经典教材辅导用书·数学系列丛书

数学分析习题详解（下）

高教版·《数学分析·下册》（第三版）
（华东师范大学数学系编）

林　益　邵　琨
罗德斌　俞小清　编

华中科技大学出版社

内 容 介 绍

本书是对华东师范大学数学系所编写的、高等教育出版社出版的《数学分析》(第三版)下册全部习题的详解. 为便于学生学习,在每章的习题解答之前,增加了知识要点部分,此部分不是对该章主要内容的罗列,而是帮助学生从更高的观点上来理解该章的主要内容,分析理论作用,指出各概念、各定理的相互关联等,并指导解题方法,提示注意事项等. 习题详解部分则周密、细致、规范,富有启发性,注意解题方法及技巧的运用,能给学生起到举一反三的作用. 本书可供学生学习数学分析课程参考.

前　　言

数学分析是数学系学生一门极其重要的基础课. 它集中反映了数学科学的学科特点,并对学生进行了最基本、最必要的基础训练,是学生今后学习数学、攀登数学高峰的重要落脚点. 它在本科数学学习中占有特殊的地位,因此加强数学分析课程的教学是必需的.

对于刚入学的数学系一年级学生而言,学习数学分析课程都有"难"的感觉. 这是由数学的学科特点所决定的. 因为数学的思维方法、理论体系与平常人的日常习惯是大相径庭的,一开始难以适应. 学习上最突出的矛盾反映在"解题"这个环节上. 众所周知,要学好数学就要动手解题(而且要有足够多的题量),但是要学会解题就必须在全面、正确地理解基本概念、基本理论和基本方法的基础上,运用辩证法来分析矛盾或转化矛盾,用逻辑推理来演化或推导等来解决问题. 同时数学又是一种语言,要求学生用精确的数学语言表达自己的思路与论证. 可见,提高解题能力绝非一日之功,而是需要长时间、坚持不懈地严格训练才能奏效的. 而平时学生在这些方面的努力与成果,是通过作业来反映的. 教师批改作业时的"√"与"×"还是不能充分反映学生学习的不足,也缺乏足够的视野空间. 因此同学们自然希望手头有一本能弥补自己不足的教学参考书,特别是习题解答,以启发自己的思维,寻找自己知识的不足,提高语言表达能力等.

毫无疑义,华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第三版)

是一本优秀的理科教材,目前正被各高等院校广泛地采用.我们应邀编写该教材(上、下册)全部的习题解答,仅供学习参考.

为了学生学习方便,本书完全按照原教材的章、节编写,题号及数学符号与原教材一致.每章内容由两部分组成:一是知识要点,二是习题详解. 知识要点不是对该章主要内容的罗列,而是从更高的观点上来理解该章的主要内容,分析理论作用,指导解题方法,提示注意事项等. 习题详解则周密、细致、规范,富有启发性.

当然,习题解答是一把双刃剑,使用得当将受益,使用不当将受害.只有在独立完成习题的基础上对照阅读解答,或者经较长时间思考后仍不得要领时方可阅读解答,然后掩卷再独立完成,这样才能提高自身的数学素养,达到更好地学习数学分析课程的目的.

希望读者正确使用本书,并对本书的不足予以指正.

编 者

2005 年 7 月

目　　录

第十二章　数项级数 …… (1)

知识要点 …… (1)

习题详解 …… (3)

§1　级数的收敛性 …… (3)

§2　正项级数 …… (9)

§3　一般项级数 …… (18)

§4　总练习题 …… (26)

第十三章　函数列与函数项级数 …… (30)

知识要点 …… (30)

习题详解 …… (31)

§1　一致收敛性 …… (31)

§2　一致收敛函数列与函数项级数的性质 …… (42)

§3　总练习题 …… (49)

第十四章　幂级数 …… (55)

知识要点 …… (55)

习题详解 …… (56)

§1　幂级数 …… (56)

§2　函数的幂级数展开 …… (66)

§3　复变量的指数函数·欧拉公式 …… (70)

§4　总练习题 …… (71)

第十五章　傅里叶级数 …… (76)

知识要点 …… (76)

习题详解 …… (77)

§1 傅里叶级数 …… (77)
§2 以 $2l$ 为周期的函数的展开式 …… (89)
§3 收敛定理的证明 …… (96)
§4 总练习题 …… (100)
第十六章 多元函数的极限与连续 …… (104)
知识要点 …… (104)
习题详解 …… (105)
§1 平面点集与多元函数 …… (105)
§2 二元函数的极限 …… (115)
§3 二元函数的连续性 …… (124)
§4 总练习题 …… (129)
第十七章 多元函数微分学 …… (135)
知识要点 …… (135)
习题详解 …… (136)
§1 可微性 …… (136)
§2 复合函数微分法 …… (146)
§3 方向导数与梯度 …… (152)
§4 泰勒公式与极值问题 …… (157)
§5 总练习题 …… (175)
第十八章 隐函数定理及其应用 …… (182)
知识要点 …… (182)
习题详解 …… (183)
§1 隐函数 …… (183)
§2 隐函数组 …… (189)
§3 几何应用 …… (199)
§4 条件极值 …… (206)
§5 总练习题 …… (215)

第十九章　含参量积分 …………………………………… (226)
知识要点 ………………………………………… (226)
习题详解 ………………………………………… (228)
§1　含参量正常积分…………………………… (228)
§2　含参量反常积分…………………………… (235)
§3　欧拉积分………………………………… (245)
§4　总练习题………………………………… (248)
第二十章　曲线积分 …………………………………… (253)
知识要点 ………………………………………… (253)
习题详解 ………………………………………… (255)
§1　第一型曲线积分…………………………… (255)
§2　第二型曲线积分…………………………… (260)
§3　总练习题………………………………… (265)
第二十一章　重积分 …………………………………… (270)
知识要点 ………………………………………… (270)
习题详解 ………………………………………… (272)
§1　二重积分概念……………………………… (272)
§2　直角坐标系下二重积分的计算……………… (278)
§3　格林公式·曲线积分与路线的无关性………… (289)
§4　二重积分的变量变换……………………… (296)
§5　三重积分………………………………… (307)
§6　重积分的应用……………………………… (314)
§7　n 重积分 ………………………………… (321)
§8　反常二重积分……………………………… (324)
§9　总练习题………………………………… (326)
第二十二章　曲面积分 ………………………………… (340)
知识要点 ………………………………………… (340)
习题详解 ………………………………………… (343)

§1 第一型曲面积分…………………………………………………(343)
§2 第二型曲面积分…………………………………………………(346)
§3 高斯公式与斯托克斯公式……………………………………(350)
§4 场论初步…………………………………………………………(359)
§5 总练习题…………………………………………………………(367)
第二十三章 流形上微积分学初阶 ……………………………………(373)
知识要点 …………………………………………………………………(373)
习题详解 …………………………………………………………………(374)
§1 n 维欧氏空间与向量函数 ……………………………………(374)
§2 向量函数的微分…………………………………………………(381)
§3 反函数定理和隐函数定理……………………………………(394)
§4 外积、微分形式与一般斯托克斯公式 ………………………(402)
§5 总练习题…………………………………………………………(407)

第十二章　数 项 级 数

知 识 要 点

1. 数项级数是无数多个数“相加”，只有收敛时其“和”才有意义. 而数的加法满足的交换律和结合律对级数而言则未必成立. 只有绝对收敛的级数才可以任意改变级数项的次序，其收敛性不变，和也不变. 而一般收敛的级数则可任意加括号，加括号后的新级数收敛性不变，和也不变. 对于加括号有个常用的性质：加括号后的级数发散，则原级数发散.

2. 级数收敛与其部分数列收敛等价，故级数收敛问题，常转化为数列收敛的问题予以讨论.

3. 判断正项级数敛散性，通常有以下方法.

（1）利用级数通项 a_n 判敛.

i）若 $a_n \not\to 0(n\to\infty)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

ii）达朗贝尔判别法、柯西判别法、拉贝判别法.

iii）等价量判别法：若 $a_n \sim \dfrac{1}{n^p}$ $(n\to\infty)$，则 $p>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；$p\leqslant 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

估计 a_n 的阶数时常使用泰勒公式$\left(x_0=0, x=\dfrac{1}{n}\right)$.

（2）与已知收敛性的级数作比较的比较原则.

寻找比较级数时注意：若证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，应设法将 a_n 放大为 b_n，使得 $0\leqslant a_n$

$\leqslant b_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛;若证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,应设法将 a_n 缩小为 c_n,使得 $0\leqslant c_n\leqslant a_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散.

(3) 柯西积分判别法.

(4) 柯西收敛准则、级数收敛定义等.

4. 绝对收敛的级数必收敛;收敛但不绝对收敛的级数称为条件收敛的级数.

5. 一般项级数判敛方法.

(1) 若 $a_n \not\to 0\ (n\to\infty)$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(2) 对交错级数应用莱布尼茨判别法.

(3) 应用达朗贝尔判别法或柯西判别法判定 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 的收敛性,若判得 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛;若判得 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(4) 将级数通项表成两项的乘积时,可考虑阿贝尔判别法和狄利克雷判别法.

(5) 柯西收敛准则或级数收敛定义.

注意:证明条件收敛时必须同时证明两点,一是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,二是 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散.

6. 绝对收敛的级数与条件收敛的级数在性质上有很大差别:绝对收敛的级数可重排,重排后的级数仍然绝对收敛且和不变,而条件收敛的级数重排后会改变其收敛性或和.

两绝对收敛的级数还可以相乘,所得新级数绝对收敛且和为这两级数和的乘积(柯西定理).

习 题 详 解

§1　级数的收敛性

1. 证明下列级数的收敛性，并求其和数：

(1) $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$；

(2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

解　(1)
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-4)(5k+1)}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5k-4}-\frac{1}{5k+1}\right)=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right),$$

于是$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}$，故级数收敛且其和为$\frac{1}{5}$.

(2)
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\times 3^n},$$

于是$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}$，故级数收敛且其和为$\frac{3}{2}$.

(3)
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

于是$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{4}$，故级数收敛且其和为$\dfrac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}(4)\ S_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\\&=\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{n+1}-1\right)\\&=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},\end{aligned}$$

于是$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$，故级数收敛且其和为$1-\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}(5)\ S_n&=2S_n-S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}\\&=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}\\&=1+\frac{1-\dfrac{1}{2^{n-1}}}{1-\dfrac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\ (n\geqslant 2),\end{aligned}$$

于是$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$，故级数收敛且其和为3.

2．证明：若级数$\sum u_n$发散，$c\neq 0$，则$\sum cu_n$也发散.

证　因为级数$\sum u_n$发散．即$\exists\varepsilon_0>0$，对任何$N\in\mathbf{N}_+$，总有

$$m_0\in\mathbf{N}_+\quad\text{和}\quad p_0\in\mathbf{N}_+,$$

使
$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0.$$

所以
$$\begin{aligned}|cu_{m_0+1}+cu_{m_0+2}+\cdots+cu_{m_0+p_0}|&=|c|\,|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\\&\geqslant|c|\varepsilon_0,\end{aligned}$$

于是$\sum cu_n$亦发散.

3．设级数$\sum u_n$与$\sum v_n$都发散，试问$\sum(u_n+v_n)$一定发散吗？又若u_n与$v_n(n=1,2,\cdots)$都是非负数，则能得出什么结论？

解　若$\sum u_n$，$\sum v_n$都发散，则$\sum(u_n+v_n)$不一定发散.

例如，$\sum 1$和$\sum(-1)$是发散的，但$\sum(1+(-1))$是收敛的；

$\sum 1$ 和 $\sum 2$ 是发散的，$\sum(1+2)=\sum 3$ 亦是发散的.

若 $\sum u_n$，$\sum v_n$ 都发散且 $u_n\geqslant 0$，$v_n\geqslant 0$，则 $\sum(u_n+v_n)$ 发散. 由柯西收敛准则，知 $\exists\varepsilon_0,\varepsilon_1>0$，对任何的 $N\in\mathbf{N}_+$，总存在 $m_0,p_0,m_1\in\mathbf{N}_+$，使

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|=u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}\geqslant\varepsilon_0,$$

和
$$|v_{m_1+1}+v_{m_1+2}+\cdots+v_{m_1+p_1}|=v_{m_1+1}+v_{m_1+2}+\cdots+v_{m_1+p_1}\geqslant\varepsilon_1.$$

故
$$\begin{aligned}&|(u_{m_0+1}+v_{m_0+1})+(u_{m_0+2}+v_{m_0+2})+\cdots+(u_{m_0+p_0}+v_{m_0+p_0})|\\=&(u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0})+(v_{m_0+1}+v_{m_0+2}+\cdots+v_{m_0+p_0})\\\geqslant&\varepsilon_0,\end{aligned}$$

即 $\sum(u_n+v_n)$ 必发散.

4. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则级数

$$\sum(a_n-a_{n+1})=a_1-a.$$

证　由已知条件知，数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

故
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1},$$

从而
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a_1-a.$$

5. 证明：若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$，则

(1) 级数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散；

(2) 当 $b_n\neq 0$ 时，级数 $\sum\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{b_1}$.

证　(1) 因为
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1,$$
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)=\infty,$$

故 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散.

(2) 当 $b_n\neq 0$ 时，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}},$$

即
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{b_1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_1},$$

故级数 $\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$ 收敛于 $\frac{1}{b_1}$.

6. 应用第 4,5 题的结果求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

解 (1) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n-1}-\frac{1}{a+n}\right),$$

而数列 $\left\{\frac{1}{a+n-1}\right\}$ 收敛于 0,故由第 4 题的结论,可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{1}{a+1-1}-0=\frac{1}{a}\quad(a\neq 0).$$

(2) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(-1)^n}{n}-\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\right],$$

而数列 $\left\{-\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 收敛于 0,故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=-\frac{(-1)^1}{1}-0=1.$$

(3) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right],$$

而数列 $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ 收敛于 0,故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\frac{1}{1^2+1}-0=\frac{1}{2}.$$

7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\frac{\sin 2^n}{2^n}$; (2) $\sum\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$;

(3) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$; (4) $\sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

解 (1) **由于** $|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|$

$$=\left|\frac{\sin 2^{m+1}}{2^{m+1}}+\frac{\sin 2^{m+2}}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{\sin 2^{m+p}}{2^{m+p}}\right|$$

$$<\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+p}}=\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^{m+p}}<\frac{1}{2^m},$$

因此,对任意的 $\varepsilon>0$. **取**

$$m=\left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right],$$

使得当 $m>N$ **及对** $\forall\ p\in \mathbf{N}_+$,**由上式就有**

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon \text{ 成立},$$

故由柯西准则可推出 $\sum \frac{\sin 2^n}{2^n}$ **收敛**.

(2) **因** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$,**故取** $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$. **对任一** $N\in\mathbf{N}_+$,**总存在** $m_0>0$ **和** $p_0=1$,**有**

$$|u_{m_0+1}|=\frac{(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2+1}>\frac{1}{4}=\varepsilon_0,$$

由柯西准则可知 $\sum \frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$ **发散**.

(3) **由于数列** $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ **单调减,故**

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p}|$$

$$=\left|\frac{1}{m_0+1}-\frac{1}{m_0+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{m_0+p}\right|$$

$$<\frac{1}{m_0+1}<\frac{1}{m_0},$$

因此,$\forall \varepsilon>0$,**取**

$$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,$$

当 $m_0>N$ **及** $p\in\mathbf{N}_+$ **时,都有**

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p}|<\varepsilon \text{ 成立}.$$

由柯西准则可知级数 $\sum(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛.

(4) 取
$$\varepsilon_0=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$
对 $\forall N\in\mathbf{N}_+$,及取 $m_0=2N$,$p_0=m_0$,则当 $m_0>N$ 时,就有
$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{(m_0+k)+(m_0+k)^2}}\right|\\ &>\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{2(m_0+k)^2}}=\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{2}(m_0+k)}\\ &>\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{2}(m_0+m_0)}=\frac{1}{2\sqrt{2}},\end{aligned}$$
由柯西准则知 $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}}$ 发散.

8. 证明级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是:任给正数 ε,存在某正整数 N,对一切 $n>N$ 总有
$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon.$$

证 必要性:若 $\sum u_n$ 收敛,则由柯西准则可知,
$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists N\in\mathbf{N}_+,$$
使得 $\forall n>m>N_1$ 时有
$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n|<\varepsilon,$$
取 $N>N_1+1$,则对 $\forall n>N$,有
$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon.$$

充分性:若 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,对 $\forall n>N$,总有
$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon/2,$$
则对 $\forall m>N$ 及 $p\in\mathbf{N}_+$ 有
$$\begin{aligned}&|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|\\ &\leqslant|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_{m+p}|+|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_m|\\ &<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,\end{aligned}$$
由柯西准则知级数 $\sum u_n$ 收敛.

