) (2, 0, 0)　　(b) (-3, 0, 4)

(c) (1, 1, 0)　　(d) (0, -1, 0)

解　选(a),(b).

本题 α_1 与 α_2 中对应的分量不成比例,故 α_1 与 α_2 线性无关. β 是 α_1,α_2 的线性组合的充要条件是 α_1,α_2,β 线性相关,即行列式 $|\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta^T|=0$. 由此验证

(a) $|\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta^T|=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=0$

(b) $|\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta^T|=\begin{vmatrix}1&0&-3\\0&0&0\\0&1&4\end{vmatrix}=0$

(c) $|\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta^T|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$

(d) $|\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta^T|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$

从而答案为(a)和(b).

5. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的必要条件是(　　).

(a) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 都不是零向量

(b) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示

(c) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量都不成比例

(d) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任一部分组线性无关

解　选(a),(c),(d).

本题讨论条件(p)是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的必要条件的一个基本方法是:(p)不成立时,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关. 从而,因为(a)不成立,即$\{\alpha_i\}$中有一个为零向量时,显然向量组线性相关,故

(a)为题目要求的必要条件.

同理可得(c),(d)也为答案.

注意(b)是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关的充要条件,故(b)不是向量组线性无关的必要条件,因而不是正确答案.

6. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是(　　).

(a) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中至少有一个零向量

(b) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中至少有两个向量成比例

(c) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示

(d) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中至少有一部分组线性相关

解　选(c),(d).

(a)和(b)是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关的充分条件而非必要条件,因而不是应选择的结果.

7. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分条件是(　　).

(a) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均不是零向量

(b) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量都不成比例

(c) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示

(d) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任一部分组线性无关

解　选(c),(d).

(a)是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的必要而非充分条件,(b)也是必要而非充分条件.

8. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩不为零的充分必要条件是(　　).

(a) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中至少有一个非零向量

(b) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 全是非零向量

(c) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

(d) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中有一个线性无关的部分组

解　选(a),(d).

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 秩不为零的充分必要条件是它的极大线性无关组至少有一个向量.又一个向量 α 线性无关的充要条件是

$\alpha \neq 0$.

故　(a) 显然是答案.

(b) 为充分而非必要条件.

(c) 是充分条件.

(d) 当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中有一个线性无关的部分组时. 该部分组至少含一个向量, 故(d) 等价于向量组中至少有一个非零向量. 从而(d) 也是答案.

9. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r, 则(　　).

(a) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中至少有一个 r 个向量的部分组线性无关

(b) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中任何 r 个向量的线性无关部分组与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可互相线性表示

(c) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中 r 个向量的部分组皆线性无关

(d) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中 $r+1$ 个向量的部分组皆线性相关

解　选(a), (b), (d).

本题要求选择向量组秩为 r 的必要条件, 当一个向量组的秩为 r 时, 它的任何一个极大无关组皆含 r 个向量, 故(a) 是必要条件.

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的任何 r 个线性无关的部分组都是极大线性无关组, 都与原向量组等价. 故(b) 成立.

(c) 可以作为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 秩为 r 的充分条件, 但不是必要条件.

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 秩为 r 时, 其极大线性无关组至多含 r 个向量. 故其中任意 $r+1$ 个向量的部分组皆线性相关, 从而(d) 也是答案.

综上, (a), (b), (d) 为答案.

10. n 阶矩阵可逆的充分必要条件是(　　).

(a) $r(A) = n$

(b) A 的列秩为 n

(c) A 的每个行向量都是非零向量

(d) 当 $X\neq 0$ 时, $AX\neq 0$, 其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

解　选(a),(b),(d).

一个 n 阶方阵可逆的充分必要条件有很多, 本题中(a),(b),(d)是其中的一部分.

(c)是必要条件而不是充分条件.

11. 矩阵 $A_{m\times n}$, 有 $r(A)=r$, $r<n$, 则(　　).

(a) 齐次线性方程组 $AX=0$ 的任何一个基础解系中都含有 $n-r$ 个线性无关的解向量

(b) $AX=0$ 时, X 为 $n\times(n-r)$ 矩阵, 则 $r(X)\leq n-r$

(c) 线性方程组 $AX=b$ 有解, 则 $r(A\mid b)=r$

(d) β 为一 m 维向量, $r(A\mid\beta)=r$, 则 β 可由 A 的列向量组线性表示

解　选(a),(b),(c),(d).

(a)是读者比较熟悉的结论, 即基础解系含 $n-r(A)=n-r$ 个线性无关的解向量.

(b) $AX=0$ 时, 矩阵 X 的每一列都是方程组的解, 从而 X 中线性无关的列向量至多有 $n-r$ 个. 故 $r(X)\leq n-r$.

(c) $AX=b$ 有解时, 其增广矩阵的秩满足条件 $r(A\mid b)=r(A)$, 故 $r(A\mid b)=r$.

(d)当 $r(A\mid\beta)=r$ 时, $r(A)=r(A\mid\beta)$, 故方程组 $AX=\beta$ 有解. 即 β 是 A 的列向量的线性组合.

12. 齐次线性方程组 $AX=0$ 是线性方程组 $AX=b$ 的导出组, 则(　　).

(a) $AX=0$ 只有零解时, $AX=b$ 有惟一解

(b) $AX=0$ 有非零解时, $AX=b$ 有无穷多个解

(c) u 是 $AX=0$ 的通解, x_0 是 $AX=b$ 的特解时, x_0+u 是 $AX=b$ 的通解

(d) v_1,v_2 是 $AX=b$ 的解时, v_1-v_2 是 $AX=0$ 的解

解　选(c),(d).

(a) 不是答案是因为 $AX=0$ 只有零解时, $AX=b$ 可能无解, 正确的命题是: 当 $AX=0$ 只有零解, 而且 $AX=b$ 有解时, $AX=b$ 有惟一解.

同理(b) 不是答案, 正确的命题是: 当 $AX=0$ 有非零解, 而且 $AX=b$ 有解时, $AX=b$ 有无穷多组解.

13. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $AX=0$ 仅有零解的充分必要条件是(　　).

(a) A 的行向量组线性无关

(b) A 的行向量组线性相关

(c) A 的列向量组线性无关

(d) A 的列向量组线性相关

解　选(c).

当把 A 按列分块为 $A=(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 时,

$$AX=0 \qquad x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n=0$$

从而 $AX=0$ 仅有零解意味着 A 的列向量线性无关, 故答案是(c).

14. 设齐次线性方程组 $AX=0$, 其中 A 为 $m\times n$ 矩阵, 且 $r(A)=n-3$. v_1, v_2, v_3 是方程组的三个线性无关的解向量, 则(　　)是 $AX=0$ 的基础解系.

(a) v_1, v_2, v_3

(b) $v_1-v_2, v_2-v_3, v_3-v_1$

(c) $v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3$

(d) $v_3-v_2-v_1, v_3+v_2+v_1, -2v_3$

解　选(a), (c).

当 $r(A)=n-3$ 时, $AX=0$ 的基础解系含 $n-r(A)=3$ 个线性无关的解向量. 同时, 方程组的任意三个线性无关的解向量都可构成该方程组基础解系.

(a) 从已知条件知 v_1, v_2, v_3 是 $AX=0$ 的基础解系.

(b) 因为 $(v_1-v_2)+(v_2-v_3)+(v_3-v_1)=0$. 所以 v_1-v_2, v_2-v_3,

$v_3 - v_1$ 线性相关, 不是基础解系.

