第四次练习

1．求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$ （2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$ （3）$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

（4）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$ （5）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}$ （6）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$ （8）$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan 2x\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ （9）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3(1-\cos\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n^2+1}-n}$

2．求 a,b，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$.

3．若 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=c$ 为有限值，求 $a,c.$

4．求 a,b，使得 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(5x-\sqrt{ax^2-bx+1}\right)=2.$

5．求 k，使 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 与 x^k 为当 $x\to 0$ 时的同阶无穷小。

6．求 a，使得当 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小量。

7．设 $x_0\in(a,b)$，在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在。

证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$.

8．讨论下列函数的间断点及其类型：（1）$y=\dfrac{x}{\sin x}$； （2）$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$

9. 求函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$ 的间断点并判断其类型.

10．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n\ (a>0,b>0)$ （2）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)+\log_a(x-h)-2\log_a x}{h^2}\ (x>0)$

（3） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$ （4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}-\sin x}{x^3}$

（5） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan x-\sin x}$ （6） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)^x$

11．证明：（1） $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 在区间（0，1）内不一致连续；

（2） $g(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$ 在区间（0，1）内一致连续。

12. 若定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，证明： $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

13. 若 $f(x)\in C\big([0,2a]\big)$，且 $f(0)=f(2a)$，证明：$\exists c\in[0,a],\ s.t.\ f(c)=f(c+a)$.

14. 证明：方程 $x=a\sin x+b\ (a>0,b>0)$ 至少有一个不大于 $a+b$ 的正根.

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$，证明 $\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

16．设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)\ (a>0)$ 上满足 **Lipschitz** 条件，证明：

（1） $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界；（2） $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.