9. 举例说明：若级数 $\sum u_n$ 对每个固定的 p 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p})=0,$$

此级数仍可能不收敛.

解　调和级数 $\sum \frac{1}{n}$ 对每一个固定自然数 p，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+p}=0,$$

但该级数 $\sum \frac{1}{n}$ 是发散的.

10. 设级数 $\sum u_n$ 满足：加括号后级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+1}})$ 收敛 $(n_1=0)$，且在同一括号中的 $u_{n_k+1},u_{n_k+2},\cdots,u_{n_{k+1}}$ 符号相同，证明 $\sum u_n$ 亦收敛.

证　因为级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+1}})$ 收敛，则有

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+1}})=0,$$

所以对 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，总存在 $k\in\mathbf{N}_+$，使 $n=n_k+j\ (1\leqslant j\leqslant n_{k+1}-n_k)$ 时，有

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{i=1}^{n}u_n\\&=\sum_{i=1}^{k-1}(u_{n_i+1}+u_{n_i+2}+\cdots+u_{n_{i+1}})+(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+j}})\\&=S'_{k-1}+(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+j}}),\end{aligned}$$

其中 S'_{k-1} 表示加括号级数的前 $k-1$ 项之和. 当 $n\to\infty$ 时，$k-1\to+\infty$，从而有

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S'_{k-1}+\lim_{n\to\infty}(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+j}})=\lim_{n\to\infty}S'_{k-1},$$

故 $\sum u_n$ 收敛，其和不变.

§2　正 项 级 数

1. 应用比较原则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{1}{n^2+a^2}$；　　(2) $\sum 2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$；

(3) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$；　(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^n}$；

(5) $\sum \left(1-\cos \dfrac{1}{n}\right)$；　(6) $\sum \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；

(7) $\sum (\sqrt[n]{a}-1)\ (a>1)$；　(8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

(9) $\sum (a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)\ (a>0)$.

解 (1) **因为**
$$0\leqslant \frac{1}{n^2+a^2}<\frac{1}{n^2},$$
而正项级数 $\sum \dfrac{1}{n^2}$ **收敛，所以级数** $\sum \dfrac{1}{n^2+a^2}$ **收敛**.

(2) **因为**
$$0<2^n\sin \frac{\pi}{3^n}\sim \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (n\to\infty),$$
而正项级数 $\sum \pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ **收敛，所以级数** $\sum 2^n\sin \dfrac{\pi}{3^n}$ **收敛**.

(3) **因为**
$$\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\geqslant \frac{1}{n+1}>0,$$
而正项级数 $\sum \dfrac{1}{n+1}$ **发散，所以级数** $\sum \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ **发散**.

(4) **因为**
$$0<\frac{1}{(\ln n)^n}<\frac{1}{2^n}\ (n>e^2),$$
而正项级数 $\sum \dfrac{1}{2^n}$ **收敛，所以级数** $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^n}$ **收敛**.

(5) **因为**
$$1-\cos \frac{1}{n}\sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 (n\to+\infty),$$
而正项级数 $\sum \dfrac{1}{2n^2}$ **收敛，所以级数** $\sum \left(1-\cos \dfrac{1}{n}\right)$ **收敛**.

(6) **因为** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，**故** $\exists N\in \mathbf{N}_+$，**当** $n>N$ **时，有**
$$\sqrt[n]{n}<2,$$
即
$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}>\frac{1}{2n},$$
而正项级数 $\sum \dfrac{1}{2n}$ **发散. 所以级数** $\sum \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ **发散**.

（7）因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}\xlongequal{令t=\frac{1}{n}}\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a^t\ln a}{1}=\ln a,$$

而正项级数 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，所以级数 $\sum(\sqrt[n]{a}-1)$ 发散.

（8）因为 $$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{e^{\ln(\ln n)^{\ln n}}}=\frac{1}{(e^{\ln n})^{\ln(\ln n)}}=\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}<\frac{1}{n^2},$$

而正项级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

（9）因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a^{\frac{1}{2n}}-a^{-\frac{1}{2n}}\right)^2}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2}$$

$$\xlongequal{令t=\frac{1}{2n}}\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{a^t-a^{-t}}{t}\right)^2=(2\ln a)^2,$$

而正项级数 $\sum\left(\frac{1}{2n}\right)^2$ 收敛，所以级数 $\sum(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)$ 收敛.

2. 用比式判别法或根式判别法鉴定下列级数的敛散性：

（1）$\sum\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}$；　（2）$\sum\frac{(n+1)!}{10^n}$；

（3）$\sum\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$；　（4）$\sum\frac{n!}{n^n}$；

（5）$\sum\frac{n^2}{2^n}$；　（6）$\sum\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$；

（7）$\sum\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$（其中 $a_n\to a\ (n\to\infty)$；$a_n,b,a>0$，且 $a\neq b$）.

解　（1）因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2,$$

所以由比式判别法知正项级数 $\sum\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}$ 发散.

（2）因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{(n+1)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{10}=+\infty,$$

所以由比式判别法知正项级数 $\sum \frac{(n+1)!}{10^n}$ 发散.

（3）因为
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$$
所以由根式判别法知正项级数 $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 收敛.

（4）因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$
所以由比式判别法知正项级数 $\sum \frac{n!}{n^n}$ 收敛.

（5）因为
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2}=\frac{1}{2}<1.$$
所以由根式判别法知正项级数 $\sum \frac{n^2}{2^n}$ 收敛.

（6）因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n n!}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{\mathrm{e}},$$
所以由比式判别法知正项级数 $\sum \frac{3^n n!}{n^n}$ 发散.

（7）因为
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}.$$

所以由根式判别法知，当 $a>b$ 时，正项级数 $\sum\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 收敛；当 $a<b$ 时，正项级数 $\sum\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 发散.

3. 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 为正项级数，且存在正数 N_0，对一切 $n>N_0$，有
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
证明：若级数 $\sum v_n$ 收敛，则级数 $\sum u_n$ 也收敛；若正项级数 $\sum u_n$ 发散，则正项级数 $\sum v_n$ 也发散.

证　若 $\sum v_n$ 收敛，由题意，知当 $n>N_0$ 时，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{v_{n+1}}{v_n},$$

即
$$0<\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\leqslant\frac{u_n}{v_n}\leqslant\cdots\leqslant\frac{u_{N_0+1}}{v_{N_0+1}},$$

故
$$u_{n+1}\leqslant\frac{u_{N_0+1}}{v_{N_0+1}}\cdot v_{n+1}\quad(n>N_0),$$

而 $\frac{u_{N_0+1}}{v_{N_0+1}}$ 是常数，所以由比式判别法知正项级数 $\sum u_n$ 亦收敛. 若正项级数 $\sum u_n$ 发散，同理可证正项级数 $\sum v_n$ 亦发散.

4. 设正项级数 $\sum a_n$ 收敛，证明正项级数 $\sum a_n^2$ 亦收敛；试问反之是否成立？

证　由正项级数 $\sum a_n$ 收敛可知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,$$

即 $\exists N_0\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，有

$$0\leqslant a_n<1,$$

从而
$$0\leqslant a_n^2<a_n.$$

由比较原则可知，正项级数 $\sum a_n^2$ 收敛. 但反之不一定成立，例如正项级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛，但正项级数 $\sum\frac{1}{n}$ 发散.

5. 设 $a_n\geqslant0,n=1,2,\cdots$，且 $\{na_n\}$ 有界，证明级数 $\sum a_n^2$ 收敛.

证　由题意可知 $\exists M>0$，对 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，有

$$0\leqslant na_n<M,$$

即
$$0\leqslant a_n<\frac{M}{n},$$

从而
$$0\leqslant a_n^2<\frac{M^2}{n^2},$$

而级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较原则可知级数 $\sum a_n^2$ 亦收敛.

6. 设级数 $\sum a_n^2$ 收敛，证明级数 $\sum\frac{a_n}{n}(a_n>0)$ 也收敛.

证　对 $a_n>0$ 及任意正整数 n，有

$$0<\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right),$$

而$\sum a_n^2$，$\sum\frac{1}{n^2}$都收敛，故$\sum\frac{a_n}{n}$亦收敛.

7. 设正项级数$\sum u_n$收敛，证明级数$\sum\sqrt{u_nu_{n+1}}$也收敛.

证　对$u_n>0$，及任意正整数n，有

$$0\leqslant\sqrt{u_nu_{n+1}}\leqslant\frac{1}{2}(u_n+u_{n+1}),$$

而级数$\sum u_n$收敛，故由比较原则知级数$\sum\sqrt{u_nu_{n+1}}$收敛.

8. 利用级数收敛的必要条件，证明下列等式：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0\ (a>1)$.

解　(1) 设$u_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$，则正项级数$\sum u_n=\sum\frac{n^n}{(n!)^2}$是收敛的，这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0,$$

故由柯西准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

(2) 设$u_n=\frac{(2n)!}{a^{n!}}$，则正项级数$\sum u_n=\sum\frac{(2n)!}{a^{n!}}$是收敛的，这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2(n+1))!}{a^{(n+1)!}}\cdot\frac{a^{n!}}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{a^{n+1}}=0,$$

故由柯西准则知

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0.$$

9. 用积分判别法讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\frac{1}{n^2+1}$；　　(2) $\sum\frac{n}{n^2+1}$；

(3) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$；　　(4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

解　(1) 设

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1},$$

则$f(x)$在$[1,+\infty)$上为非负递减函数，而

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4},$$

故由积分判别法知 $\sum \frac{1}{n^2+1}$ 收敛.

（2）设
$$f(x) = \frac{x}{x^2+1},$$
则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为非负递减函数，而
$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{x}{x^2+1} = 1,$$
故 $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ 发散，于是由积分判别法知 $\sum \frac{n}{n^2+1}$ 发散.

（3）设
$$f(x) = \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)},$$
则 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上为非负递减，而
$$\int_3^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)} = \int_{\ln\ln 3}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u} = +\infty,$$
故由积分判别法知 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$ 发散.

（4）设
$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q},$$
则 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上非负递减.

i）若 $p=1$，这时有
$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^q} = \int_{\ln\ln 3}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^q},$$
当 $q>1$ 时级数收敛；当 $q\leqslant 1$ 时级数发散.

ii）若 $p\neq 1$，这时有
$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q} = \int_{\ln\ln 3}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^{(p-1)u}u^q}\text{时},$$
对任意的 q，当 $p-1>0$ 时，取 $t>1$，有
$$\lim_{u\to\infty} u^t \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{(p-1)u}u^q} = 0,$$
即该积分收敛；当 $p-1<0$ 时，有
$$\lim_{u\to\infty} u^2 \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{(p-1)u}u^q} = +\infty.$$

即该积分发散.

即对任意的q,当$p>1$时级数收敛;当$p<1$时级数发散.

10. 设$\{a_n\}$为递减正项数列,证明:级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum 2^m a_{2^m}$同时收敛或同时发散.

证　设正项级数$\sum a_n$的部分和为S_n,正项级数$\sum 2^m a_{2^m}$的部分和为T_n,则由于$\{a_n\}$为递减正项数列,即有:

$$\begin{aligned}S_n &= a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)+\cdots+a_n\\&\leqslant a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)+\cdots+(a_{2^j}+\cdots+a_{2^{j+1}-1})\\&\leqslant a_1+2a_2+\cdots+2^j a_{2^j}=T_j \quad (n\leqslant 2^j),\end{aligned}$$

故若正项级数$\sum 2^m a_{2^m}$收敛,则正项级数$\sum a_n$亦收敛.

反之当$n\geqslant 2^j$时,则

$$\begin{aligned}S_n &\geqslant a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{j-1}+1}+\cdots+a_{2^j})\\&>\frac{1}{2}(a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^j a_{2^j})=\frac{1}{2}T_j,\end{aligned}$$

故若正项级数$\sum a_n$收敛,则正项级数$\sum 2^m a_{2^m}$亦收敛.

发散的情况类似可证.

11. 用拉贝判别法判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum \dfrac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2n)}\cdot \dfrac{1}{2n+1}$;

(2) $\sum \dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ $(x>0)$.

解　(1) 因为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)&=\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2n+2)\cdot (2n+3)}\right.\\&\qquad\left.\cdot\frac{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2n)\cdot (2n+1)}{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(6n+5)}{(2n+2)(2n+3)}=\frac{3}{2}>1,\end{aligned}$$

所以由拉贝判别法知级数收敛.

(2) 因为

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{(n+1)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}\ \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n+1}=x,$$

所以由拉贝判别法知：当 $x>1$ 时级数收敛；当 $x\leqslant 1$ 时级数发散.

12. 用根式判别法证明级数 $\sum 2^{-n-(-1)^n}$ 收敛，并说明比式判别法对此级数无效.

证　设 $u_n=2^{-n-(-1)^n}$，**则**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{(-1)^n}}}=\frac{1}{2},$$

由根式判别法知 $\sum u_n$ **收敛，但**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}2^{-1+2(-1)^n}$$

不存在，所以比式判别法对此级数无效.

13. 求下列极限（其中 $p>1$）：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^p}+\dfrac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^p}\right]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{p^{n+1}}+\dfrac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\dfrac{1}{p^{2n}}\right)$.

解　(1) **因为** $p>1$，$\sum\dfrac{1}{n^p}$ **收敛. 由柯西准则知**

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbf{N}_+,$$

当 $n>N$ **时，有**

$$\left|\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]=0.$$

(2) **因为** $p>1$，**级数** $\sum\dfrac{1}{p^n}$ **收敛，由柯西准则知：**$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，**使得对一切** $n>N$ **时，有**

$$\left|\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right|<\varepsilon,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)=0.$$

14. 设 $a_n>0$,证明数列 $\{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\}$ 与级数 $\sum a_n$ 同时收敛或同时发散.

证 由于数列 $\{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\}$ 与级数 $\sum\ln(1+a_n)$ 有相同的敛散性. 因而本题只需证 $\sum a_n$ 和 $\sum\ln(1+a_n)$ 的敛散性相同. 这两者之一若收敛,必有
$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,$$
且当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 时,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1.$$
故由比较原则的推论可知:$\sum\ln(1+a_n)$ 与 $\sum a_n$ 有相同的敛散性. 故数列 $\{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\}$ 与级数 $\sum a_n$ 有相同的敛散性.

§3 一般项级数

1. 下列级数哪些是绝对收敛,条件收敛或发散的:

(1) $\sum\frac{\sin nx}{n!}$; (2) $\sum(-1)^n\frac{n}{n+1}$;

(3) $\sum\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$; (4) $\sum(-1)^n\sin\frac{2}{n}$;

(5) $\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$; (6) $\sum\frac{(-1)^n\ln(n+1)}{n+1}$;

(7) $\sum(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$; (8) $\sum n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$.

解 (1) 因为
$$\left|\frac{\sin nx}{n!}\right|\leqslant\frac{1}{n!},$$
而 $\sum\frac{1}{n!}$ 收敛,所以 $\sum\frac{\sin nx}{n!}$ 为绝对收敛.

(2) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{n+1}\right|=1\neq0.$$
所以 $\sum(-1)^n\frac{n}{n+1}$ 发散.

（3）当 $p\leqslant 0$ 时，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\neq 0,$$
故这时级数发散.

当 $p>1$ 时，由于
$$\left|\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|\sim\frac{1}{n^p},$$
而 $\sum\frac{1}{n^p}$ 收敛，故这时级数绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，令
$$u_n=\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}},$$
则
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}<\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p n^{\frac{1}{n+1}}}=\frac{n^{\frac{1}{n(n+1)}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p},$$
而
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\to\mathrm{e}^p>1,\ n^{\frac{1}{n+1}}\to 1\ (n\to\infty),$$
从而当 n 充分大时，有
$$u_{n+1}<u_n,$$
即 $\{u_n\}$ 为单调递减，又有
$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$
故由定理 12.11（莱布尼茨判别法）可知，级数 $\sum\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 在 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛.

（4）因为
$$\left|(-1)^n\sin\frac{2}{n}\right|\sim\frac{2}{n}\ (n\to\infty),$$
而 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，即原级数不是绝对收敛级数，但 $\left\{\sin\frac{2}{n}\right\}$ 是单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{2}{n}=0$. 所以由莱布尼茨判别法可知 $\sum(-1)^n\sin\frac{2}{n}$ 条件收敛.