(c) 当 v_1, v_2, v_3 是线性无关的解向量时, $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3$ 仍然是解向量. 且由于

$$(v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3) = (v_1, v_2, v_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 秩为3. 所以 $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3$ 线性无关, 从而是方程组的基础解系.

(d) $(v_3 - v_2 - v_1, v_3 + v_2 + v_1, -2v_3)$

$$= (v_1, v_2, v_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 的秩等于2, 小于3, 因此 $v_3 - v_2 - v_1, v_3 + v_2 + v_1, -2v_3$ 线性相关. 故不是基础解系.

综合上述分析, 答案为(a), (c).

15. 在投入产出表中, 下列等式正确的有(　　).

(a) $\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

(b) $y_k = z_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

(c) $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} z_j$

(d) $\sum_{j=1}^{n} x_{kj} + y_k = \sum_{i=1}^{n} x_{ik} + z_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

解　选(c), (d).

本题可直接由投入产出平衡表的定义选择答案.

自 测 试 题

1. **判断题**

(1) 若$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$是一个齐次线性方程组的基础解系，则$\{\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1\}$也是该方程组的基础解系.

(2) 若向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$中向量的维数大于$r$. 则该向量组必线性相关.

(3) 若$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$的向量中任意两个线性无关，则整个向量组线性无关.

(4) 齐次线性方程组的任何一个基础解系所含的向量个数相等.

(5) 若齐次线性方程组$AX=0$有非零解，则矩阵A的列向量线性相关.

(6) 若$X=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\eta$是方程组$AX=b$的通解，则

$$\overline{X}=k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_1+\eta)$$

也是$AX=b$的通解.

2. 求t的值. 使向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\7\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\\t\end{pmatrix}$线性相关.

3. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$

(1) 求向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$的秩和一个极大线性无关组.

(2) 把其余向量写成极大无关组的线性组合.

4. 已知A为4×4矩阵，秩$r(A)=3$，已知非齐次方程组$AX=b$的三个解$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$满足条件:

$$\alpha_1=(1,0,2,3)^T,\ \alpha_2+\alpha_3=(1,1,-1,4)^T$$

求方程组 $AX=b$ 的通解.

5. 设有线性方程组

$$\begin{cases} a_1x_1+x_2+x_3=a-3 \\ x_1+ax_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+ax_3=-2 \end{cases}$$

讨论 α取何值

(1) 方程组有惟一解.

(2) 方程组无解.

(3) 方程组有无穷多解.

6. 设 β是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一个解. 又$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$是 $AX=b$ 的导出组 $AX=0$ 的基础解系. 证明 $\beta,\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_r+\beta$是 $AX=b$ 的 $r+1$ 个线性无关的解.

自测试题解答

1. (1)× (2)× (3)× (4) √ (5) √ (6) √

2. $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\0&0&t-19\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$t=19$ 时, $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2<3$, 故$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$线性相关.

3. $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}2&3&2&4\\0&1&1&2\\2&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(1) 向量组的秩为 2, 一个极大线性无关组为$\{\alpha_1,\alpha_2\}$

(2) $\alpha_3=-\dfrac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2,\quad \alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$

4. 因为 $n-r(A)=4-3=1$. 因此 $AX=b$ 的导出组 $AX=0$ 的

基础解系为$\{\alpha\}$, α为$AX=0$的任何一个非零解.

又因为$A[2\alpha-(\alpha_2+\alpha_3)]=2A\alpha_1-A\alpha_2-A\alpha_3=2b-2b=0$. 故可取 $\alpha=2\alpha-(\alpha+\alpha_2)=(1,-1,5,2)^T\neq 0$ 且 α是$AX=0$的一个解.

故$AX=b$的通解X为

$$X=k\alpha+\alpha=k\begin{pmatrix}1\\-1\\5\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\ k \text{ 为任意常数.}$$

5. 系数矩阵A为三阶方阵.

$$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$$

(1) 由Cramer 法则. $AX=b$ 有惟一解 $\quad |A|\neq 0 \quad a\neq -2$ 而且$a\neq 1$, 此时

$$(A\mid b)\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{a-1}{a+2}\\0&1&0&\frac{-3}{a+2}\\0&0&1&\frac{-3}{a+2}\end{pmatrix}$$

得惟一解 $\qquad X=\dfrac{1}{a+2}(a-1,-3,-3)^T$

(2) $a=-2$时, $(A\mid b)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&-2\\0&-3&3&0\\0&0&0&9\end{array}\right)$

所以$AX=b$无解.

(3) $a=-1$时, $(A\mid b)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

因此 $AX=b$ 有无穷多组解,通解为

$$X = k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$$

6. 直接验证,可得 $A(\alpha_i+\beta)=A\alpha_i+A\beta=b$, $i=1,2,\cdots,r$. 即 $\alpha_i+\beta$ 是 $AX=b$ 的解.

下证 $\beta, \alpha_1+\beta, \alpha_2+\beta, \cdots, \alpha_r+\beta$ 线性无关.

任取数 $k_0, k_1, k_2, \cdots, k_r$, 若

$$k_0\beta+\sum_{i=1}^{r}k_i(\alpha_i+\beta)=0 \xrightarrow{\text{左乘}A} \sum_{i=0}^{r}k_i b=0 \quad \sum_{i=0}^{r}k_i=0$$

代入上式有

$$\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i=0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关,得

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$$

从而,若 $k_0\beta+\sum_{i=1}^{n}k_i(\alpha_i+\beta)=0$, 则有 $k_0=k_1=k_2=\cdots=k_r=0$.

故 $\beta, \alpha_1+\beta, \alpha_2+\beta, \cdots, \alpha_r+\beta$ 线性无关.

第四章　矩阵的特征值

习 题 解 析

(A)

1. **求下列矩阵的特征值及特征向量:**

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

解　(1) A **的特征多项式为**

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 1 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

所以 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ **是矩阵** A **的两个特征值**.

$\lambda_1 = 3$ **时**

$$\lambda_1 I - A = 3I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\lambda = 3$ 对应的全部特征向量为 $X = k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, k \neq 0.$

$\lambda = 1$ 时

$$\lambda I - A = I - A = \begin{pmatrix}-1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $\lambda = 1$ 对应的全部特征向量为 $X = k\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, k \neq 0.$

(2) A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-5 & -6 & 3\\1 & \lambda & -1\\-1 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda-5 & -6 & 3\\1 & \lambda & -1\\0 & \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-5 & -6 & 3\\1 & \lambda & -1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-5 & -9 & 3\\1 & \lambda+1 & -1\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-5 & -9\\1 & \lambda+1\end{vmatrix} = (\lambda-2)[(\lambda-5)(\lambda+1)+9]$$

$$= (\lambda-2)^3$$

所以矩阵 A 的三个特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$

$\lambda = 2$ 时

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix}-3 & -6 & 3\\1 & 2 & -1\\-1 & -2 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $\lambda = 2$ 对应的全部特征向量为

$$X = c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad (\text{其中 } c_1, c_2 \text{ 不全为 } 0)$$

(3) A 的特征多项式为

$$
|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & \lambda-1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \times 1\\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{array}
$$

$$
=\begin{vmatrix}\lambda-2 & \lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -(\lambda-2) & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2 & -(\lambda-2)\\ -1 & 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}
$$

$$
=(\lambda-2)^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}
$$

$$
=(\lambda-2)^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}
$$

$$
=(\lambda-2)^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & \lambda-1\end{vmatrix}
$$

$$
=(\lambda-2)^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3(\lambda+2)
$$