（5）由于 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，$\sum(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，故 $\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

（6）因为
$$\frac{\ln(n+1)}{n+1}>\frac{1}{n+1},$$
而$\sum\frac{1}{n+1}$发散，即$\sum\frac{(-1)^n\ln(n+1)}{n+1}$不是绝对收敛级数，但$\left\{\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right\}$是单调减且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}=0,$$
所以$\sum\frac{(-1)^n\ln(n+1)}{n+1}$条件收敛.

（7）因为
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n}=\frac{2}{3}<1,$$
所以$\sum(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$绝对收敛.

（8）因为
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{|x|}{\mathrm{e}},$$
所以当$|x|<\mathrm{e}$时，原级数绝对收敛；当$|x|\geqslant\mathrm{e}$时，原级数发散.

2. 应用阿贝耳判别法或狄利克雷判别法判断下列级数的收敛性：

（1）$\sum\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{x^n}{1+x^n}$ $(x>0)$；

（2）$\sum\frac{\sin nx}{n^\alpha}$，　$x\in(0,2\pi)$ $(\alpha>0)$；

（3）$\sum(-1)^n\frac{\cos^2 nx}{n}$.

解　（1）数列$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$，当$x>0$时有
$$0<\frac{x^n}{1+x^n}<\frac{x^n}{x^n}=1,$$
同时，当$0<x<1$时有
$$\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}<\frac{x^n}{1+x^n},$$
即$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$严格递减且有界；

当$x=1$时，原级数即为$\sum\frac{(-1)^n}{2n}$，满足莱布尼兹条件，即收敛；

当 $x>1$ 时,有

$$\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}>\frac{x^n}{1+x^n},$$

即 $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$ 严格递增且有界.

又由于 $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ 是收敛的,故由阿贝耳判别法知原级数收敛.

(2) 由于当 $x\in(0,2\pi)$ 时,有

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

即 $\sum\sin nx$ 的部分和数列有界,而数列 $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}$ $(\alpha>0)$ 单调减,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0,$$

故由狄利克雷判别法知原级数收敛.

(3) 由于

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos^2kx\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos2kx\right|\\ &\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2}\right|+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos2kx\right|\\ &\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}\cos k(\pi+2x)\right|\\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pi+2x)}{2\sin\frac{\pi+2x}{2}}-\frac{1}{2}\right|\\ &\leqslant1+\frac{1}{4\left|\sin\frac{\pi+2x}{2}\right|},\end{aligned}$$

即 $\sum(-1)^n\cos^2nx$ 部分和有界,而数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调递减且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

故由狄利克雷判别法知原级数收敛.

3. 设　$a_n>0,\quad a_n>a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.
证明级数$\sum(-1)^{n-1}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$是收敛的.

证　设
$$u_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$
则由所给条件知$u_n-u_{n+1}>0$,即数列$\{u_n\}$单调减,且
$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0,$$
故由莱布尼茨判别法可得出交错级数
$$\sum(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\text{收敛}.$$

4. 设p_n,q_n如式(8)(见原教材)所定义,证明:若$\sum u_n$条件收敛,则级数$\sum p_n$与$\sum q_n$都是发散的.

证　式(8)为
$$p_n=\frac{|u_n|+u_n}{2},\quad q_n=\frac{|u_n|-u_n}{2}.$$
由已知得$\sum|u_n|$发散,又
$$\sum p_n=\frac{1}{2}\sum(|u_n|+u_n),$$
得知$\sum p_n$发散. 若不然,由
$$\sum\frac{1}{2}|u_n|=\sum p_n-\frac{1}{2}\sum u_n$$
可得$\sum|u_n|$收敛,与题意矛盾. 同理亦可知$\sum q_n$是发散的.

5. 写出下列级数的乘积:

(1) $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}\right)$;

(2) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\right)$.

解　(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$,当$|x|<1$时绝对收敛,由柯西定理知这两个级数的乘积也绝对收敛,从而按对角线相乘

$$w_n=\sum_{k=1}^{\infty}k(x^{k-1})[(-1)^{n-k}(n-k+1)x^{n-k}]$$
$$=x^{n-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k(n-k+1).$$

当 $n=2m$ 时,

$$\begin{aligned}w_{2m}&=x^{2m-1}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{2m-k}k(2m-k+1)\\&=x^{2m-1}[(-1)\cdot(2m)+2(2m-1)-3(2m-2)+\cdots\\&\quad+(-1)^m m(m+1)+2m\cdot 1-(2m-1)\cdot 2\\&\quad+(2m-2)\cdot 3+\cdots+(-1)^m(m+1)m]\\&=x^{2m-1}\cdot 0=0,\end{aligned}$$

当 $n=2m+1$ 时,

$$\begin{aligned}w_{2m+1}&=x^{2m}\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^{2m+1-k}k(2m+1-k+1)\\&=x^{2m}\left[\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^{2m+1-k}k+\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^{2m+1-k}k(2m-k+1)\right]\\&=x^{2m}\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^{1-k}k\\&=x^{2m}[1-2+3-4+5-\cdots-2m+2m+1\\&\quad+2(2+4+\cdots+2m)-2(4+6+\cdots+2m)]\\&=(m+1)x^{2m},\end{aligned}$$

故 $$\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n},|x|<1.$$

(2) 由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ 是绝对收敛的,故这两级数的乘积亦绝对收敛,且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}\right)$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-1)^n}{n!}=1.$$

6. 证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}$ 绝对收敛,且它们的乘积等于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}$.

证 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{|a^{n+1}|}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|a^n|}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a|}{n+1}=0$,

故级数 $\sum\frac{a^n}{n!}$ 绝对收敛. 同理 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}$ 亦绝对收敛. 且

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\ (n-k)!}a^kb^{n-k}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}.\end{aligned}$$

7. 重排级数 $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$,使它成为发散级数.

解 将原级数展开,引用括号且适当重排为

$$\begin{aligned}&\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+4}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-2}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)-\cdots\end{aligned}$$

这样,取 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$,则 $\exists k$,使 $n_0=2^k>N$ 及 $p_0=2^{k-1}$ 时有

$$\begin{aligned}|u_{n_0}+u_{n_0+1}+\cdots+u_{n_0+p_0}|&=\left|\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2(p_0-1)}\right|\\&=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-2}\\&>\frac{2^{k+1}-2^k}{4(2^{k+1}-1)}=\frac{1}{4}\frac{2^k}{2^k-1}>\frac{1}{4},\end{aligned}$$

即这样重排后级数发散.

8. 证明:级数 $\sum \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

证　由于

$$\sum \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} = -1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$$
$$-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{13}-\frac{1}{14}-\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\cdots$$
$$=(-1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+(-1)^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$
$$+(-1)^3\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right)+\cdots$$

故引进一个级数　$\sum(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k}\right)$,

且记
$$u_k=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k},$$

则
$$0<u_k<\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}=\frac{2k+1}{k^2},$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}u_k=0$ 且

$$u_k-u_{k+1}=\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k}\right)$$
$$-\left[\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2+2(k+1)}\right]$$
$$=\sum_{j=0}^{2k}\left(\frac{1}{k^2+j}-\frac{1}{(k+1)^2+j}\right)-\frac{1}{(k+1)^2+2k+1}-\frac{1}{(k+1)^2+2k+2}$$
$$=\sum_{j=0}^{2k}\frac{2k+1}{(k^2+j)[(k+1)^2+j]}-\frac{1}{(k+1)^2+2k+1}-\frac{1}{(k+1)^2+2k+2}$$
$$>\frac{(2k+1)^2}{(k^2+2k)[(k+1)^2+2k]}-\frac{2}{(k+1)^2+2k+1}>0,$$

即数列 $\{u_n\}$ 单调减,由莱布尼兹判别法知级数 $\sum(-1)^k u_k$ 收敛.

因而设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 的部分和为 S_n, $\sum(-1)^k u_k$ 的部分和为 M_N,则有

$$|S_n-M_N|\leqslant|M_{N+1}-M_N|=|u_{N+1}|\to 0\quad(N\to\infty).$$

因此
$$S_n-M_N\to 0\ (n\to\infty),$$

即
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{N\to\infty}M_N,$$
因此级数 $\sum\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

§4 总练习题

1. 证明：若正项级数 $\sum u_n$ 收敛，且数列 $\{u_n\}$ 单调，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

证　由于正项级数 $\sum u_n$ 收敛，即
$$\lim_{n\to\infty}u_n=0,$$
故数列 $\{u_n\}$ 单调递减. 由柯西准则知
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N,$$
对一切 $n>N$，有
$$0<u_{N+1}+u_{N+2}+\cdots+u_n<\varepsilon/2,$$
又当 $n>N$ 时，　$u_{N+i}\geqslant u_n,\quad i=1,2,\cdots,n-N,$

从而当 $n>N$ 时，
$$0<(n-N)u_n\leqslant u_{N+1}+u_{N+2}+\cdots+u_n<\varepsilon/2,$$
取 $n>2N$，则　$0<\frac{n}{2}u_n\leqslant(n-N)u_n<\varepsilon/2,$

因而　$0<nu_n<\varepsilon\ (n>2N),$

故
$$\lim_{n\to\infty}nu_n=0.$$

2. 若级数 $\sum a_n$ 与 $\sum c_n$ 都收敛，且成立不等式
$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n(n=1,2,\cdots),$$
证明级数 $\sum b_n$ 也收敛，若 $\sum a_n$，$\sum c_n$ 都发散，试问 $\sum b_n$ 一定发散吗？

证　由于 $\sum a_n$，$\sum c_n$ 收敛，可知 $\sum(c_n-a_n)$ 亦收敛.

再由 $0\leqslant b_n-a_n\leqslant c_n-a_n$ 知 $\sum(b_n-a_n)$ 收敛.

故 $\sum b_n=\sum(b_n-a_n)+\sum a_n$ 收敛.

但当级数 $\sum a_n$，$\sum c_n$ 都发散时，级数 $\sum b_n$ 不一定发散，例如 $\sum a_n=\sum(-3)$、$\sum c_n=\sum 3$ 都发散. 若取 $b_n\equiv 1$. 亦满足不等式
$$a_n<b_n<c_n\text{ 而 }\sum b_n=\sum 1\text{ 是发散.}$$

若取 $b_n=\frac{(-1)^n}{n}$，亦满足不等式 $a_n<b_n<c_n$，但级数 $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，若取 $b_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$，亦有 $a_n<b_n<c_n$，但级数 $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ 绝对收敛.

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq0$，且级数 $\sum b_n$ 绝对收敛，证明级数 $\sum a_n$ 也收敛. 若上述条件中只知道 $\sum b_n$ 收敛，能推出 $\sum a_n$ 收敛吗?

证　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|b_n|}=|k|>0$，由比较原则知 $\sum|a_n|$ 收敛，即 $\sum a_n$ 也收敛.

若只知 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 不一定收敛. 例如，设

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n},\quad b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

则

$$\frac{a_n}{b_n}=\left(1+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\to1\neq0\ (n\to\infty),$$

而 $\sum b_n=\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，但 $\sum a_n=\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

4. (1) 设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，能否断定 $\sum u_n$ 收敛?

(2) 对于级数 $\sum u_n$ 有 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\geqslant1$，能否断定级数 $\sum u_n$ 不绝对收敛，但可能条件收敛?

(3) 设 $\sum u_n$ 为收敛的正项级数，能否存在一个正数 ε，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}=c>0.$$

解　(1) 否. 如 $u_n=\frac{1}{n}$，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{1}=\frac{n}{n+1}<1,$$

但 $\sum u_n=\sum\frac{1}{n}$ 发散.

(2) 否. 由

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\geqslant1$$

得
$$|u_{n+1}|\geqslant|u_n|\geqslant|u_1|>0,$$
知
$$\lim_{n\to\infty}u_n\neq0,$$
从而 $\sum u_n$ 发散.

（3）不一定. 若取收敛级数 $\sum\frac{1}{n^n}$，则对 $\forall\varepsilon>0$，有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{n-1-\varepsilon}}=0.$$

5. 证明：若级数 $\sum a_n$ 收敛，$\sum(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛，则级数 $\sum a_nb_n$ 也收敛.

证　设 $\sum a_n$ 的部分和为
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,$$
则 $\sum a_nb_n$ 的部分和为
$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})S_k+b_nS_n,$$
由 $\sum a_n$ 收敛，即 S_n 有界，因而 $\exists M>0$. 使 $\forall n\in\mathbf{N}$，有
$$|S_n|<M,$$
由 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛知 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，故可得
$$\lim_{n\to\infty}b_nS_n=0.$$

再由 $|(b_k-b_{k+1})S_k|\leqslant M(b_{k+1}-b_k|$ 及 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛知 $\sum(b_k-b_{k+1})S_k$ 收敛. 因而 $\sum a_nb_n$ 收敛.

6. 设 $a_n>0$，证明级数 $\sum\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ 是收敛的.

证　该级数为正项级数，且其部分和
$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})}-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}\right]\end{aligned}$$

$$=1-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}<1,$$

即数列$\{S_n\}$有界，故原级数收敛.

7. 证明：若级数$\sum a_n^2$与$\sum b_n^2$收敛，则级数$\sum a_nb_n$和$\sum (a_n+b_n)^2$也收敛，且

$$\left(\sum a_nb_n\right)^2\leqslant\sum a_n^2\cdot\sum b_n^2,$$

$$\left(\sum (a_n+b_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证　由于$\sum a_n^2$，$\sum b_n^2$收敛，则有$\sum (a_n^2+b_n^2)$收敛，而

$$|a_nb_n|\leqslant\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2),$$

故$\sum a_nb_n$绝对收敛.

又由于　$\sum (a_n+b_n)^2=\sum (a_n^2+2a_nb_n+b_n^2)=\sum a_n^2+\sum b_n^2+2\sum a_nb_n$，

故$\sum (a_n+b_n)^2$收敛.

在柯西-施瓦兹不等式：

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^n a_k^2\cdot\sum_{k=1}^n b_k^2$$

和闵可夫斯基不等式：

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

中令$n\to\infty$取极限，即可得到所要证明的不等式.

第十三章　函数列与函数项级数

知 识 要 点

1. 函数项级数给出了一种新的函数定义方式，其收敛是逐点定义的. 因其和函数的分析性质(连续性、可导性、可积性等)与函数列或函数项级数通项的分析性质相差甚远，故引进一致收敛性的概念. 对于一致收敛的函数列或函数项级数其和函数也具有函数列或函数项级数每一项共同的分析性质，或者说极限运算、积分运算、导数运算与级数的无限和的运算可以交换次序.

2. 函数列一致收敛性的判别.

(1) 一致收敛性的柯西准则.

$\{f_n\}$在 D 上一致收敛$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N>0, \forall m,n>N, \forall x\in D$，有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon.$$

(2) 余项准则.

$\{f_n\}$在 D 上一致收敛$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$，其中

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),\quad x\in D.$$

(3) 点列准则.

$\{f_n\}$在 D 上一致收敛$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}\subset D$，有

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n)-f_n(x_n)|=0,$$

其中

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),\quad x\in D.$$

特别指出：若函数列$\{f_n\}$在(a,b)内收敛，$\forall n, f_n(x)$在 $x=a$ 处右连续，$\{f_n(a)\}$发散，则$\{f_n(x)\}$在(a,b)内不一致收敛.

3. 函数项级数一致收敛性的判别.

(1) 求出 $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$，由函数列$\{f_n\}$的一致收敛性判别.

（2）M 判别法. 选取优级数时还可以通过 $u_n(x)$ 在区间 D 上的最大值，利用已知不等式，用泰勒公式、微分中值定理等各种方法变形放大.

（3）将通项写成两因子乘积，验证其是否满足阿贝耳判别法与狄利克雷判别法条件，再由该二判别法证出.

（4）利用函数项级数一致收敛的柯西准则.

（5）利用余项准则：$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}\left|\sum\limits_{k=n}^{\infty}u_k(x)\right|=0$.

注意：可利用一致收敛的函数项级数的性质来证明不一致收敛性.

习 题 详 解

§1　一致收敛性

1. 讨论下列函数列在所示区间 D 上是否一致收敛，并说明理由.

（1）$f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$，　$n=1,2,\cdots$，　$D=(-1,1)$；

（2）$f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$，　$n=1,2,\cdots$，　$D=(-\infty,+\infty)$；

（3）$f_n(x)=\begin{cases}-(n+1)x+1, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{n+1},\\ 0, & \dfrac{1}{n+1}<x<1,\end{cases}$　$n=1,2,\cdots$；

（4）$f_n(x)=\dfrac{x}{n}$，　$n=1,2,\cdots$，　i）$D=[0,+\infty)$，　ii）$D=[0,1000]$；

（5）$f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}$，　$n=1,2,\cdots$，　i）$D=[-l,l]$，　ii）$D=(-\infty,+\infty)$.

解　（1）由于
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=|x|=f(x),$$
所以
$$|f_n(x)-f(x)|=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|=\frac{\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}+|x|}\leqslant\frac{1}{n},$$

于是
$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{n},$$
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0,$$
因此
$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)=|x|,x\in D\ (n\to\infty).$$

（2）由于对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}=0,$$
因
$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n},$$
故
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=0,$$
于是
$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}\rightrightarrows f(x)=0,\ x\in(-\infty,+\infty)\ (n\to\infty).$$

（3）当 $x=0$ 时，　$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=1$，即 $f(0)=1$，

当 $x\in(0,1]$时，
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,$$
于是 $f_n(x)$在$[0,1]$上的极限函数为
$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$
因
$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-f(x)|=1\quad(n=1,2,\cdots),$$
故
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-f(x)|\neq 0,$$
于是 $f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛.

（4）当 $x=0$ 时，　$f_n(0)\to 0$，即 $f(0)=0\ (n\to\infty)$，

当 $x\neq 0$ 时，　$f_n(x)=\dfrac{x}{n}$，即 $f(x)=0\ (n\to\infty)$.

故可得
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)=0,x\in D.$$

i）若 $D=[0,+\infty)$，则因
$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\geqslant|f_n(n)-f(n)|=1\not\to 0\quad(n\to\infty),$$
故 $f_n(x)=\dfrac{x}{n}$ 在$[0,+\infty)$上不一致收敛.

ii）若 $D=[0,1000]$，则因
$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=\frac{1000}{n}\to 0\quad(n\to\infty),$$

故
$$f_n(x)=\frac{x}{n}\rightrightarrows f(x)=0,\ x\in[0,1000]\ (n\to\infty).$$

（5）由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{x}{n}=0, x\in(-\infty,+\infty)$，

即
$$f(x)=0,\quad x\in(-\infty,+\infty)\ (n\to\infty).$$

i）若 $D=[-l,l]$，则因
$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\frac{|x|}{n}\leqslant\frac{l}{n},$$

故
$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{l}{n}\to 0\quad(n\to\infty),$$

于是
$$f_n(x)=\sin\frac{x}{n}\rightrightarrows f(x)=0, x\in[-l,l]\ (n\to\infty).$$

ii）若 $D=(-\infty,+\infty)$，则因
$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\geqslant\left|f_n\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-f\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=1,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\neq 0.$$

于是 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛.

2. 证明：设
$$f_n(x)\to f(x), x\in D, a_n\to 0\ (n\to\infty)\ (a_n>0).$$

若对每一个正整数 n 有
$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant a_n, x\in D,$$

则 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f.

证　由于
$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,$$

即
$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists N\in\mathbf{N}_+,$$

当 $n>N$ 时，有
$$|a_n|=a_n<\varepsilon,$$

故有
$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant a_n<\varepsilon,\ x\in D.$$

即
$$f_n(x)\rightrightarrows f(x),\ x\in D\ (n\to\infty).$$

3. 判别下列函数项级数在所示区间上的一致收敛性：

（1）$\sum\dfrac{x^n}{(n-1)!}, x\in[-r,r]$；

（2）$\sum\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}, x\in(-\infty,+\infty)$；

(3) $\sum \frac{n}{x^n}, |x|>r\geqslant 1$;

(4) $\sum \frac{x^n}{n^2}, x\in[0,1]$;

(5) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}, x\in(-\infty,+\infty)$;

(6) $\sum \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}, x\in(-\infty,+\infty)$.

解 (1) **设** $$M_n=\frac{r^n}{(n-1)!},$$

则 $\sum M_n$ **是正项级数,且有**

$$\frac{M_{n+1}}{M_n}=\frac{r^{n+1}}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{r^n}=\frac{r}{n}\to 0,$$

即 $\sum M_n$ **收敛.**

而对 $\forall x\in[-r,r]$, **有**

$$\left|\frac{x^n}{(n-1)!}\right|\leqslant\frac{r^n}{(n-1)!}=M_n,$$

故由 M **判别法知** $\sum\frac{x^n}{(n-1)!}$ **在** $x\in[-r,r]$ **上一致收敛.**

(2) **设** $$u_n(x)=(-1)^{n-1}, v_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

则 $\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$, **有**

$$\left|\sum_{k=1}^n u_k(x)\right|\leqslant 1\ (n=1,2,\cdots), \text{及 } v_n(x)-v_{n+1}(x)=\frac{x^4}{(1+x^2)^{n+1}}>0,$$

即 $\{v_n(x)\}$ **单调递减,且由**

$$(1+x^2)^n=1+nx^2+\cdots>nx^2$$

可知 $$0\leqslant\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\leqslant\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty),$$

即 $$v_n(x)\rightrightarrows 0\ (n\to\infty),\ x\in(-\infty,+\infty),$$

故由狄利克雷判别法知 $\sum\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ **在** $(-\infty,+\infty)$ **上一致收敛.**

(3) **当** $|x|>r>1$ **时,有**

$$\frac{n}{|x|^n}\leqslant\frac{n}{r^n},\quad \text{且}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{r}=\frac{1}{r}.$$

因此当$\frac{1}{r}<1$,即$r>1$时,$\sum\frac{n}{r^n}$收敛,由M判别法知$\sum\frac{n}{x^n}$在$|x|>r>1$上一致收敛.

而当$r=1$时,即$|x|>1$时,显然有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|>1}|R_n(x)|\neq 0,$$

故$\sum\frac{n}{x^n}$在$|x|>1$上不一致收敛.

(4) 由于

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2},x\in[0,1].$$

而$\sum\frac{1}{n^2}$收敛,故由M判别法知$\sum\frac{x^n}{n^2}$在$[0,1]$上一致收敛.

(5) 设

$$u_n(x)=\frac{1}{x^2+n},$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^2+n}=0\quad,x\in(-\infty,+\infty),$$

且

$$u_n(x)-u_{n+1}(x)=\frac{1}{(x^2+n)(x^2+n+1)}>0,\quad n=1,2,3,\cdots,$$

即$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$在$(-\infty,+\infty)$上收敛,再由于

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{x^2+n+1}\leqslant\frac{1}{n+1},$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|R_n(x)|=0,$$

故$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(6) 显然当$x\neq 0$时,

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{k-1}}=x^2\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{k-1}=x^2\frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n}{1-\frac{1}{1+x^2}}$$

$$=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}},$$

由于$R_n(x)\to 1(x\to 0)$,所以$\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|R_n(x)|>\frac{1}{2}$,于是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|R_n(x)|\neq 0,$$

因此$\sum\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛.

4. 设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$，函数 $g(x)$ 在 D 上有界. 证明级数 $\sum g(x)u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $g(x)S(x)$.

证　设
$$|g(x)|\leqslant M,x\in D.$$
由于 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$，即
$$\forall \varepsilon>0,\quad \exists N,$$
当 $n>N$ 时，对一切 $x\in D$，有
$$|S_n(x)-S(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-S(x)\right|<\varepsilon/M,$$
于是当 $n>N$ 时，对一切 $x\in D$，有
$$\left|\sum_{k=1}^{n}g(x)u_k(x)-g(x)S(x)\right|=|g(x)|\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-S(x)\right|<\varepsilon,$$
故 $\sum g(x)u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $g(x)S(x)$.

5. 若在区间 I 上，对任何正整数 n，
$$|u_n(x)|\leqslant v_n(x),$$
证明当 $\sum v_n(x)$ 在 I 上一致收敛时，级数 $\sum u_n(x)$ 在 I 上也一致收敛.

证　由于 $\sum v_n(x)$ 在 I 上一致收敛，即
$$\forall \varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbf{N}_+,$$
当 $n>N$ 时，对一切的 $x\in I$ 和 $p\in\mathbf{N}_+$，都有
$$\left|\sum_{k=1}^{p}v_{n+k}(x)\right|<\varepsilon,$$
因而
$$\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}(x)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{p}|u_{n+k}(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{p}v_{n+k}(x)<\varepsilon,$$
故由柯西准则知 $\sum u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

6. 设 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，证明：若 $\sum u_n(a)$ 与 $\sum u_n(b)$ 都绝对收敛，则 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对且一致收敛.

证　由于 $\sum u_n(a)$ 和 $\sum u_n(b)$ 都绝对收敛，即
$$\forall \varepsilon>0,\quad \exists N,$$
当 $n>N$ 时，对一切自然数 p，有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}(a)\right|<\varepsilon/2,\quad \left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}(b)\right|<\varepsilon/2,$$

而又由于$u_n(x)$在$[a,b]$上为单调函数,即有

$$|u_n(x)|\leqslant|u_n(a)|+|u_n(b)|,$$

因而
$$\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}(x)\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}(a)\right|+\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}(b)\right|<\varepsilon,$$

故由柯西准则知$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上绝对且一致收敛.

7. 在$[0,1]$上定义函数列

$$u_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{1}{n},\\ 0, & x\neq\dfrac{1}{n},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,$$

证明级数$\sum u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛,但它不存在优级数.

证　由函数列定义可知$S_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{k}, & x=\dfrac{1}{k}, & 1\leqslant k\leqslant n,k\in\mathbf{N}_+,\\ 0, & x\neq\dfrac{1}{k}, & k=1,2,\cdots,n.\end{cases}$

即
$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0,\quad x\in[0,1].$$

因而
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

当$n>N$时,对一切$x\in[0,1]$,

若$x\in\left(\dfrac{1}{n},1\right)$,有

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon;$$

若$x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$,有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

故由定义可知级数$\sum u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛. 同时假设$\sum u_n(x)$在$[0,1]$上有优级数$\sum M_n$,取$x=\dfrac{1}{n}$,则

$$M_n(x)\geqslant|u_n(x)|=\left|u_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{n}>0,$$

而由$\sum M_n(x)$收敛，推出$\sum \frac{1}{n}$收敛，这与$\sum \frac{1}{n}$发散是矛盾的．故$\sum u_n(x)$不存在优级数．

8．讨论下列函数列或函数项级数在所示区间D上的敛散性：

（1）$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-2n}{(x^2+n^2)[x^2+(n-1)^2]}, D=[-1,1]$；

（2）$\sum 2^n \sin \frac{x}{3^n}, D=(0,+\infty)$；

（3）$\sum \frac{x^2}{[1+(n-1)x^2](1+nx^2)}, D=(0,+\infty)$；

（4）$\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}, D=[-1,0]$；

（5）$\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, D=(-1,1)$；

（6）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, D=(0,2\pi)$．

解　（1）由于

$$\left|\frac{1-2n}{(x^2+n^2)[x^2+(n-1)^2]}\right| = \frac{2n-1}{(x^2+n^2)[x^2+(n-1)^2]} \leqslant \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$$
$$= \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}, x \in [-1,1],$$

而级数$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right]$是收敛的，且收敛于 1，故由$M$判别法知$\sum \frac{1-2n}{(x^2+n^2)[x^2+(n-1)^2]}$在$D$上一致收敛．

（2）对某一确定的$x \in D=(0,+\infty)$，$\exists N \in \mathbf{N}_+$，当$n>N$时，总有

$$\frac{x}{3^n} < \frac{\pi}{2} \text{成立，}$$

即有
$$0 < 2^n \sin \frac{x}{3^n} < \left(\frac{2}{3}\right)^n x.$$

而$\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n x$是收敛的，因此$\sum 2^n \sin \frac{x}{3^n}$在$(0,+\infty)$上收敛，但不是一致收敛．如取$x_n = \frac{\pi}{2} \cdot 3^n \in (0,+\infty)$，就有

$$\left|2^n \sin \frac{x_n}{3^n}\right| = 2^n.$$

故$\sum 2^n\sin\dfrac{x}{3^n}$在$(0,+\infty)$上仅收敛,而非一致收敛.

(3) 由于$\dfrac{x^2}{[1+(n-1)x^2][1+nx^2]}<\dfrac{1}{n(n-1)x^2}$,$x\in D$,$n=1,2,\cdots$,

而级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(n-1)x^2}=\dfrac{1}{x^2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(n-1)}$收敛. 即$\sum\dfrac{x^2}{[1+(n-1)x^2][1+nx^2]}$在$(0,+\infty)$上是收敛的,但不是一致收敛. 因为

$$R_n(x)=S(x)-S_n(x)=\frac{1}{1+nx^2},$$

当$x=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$时,有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|R_n(x)|\neq 0.$$

(4) 设$u_n(x)=(-1)^n$,$v_n(x)=\dfrac{(-x)^n}{\sqrt{n}}$,则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\leqslant 1,x\in[-1,0],$$

及对每一个$x\in[-1,0]$,$\{v_n(x)\}$是单调减的,且

$$|v_n(x)|=\left|\frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0\ (n\to\infty),$$

即
$$v_n(x)\rightrightarrows 0\ (n\to\infty),\quad x\in[-1,0],$$

故由狄利克雷判别法知$\sum\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$在$[-1,0]$上一致收敛.

(5) 类似(4)的解法,设

$$u_n(x)=(-1)^n,v_n(x)=\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

可知$\sum(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$在$(-1,1)$上一致收敛.

(6) 由于级数$\sum\sin nx$ 的部分和函数列有

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

即
$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{x}{\sin\dfrac{x}{2}},x\in(0,2\pi).$$

而数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$单调减,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

即$\sum\dfrac{\sin nx}{n}$在$(0,2\pi)$上收敛,但不是一致收敛. 这是因为,若

$$\varepsilon_0=\frac{1}{3}\sin\frac{1}{2}.$$

则对$\forall N\in\mathbf{N}_+$,$\exists n=N$,$p=N+1$,$x_0=\dfrac{1}{2(N+1)}\in(0,2\pi)$,就有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}(x_0)\right|&=\left|\frac{1}{N+1}\sin\frac{N+1}{2(N+1)}+\frac{1}{N+2}\sin\frac{N+2}{2(N+2)}+\cdots\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{2N+1}\sin\frac{2N+1}{2(N+1)}\right|\\&>\left|\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{2N+1}\right|\sin\frac{1}{2}\\&>\frac{N+1}{2N+1}\sin\frac{1}{2}>\frac{1}{3}\sin\frac{1}{2}=\varepsilon_0.\end{aligned}$$

9. 证明:级数$\sum(-1)^n x^n(1-x)$在$[0,1]$上绝对并一致收敛,但由其各项绝对值组成的级数在$[0,1]$上却不一致收敛.

证 由于 $\sum|(-1)^n x^n(1-x)|=\sum x^n(1-x)=\sum(x^n-x^{n+1})$,

记
$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(x^k-x^{k+1}),$$

则
$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\0, & x=1,\end{cases}$$

即$\sum(-1)^n x^n(1-x)$在$[0,1]$上绝对收敛.

再由于级数$\sum(-1)^n x^n(1-x)$有

$$|R_n(x)|=x^{n+1}(1-x),$$

在$x=\dfrac{n+1}{n+2}$时达到$[0,1]$上的最大值,所以

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+2},$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0,$$

故 $\sum(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，即 $\sum(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对且一致收敛.

而正项级数

$$\sum x^n(1-x),S_n(x)=(1-x)\sum_{k=0}^{n-1}x^k=1-x^n,$$

且
$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|=1,$$

故正项级数 $\sum x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

10. 设 f 为定义在区间 (a,b) 内的任一函数，记

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n},\ n=1,2,\cdots,$$

证明函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 内一致收敛于 f.

证　由于　$|f_n(x)-f(x)|=\dfrac{1}{n}|[nf_n(x)]-nf(x)|\leqslant\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots,$

所以
$$\forall\varepsilon>0,$$

取
$$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,$$

则当 $n>N$ 时，对一切 $x\in(a,b)$ 均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\text{ 成立}.$$

故 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 内一致收敛于 f.

11. 设 $\{u_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上正的递减且收敛于零的函数列，每一个 $u_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调函数，则级数

$$u_1(x)-u_2(x)+u_3(x)-u_4(x)+\cdots$$

在 $[a,b]$ 上不仅收敛，而且一致收敛.

证　只要证级数 $\sum(-1)^{n-1}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛即可.