所以 A **的特征值为** $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,\ \lambda_4=-2.$

　　$\lambda=2$ **时**

$$
\lambda I-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
$$

所以 $\lambda = 2$ **对应的全部特征向量为**

$$X = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ 不同时为 } 0)$$

$\lambda = -2$ **时**

$$-2I - A = \begin{pmatrix}-3 & -1 & -1 & -1\\-1 & -3 & 1 & 1\\-1 & 1 & -3 & 1\\-1 & 1 & 1 & -3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $\lambda = -2$ **对应的全部特征向量为**

$$X = c\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad (c \neq 0)$$

(4) A **的特征多项式为**

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\0 & \lambda - 1 & 0\\-1 & 0 & \lambda\end{vmatrix} = (\lambda - 1)\begin{vmatrix}\lambda & -1\\-1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

所以 A **的特征值** $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1.$

$\lambda = 1$ **时**

$$I - A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $\lambda = 1$ **对应的全部特征向量为**

$$X = c_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 不全为 } 0)$$

$\lambda = -1$ 时

$$-I - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\lambda = -1$ 对应的全部特征向量为

$$X = c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0)$$

(5) A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$$

所以A的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$.

$\lambda = 1$ 时

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\lambda = 1$ 对应的全部特征向量为

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0)$$

$\lambda = -1$ 时

$$-I-A=\begin{pmatrix}-2&-3&-1&-2\\0&0&-1&-3\\0&0&-1&-5\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\lambda=-1$ 对应的全部特征向量为

$$X=c\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad(c\neq 0)$$

$\lambda=2$ 时

$$2I-A=\begin{pmatrix}1&-3&-1&-2\\0&3&-1&-3\\0&0&0&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&-\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\lambda=2$ 对应的全部特征向量为

$$X=c\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix}\quad(c\neq 0)$$

要点 4-1

n 阶方阵 A 的特征值是特征多项式 $|\lambda I-A|$ 的根，从特征方程 $|\lambda I-A|=0$ 中求出.

(1) **当 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，即 A 为二阶方阵时，A 的特征多项式为**

$$|\lambda I-A|=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+|A|$$

A 的两个特征值 λ_1, λ_2 是 $|\lambda E - A|$ 的两个根, 可通过多项式 $|\lambda E - A|$ 求出来: 分解为 $(\lambda - \lambda_i)$ 的因子形式, 令 $|\lambda E - A| = 0$ 可求得. 也可通过关系式

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

来求.

(2) 当 A 为 n 阶方阵时, 为求 A 的特征值, 需要求行列式 $|\lambda E - A|$ 的值. 因为最终需要将 $|\lambda E - A|$ 分解为因子乘积. 所以一般用行列式性质化简计算 $|\lambda E - A|$ 时, 其中的主要技巧是尽可能在一行或一列中形成 $(\lambda - \lambda_i)$ 的公因式, 将这些公因式提到行列式外面. 这样, 既可化简行列式的计算, 又可以使因式分解形式易得. 应该尽可能避免将 $|\lambda E - A|$ 表示成 n 阶多项式的标准形式再分解因子. 这样, 在 n 较大时, 计算量大, 且有一定的难度.

(3) 当矩阵 A 为三角形矩阵时, A 的 n 个特征值就是三角形矩阵主对角线上的 n 个元素.

(4) 在求特征值时, 应该清楚 n 阶方阵有 n 个特征值, 它们当中可能有重复的值. 例如, 当 $|\lambda E - A|$ 中含有 $(\lambda - 1)^3$ 时, A 有三个相同的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 或者说 $\lambda = 1$ 的代数重数为 3. 不可误认为此时 A 只有特征值 $\lambda = 1$.

(5) 矩阵 A 的对应特征值 λ_i 的特征向量是齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A)X = 0$$

的全体非零解. 用它的一般解(通解)表示 λ_i 对应的全部特征向量时, 应注意去除零解. 一般 λ_i 对应无穷多个特征向量. 当 λ_i 是 A 的 r_i 重特征值时, λ_i 对应的线性无关的特征向量至多 r_i 个. 它们是方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的基础解系.

2. 已知n阶矩阵A的特征值为λ.

(1) 求kA的特征值(k为任意实数).

(2) 若A可逆,求A^{-1}的特征值.

(3) 求$I+A$的特征值.

解　已知存在$X\neq 0$, $AX=\lambda X$

(1)
$$(kA)X=k(AX)=(k\lambda)X$$
所以由定义知$k\lambda$是kA的特征值.

(2) 在$AX=\lambda X$两边左乘A^{-1},则有
$$X=\lambda A^{-1}X$$
当A可逆时,$\lambda\neq 0$,故
$$A^{-1}X=\frac{1}{\lambda}X$$
由定义,$\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值.

(3)
$$(I+A)X=X+AX=X+\lambda X=(1+\lambda)X$$
由定义知$(1+\lambda)$是$(I+A)$的特征值.

3. 如果n阶矩阵A满足$A^2=A$,则称A是幂等矩阵. 试证幂等矩阵的特征值只能是0或1.

证　设λ为A的特征值,则存在向量$X\neq 0$, $AX=\lambda X$,从而
$$A^2X=A(\lambda X)=\lambda^2X$$
由$A^2=A$,有$\lambda X=\lambda^2X$即$(\lambda^2-\lambda)X=0$.

当$X\neq 0$时,有$\lambda^2-\lambda=0$即$\lambda=0$或$\lambda=1$.

4. 设矩阵A非奇异,证明$AB\sim BA$.

证　A非奇异时,A^{-1}存在. 因此有
$$A^{-1}(AB)A=BA\quad\text{即}\quad AB\sim BA$$

5. 设$A\sim B$, $C\sim D$,证明
$$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$$

证　由$A\sim B$, $C\sim D$知,存在可逆矩阵P, Q,使

$$P^{-1}AP = B, \quad Q^{-1}CQ = D$$

取分块对角矩阵, $S=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, 则 S 可逆, 且 $S^{-1}=\begin{pmatrix} P^{-1} & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix}$, 从而

$$S^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}S=\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} P^{-1}AP & 0 \\ 0 & Q^{-1}CQ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

即
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

6. 题1 中的各矩阵, 如果与对角矩阵相似, 则写出相似对角矩阵 Λ 及 P.

解　矩阵 A 相似于对角矩阵的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量, 由题意的计算结果, 题 1 中, 第(1), (3), (4)中矩阵相似于对角矩阵, (2) 与(5)不相似于对角矩阵.

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 时, $\Lambda=\begin{pmatrix} 3 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\Lambda$

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 时,

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}, \quad P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

(4) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 时, $\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

要点 4-2

n 阶方阵 A 相似于对角矩阵 Λ 的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，以它们为列向量可以获得可逆矩阵 $P = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$，对角矩阵 Λ 的主对角线上的元素是 A 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，有 $P^{-1}AP = \Lambda$.

在写可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ 时，应注意特征向量与特征值的对应，即 P 的第 i 列 X_i 是对应于矩阵 Λ 主对角线元素 $[\lambda]_{ii} = \lambda_i$ 的特征向量. 一般，矩阵 P 不是惟一的. 若不计较对角矩阵 Λ 的主对角线上元素的次序，则 Λ 是惟一的.