设 $v_n(x)=(-1)^{n-1}$，则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}v_k(x)\right|\leqslant 1,x\in[a,b],n=1,2,\cdots,$$

而 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，即有

$$0<u_n(x)\leqslant u_n(b)+u_n(a),x\in[a,b],n=1,2,\cdots,$$

及 $u_n(a)$,$u_n(b)$收敛于零.

所以$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,有

$$|u_n(a)+u_n(b)|<\varepsilon.$$

从而对一切 $x\in[a,b]$,有

$$|u_n(x)-0|\leqslant|u_n(a)+u_n(b)-0|<\varepsilon,$$

故
$$u_n(x)\rightrightarrows 0\ (n\to\infty),x\in[a,b],$$

再已知$\{u_n(x)\}$递减,因而由狄利克雷判别法知,级数

$$u_1(x)-u_2(x)+u_3(x)-u_4(x)+\cdots$$

在$[a,b]$上一致收敛.

§2　一致收敛函数列与函数项级数的性质

1. 讨论下列各函数列$\{f_n\}$在所定义的区间上:

(a) $\{f_n\}$与$\{f_n'\}$的一致收敛性;

(b) $\{f_n\}$是否有定理 13.9,定理 13.10,定理 13.11 的条件与结论.

(1) $f_n(x)=\dfrac{2x+n}{x+n},x\in[0,b]$;

(2) $f_n(x)=x-\dfrac{x^n}{n},x\in[0,1]$;

(3) $f_n(x)=nx\mathrm{e}^{-nx^2},x\in[0,1]$.

解　(1) (a) 因为 $f_n(x)=\dfrac{2x+n}{x+n}=1+\dfrac{x}{x+n},f_n'(x)=\dfrac{n}{(x+n)^2}$,

所以
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)=1,\ x\in[0,b],$$
$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=g(x)=0,\ x\in[0,b].$$

从而$\forall\varepsilon>0,\exists N_1=\left[\dfrac{b}{\varepsilon}\right]$和 $N_2=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,或 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,对一切 $x\in[0,b]$有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{x+n}\right|<\frac{b}{n}<\varepsilon$$

和
$$|f_n'(x)-g(x)|=\frac{n}{(x+n)^2}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon,x\in[0,b].$$

即$\{f_n(x)\}$和$\{f_n'(x)\}$在$[0,b]$上都一致收敛.

（b）因为 $\left\{\frac{2x+n}{x+n}\right\}$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛，且每一项都连续，另外 $\left\{\frac{2x+n}{x+n}\right\}'$ 在 $[0,b]$ 上亦一致收敛. 故 $\{f_n(x)\}$ 具有定理13.9，定理13.10，定理13.11的条件和结论.

（2）（a）因为
$$f_n(x)=x-\frac{x^n}{n},\ f_n'(x)=1-x^{n-1},$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)=x,\ x\in[0,1],$$
$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=g(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1),\\ 0, & x=1.\end{cases}$$
从而 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，对一切 $x\in[0,1]$ 有
$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x^n}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$
即 $\left\{f_n(x)=x-\frac{x^n}{n}\right\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

但取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2\mathrm{e}}$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，取 $x'=1-\frac{1}{n}\in[0,1]$，有
$$|f_n'(x')-g(x')|=\left|f_n'\left(1-\frac{1}{n}\right)-g\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}>\frac{1}{2\mathrm{e}}=\varepsilon_0,$$
即 $f_n'(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

（b）由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，故满足定理13.9，定理13.10的条件，结论也成立. 但不满足定理13.11的条件，结论亦不成立. 因为 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛，及
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lim_{n\to\infty}f_n(x))=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=1,x\in[0,1],$$
而
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)=1-x^{n-1},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}(1-x^{n-1})=g(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1),\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

（3）（a）因为 $f_n(x)=nx\mathrm{e}^{-nx^2}$，$f_n'(x)=n\mathrm{e}^{-nx^2}(1-2nx^2)$，

所以
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{\mathrm{e}^{nx^2}}=f(x)=0,x\in[0,1],$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 1,\\ +\infty, & x=0.\end{cases}$$

从而,对给定 $\varepsilon_0=\frac{1}{\mathrm{e}}$,$\forall N\in\mathbf{N}_+$,$\exists n>N$ 及 $x'=\frac{1}{\sqrt{n}}$,有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|=\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-1}\geqslant\varepsilon_0,$$

即 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

同样,由于 $\{f_n'(x)\}$ 其极限函数在 $[0,1]$ 上不连续,故 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上亦不一致收敛.

(b) 因 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上都不一致收敛,所以 $\{f_n(x)\}$ 不满足定理13.9,定理13.10,定理13.11 的条件,但定理13.9 的结论成立. 因为 $f(x)\equiv 0$ 在 $[0,1]$ 上连续,而不具有定理 13.10,定理 13.11 的结论.

2. 证明:若函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上满足定理 13.11 的条件,则 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证　设 $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$,$x\in[a,b]$ $(n\to\infty)$,对 $\forall x,x_0\in[a,b]$ 有

$$f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t,$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t,$$

即
$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&=\left|f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t-f(x_0)-\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t\right|\\&=|f_n(x_0)-f(x_0)|+\left|\int_{x_0}^{x}[f_n'(t)-g(t)]\mathrm{d}t\right|,\end{aligned}$$

而由 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 点收敛知:$\forall\varepsilon>0$,$\exists N_1$,当 $n>N_1$ 时,有

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon/2,$$

及由 $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$ $(n\to\infty)$,$x\in[a,b]$ 知:$\forall\varepsilon>0$,$\exists N_2$,当 $n>N_2$ 时,有

$$|f_n'(t)-g(t)|<\varepsilon/2(b-a),$$

故取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \text{ 成立},$$

即
$$f_n(x)\rightrightarrows f(x),\quad x\in[a,b]\ (n\to\infty).$$

3. 证明定理 13.12 和定理 13.14.

证　**定理 13.12：若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛，且每一项都连续，则其和函数在 $[a,b]$ 上也连续.** 设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 的部分和函数

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),$$

由于 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，即 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上亦一致收敛，而每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，即 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上亦连续，故有

$$S_n(x)\rightarrow S(x)\ (n\rightarrow\infty),x\in[a,b].$$

由定理 13.9 可知

$$S(x)=\sum u_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上连续.

定理 13.14：若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一项都有连续的导函数，$x_0\in[a,b]$ 为 $\sum u_n(x)$ 的收敛点，且 $\sum u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则

$$\sum\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum u_n(x)\right).$$

设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 的部分和函数

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),x\in[a,b],$$

由所给的条件知

$$S_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k'(x),x\in[a,b],$$

而 $\sum u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，即由上题可知

$$S_n(x)\rightarrow S(x)\ (n\rightarrow\infty),\quad x\in[a,b],$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n'(x)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lim_{n\to\infty}S_n(x))\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum u_n(x)\right),\end{aligned}$$

即

$$\sum\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum u_n(x)\right).$$

4. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n^2}$, $x\in[-1,1]$, **计算积分** $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t$.

解　由于

$$\left|\frac{x^{n-1}}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2},x\in[-1,1],$$

由 M **判别法知** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n^2}$ **在** $[-1,1]$ **上一致收敛,而每一项** $\dfrac{x^{n-1}}{n^2}$ **在** $[-1,1]$ **上连续,故由定理** 13.13 **有**

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n^2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{t^{n-1}}{n^2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}.$$

5. 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}},x\in(-\infty,+\infty),$$

计算积分 $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t$.

解　显然 $S(x)$ **满足定理** 13.13 **的条件,故有**

$$\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n\sqrt{n}}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\int_0^x\cos nt\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2\sqrt{n}}.$$

6. 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx},x>0,$$

计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}S(t)\mathrm{d}t$.

解　由于

$$|n\mathrm{e}^{-nx}|<\frac{n}{\dfrac{n^3x^3}{6}}=\frac{6}{n^2x^3}<\frac{6}{(\ln 2)^3}\frac{1}{n^2},$$

而 $\sum\dfrac{6}{n^2(\ln 2)^3}$ **收敛,即** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ **在** $[\ln 2,\ln 3]$ **上一致收敛,且每一项** $n\mathrm{e}^{-nx}$ **在** $[\ln 2,\ln 3]$ **上连续,由定理** 13.13 **可知**

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}S(t)\mathrm{d}t=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_{\ln 2}^{\ln 3}\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{-nt})\Big|_{\ln 3}^{\ln 2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}-\frac{\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

7. 证明:函数

$$f(x)=\sum\frac{\sin nx}{n^3}$$

在$(-\infty,+\infty)$上连续,且有连续的导函数.

证　由于
$$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right|\leqslant\frac{1}{n^3},$$
而$\sum\frac{1}{n^3}$收敛,即$\sum\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

又由于
$$\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)'=\frac{\cos nx}{n^2},$$
而
$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2},$$
可推出$\sum\frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上亦一致收敛,且
$$\frac{\cos nx}{n^2}\ (n=1,2,\cdots)$$
在$(-\infty,+\infty)$上连续,故由定理13.14知
$$f'(x)=\sum\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)'=\sum\frac{\cos nx}{n^2},$$
再由定理13.12可得$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

8. 证明:定义在$[0,2\pi]$上的函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n\cos nx\ (0<r<1)$,满足定理13.13条件,且
$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos nx\right)\mathrm{d}x=2\pi.$$

证　设
$$u_n(x)=r^n\cos nx\ (0<r<1),x\in[0,2\pi],$$
则
$$|u_n(x)|\leqslant r^n,$$
而正项级数$\sum r^n$收敛,所以$\sum r^n\cos nx$在$[0,2\pi]$上一致收敛,且每一项$u_n(x)$在$[0,2\pi]$上连续,由定理13.13有
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos nx\right)\mathrm{d}x&=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x\\&=2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x=2\pi.\end{aligned}$$

9. 讨论下列函数列在所定义区间上的一致收敛性及极限函数的连续性、可微性和可积性:

(1) $f_n(x)=x\mathrm{e}^{-nx^2},n=1,2,\cdots,x\in[-l,l]$;

(2) $f_n(x)=\dfrac{nx}{nx+1}$, $n=1,2,\cdots$, (i) $x\in[0,+\infty)$, (ii) $x\in[a,+\infty)$ $(a>0)$.

解 (1) 由于 $$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),x\in[-l,l].$$

从而 $$\sup_{x\in[-l,l]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[-l,l]}|xe^{-nx^2}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}\to 0\ (n\to\infty),$$

即 $$\{f_n(x)=xe^{-nx^2}\}\rightrightarrows f(x)=0\ (n\to\infty),\ x\in[-l,l].$$

而极限函数 $f(x)=0$,显然在$[-l,l]$上连续、可微及可积.

(2) (i) 显然

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

即$\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上不一致收敛.

而极限函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$ 在$[0,+\infty)$上不连续、不可微在任意有限区间上可积.

ii) 由于 $$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)=1,x\in[a,+\infty)\ (a>0),$$

所以 $$\sup_{x\in[a,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[a,+\infty)}\left|\frac{nx}{nx+1}-1\right|$$
$$=\sup_{x\in[a,+\infty)}\left|\frac{1}{1+nx}\right|\to 0\ (n\to\infty),$$

即 $$\left\{f_n(x)=\frac{nx}{nx+1}\right\}\rightrightarrows f(x)=1,\quad x\in[a,+\infty)\ (a>0)\ (n\to\infty),$$

由极限函数 $f(x)=1$ 知,$f(x)$在$[a,+\infty)$ $(a>0)$上连续、可微并在任意有限区间上可积.

10. 证明函数$S(x)=\sum\dfrac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$内连续,且有连续的各阶导数.

证 对$\forall x_0\in(1,+\infty)$,取$1<p<x_0$,则有

$$0<\frac{1}{n^x}\leqslant\frac{1}{n^p}\ (x\geqslant p),$$

而$\sum\dfrac{1}{n^p}$收敛,即$\sum\dfrac{1}{n^x}$在$[p,+\infty)$上一致收敛. 再由于$\dfrac{1}{n^x}$ $(n=1,2,\cdots)$在$[p,+\infty)$上连续,故由定理13.12可知函数

$$S(x)=\sum\frac{1}{n^x}$$

在$[p,+\infty)$上连续，在点x_0处亦连续，而x_0是任意点，因而可推出$S(x)$在$(1,+\infty)$内连续.

又因
$$\left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)}=(-1)^k\frac{(\ln n)^k}{n^x}$$
在$(1,+\infty)$内连续$(k=1,2,\cdots)$，所以，
$$\forall\ x_0\in(1,+\infty),$$
取$p\in(1,x_0]$，则有
$$\left|(-1)^k\frac{(\ln n)^k}{n^x}\right|\leqslant\frac{(\ln n)^k}{n^p}\ (x\geqslant p),$$
固定k，取λ使$p>\lambda>1$，由
$$\frac{(\ln n)^k}{n^p}\bigg/\frac{1}{n^\lambda}=\frac{(\ln n)^k}{n^{p-\lambda}}\to 0\ (n\to\infty)$$
可知$\sum\frac{(\ln n)^k}{n^p}$收敛，即$\sum(-1)^k\frac{(\ln n)^k}{n^x}$在$[p,+\infty)$上一致收敛，同时当$x>1$时$\sum\frac{1}{n^x}$亦收敛，故由定理13.12，定理13.14可知
$$S^{(k)}(x)=\sum\left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)}=\sum(-1)^k\frac{(\ln n)^k}{n^x}\text{在}[p,+\infty)\text{上连续},$$
在x_0点亦连续，再由于x_0的任意性，可得$S(x)$在$(1,+\infty)$内连续且有连续的各阶导函数.

11. 设f在$(-\infty,+\infty)$上有任何阶导数，记$F_n=f^{(n)}$，且在任何有限区间内$F_n\rightrightarrows\varphi\ (n\to\infty)$，试证$\varphi(x)=Ce^x$($C$为常数).

证　由于f在$(-\infty,+\infty)$上有任何阶导数，即$f^{(n)}$在任何有限区间(a,b)内有连续的导数，且$F_n=f^{(n)}\rightrightarrows\varphi\ (n\to\infty)$. 可推出$f^{(n+1)}$在$(a,b)$内也一致收敛于$\varphi(x)$，故由定理13.11有
$$\varphi'(x)=(\lim_{n\to\infty}f^{(n)})'=\lim_{n\to\infty}f^{(n+1)}=\varphi(x),\ x\in(a,b),$$
即$\varphi'(x)-\varphi(x)=0$. 求出该微分方程可得$\varphi(x)=Ce^x$(C为常数).

§3　总练习题

1. 试问k为何值时，下列函数列$\{f_n\}$一致收敛：

（1）$f_n(x)=xn^k\mathrm{e}^{-nx}$，$0\leqslant x<+\infty$；

（2）$f_n(x)=\begin{cases} xn^k, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{n}, \\ \left(\dfrac{2}{n}-x\right)n^k, & \dfrac{1}{n}<x\leqslant \dfrac{2}{n}, \\ 0, & \dfrac{2}{n}<x\leqslant 1. \end{cases}$

解　（1）由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)=0$，$x\in[0,+\infty)$.

及由$f_n'(x)=n^k\mathrm{e}^{-nx}(1-nx)$可知$f_n(x)$在$x=\dfrac{1}{n}$达到$[0,+\infty)$上的最大值. 所以，

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=n^{k-1}\mathrm{e}^{-1},$$

当 $k<1$ 时，有

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|\to 0\ (n\to\infty);$$

当 $k\geqslant 1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|\neq 0.$$

即当 $k<1$ 时，$\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

（2）当 $x=0$ 时，$f_n(x)=0$；当 $x\in(0,1]$时，$f_n(x)\to 0$，即

$$f_n(x)\to f(x)=0\ (n\to\infty),x\in[0,1].$$

而
$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=n^{k-1},$$

故当 $k<1$ 时，
$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\to 0\ (n\to\infty);$$

当 $k\geqslant 1$ 时，
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\neq 0.$$

因而$\{f_n(x)\}$当 $k<1$ 时，在$[0,1]$上是一致收敛的.

2. 证明：（1）若 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，$x\in I$，且 f 在 I 上有界，则$\{f_n\}$至多除有限项外在 I 上是一致有界的.

（2）若 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty)$，$x\in I$，且对每个正整数 n，f_n 在 I 上有界，则$\{f_n\}$在 I 上一致有界.

证　（1）由于 f 在 I 上有界，即$\exists M_1>0$，对一切 $x\in I$，有

$$|f(x)|<M_1.$$

再由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty)$，$x\in I$ 知$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，对一切

$x\in I$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

即
$$|f_n(x)|=|f_n(x)-f(x)+f(x)|$$
$$\leqslant|f_n(x)-f(x)|+|f(x)|<\varepsilon+M_1.$$

亦即$\{f_n(x)\}$除前N项外在I上一致有界.

（2）由于
$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty),x\in I,$$
则$\forall\varepsilon>0,\exists N$，当$n>N+1>N$时，对一切$x\in I$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

所以当$n>N+1$时，

$$\forall x\in I,|f_n(x)|<|f_{N+1}(x)|+1,$$

又对每个正整数n，$f_n(x)$在I上有界，设为

$$|f_n(x)|\leqslant M_n(n=1,2,\cdots,N+1),x\in I,$$

取
$$M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_{N+1}\},$$
则对一切正整数n，有

$$|f_n(x)|\leqslant M+1,\quad x\in I.$$

即$\{f_n\}$在I上一致有界.

3. 设f为$\left[\frac{1}{2},1\right]$上的连续函数，证明：

（1）$\{x^nf(x)\}$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上收敛；

（2）$\{x^nf(x)\}$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上一致收敛的充要条件是$f(1)=0$.

证　（1）由于
$$\lim_{n\to\infty}x^nf(x)=\begin{cases}0, & \frac{1}{2}\leqslant x<1,\\ f(1), & x=1,\end{cases}$$
从而$\{x^nf(x)\}$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上收敛，且其极限函数

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[\frac{1}{2},1\right)\\ f(1), & x=1.\end{cases}$$

（2）必要性：由于$\{x^nf(x)\}$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上一致收敛，$f(x)$为$\left[\frac{1}{2},1\right]$上的

连续函数,所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上有界,且 $x^n f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续,故

$$\lim_{n\to\infty} x^n f(x)=g(x), \quad \text{即} \quad f(1)=g(1)=\lim_{x\to 1} g(x)=0.$$

充分性:由于 $f(x)$ 为 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上的连续函数,所以

$$|f(x)|\leqslant M, x\in\left[\frac{1}{2},1\right],$$

由 $f(1)=0$,可知 $\{x^n f(x)\}$ 的极限函数

$$g(x)=0.$$

因此 $\forall \varepsilon>0, \exists 0<\delta<\frac{1}{2}$,当 $1-\delta<x\leqslant 1$ 时,

$$|f(x)-f(1)|=|f(x)|<\varepsilon.$$

即当 $1-\delta<x\leqslant 1$ 时,

$$|x^n f(x)-0|<|f(x)|<\varepsilon;$$

当 $\frac{1}{2}\leqslant x<1-\delta$ 时,

$$|x^n f(x)-0|\leqslant(1-\delta)^n M,$$

而

$$(1-\delta)^n M\to 0 \ (n\to\infty).$$

故 $\forall \varepsilon>0, \exists N$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in\left[\frac{1}{2},1-\delta\right]$,有

$$|x^n f(x)-0|\leqslant(1-\delta)^n M<\varepsilon.$$

即 $\forall \varepsilon>0, \exists N$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,有

$$|x^n f(x)-0|<\varepsilon.$$

故 $\{x^n f(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛.

4. 若把定理 13.10 中一致收敛函数列 $\{f_n\}$ 的每一项在 $[a,b]$ 上连续改为在 $[a,b]$ 上可积,试证 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上的极限函数在 $[a,b]$ 上也可积.

证　设

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x) \ (n\to\infty), x\in[a,b],$$

则对 $\forall \varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}>0, \exists N$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in[a,b]$,有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon_1,$$

即

$$f_n(x)-\varepsilon_1<f(x)<f_n(x)+\varepsilon_1. \tag{1}$$

再由于 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，所以在任意 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 上有界，即

$$m\leqslant f_n(x)\leqslant M,\quad x\in[\alpha,\beta],$$

m,M 分别为 $f_n(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的上、下确界，这样①式可为

$$m-\varepsilon_1<f(x)<M+\varepsilon_1,\quad x\in[\alpha,\beta].$$

由此可知 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有界，因而设 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的振幅为 Ω，即

$$\Omega\leqslant(M+\varepsilon_1)-(m-\varepsilon_1)=(M-m)+2\varepsilon_1=W^{f_n}+2\varepsilon_1.$$

这样，存在某个分割 T，有

$$\sum_T W_i^{f_n}\Delta x_i<\varepsilon,$$

即

$$\sum_T \Omega_i^f\Delta x_i\leqslant\sum_T(W_i^{f_n}+2\varepsilon_1)\Delta x_i=\sum_T W_i^{f_n}\Delta x_i+2\varepsilon_1\sum_T\Delta x_i$$
$$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

其中

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

由可积性第二充要条件知，极限函数 f 在 $[a,b]$ 上也可积.

5. 设级数 $\sum a_n$ 收敛，证明 $\lim\limits_{x\to0^+}\sum\frac{a_n}{n^x}=\sum a_n$.

证　由于

$$\left|\frac{1}{n^x}\right|\leqslant1,\quad x\in[0,+\infty),$$

且

$$\frac{1}{(n+1)^x}\leqslant\frac{1}{n^x},$$

即 $\left\{\frac{1}{n^x}\right\}$ 单调一致有界. 又 $\sum a_n$ 收敛，即 $\sum a_n$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 因而由阿贝耳判别法知 $\sum\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，同时 $\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续 $(n=1,2,\cdots)$，由定理 13.12 可知 $\sum\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上亦连续.

故

$$\lim_{x\to0^+}\sum\frac{a_n}{n^x}=\sum\lim_{x\to0^+}\frac{a_n}{n^x}=\sum a_n.$$

6. 设可微函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛，$\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界，证明：$\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证　由于 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界，即

$$|f_n'(x)|\leqslant M,x\in[a,b],n=1,2,\cdots,$$

同时将$[a,b]$上作分割点$a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$,使

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}<\varepsilon/4M\ (i=1,2,\cdots,m),$$

则对每个小区间$[x_{i-1},x_i]$,$\exists N_i>0$. 当$n>N_i$时,$\forall x_i'\in[x_{i-1},x_i]$及$p\in\mathbf{N}_+$,有

$$|f_n(x_i')-f_{n+p}(x_i')|<\varepsilon/2,$$

故对函数$f_n(x)-f_{n+p}(x)$应用微分中值定理,可有

$$\begin{aligned}&|f_n(x)-f_{n+p}(x)-f_n(x_i')+f_{n+p}(x_i')|\\&=|f_n'(\xi)-f_{n+p}'(\xi)||x-x_i'|<2M\cdot\varepsilon/4M=\frac{\varepsilon}{2},\xi\in[x,x_i'],\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_{n+p}(x)|&\leqslant|f_n(x)-f_{n+p}(x)-f_n(x_i')+f_{n+p}(x_i')|\\&\quad+|f_n(x_i')-f_{n+p}(x_i')|\\&<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

取$N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_m\}$,则当$n>N$时,对一切$x\in[a,b]$. 有

$$|f_n(x)-f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

故$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.

第十四章 幂 级 数

知 识 要 点

1. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 是一种特殊的函数项级数，若其收敛域不止 x_0 一个收敛点，则它的收敛域便是由一个以 x_0 为中心，长为 $2R$ 的区间构成. 其中 $R=(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$，称为收敛半径；称 (x_0-R,x_0+R) 为收敛区间；收敛域除收敛区间外还包括使幂级数收敛的收敛区间的端点(如存在的话).

2. 幂级数在其收敛区间内绝对收敛，且内闭一致收敛，故在其收敛区间内幂级数可逐项求极限、逐项求积、逐项求导，且幂级数的和函数在其收敛域上连续. 逐项求积、逐项求导后所得到的新幂级数收敛区间不变(在收敛区间端点的收敛性可能改变).

3. 对于缺项的幂级数(即幂级数中有无数多个系数为零)，也可通过变量代换或按顺序重新排号的方法化为没有缺项的幂级数来求其收敛半径和收敛域.

4. 欲求幂级数在其收敛区间上的和函数，首先求出其收敛半径和收敛域，然后通过以下方法求和：

(1) 变量替换法——通过变量替换，化为一较简单的幂级数.

(2) 拆项法——将幂级数拆成若干简单的幂级数之和.

(3) 逐项求导(积)法——通过逐项求导(积)得到新的易求和函数的幂级数(往往是五个基本初等函数的幂级数展开式)，然后再通过积分(求导)得到原幂级数的和函数.

5. 欲求收敛的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和，可先构造幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，再求其在

$(-1,1)$上的和函数$S(x)$,于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)$.

6. 由泰勒系数$a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$构成的$(x-x_0)$幂级数称为泰勒级数. 若$f$在$x=x_0$的某邻域内等于其泰勒级数的和函数,则称泰勒级数为$f$在点$x_0$处的泰勒展开式. 若$f$在$x_0$邻域能表示成$(x-x_0)$的幂级数,则该幂级数就是$f$在$x_0$处的泰勒级数(幂级数的惟一性).

7. 欲求函数f在x_0处的泰勒展开式有两种方法.

(1) 直接法:求出f在x_0处的泰勒系数,再求相应的泰勒公式余项$R_n(x)\to0\ (n\to\infty)$的区域,进而写出所求的泰勒展开式.

(2) 间接法:借用某些基本初等函数的泰勒展开式,如e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$及$(1+x)^\alpha$的麦克劳林展开式,通过适当变换、四则运算、逐项求导或逐项求积等方法导出所求函数的泰勒展开式.

注意:求得函数的泰勒展开式后,一定要指明等式成立的范围.

习 题 详 解

§1 幂　级　数

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛区域:

(1) $\sum nx^n$;　　(2) $\sum\dfrac{x^n}{n^2\cdot2^n}$;

(3) $\sum\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$;　　(4) $\sum r^{n^2}x^n\ (0<r<1)$;

(5) $\sum\dfrac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$;　　(6) $\sum\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$;

(7) $\sum\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$;　　(8) $\sum\dfrac{x^{n^2}}{2^n}$.

解　(1) 因为
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$
收敛半径$R=1$,而当$x=\pm1$时,$\sum(\pm1)^n n$均发散,故$\sum nx^n$的收敛区域为$(-1,1)$.

(2) **因为**
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 2^n}}=\frac{1}{2},$$
收敛半径 $R=2$**,而当** $x=\pm 2$ **时,级数** $\sum\frac{(\pm 2)^n}{n^2 2^n}$**是收敛的,故** $\sum\frac{x^n}{n^2 2^n}$**的收敛区域为**$[-2,2]$.

(3) **因为**
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4},$$
收敛半径 $R=4$**,而当** $x=\pm 4$ **时,级数** $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$ **的通项** u_n **有**
$$|u_n|=\frac{(n!)4^n}{(2n)!},$$
当 $x=-4$ **时,**$|u_n|\to+\infty\ (n\to\infty)$**,即级数发散;**

当 $x=4$ **时,由于**
$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2n+2}\right)=-\frac{1}{2}<1.$$
即由拉贝判别法知 $\sum u_n$ **发散.**

故 $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ **的收敛区域为**$(-4,4)$.

(4) **设**
$$u_n=r^{n^2},0<r<1,$$
由于
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{r^{n^2}}=0,$$
即级数 $\sum r^{n^2}$**的收敛半径** $R=+\infty$**,收敛区域为**$(-\infty,+\infty)$.

(5) **作变换:**$y=x-2$**,则原级数为** $\sum u_n=\sum\frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!}$,

由于
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{y^2}{2n(2n+1)}=0,$$
即原级数的收敛半径 $R=+\infty$**,收敛区域为**$(-\infty,+\infty)$.

(6) **设**
$$u_n=\frac{3^n+(-2)^n}{n},$$
由于
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=3,$$
故收敛半径 $R=\frac{1}{3}$**,其收敛区域为**$\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

当 $x=-\frac{4}{3}$**时,幂级数** $\sum\frac{3^n+(-1)^n}{n}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ **是收敛的;**

当 $x=-\frac{2}{3}$ 时,幂级数 $\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 是发散的.

故原级数 $\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛区域为 $\left[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

(7) 设
$$u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$
由于
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1,$$
即原级数收敛半径 $R=1$,而当 $|x|=1$ 时原级数发散. 故级数 $\sum\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$ 的收敛区域为 $(-1,1)$.

(8) 设
$$u_n=\frac{x^{n^2}}{2^n},$$
由于
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{2}=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \frac{1}{2}, & |x|=1,\\ +\infty, & |x|>1.\end{cases}$$

而当 $|x|>1$ 时,级数发散. 故级数 $\sum\frac{x^{n^2}}{2^n}$ 的收敛半径 $R=1$,收敛区域为 $[-1,1]$.

2. 应用逐项求导或逐项求积方法求下列幂级数的和函数(应同时指出它们的定义域):

(1) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$;

(2) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

(3) $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+\cdots+n(n+1)x^n+\cdots$.

解 (1) 由
$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
可知
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=x^2,$$
即该级数收敛半径 $R=1$,当 $x=\pm 1$ 时,级数 $\sum\left(\pm\frac{1}{2n+1}\right)$ 是发散的. 故该级数的收敛区域为 $(-1,1)$. 因此,$\forall x\in(-1,1)$,有
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2},$$

故和函数

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right)'\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-S(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},x\in(-1,1).$$

(2) 设 $f(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$,则该级数的收敛区域为 $(-1,1)$. 即 $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$的和函数

$$S(x)=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\cdot g(x),x\in(-1,1).$$

其中

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},$$

而

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

$$g(x)=\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

故

$$S(x)=\frac{x}{(1-x)^2},x\in(-1,1).$$

(3) 由于该级数的收敛区域为$(-1,1)$,即该级数的和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n,x\in(-1,1).$$

故

$$S(x)=\left(\int_0^x S(t)\mathrm{d}t\right)'=\left(\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)t^n\mathrm{d}t\right)'=\left(x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\right)'$$

$$=\left[\frac{x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2x}{(1-x)^3},\ x\in(-1,1).$$

3. 证明:设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $|x|<R$ 内收敛,若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}R^{n+1}$也收敛,则

$$\int_0^R f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}.$$

(注意:这里不管 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=R$ 是否收敛). 应用这个结果证明:

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

证　由于幂级数在 $|x|<R$ 内收敛，于是由定理 14.8 有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\ x\in(-R,R).$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $[0,R]$ 上收敛，故由定理 13.12 和定理 13.13 知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的和函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,R]$ 上连续，即

$$\int_0^R f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to R^-}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to R^-}\left(\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1},$$

应用这个结果，取

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$f(x)=\frac{1}{1+x}.$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 的收敛区域为 $(-1,1)$，故 $\forall x\in(-1,1)$，有

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(1)^n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln 2.$$

4. 证明：

(1) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)}=y$；

(2) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy''+y'-y=0$.

证　(1) 由于

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，则可在 $(-\infty,+\infty)$ 内任意阶逐项微分，即有

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!},\quad y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!},$$

$$y'''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!},\quad y^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}.$$

而
$$y^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4(n-1)}}{(4(n-1))!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=y.$$

（2）由于
$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$$
的收敛区域为$(-\infty,+\infty)$，则可在$(-\infty,+\infty)$内任意阶逐项微分，即有
$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!\ (n-1)!},\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!\ (n-2)!},$$
故
$$\begin{aligned}xy''+y'-y&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!\ (n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!\ (n-1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n!\ (n-2)!}+\frac{1}{n!\ (n-1)!}-\frac{1}{(n-1)!\ (n-2)!}\right)x^{n-1}\\&=0.\end{aligned}$$

5. 证明：设 f 为幂级数(2)在$(-R,R)$上的和函数，若 f 为奇函数，则级数(2)仅出现奇次幂的项，若 f 为偶函数，则(2)仅出现偶次幂的项.

证　由于
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad x\in(-R,R),$$
所以
$$f(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_nx^n,\quad x\in(-R,R).$$

当 $f(x)$为奇函数时，应有 $a_n+(-1)^na_n=0\ (n=1,2,\cdots)$，
而当且仅当 $n=2k\ (k=1,2,\cdots)$时，才满足
$$a_n+(-1)^na_n=0,$$
故这时必有 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2k-1}x^{2k-1},x\in(-R,R)\ (k=1,2,\cdots).$

当 $f(x)$为偶函数时，应有
$$a_n-(-1)^na_n=0\ (n=1,2,\cdots),$$
于是当且仅当 $n=2k-1$ 时，才满足
$$a_n-(-1)^na_n=0\ (k=1,2,\cdots)\ (n=1,2,\cdots).$$
故这时必有
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}(k=1,2,\cdots).$$

6. 求下列幂级数的收敛域：

（1）$\sum\dfrac{x^n}{a^n+b^n}\ (a>0,b>0)$；

(2) $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

解 (1)**设** $$u_n=\frac{1}{a^n+b^n}\ (a>0,b>0),$$

由 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\begin{cases}\frac{1}{a}, & a\geqslant b>0,\\ \frac{1}{b}, & b>a>0.\end{cases}$$

所以收敛半径 $R=\max\{a,b\}$,**由于** $|x|=R$ **时**,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R^n}{a^n+b^n}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & a=b,\\ 1, & a\neq b.\end{cases}$$

即 $\sum\frac{x^n}{a^n+b^n}$ **在** $x=\pm R$ **处发散,故其收敛域为** $(-R,R)$.