例如题 6(1)，**取** $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **时**，$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & \\ & 1 \end{pmatrix}$；**取** $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **时**，$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$.

7. **计算向量 α 与 β 的内积.**

(1) $\alpha = (1, -2, 2)^T$，$\beta = (2, 2, -1)^T$

(2) $\alpha = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}, -1\right)^T$

$\beta = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -2, \sqrt{2}, \dfrac{1}{2}\right)^T$

解　**向量 α 与 β 的内积** $(\alpha, \beta) = \alpha^T\beta$

(1) $(\alpha, \beta) = \alpha^T\beta = (1, -2, 2)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -4$

(2) $(\alpha, \beta) = \alpha^T\beta = -\dfrac{2}{4} + 1 + \dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

8. **把下列向量单位化:**

(1) $\alpha = (2, 0, -5, -1)^T$

(2) $\alpha = (-3, 4, 0, 0)^T$

解　单位化指 $\alpha \neq 0$, 用 $\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 得到单位向量的过程.

(1) $\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|} = \dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\alpha)}}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{30}}(2, 0, -5, -1)^T$

(2) $\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|} = \dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\alpha)}}\alpha = \dfrac{1}{5}(-3, 4, 0, 0)^T$

9. **将下列线性无关的向量组正交化**:

(1) $\alpha_1 = (1, 2, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, -5, 3)^T$

$\alpha_3 = (3, 2, 8, -7)^T$

(2) $\alpha_1 = (1, -2, 2)^T$, $\alpha_2 = (-1, 0, -1)^T$

$\alpha_3 = (5, -3, -7)^T$

解　用 Schmidt **正交化过程进行正交化**.

(1) $\beta_1 = \alpha_1 = (1, 2, 2, -1)^T$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1 = \alpha_2 + \beta_1 = (2, 3, -3, 2)^T$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T\beta_2}{\beta_2^T\beta_2}\beta_2 = \alpha_3 - 3\beta_1 + \beta_2$$

$$= (2, -1, -1, -2)^T$$

即所得正交向量组为

$(1, 2, 2, -1)^T, (2, 3, -3, 2)^T, (2, -1, -1, -2)^T$

(2) $\beta_1 = \alpha_1 = (1, -2, 2)^T$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1 = \alpha_2 + \frac{1}{3}\beta_1 = \frac{1}{3}(-2, -2, -1)^T$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T\beta_2}{\beta_2^T\beta_2}\beta_2$$

$= \alpha_3 + \dfrac{1}{3}\beta_1 - \beta_2 = (6, -3, 6)^T$ **即所得正交组为**

$(1, -2, 2)^T, \dfrac{1}{3}(-2, -2, -1)^T, (6, -3, 6)^T$

10. **判断下面的矩阵是否为正交矩阵**

(1) $Q=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$　(2) $Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$

解　Q **为正交矩阵当且仅当** $Q^TQ=QQ^T=I$ **或** $Q^{-1}=I$.

(1) $Q^TQ=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

所以 Q **是正交矩阵**.

(2) $Q^TQ=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 Q **是正交矩阵**.

11. **设** α **为** n **维列向量**, A **为** n **阶正交矩阵, 证明**:

$$\|A\alpha\|=\|\alpha\|.$$

证　**已知方阵** A **为正交矩阵. 所以** $A^TA=I$.

又 $\|A\alpha\|=\sqrt{(A\alpha)^TA\alpha}=\sqrt{\alpha^TA^TA\alpha}=\sqrt{\alpha^T\alpha}=\|\alpha\|$.

所以
$$\|A\alpha\|=\|\alpha\|$$

12. **证明正交矩阵的下述性质**:

(1) **若** Q **为正交矩阵, 则其行列式的值为** 1 **或** -1.

(2) **若** Q **为正交矩阵, 则** Q **可逆且** $Q^{-1}=Q^T$.

(3) 若 P,Q 都是正交矩阵，则它们的乘积 PQ 也是正交矩阵.

证　(1) 因为 Q 满足条件　$Q^TQ=I$，两边取行列式，有

$$|Q^TQ|=1,\quad |Q^TQ|=|Q^T||Q|=|Q|^2$$

从而　$$|Q|^2=1\quad 即\quad |Q|=\pm 1.$$

(2) 当 Q 为正交矩阵时，由(1)，$|Q|=\pm1\neq0$. 从而 Q 为可逆矩阵，即 Q^{-1} 存在. 在等式 $Q^TQ=I$ 两边右乘 Q^{-1}，有

$$Q^T=Q^{-1}$$

(3) 已知矩阵 P,Q 有性质 $P^TP=I$，$Q^TQ=I$，所以

$$(PQ)^T(PQ)=Q^TP^TPQ=Q^TQ=I$$

由定义，乘积 PQ 也是正交矩阵.

13. 求正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$

解　本题中矩阵 A 为对称矩阵，因此存在正交矩阵 Q，使 A 相似于对角矩阵.

(1) 先求 A 的特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)\lambda^2$$

故　$$\lambda_1=\lambda_2=0,\quad \lambda_3=3$$

对 $\lambda_1=0$

$$A-\lambda_1I=A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $\lambda_1=0$ 对应的线性无关的特征向量是

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

用 Schmidt 正交化过程, 得到正交特征向量

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1}\beta_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

单位化, 得到 $\lambda = 0$ 对应的标准正交的特征向量为

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

对 $\lambda = 3$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $\lambda = 3$ 对应的线性无关的特征向量是

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{单位化得 } \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而正交矩阵

$$Q = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 先求 A 的特征值:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$$

所以 $$\lambda_1 = \lambda_2 = -1,\quad \lambda_3 = 8$$

对 $\lambda = -1$

$$A - (-1)I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以线性无关的特征向量为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

同 Schmidt 正交化过程. 得到正交的特征向量为

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

单位化得

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

对 $\lambda = 8$

$$A - 8I = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以线性无关的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, 为避免分式出现, 可改写为

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

从而正交矩阵

$$Q=(\boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\varepsilon})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$Q^{T}AQ=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 8\end{pmatrix}$$

要点 4-3

实对称矩阵在矩阵的特征值问题中是性质很好的矩阵. 其主要性质为:

(1) **实对称矩阵的特征值为实数.**

(2) **实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量是正交的.**

(3) **实对称矩阵一定相似于对角矩阵.**

更进一步有结果:

n **阶方阵** A **为对称矩阵的充要条件是存在正交矩阵** Q, **使** $Q^{T}AQ=Q^{-1}AQ$ **为对角矩阵.**

对一个给定的对称矩阵 A, **求正交矩阵** Q **的步骤是:**

(1) **对每一个特征值** λ, **求** λ **对应的线性无关的特征向量.**

(2) **用** Schmidt **正交化过程, 将步骤**(1)**中求得的线性无关的特征向量正交化, 然后再单位化, 得到** λ **对应的标准正交的特征向量. 从而得到** A **的全部的标准正交的特征向量** $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\varepsilon}$.

(3) 取矩阵$Q = (\varepsilon, \varepsilon, \cdots, \varepsilon)$, 则$Q$为正交矩阵, Q将可使矩阵A正交对角化, 即$Q^T AQ = \Lambda$, Λ为对角矩阵.

与矩阵相似同理. 正交矩阵Q不是惟一的. 例如, 当Q的第i列是ε时, $-\varepsilon$也可作为Q的第i列, 因此在题13(1)中, 可取Q为

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

或
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

都成立
$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

只是应该注意矩阵Q的第i列ε应和对角矩阵Λ主对角线上的元素λ对应, 即ε应该是λ所对应的特征向量.

(B)

1. λ, λ都是n阶矩阵A的特征值, $\lambda \neq \lambda$, 且X_1与X_2分别是对应于λ与λ的特征向量, 当(   )时, $X = k_1X_1 + k_2X_2$必是A的特征向量.

(a) $k_1 = 0$且$k_2 = 0$　　(b) $k_1 \neq 0$且$k_2 \neq 0$

(c) $k_1 \cdot k_2 = 0$　　(d) $k_1 \neq 0$而$k_2 = 0$

解 选(d).

(a) $k_1 = 0$ 且 $k_2 = 0$ 时, $X = 0$ 不可能是特征向量, 因为任何特征向量必须非零.

(b) 当 $k_1 \neq 0$ 且 $k_2 \neq 0$ 时, $X = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 既不是对应于 λ_1 的特征向量, 也不是对应于 λ_2 的特征向量, 即 X 不是 A 的特征向量.

否则, 如果 X 是对应于某一个特征值 λ_j 的特征向量, 则

$$AX = \lambda_j X$$

它等价于

$$k_1\lambda_1 X_1 + k_2\lambda_2 X_2 = k_1\lambda_j X_1 + k_2\lambda_j X_2$$

即
$$k_1(\lambda_1 - \lambda_j)X_1 + k_2(\lambda_2 - \lambda_j)X_2 = 0$$

由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时, X_1 与 X_2 正交, 可得

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_j) = 0 \xrightarrow{k_1 \neq 0} \lambda_1 = \lambda_j$$

$$k_2(\lambda_2 - \lambda_j) = 0 \xrightarrow{k_2 \neq 0} \lambda_2 = \lambda_j$$

与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 相矛盾.

(c) $k_1 \cdot k_2 = 0$ 包括 $k_1 = 0$ 而且 $k_2 = 0$ 的情形, 因此 $X = k_1X_1 + k_2X_2$ 不一定是 A 的特征向量.

(d) 当 $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$ 时, $X = k_1X_1$ 是对应于 λ_1 的特征向量.

2. A 与 B 是两个相似的 n 阶矩阵, 则( ).

(a) 存在非奇异矩阵 P, 使 $P^{-1}AP = B$

(b) 存在对角矩阵 D, 使 A 与 B 都相似于 D

(c) $|A| = |B|$

(d) $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$

解 选(a), (c).

本题是判断所给命题是否为 A 相似于 B 的必要条件.

(a) 是 A 与 B 相似的定义, 故(a)正确.

(b) 因为矩阵不一定都能相似于对角矩阵, 因此由 A 相似于 B, 不能断定 A 与 B 可对角化, 故结论(b)不正确.

(c) 因为 $P^{-1}AP = B$ 时 $|P^{-1}AP| = |B|$ 即 $|A| = |B|$, 所以结论(c)正确.

(d) A 相似于 B, 可以有 $|\lambda - A| = |\lambda - B|$, 但行列式相等时, 其矩阵不一定相等. 因此, 一般不一定有

$$\lambda - A = \lambda - B$$

3. 如果(　　), 则矩阵 A 与矩阵 B 相似.

(a) $|A| = |B|$

(b) $r(A) = r(B)$

(c) A 与 B 有相同的特征多项式

(d) n 阶矩阵 A 与 B 有相同的特征值且 n 个特征值各不相同

解　选(d).

本题要求判断所给命题是否为 A 与 B 相似的充分条件. 其中, (a), (b), (c) 都是 A 与 B 相似的必要条件, 它们都不是充分条件.

由命题(d), A, B 均有 n 个互异的特征值, 故 A, B 可对角化. 当它们的特征值相同时, 它们将相似于同一个对角矩阵 D, 即 A 相似于 D, 且 B 相似于 D. 亦即存在可逆矩阵 P_1, P_2, 使

$$\begin{matrix} P_1^{-1}AP_1 = D \\ P_2^{-1}BP_2 = D \end{matrix} \quad P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2 \quad P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = B$$

$$(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1}) = B$$

因此 A 相似于 B.

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 与矩阵(　　)相似.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解　选(a), (c).

本题中(a), (b), (c), (d) 中矩阵的特征值均与 A 的特征值相

同. 注意到 A 为对角矩阵, 下面具体分析所给矩阵是否可对角化.

将(a) 与 A 比较, 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 A 特征值放置的次序不同, 同时交换(a) 中矩阵的第 2 行与第 3 行, 第 2 列与第 3 列, 即可将次序调得与 A 一致, 因此取初等矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

故
$$P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

故(a) 为正确答案.

(b) 当 $\lambda = 1$ 时

$$\text{秩} \left(I - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \text{秩} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

故矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 对应 $3 - 2 = 1$ 个线性无关的特征向量. 从而该矩阵不可对角化, 从而不相似于 A.

(c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时

$$\text{秩} \left(I - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \text{秩} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

从而 $\lambda = 1$ 对应有 $3 - 1 = 2$ 个线性无关的特征向量, 故该矩阵相似

于对角矩阵, 从而相似于 A.

(d) 本命题中的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 (b) 的情形同理, 不可对角化, 故不相似于 A.

5. 下述结论中, 正确的有(　　).

(a) 若向量 α 与 β 正交, 则对任意实数 a, b, $a\alpha$ 与 $b\beta$ 也正交

(b) 若向量 β 与向量 α_1, α_2 都正交, 则 β 与 α_1, α_2 的任一线性组合也正交

(c) 若向量 α 与 β 正交, 则 α, β 中至少有一个是零向量

(d) 若向量 α 与任意同维向量正交, 则 α 是零向量

解　选 (a), (b), (d).

其中 (a) 与 (b) 易于直接验证.

(d) 当 α 与任何向量正交时, α 与 α 也应正交.

从而
$$\|\alpha\|^2 = \alpha^T\alpha = 0$$
即
$$\alpha = 0$$

(c) 不正确. 容易给出反例: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 均不为零向量. 但 e_1 与 e_2 正交.

6. A 为三阶矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为其特征值, 当(　　)时, $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$.

(a) $|\lambda_1| = 1, |\lambda_2| < 1, |\lambda_3| < 1$

(b) $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$

(c) $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1, |\lambda_3| < 1$

(d) $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$

解　选 (c).

由定理 4.13, 只有 (c) 成立时, 才有 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$.

自 测 试 题

1. **判断题**

(1) 如果矩阵 A 的特征值全为零，则 A 相似于零矩阵.

(2) 方阵 A 的一个特征值 λ 只对应 $n-r(\lambda I-A)$ 个特征向量.

(3) 相似的矩阵有同样的特征向量.

(4) 若 A 和 B 相似，则 $(3A^2+A)$ 和 $(3B^2+B)$ 相似.

(5) A 有 n 个互不相同的特征值是 A 相似于对角矩阵的

(a) 充分必要条件.　　(b) 充分而非必要条件.

(c) 必要而非充分条件.　　(d) 既非充分又非必要条件.

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ 相似.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，求 A^{-1} 与 A^* 的特征值.

3. 已知矩阵 A 的特征值为 $1, 2, -4$.

(1) 求 $|A^2-5A|$.

(2) 求 $B=3A^2-2A+5I$ 的特征值.

(3) 求 $|B|$.

4. 已知 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$，求 $P^{-1}(A^2-4A+I)P$

5. 已知 $\alpha=(1, t, 1)^T$ 是矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，求 t 的值和 α 对应的特征值 λ.