(2)**由于** $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},$$

即收敛半径 $$R=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

而当 $x=\pm\frac{1}{\mathrm{e}}$ **时**, $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\pm\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n\neq 0,$$

故 $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$ **的收敛域为** $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

7. **证明定理** 14.3 **并求下列幂级数的收敛半径**:

(1) $\sum\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$;

(2) $a+bx+ax^2+bx^3+\cdots\ (0<a<b)$.

证 先证明定理 14.3.

对于定理 14.3 **的幂级数** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,**由于**

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|},$$

即 $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=|x|\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=|x|\rho.$$

故由定理 12.8 **知:当** $|x|\rho<1$,**即** $|x|<\frac{1}{\rho}$ **时,级数** $\sum a_nx^n$ **绝对收敛;当**

$|x|\rho>1$，即$|x|>\dfrac{1}{\rho}$时，级数$\sum a_nx^n$发散．因而就有定理14.3的结论：

i）当$0<\rho<+\infty$时，幂级数$\sum a_nx^n$的收敛半径为

$$R=\frac{1}{\rho};$$

ii）当$\rho=0$时，恒有$|x|\rho<1$，即$R=+\infty$；

iii）当$\rho=+\infty$时，除$x=0$外恒有$|x|\rho>1$，即$R=0$.

而对于(1) $\sum\dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$，由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}=4=\rho,\ \text{即}\ R=\frac{1}{4}.$$

(2) $a+bx+ax^2+bx^3+\cdots\ (0<a<b)$.

由于
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{b}=1,\text{即}R=1.$$

8．求下列幂级数的收敛半径及其和函数：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$；　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$.

解　(1) 设
$$a_n=\frac{1}{n(n+1)},$$

则由
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1,$$

即收敛半径$R=1$，而当$x=\pm1$时，级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$和$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$都收敛，

故$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛区域为$[-1,1]$.

设
$$g(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},x\in(-1,1),$$

则有
$$g'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

$$g''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

从而
$$g'(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln(1-t),$$

$$g(x)=-\int_0^x \ln(1-t)\mathrm{d}t=(1-x)\ln(1-x)+x.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & x\in[-1,1), x\neq 0,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(2) 设
$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$
则由
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}=1,$$
得收敛半径 $R=1$，而当 $x=\pm 1$ 时，级数 $\sum\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 和 $\sum\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}$ 都收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$ 的收敛区域为 $[-1,1]$.

令 $g(x)=x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)(n+2)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}, |x|\leqslant 1,$

则
$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=(1-x)\ln(1-x)+x,$$
即
$$\begin{aligned}g(x)&=\int_0^x[(1-t)\ln(1-t)+t]\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x)-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}x^2.\end{aligned}$$

因此和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}=-\frac{(1-x)^2}{2x^2}\ln(1-x)-\frac{1}{2x}+\frac{3}{4}, 0<|x|<1.$$

而当 $x=1$ 时，　$S(1)=\dfrac{1}{4}$，

当 $x=-1$ 时，　$S(-1)=2\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{4}$，

当 $x=0$ 时，　$S(0)=0$.

故
$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{(1-x)^2}{2x^2}\ln(1-x)-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{3}{4}, & 0<|x|<1,\\ \dfrac{1}{4}, & x=1,\\ 0, & x=0,\\ 2\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{4}, & x=-1.\end{cases}$$

9. 设 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为等差数列 $(a_0\neq 0)$. 试求：

(1) **幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径；**

(2) **数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$ 的和数.**

解 (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d $(n=0,1,2,\cdots)$，则有 $a_n=a_0+nd$.

从而
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{d}{a_0+nd}\right|=1,$$
即收敛半径 $R=1$.

(2) 由于
$$a_n=a_0+nd,$$
所以
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_0}{2^n}+\frac{nd}{2^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{2^n}+d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$
而
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{2^n}=\frac{a_0}{1-\dfrac{1}{2}}=2a_0,$$
至于
$$d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n},$$
令
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n,$$
则
$$\frac{f(x)}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1},\ |x|<2,$$
从而
$$\int_0^x\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{2^n}t^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{2}{2-x},\ \left|\frac{x}{2}\right|<1.$$
所以
$$\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{2}{2-x}\right)'=\frac{2}{(2-x)^2},$$
即
$$f(x)=\frac{2x}{(2-x)^2},$$

令 $x=1$,可得
$$d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2d.$$
因而
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=2a_0+2d=2(a_0+d).$$

§2　函数的幂级数展开

1. 设函数 f 在区间 (a,b) 内的各阶导数一致有界,即存在正数 M,对一切 $x\in(a,b)$,有 $|f^{(n)}(x)|\leqslant M,n=1,2,\cdots$.

证明:对 (a,b) 内任一点 x 与 x_0 有
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n(f^{(0)}(x)=f(x),0!\ =1).$$

证　由于函数 f 在区间 (a,b) 内的各阶导数存在且一致有界,所以对任意的 $x,x_0\in(a,b)$,$f(x)$ 可展开为
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$
而
$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}\to 0\ (n\to\infty),$$
故由定理 14.11,可知
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ x,x_0\in(a,b).$$

2. 利用已知函数的幂级数展开式,求下列函数在 $x=0$ 处的幂级数展开式,并确定它收敛于该函数的区间:

(1) e^{x^2};　　(2) $\dfrac{x^{10}}{1-x}$;

(3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$;　　(4) $\sin^2 x$;

(5) $\dfrac{e^x}{1-x}$；　(6) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$；

(7) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$；　(8) $(1+x)e^{-x}$；

(9) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解　(1) **由于**　$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

所以　$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) **由于**　$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ x\in(-1,1).$$

所以　$$\frac{x^{10}}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+10}=\sum_{n=10}^{\infty}x^n,\ x\in(-1,1).$$

(3) **由于**　$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n,\ x\in[-1,1)$$

及　$$\frac{1}{\sqrt{1-2x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(2x)^n,x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

所以　$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\cdot 2^n\cdot x^{n+1}}{(2n)!!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$$
$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1},x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

(4) **由于**　$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty),$$

所以　$$\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},|x|<+\infty.$$

(5) **由于**　$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$$

及　$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ x\in(-1,1).$$

所以　$$\frac{e^x}{1-x}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)x^n,\ x\in(-1,1).$$

(6) **由于**
$$\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right)$$

且
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |x|<1,$$
$$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n,\ |x|<\frac{1}{2},$$

所以
$$\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-2)^n)x^n,\quad |x|<\frac{1}{2}.$$

(7) **由于**
$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ |x|<+\infty,$$

所以
$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n+1}}{t(2n+1)!}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}x^{2n+1},|x|<+\infty.$$

(8) **由于**
$$\mathrm{e}^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!},\ |x|<+\infty,$$

所以
$$(1+x)\mathrm{e}^{-x}=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-n)}{n!}x^n,\quad |x|<+\infty.$$

(9) **由于**
$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n},\ t\in[-1,1],$$

所以
$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]\mathrm{d}t$$
$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\ (2n+1)}x^{2n+1},\ x\in[-1,1].$$

3. 求下列函数在 $x=1$ 处的泰勒展开式:

(1) $f(x)=3+2x-4x^2+7x^3$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

解　(1) **由于** $f(1)=8$，　$f'(1)=15$，　$f''(1)=34$，

$$f'''(1)=42,\quad f^{(n)}(1)=0, n\geqslant 4.$$

所以　
$$\begin{aligned}f(x)&=8+15(x-1)+\frac{34}{2!}(x-1)^2+\frac{42}{3!}(x-1)^3\\&=8+15(x-1)+17(x-1)^2+7(x-1)^3, x\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1+(x-1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$，　$x\in(0,2)$.

4. 求下列函数的麦克劳林级数展开式：

(1) $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$；　　(2) $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

解　(1)
$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}&=\frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{1}{4(1-x)}-\frac{1}{4(1+x)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)'-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)x^n\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)x^n\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1-\frac{1+(-1)^n}{2}\right)x^n\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right)x^n,\ x\in(-1,1).\end{aligned}$$

(2) **由于**
$$\begin{aligned}\arctan x&=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n}\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},\ |x|\leqslant 1,\end{aligned}$$

$$\ln\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n},$$

所以
$$\begin{aligned}x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}&=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2},\ |x|\leqslant 1.\end{aligned}$$

5. 试将 $f(x)=\ln x$ **按** $\frac{x-1}{x+1}$ **的幂展开成幂级数.**

解　由于

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},\ |x|<1.$$

所以

$$f(x)=\ln x=2\ln\sqrt{\frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}}}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1},$$

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1\quad \text{即}\quad x\in(0,+\infty).$$

§3　复变量的指数函数·欧拉公式

1. 证明：棣莫弗(de Moivre)**公式**

$$\cos nx+\mathrm{i}\sin nx=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n.$$

证　由欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ **可知：**$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n$ **及** $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=\cos nx+\mathrm{i}\sin nx$，**即**

$$(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n=\cos nx+\mathrm{i}\sin nx.$$

2. 应用欧拉公式与棣莫弗公式证明：

(1) $\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cos n\alpha$；

(2) $\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sin n\alpha$.

证　令 $z=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$，**则由欧拉公式可知**

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)}=\mathrm{e}^{\cos\alpha}(\cos(\sin\alpha)+\mathrm{i}\sin(\sin\alpha)),$$

即

$$\mathrm{e}^{xz}=\mathrm{e}^{x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=\mathrm{e}^{x\cos\alpha}(\cos(x\sin\alpha)+\mathrm{i}\sin(x\sin\alpha))$$
$$=\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)+\mathrm{i}\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha),\qquad ①$$

又由于

$$\mathrm{e}^{xz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xz)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n(\cos n\alpha+\mathrm{i}\sin n\alpha)}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n+\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n!}x^n. \qquad ②$$

比较式①、式②的实虚部，即可得：

(1) $\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n$；

(2) $\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n!}x^n$.

§4　总练习题

1. 证明：当 $|x|<\frac{1}{2}$ **时，**

$$\frac{1}{1-3x+2x^2}=1+3x+7x^2+\cdots+(2^n-1)x^{n-1}+\cdots.$$

证　由于
$$\frac{1}{1-3x+2x^2}=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x},$$

所以当 $|2x|<1$，**即** $|x|<\frac{1}{2}$ **时，**

$$\frac{1}{1-3x+2x^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^n$$
$$=1+3x+7x^2+\cdots+(2^n-1)x^{n-1}+\cdots.$$

2. 求下列函数的幂级数展开式：

(1) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$；　　(2) $f(x)=\sin^3 x$；

(3) $f(x)=\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t$.

解　(1) **由于**　$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}, x\in(-1,1]$.

所以
$$f(x)=(1+x)\ln(1+x)=\ln(1+x)+x\ln(1+x)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n+1}$$
$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n,\ x\in(-1,1].$$

(2) **由于** $\sin x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},x\in(-\infty,+\infty)$,

所以 $f(x)=\sin^3 x=\dfrac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3^{2n-1}-3}{(2n-1)!}x^{2n-1},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

(3) **由于** $\cos t^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(t^2)^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}t^{4n},\ x\in(-\infty,+\infty)$,

所以 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{4n}\mathrm{d}t$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n)!\ (4n+1)},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

3. 确定下列幂级数的收敛域,并求其和函数:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$.

解 (1) **设** $a_n=n^2$,**则由** $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ **及** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\pm1)^{n-1}n^2$ **都发散可知** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$**的收敛区域为**$(-1,1)$.

再由于 $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$,

所以 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'$

$$=\frac{1+x}{(1-x)^3},\ x\in(-1,1).$$

(2) **设** $a_n=\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$,**则由** $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{x^2}{2}$ **可知** $R=\sqrt{2}$.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ **时,级数** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}\cdot 2^n$ **是发散的. 即** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$**的收敛**

区域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

且其和函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n}}x^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^{n+1}}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{x^2}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$$
$$=\frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x^2+2}{(2-x^2)^2},\ x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

(3) 设$a_n=n$,则由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$及$\sum(\pm 1)^{n-1}n$发散,可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}$的收敛区域为$(0,2)$.

且其和函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}=\frac{1}{[1-(x-1)]^2}=\frac{1}{(2-x)^2},\ x\in(0,2).$$

(4) 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+2)^2-1}\cdot\frac{(2n)^2-1}{|x|^{2n+1}}=x^2$,

及当$x=\pm 1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\pm 1)^{2n+1}}{(2n)^2-1}$都绝对收敛,故原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2-1}x^{2n+1}$的收敛区域为$[-1,1]$.

其和函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1},\ |x|\leqslant 1.$$

又由于
$$\frac{1}{x}f'(x)=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}\right)'$$
$$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\arctan x,$$

故
$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\arctan t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}[(1+x^2)\arctan x-2x],\ |x|\leqslant 1.$$

4. 应用幂级数性质求下列级数的和：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$；　　（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$.

解　（1）**由于**　$\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]$$
$$=\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)-1\right]-\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)-1-1\right]$$
$$=(\mathrm{e}^x-1)-(\mathrm{e}^x-1-1)=1.$$

（2）**设** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$**，则其收敛区域为**$(-1,1]$. **由于**
$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3}\text{及}f(0)=0,$$

故
$$f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$$
$$=\left(\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1$$
$$=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5. 设函数
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$$
定义在$[0,1]$**上，证明它在**$(0,1)$**上满足下述方程：**
$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=f(1).$$

证　**设** $F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)$，$x\in(0,1)$.

则
$$F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\frac{1}{x}\ln(1-x)-\frac{1}{1-x}\ln x$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$
$$-\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}=0.$$

即 $F(x)=C$（C 为常数），$x\in(0,1)$，从而 $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=f(1)$.

所以
$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=f(1),\ x\in(0,1).$$

6. 利用函数的幂级数展开式求下列不定式极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\left(x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}{(x+o(x))^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)}{(x+o(x))^3}=-\frac{1}{6}.$$

第十五章　傅里叶级数

知 识 要 点

1. 三角函数系$\{1,\cos x,\sin x,\cdots\}$的正交性的概念源自高等代数内积空间的理论. 在以$[-\pi,\pi]$所有可积函数构成的函数空间中引进内积:

$$(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

并视函数为向量,则$(f,g)=0$,即表示两向量垂直或正交.

2. 周期为2π的周期函数的傅里叶级数,可以理解为向量f在以三角函数系$\{1,\cos x,\sin x,\cdots\}$作为基向量的无穷维空间上的向量分解式:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中$a_0=(f(x),1),a_n=(f(x),\cos nx),b_n=(f(x),\sin nx)$(即$f(x)$的傅里叶系数). 而两向量内积的坐标形式为

$$(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n),$$

其中α_n,β_n为g的傅里叶系数,特别f的模的平方

$$(f,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

这便是帕塞瓦尔等式(相当于勾股定理).

3. 周期为$2l$的周期函数同样具有上述类似的性质.

4. 傅里叶级数收敛(逐点收敛)问题,至今仍然是数学分析理论中的繁难问题,还没有便于应用的判别收敛的充要条件. 本书给出的逐段光滑的收敛定理基本上能满足由初等函数,或由初等函数组成的分段函数,以及我们在实际应用中见到的众多函数在傅里叶展开式上的要求. 另外一类收敛定理

的条件是以逐段单调给出的.

5. 根据收敛定理知$f(x)$能展成傅里叶级数必须是以2π(或$2l$)为周期的函数. 然而通常只给出一段区间,如$(-\pi,\pi]$(或$(-l,l]$)上的解析表达式,这时就需先将它延拓成整个数轴上以2π(或$2l$)为周期的周期函数. 当然,欲求正弦(或余弦)函数时还需奇(或偶)延拓. 随着延拓的不同,一个函数在一个区间上的傅里叶展开式也不同.