6. 设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$, $|\alpha|=2$, 又 n 阶方阵 $A=\alpha\cdot\alpha^T$.

(1) 证明 A 相似于对角矩阵.

(2) 写出与 A 相似的对角矩阵.

自测试题解答

1. (1)× (2)× (3)× (4) √ (5) (a)× (b) √ (c)× (d)× (6) √

2. 因为 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&4&2\\0&0&5\end{pmatrix}$ 是上三角矩阵,所以 A 的特征值为

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=5$$

从而: A^{-1}的特征值 $u_i=\frac{1}{\lambda_i}$, 即

$$u_1=\frac{1}{2},\ u_2=\frac{1}{4},\ u_3=\frac{1}{5}.$$

因为 $A^*=|A|A^{-1}$. 又 $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=40$, 从而 A^* 的特征值为

$$r_i=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\frac{1}{\lambda_i}$$

即 A^* 的特征值为 $r_1=\lambda_2\cdot\lambda_3=20$, $r_2=\lambda_1\cdot\lambda_3=10$, $r_3=\lambda_1\cdot\lambda_2=8$.

3. 已知 A 的三个特征值 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-4$ 时,

(1) 由于 A^2-5A 的特征值 $\mu_i=\lambda_i^2-5\lambda_i(i=1,2,3)$, 从而

$$\mu_1=-4,\ \mu_2=-6,\ \mu_3=36$$

故 $|A^2-5A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=(-4)\times(-6)\times36=864$.

(2) B 的特征值 $\eta_i=3\lambda_i^2-2\lambda_i+5(i=1,2,3)$, 故

$$\eta_1=6,\ \eta_2=13,\ \eta_3=61$$

(3) 由(2)知, $|B|=\eta_1\cdot\eta_2\cdot\eta_3=6\times13\times61=4758$.

4. 从 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{pmatrix}$, 得 $A=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{pmatrix}P^{-1}$, 因此

$$
\begin{aligned}
&A^2-4A+I\\
&=P\left[\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{pmatrix}^2-4\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\right]P^{-1}\\
&=P\begin{pmatrix}-2&&\\&-3&\\&&22\end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}
$$

故
$$P^{-1}(A^2-4A+I)P=\begin{pmatrix}-2&&\\&-3&\\&&22\end{pmatrix}.$$

5. 由题意, α满足条件$A^{-1}\alpha=\lambda\alpha$

在上式两边左乘A, 有$\alpha=\lambda A\alpha$

即
$$\begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3+t\\2+2t\\3+t\end{pmatrix}\qquad \begin{cases}\lambda(3+t)=1\\ \lambda(2+2t)=1\end{cases}$$

解之得　$t=1,\ \lambda=\dfrac{1}{4};\ t=-2,\ \lambda=1.$

6. (1) 因为$A^T=(\alpha\alpha^T)^T=(\alpha^T)^T\cdot\alpha^T=\alpha\alpha^T=A$, 所以$A$为对角矩阵. 由对角矩阵的性质, A相似于对角矩阵.

(2) 由已知条件$A^2=\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=(\alpha)^2\alpha\alpha^T=4A$, 设$\lambda$为$A$的特征值, 则有$\lambda^2=4\lambda$, 即$\lambda=4$或$\lambda=0$, 又$r(A)\le r(\alpha)=1$; $A\neq 0$, $r(A)\ge 1$. 得　$r(A)=1$

当$A\sim\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$时, $\lambda=4$或$\lambda=0$, $r\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}=1$,

所以$\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}$是与$A$相似的对角矩阵.

第五章　二　次　型

习题解析

(A)

1. **写出下列各二次型的矩阵.**

(1) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 3x_3^2$

(2) $x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_4^2$

解　(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & -2 & 4 \\ \frac{3}{2} & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, **则**

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 3x_3^2 = X^T AX$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, **则**

$$x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_4^2 = X^T AX$$

2. **写出下列各对称矩阵所对应的二次型.**

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ -3 & -2 & \frac{1}{3} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 3 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

解　$i=j$，取 a_{ii} 为 x_i^2 前系数；$i\neq j$，取 $(a_{ij}+a_{ji})$ 为 x_ix_j 前系数.

(1) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-2x_1x_2-6x_1x_3+2x_1x_4-4x_2x_3$

$$+x_2x_4+\frac{1}{3}x_3^2-3x_3x_4$$

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+x_1x_3-3x_1x_4-2x_2x_3$

$$-2x_2x_4+6x_3x_4$$

要点 5-1

一个关于 n 个变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的实二次型是一个实系数二次齐次多项式：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$. **它也是一个 n 元实函数**.

二次型可表示为 $f=X^{T}AX$ **的形式，其中** X **为这** n **个变元组成的列向量，**A **如果满足下列条件，则称** A **为二次型对应的矩阵**.

(1) **当** f **是** n **个变元的二次型时，**A **是一个** n **阶方阵**.

(2) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ **的元素构成规定为**：$i=j$ **时，**$a_{ii}=$（**平方**

项 x_i^2 前的系数); $i\neq j$ 时, $a_{ij}=\frac{1}{2}$(交叉项 $x_i\cdot x_j$ 前的系数).
因为A 为一个实对称矩阵. 在这种规定下, 二次型对应的矩阵是惟一的.

例如, 从矩阵等式的角度, 成立下列二次型的表示:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-3x_1x_3+x_3^2$$

$$=X^T\begin{matrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}X$$

但其中矩阵就不是二次型对应的矩阵.

(3) 定义二次型 f 的秩等于它所对应的矩阵的秩.

3. 对于对称矩阵 A 与 B, 求出非奇异矩阵 C, 使 $C^TAC=B$.

(1) $A=\begin{matrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{matrix}$, $B=\begin{matrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{matrix}$

(2) $A=\begin{matrix}0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\\ -\frac{1}{2} & -1 & 0\end{matrix}$, $B=\begin{matrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\\ -\frac{3}{2} & -1 & 0\end{matrix}$

解　用初等变换法.

(1) $$\begin{pmatrix}A\\ \hdashline I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ \hdashline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\\ \hdashline C\end{pmatrix}$$

因此
$$C=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad C^{T}AC=B$$

$$(2)\ \begin{pmatrix}A\\ \hdashline I\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc}0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&-1\\ -\frac{1}{2}&-1&0\\ \hdashline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}\\ \times 1\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc}1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}&0&-1\\ -\frac{3}{2}&-1&0\\ \hdashline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$$

因此
$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad C^{T}AC=B$$

4. **分别用配方法和初等变换法化下列二次型为规范形.**

(1) $x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$

(2) $x_1x_2-4x_1x_3+6x_2x_3$

解　(1) **用配方法.**

$$\begin{aligned}&x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3\\=&(x_1+x_2-2x_3)^2+4x_2^2+4x_2x_3-8x_3^2\\=&(x_1+x_2-2x_3)^2+(2x_2+x_3)^2-9x_3^2\end{aligned}$$

令
$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-2x_3\\y_2=2x_2+x_3\\y_3=3x_3\end{cases}$$

则
$$\begin{cases}x_1=y_1-\frac{1}{2}y_2+\frac{5}{6}y_3\\x_2=\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{6}y_3\\x_3=\frac{1}{3}y_3\end{cases}$$

该变换为可逆变换, 原二次型变为

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

若用初等变换法, 则

$$\left(\frac{A}{I}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \\ \hdashline 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ \hdashline 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

所以 $C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $f \xlongequal{X=CY} y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(2) 用配方法.

令 $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3$. 原式化为

$$f = (y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - y_2^2 - y_3^2 - 10y_2y_3$$

$$= (y_1 + y_3)^2 - (y_2^2 + 10y_2y_3 + 25y_3^2) + 24y_3^2$$

$$= (y_1+y_3)^2-(y_2+5y_3)^2+(2\sqrt{6}y_3)^2$$

再令

$$z_1=y_1+y_3$$
$$z_2=2\sqrt{6}y_3$$
$$z_3=y_2+5y_3$$

得

$$f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$$

最终线性变换:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\sqrt{6}\\0&1&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{\sqrt{6}}&1\\1&\frac{2}{\sqrt{6}}&-1\\0&\frac{1}{2\sqrt{6}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

从而令

$$x_1=z_1-\frac{3}{\sqrt{6}}z_2+z_3$$
$$x_2=z_1+\frac{2}{\sqrt{6}}z_2-z_3$$
$$x_3=\frac{1}{2\sqrt{6}}z_3$$

则

$$f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$$

若用初等变换法,则

$$
\left(\frac{A}{I}\right)=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc}0 & \frac{1}{2} & -2\\ \frac{1}{2} & 0 & 3\\ -2 & 3 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \times 1\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \quad\times 1\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc}1 & \frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 3\\ 1 & 3 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-1)\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \times\left(-\frac{1}{2}\right)\quad \times(-1)\end{array}
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2}\\ 0 & \frac{5}{2} & -1\\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -1\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \times 10\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \times 10\end{array}
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 24\\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -6\\ 1 & \frac{1}{2} & 4\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 24 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\\ \hline 1 & -6 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 4 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \times\frac{1}{\sqrt{24}}\\ \times 2\\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \times\frac{1}{\sqrt{24}}\quad \times 2\end{array}
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ \hline 1 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & -1\\ 1 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 1\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{6}} & 0\end{array}\right)
$$

所以
$$C=\begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & -1\\ 1 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 1\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$$

$$f\xrightarrow{X=CY}y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

要点 5-2

用配方法化二次型为标准形时,分两种基本情形:

(1) 二次型含平方项时,先将含 x_1 的项集中在一起,配成平方和,然后再依次将含 x_2, x_3 等变元项结合在一起配,使之最终成为完全含平方和的项.

(2) 二次型不含平方项,只含交叉项 x_ix_j 时,首先令 $x_i=y_i+y_j$, $x_j=y_i-y_j$, …,使二次型产生平方项,再用方法(1)配成平方和.

用配方法配完二次型后,需要借助矩阵运算写出变元变换式子.用配方法时,可逆的线性变换不是惟一的.二次型的标准形也不是惟一的.但二次型的标准形中的惯性指数,即标准形中正平方和的项数和负平方和的项数是惟一的.

初等变换法依同时对二次型矩阵的行、列施行同种线性变换的原则.每一对行、列初等变换完成后,矩阵仍然是对称矩阵.最后可以将矩阵化为对角矩阵.也可将矩阵化为形如
$$\begin{pmatrix}I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0\end{pmatrix}$$
的对角矩阵,使对应的二次型为规范形.

配方法和初等变换法都可将二次型化为标准形和规范形.

5. 求一非奇异矩阵 C,使 C^TAC 为对角矩阵.

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&1&3\end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&-1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$

解　求非奇异矩阵 C, **可用初等变换法.**

(1) $$\begin{pmatrix}A\\ \hdashline I\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}1&2&0\\2&0&1\\0&1&3\\ \hdashline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-4&1\\0&1&3\\ \hdashline 1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-4&0\\0&0&13/4\\ \hdashline 1&-2&-1/2\\0&1&1/4\\0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-4&0\\0&0&13\\ \hdashline 1&-2&-1\\0&1&1/2\\0&0&2\end{array}\right)$$

所以 $C=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&2\end{pmatrix}$ **时**, $C^{T}AC=\begin{pmatrix}1&&\\&-4&\\&&13\end{pmatrix}$.

(2) $$\begin{pmatrix}A\\ \hdashline I\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}0&1&-2\\1&0&-1\\-2&-1&0\\ \hdashline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc}2&1&-3\\1&0&-1\\-3&-1&0\\ \hdashline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2}\\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -4\\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以非奇异矩阵 $C=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C^{T}AC=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -4\end{pmatrix}$.

6. **用正交替换法把下列二次型化为标准形, 并写出所作的变换**.

(1) $2x_1x_2-2x_3x_4$

(2) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$

解 (1) **二次型矩阵** $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

A **的特征值** $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=\lambda_4=-1$.

对 $\lambda=1$

$$A-I=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-1&-1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

线性无关的特征向量为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

因为 α_1 与 α_2 正交, 单位化得

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

对 $\lambda=-1$

$$A+I=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

线性无关的特征向量为

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

α_3 与 α_4 正交, 单位化得

$$\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \beta_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

于是得正交矩阵

$$C=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

取正交变换 $X = CY$

$$2x_1x_2 - 2x_3x_4 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$$

(2) 二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+1)$$

A 的特征值 $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = -1$.

对 $\lambda_1 = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $\lambda_1 = 2$ 对应的特征向量为

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad 或 \quad \alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

对 $\lambda_2 = 5$

$$A-5I=\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得 $\lambda_2=5$ 对应的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

对 $\lambda_3=-1$

$$A+I=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得 $\lambda_3=-1$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

不同特征值对应的特征向量是正交的, 将它们单位化, 得矩阵 A 的标准正交的特征向量为

$$\beta_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix},\quad \beta_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\quad \beta_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

由它们构成正交矩阵 C, 即

$$C=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&2\\-1&-2&2\\-2&2&1\end{pmatrix}$$

取正交变换

$$X=CY$$

$$x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3=2y_1^2+5y_2^2-y_3^2.$$

要点 5-3

正交变换化二次型为标准形的步骤:

(1) 写出二次型对应的对称矩阵 A.

(2) 求 A 的特征值与特征向量.

(3) 若 λ 为 $t(t>1)$ 重根, 则用 Schmidt 正交化过程将 λ 对应的 t 个线性无关的特征向量正交化, 然后再单位化, 从而得到特征值 λ 对应的标准正交的特征向量.

若 λ 为单根 $(t=1)$. 只需将 λ 对应的一个线性无关的特征向量单位化.

(4) 以 A 的全部标准正交的特征向量为列构成正交矩阵 C, 取正交变换 $X=CY$, 则二次型将被化为标准形

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

正交变换因不改变向量的内积而不改变二次型 $f=k$(k 为常数)的图形形状, 是二次型化简方法中最重要的方法.

应注意到正交变换只能将二次型化简为标准形: $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$, 其平方项前的系数是 A 的特征值. 它不一定能将二次型化为规范形.

7. 求 a 的值, 使二次型为正定

(1) $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$

(2) $5x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$

解　(1) 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ a & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$

由 A 的顺序主子式大于零, 得

$$\begin{vmatrix}1 & a\\ a & 1\end{vmatrix}=1-a^2>0,\quad |A|=-(5a^2+4a)>0$$

解得

$$-\frac{4}{5}<a<0$$

(2) 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

由 A 正定的充要条件是 A 的顺序主子式大于零，即

$$|5|> 0,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} > 0,\quad |A| = a - 2 > 0$$

得
$$a > 2$$

8. 设 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶半正定矩阵. 试证：A+ B 为正定矩阵.

证　取二次型 $f = X^T(A+B)X$，已知 $\forall X\neq 0$,

$$X^TAX > 0,\ X^TBX \geq 0,$$

所以
$$\forall X\neq 0,$$

$$f(X)= X^TAX+ X^TBX> 0$$

由定义，二次型 f 正定，从而(A+ B)为正定矩阵.

9. 设 A，B 分别为 m，n 阶正定矩阵，则分块矩阵

$$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

也是正定矩阵.

证　已知 A，B 为正定矩阵，则存在 m 阶和 n 阶非奇异矩阵 P，Q，使

$$P^TAP = I_m,\quad Q^TBQ = I_n$$

取 $S=\begin{pmatrix} P & \\ & Q \end{pmatrix}$，则 S 为(m+ n)阶非奇异矩阵.

$$S^TCS = \begin{pmatrix} P^T & \\ & Q^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & \\ & Q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P^TAP & \\ & Q^TBQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & \\ & I_n \end{pmatrix} = I_{m+n}$$

由 A 正定的充要条件，矩阵 C 正定.

(B)

1. 下列各式中有(　　)等于 $x_1^2+6x_1x_2+3x_2^2$.

(a) $(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

(b) $(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

(c) $(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

(d) $(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 7 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

解　选(a),(b),(d).

因为在形如 X^TAX 的二项式中,a_{ii}是 x_i^2 前系数,$(a_{12}+a_{21})$是 x_1x_2 前的系数,所有结果中都是 $a_{11}=1$, $a_{22}=3$. 其中(a),(b),(d)满足 $a_{12}+a_{21}=6$. 故答案是(a),(b),(d).

2. 矩阵(　　)是二次型 $x_1^2+6x_1x_2+3x_2^2$ 的矩阵.

(a) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

选(c).

解　当定义二次型的矩阵是对称矩阵时,该矩阵是惟一的. 故(c)是答案.

3. 设 A, B 为同阶方阵, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 且 $X^TAX=X^TBX$, 当(　　)时, A= B.

(a) $r(A)=r(B)$　　(b) $A^T=A$

(c) $B^T=B$　　(d) $A^T=A$ 且 $B^T=B$

解　选(d).

本题意为选择二次型矩阵惟一的条件. 当 A, B 均为对称矩阵时, 二次型矩阵是惟一的, 故答案为(d).

4. A 是 n 阶正定矩阵的充分必要条件是(　　).

(a) $|A| > 0$

(b) 存在 n 阶矩阵 C, 使 $A = C^{T}C$

(c) 负惯性指标为零

(d) 各阶顺序主子式均为正数

解　选(d).

(a) 中 $|A| > 0$ 是 A 正定的必要条件, 而不是充分条件.

若(b)中矩阵 C 是可逆矩阵, 则 $A = C^{T}C$ 是 A 正定的充要条件. 对一般 n 阶矩阵 C, 即使 $A = C^{T}C$, A 也未必为正定矩阵.

(c)中负惯性指标为零, 不是 A 正定的充分条件, n 阶方阵 A 正定的充要条件是正惯性指标为 n. 而负惯性指标为零, 得不出正惯性指标为 n.

5. 矩阵(　　)合同于 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解　选(a), (b).

矩阵 A 与 B 合同的充要条件是惯性指标相等. 当矩阵为对角矩阵时, 它的正、负惯性指标分别是其对角线上正、负元素的个数. 因此题目中矩阵正惯性指标为 2, 负惯性指标为 1. 观察选择结果, 可知(a), (b)与题目矩阵合同.

6. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \dfrac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \cdots + (x_n - a)^2}{n-1}$ $(n > 1)$是(　　).

(a) n元二次型　　　　(b) 正定

(c) 半正定　　　　(d) 不定

解　选(a),(c).

本题$f(x_1, \cdots, x_n)$作为多项式,含x_i的一次项ax_i和常数项ka_i^2,不是二次型.如果令$y_i = x_i - a$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,作平移变换(注意平移变换不是线性变换),则可将f化为二次型:

$$\frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}{n-1}$$

该二次型关于y_i正定,但关于x_i半正定.

7. 点$(0, 0, 1)$是函数$f(x, y, z) = e^{2x} + e^{-y} + e^{x^2} - (2x + 2ez - y)$的(　　).

(a) 驻点　　　　(b) 极大点

(c) 极小点　　　　(d) 非极值点

解　选(a).

$$f_{xx}(0,0,1) = 4e^{2x} + 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}\Big|_{(0,0,1)} = 6$$

$$f_{yy} = e^{-y}\Big|_{(0,0,1)} = 1$$

$$f_{zz} = 0$$

$$f_{xy} = f_{yz} = f_{zx} = 0.$$

从而Hess矩阵

$$H(0,0,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|H(0,0,1)| = 0$, $H(0,0,1)$为半正定矩阵.

故$f(x, y, z)$在$(0, 0, 1)$不取极值,但$(0, 0, 1)$是$f(x, y, z)$的驻点.

故答案为(a).

自 测 试 题

1. **判断题**

(1) 因为 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$

$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

所以 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ 都是该二次型对应的矩阵.

(2) $\sum_{i=1}^{4}(2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4)^2$ 是二次型.

(3) 若 A 为对称矩阵, B 与 A 合同, 则 B 也为对称矩阵.

(4) 正交变换可以将二次型化为规范形.

(5) 二次型的标准形是惟一的.

(6) 若 A 为正定矩阵, 则 A 的主对角线上的元素

$$a_{ii} > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(7) 若 A 为正定矩阵, 则 A^* 也是正定矩阵.

2. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3)^2$ 所对应的矩阵.

3. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$ 可用正交变换化为标准形: $y_2^2 + 2y_3^2$. 求参数 a 以及所作的正交变换.

4. 设 A 为三阶实对称矩阵, A 的三个特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, 对应的特征向量分别为 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)$. 求矩阵 A 和 A^n.

5. 设 A 为 n 阶正定矩阵. 证明 $|3I + A| > 3^n$.

自测试题解答

1. (1)× (2) (3) (4)× (5)× (6) (7)

2. **因为**

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= (2x_1 + x_2 - x_3)^2 \\
&= (2x_1 + x_2 - x_3)(2x_1 + x_2 - x_3) \\
&= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}(2, 1, -1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

所以二次型矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. **二次型对应的矩阵为** $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，**由题意** A **的特征值为** 1, 2, 0.

从而 $|A| = 1\times 2\times 0 = 0$，**即** $|A| = -a^2 = 0$　$a = 0$. **于是**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对 $\lambda_1 = 1$, $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，**对应的线性无关的特征向量为** $\alpha = (0, 1, 0)^T$.

对 $\lambda_2 = 2$, $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，**对应的线性无关的特征向量为** $\alpha = (1, 0, 1)^T$.

对 $\lambda_3 = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$. 将 α_3 单位化，得正交变换矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

4. 由实对称矩阵的性质，$\lambda_3 = 0$ 对应的特征向量 α_3 与 α_1, α_2 正交，即 α_3 满足方程组

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix} X = 0, \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0$$

解该方程组得 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

取 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

(1) $A = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A^n = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 因为A正定，所以A的特征值 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 从而 $3I + A$ 的特征值 $u_i = 3 + \lambda_i > 3$. 故

$$|3I + A| = \prod_{i=1}^{n} (3 + \lambda_i) > 3^n.$$