6. 傅里叶级数对函数要求较低,适用范围广,是19世纪数学界最伟大的发现和创造之一,它极大地影响和促进了近代分析数学的发展,直接推动了数学物理、微分方程理论的发展. 本章仅仅介绍该理论的部分最基本知识,在后续课程中还需进一步学习.

7. 借助某些函数的傅里叶展开式,可求得某些重要数项级数之和. 记住以下结论:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

习 题 详 解

§1　傅里叶级数

1. 在指定区间内把下列函数展开成傅里叶级数:

(1) $f(x)=x$, i) $-\pi<x<\pi$; ii) $0<x<2\pi$;

(2) $f(x)=x^2$, i) $-\pi<x<\pi$; ii) $0<x<2\pi$;

(3) $f(x)=\begin{cases} ax, & -\pi<x\leqslant 0, \\ bx, & 0<x<\pi \end{cases}$　$(a\neq b, a\neq 0, b\neq 0)$.

解　(1) i) **函数** $f(x)$**及其周期延拓后如图** 15-1 **所示. 由于** $f(x)$**在** $(-\pi,\pi)$**内按段光滑,即可展开为傅里叶级数,其中:**

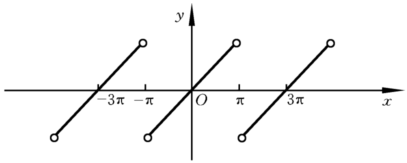

图 15-1

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=0,\quad n\geqslant 1,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=(-1)^{n-1}\frac{2}{n},\quad n\geqslant 1,$$

故
$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n},\quad x\in(-\pi,\pi).$$

ii) **函数** $f(x)$**及其周期延拓后如图**15-2 **所示. 显然** $f(x)$**可展开为傅里叶级数,其中:**

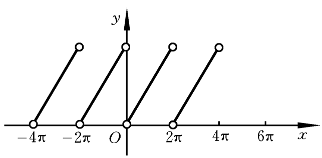

图 15-2

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}x\mathrm{d}x=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=0,\quad n\geqslant 1,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{2}{n},$$

故
$$f(x)=\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad x\in(0,2\pi).$$

(2) i) 函数$f(x)$及其周期延拓后如图15-3所示. 由于$f(x)$是按段光滑，即可展开为傅里叶级数，其中：

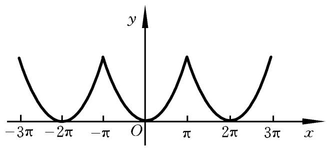

图15-3

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{n^2},\quad n\geqslant1,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=0,$$

故
$$f(x)=\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2},\quad x\in(-\pi,\pi).$$

ii) 函数$f(x)$及其周期延拓后如图15-4所示. 显然$f(x)$是按段光滑，即可展开为傅里叶级数，其中：

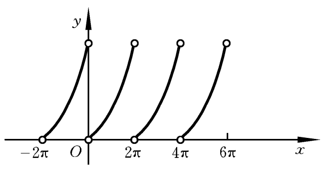

图15-4

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2},\quad n\geqslant1,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{4}{n}\pi,\quad n\geqslant 1,$$

故
$$f(x)=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right),\quad x\in(0,2\pi).$$

(3) 将函数 $f(x)$ 作周期延拓，显然 $f(x)$ 是按段光滑，即 $f(x)$ 可在 $(-\pi,\pi)$ 上展开为傅里叶级数，其中：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}ax\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}bx\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{2}(b-a),$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}ax\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}bx\cos nx\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{a-b}{n^2\pi}[1-(-1)^n],\quad n\geqslant 1,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}ax\sin nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}bx\sin nx\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{a+b}{n}(-1)^{n-1},\quad n\geqslant 1,$$

故
$$f(x)=\frac{\pi}{4}(b-a)+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$
$$+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n},\quad x\in(-\pi,\pi).$$

2. 设 f 是以 2π 为周期的可积函数，证明对任何实数 c，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

证　由于 $f(x)$，$\cos nx$，$\sin nx(n=0,1,2,\cdots)$ 均是以 2π 为周期的可积函数，即 $f(x)\cos nx$ 和 $f(x)\sin nx$ 在有限区间上均为可积，且令 $t=2\pi+x$，则有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_c^{-\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{c+2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{c+2\pi}^{\pi}f(t-2\pi)\cos(nt-2n\pi)\mathrm{d}t+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right.$$

$$+\int_{\pi}^{c+2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\Big]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{\pi}^{c+2\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{c+2\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

同理可证

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

3. 把函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, & -\pi<x<0,\\ \dfrac{\pi}{4}, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ **展开成傅里叶级数，并由它推出：**

(1) $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\dfrac{\pi}{3}=1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}+\cdots$;

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi=1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{17}+\cdots$.

解　函数$f(x)$及其周期延拓后如图15-5 所示. 显然$f(x)$是分段光滑的，即 $f(x)$可展开为傅里叶级数，其中：

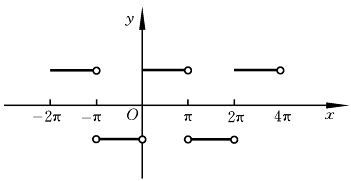

图 15-5

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\mathrm{d}x\right]=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos nx\mathrm{d}x\right]=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2n}[1-(-1)^n],\quad n\geqslant 1.$$

故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)},\quad x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi).$$

(1) **当** $x=\frac{\pi}{2}$ **时,有**

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

(2) **由**

$$\frac{\pi}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\cdots,$$

可得

$$\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\cdots\right)$$

$$=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots.$$

(3) **当** $x=\frac{\pi}{3}$ **时,有**

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots\right),$$

即

$$\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots.$$

4. 设函数 $f(x)$ **满足条件:** $f(x+\pi)=-f(x)$. **问此函数在** $(-\pi,\pi)$ **内的傅里叶级数具有什么特征.**

解　由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}f(x+\pi)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi}f(t)\cos n(t-\pi)\mathrm{d}t+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[(-1)^{n+1}+1]f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

即 $a_{2n}=0,n=0,1,2,\cdots$，同理亦有 $b_{2n}=0$，故

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}[a_{2n-1}\cos(2n-1)x+b_{2n-1}\sin(2n-1)x],\quad x\in(-\pi,\pi).$$

5. 设函数 $f(x)$ 满足条件：$f(x+\pi)=f(x)$. 问此函数在 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数具有什么特征.

解　类似上题，可得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(-1)^n+1]f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,3,\cdots.$$

即
$$a_{2n-1}=0,\quad n=1,2,\cdots,$$
以及
$$b_{2n-1}=0,\quad n=1,2,\cdots.$$
故
$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}\cos 2nx+b_{2n}\sin 2nx),\quad x\in(-\pi,\pi).$$

6. 试证函数系 $\cos nx,n=0,1,2,\cdots$ 和 $\sin nx,n=1,2,\cdots$ 都是 $[0,\pi]$ 上的正交函数系，但它们合起来的(5)式不是 $[0,\pi]$ 上的正交函数系.

解　对于函数系 $1,\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\cdots$，由于

$$\int_0^{\pi}1\cdot\cos nx\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\int_0^{\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]\mathrm{d}x=0\quad(m\neq n),$$

及
$$\int_0^{\pi}1^2\mathrm{d}x=\pi,$$

$$\int_0^{\pi}(\cos nx)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad n=0,1,2,\cdots,$$

即三角函数系 $1,\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\cdots$ 中，任何两个不同的函数的乘积在 $[0,\pi]$ 上的积分均等于零，而任何一个函数与本身的乘积在 $[0,\pi]$ 上都不等于零，故三角函数系 $\cos nx(n=0,1,2,\cdots)$ 在 $[0,\pi]$ 上是一个正交函数系. 同理，$\sin nx(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,\pi]$ 上亦是一个正交函数系. 但由它们合起来构成的三角函数系：$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cos 3x,\sin 3x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$ 却不是 $[0,\pi]$ 上的正交函数系. 例如 $\int_0^{\pi}\cos 2x\sin x\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\neq 0$.

7. 求下列函数的傅里叶级数展开式：

(1) $f(x)=\frac{\pi-x}{2},\ 0<x<2\pi$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

(3) $f(x)=ax^2+bx+c$, i) $0<x<2\pi$, ii) $-\pi<x<\pi$;

(4) $f(x)=\operatorname{ch}x$, $-\pi<x<\pi$;

(5) $f(x)=\operatorname{sh}x$, $-\pi<x<\pi$.

解 (1) **由于**

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0,$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi-x}{2n\pi}\sin nx\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,\cdots,\\b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi-x}{2n\pi}\cos nx\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n},\end{aligned}$$

故

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad x\in(0,2\pi).$$

(2) **由于**

$$f(x)=\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\begin{cases}-\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}, & -\pi\leqslant x<0,\\ \sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

因而

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x\right]=\frac{4\sqrt{2}}{\pi},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{4\sqrt{2}}{(4n^2-1)\pi},\quad n=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right)\sin nx\mathrm{d}x\right]$$
$$=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

即
$$\sqrt{1-\cos x}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}-\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx,\quad x\in(-\pi,\pi).$$

而当 $x=\pm\pi$ **时，**

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}=f(\pm\pi).$$

故
$$\sqrt{1-\cos x}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}-\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

（3）i）**由于**
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{8}{3}a\pi^2+2b\pi+2c,$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(ax^2+bx+c)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{4a}{n^2},\quad n=1,2,\cdots.$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(ax^2+bx+c)\sin nx\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{4\pi a}{n}-\frac{2b}{n},\quad n=1,2,\cdots.$$

故 $f(x)=ax^2+bx+c$
$$=\frac{4a}{3}\pi^2+b\pi+c+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4a}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi a+2b}{n}\sin nx\right).\quad x\in(0,2\pi).$$

ii）**由于**
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}a\pi^2+2c,$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(ax^2+bx+c)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$=(-1)^n\frac{4a}{n^2},\quad n=1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(ax^2+bx+c)\sin nx\mathrm{d}x$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{2b}{n},\quad n=1,2,\cdots,$$

故
$$\begin{aligned}f(x)&=ax^2+bx+c\\&=\frac{a}{3}\pi^2+c+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n4a}{n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}2b}{n}\sin nx\right],\\&\quad x\in(-\pi,\pi).\end{aligned}$$

（4）**由于**
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\pi,$$
$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}x\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\mathrm{sh}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sh}x\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}x(-1)^n+\frac{n}{\pi}\mathrm{ch}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}x\cos nx\mathrm{d}x\\&=(-1)^n\frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi}-n^2a_n,\end{aligned}$$

即
$$a_n=\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\mathrm{sh}\pi,\quad n=1,2,\cdots,$$
$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\mathrm{sh}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sh}x\cos nx\mathrm{d}x\\&=0,\quad n=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

故
$$f(x)=\mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi}+\frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos nx,\quad x\in(-\pi,\pi).$$

（5）**由于** $f(x)=\mathrm{sh}x$ **在** $[-\pi,\pi)$ **上为奇函数，即**
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0,$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

而
$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sh}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\mathrm{ch}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}x\cos nx\mathrm{d}x\\&=-\frac{n}{\pi}\mathrm{sh}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sh}x\sin nx\mathrm{d}x\\&=(-1)^{n+1}\frac{2n}{\pi}\mathrm{sh}\pi-n^2b_n,\end{aligned}$$

即
$$b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}\cdot\frac{2n}{\pi}\cdot\mathrm{sh}\pi,$$

故
$$f(x)=\mathrm{sh}x=\frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}n\sin nx,\quad x\in(-\pi,\pi).$$

8. 求函数 $f(x)=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)$，$0<x<2\pi$ 的傅里叶级数展开式，并应用它推出 $\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

解　利用第7题(3)i)的结果，这里 $a=\frac{1}{4}$，$b=-\frac{\pi}{2}$，$c=\frac{\pi^2}{6}$，即可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)\\&=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\pi^2+\left(-\frac{\pi}{2}\right)\pi+\frac{\pi^2}{6}\\&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)}{n^2}\cos nx-\frac{4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\pi+2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{n}\sin nx\right],\end{aligned}$$

即
$$\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\quad x\in(0,2\pi),$$

又由于 $f(2\pi-0)=\frac{\pi^2}{6}$，$f(0-0)=\frac{\pi^2}{6}$，故由收敛定理可得

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{f(2\pi-0)+f(0-0)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 0,$$

即
$$\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

9. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的光滑函数，且 $f(-\pi)=f(\pi)$. a_n，b_n 为 f 的傅里叶系数. a'_n，b'_n 为 f 的导函数 f' 的傅里叶系数. 证明：

$$a'_0=0,\quad a'_n=nb_n,\quad b'_n=-na_n\quad(n=1,2,\cdots).$$

证　由于 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上为光滑函数，即有 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上有连续的导函数，因而有：

$$a'_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(f(x))\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}(f(\pi)-f(-\pi))=0,$$

$$\begin{aligned}a'_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[(f(x)\cos nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}+n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=nb_n,\quad n=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

$$b'_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[(f(x)\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}-n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=-na_n,\quad n=1,2,\cdots.$$

10. 证明:若三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

中的系数 a_n,b_n **满足关系**

$$\sup_n\{|n^3a_n|,|n^3b_n|\}\leqslant M,$$

M **为常数,则上述三角级数收敛,且其和函数具有连续的导函数.**

证　由所给条件:$\sup\limits_n\{|n^3a_n|,|n^3b_n|\}\leqslant M$ 可知

$$|a_nn^3|\leqslant M,\quad |b_nn^3|\leqslant M,$$

即
$$|a_n|\leqslant\frac{M}{n^3},\quad |b_n|\leqslant\frac{M}{n^3},\quad n=1,2,\cdots.$$

而$\forall\ n\in\mathbf{N}$,有

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leqslant|a_n|+|b_n|\leqslant\frac{2M}{n^3}$$

及级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2M}{n^3}$收敛,可知三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为绝对一致收敛.

其中 a_0 为某一实数.

又设
$$u_0(x)=\frac{a_0}{2},\quad u_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx,\quad n=1,2,\cdots.$$

则
$$u_n'(x)=nb_n\cos nx-na_n\sin nx,$$

由于
$$\begin{aligned}|nb_n\cos nx-na_n\sin nx|&\leqslant|nb_n\cos nx|+|na_n\sin nx|\\&\leqslant|nb_n|+|na_n|\leqslant\frac{2M}{n^2},\quad n=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

及$\sum\dfrac{2M}{n^2}$收敛. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)$一致收敛. 由定理13.12 可知此级数的和函数连续,由定理13.14 可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx),$$

即级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$的和函数具有连续的导函数.

§2　以 $2l$ 为周期的函数的展开式

1. 求下列周期函数的傅里叶级数展开式：

(1) $f(x)=|\cos x|$（周期 π）；　　(2) $f(x)=x-[x]$（周期 1）；

(3) $f(x)=\sin^4 x$（周期 π）；　　(4) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$（周期 2π）.

解　(1) 由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是偶函数，$f(x)$ 及其周期延拓后如图 15-6 所示. 它是按段光滑，即可展成傅里叶级数，且这个级数为余弦级数，其中：

$$l=\frac{\pi}{2},$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(2n+1)x+\cos(2n-1)x]\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right]\\&=(-1)^{n+1}\frac{4}{(4n^2-1)\pi},\quad n=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

故
$$|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos 2nx}{4n^2-1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

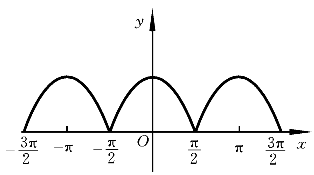

图 15-6

(2) $f(x)$ 及其周期延拓后如图 15-7 所示. 显然 $f(x)$ 是按段光滑，即可展开为傅里叶级数，其中：

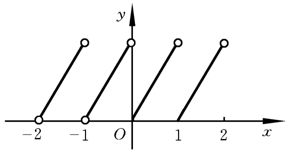

图 15-7

$$l=\frac{1}{2},$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1(x-[x])\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\mathrm{d}x=1,$$

$$a_n=2\int_0^1(x-[x])\cos 2n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\cos 2n\pi x\mathrm{d}x=0,$$

$$b_n=2\int_0^1(x-[x])\sin 2n\pi x\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\left(x\cos 2n\pi x\Big|_0^1-\int_0^1\cos 2n\pi x\mathrm{d}x\right)=-\frac{1}{n\pi},$$

故
$$f(x)=x-[x]=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n},\quad x\in(0,1).$$

而当 $x=0$ 或 $x=1$ 时，上式右边级数收敛于 $\frac{1}{2}$，即左、右两边相等.

（3）由于 $l=\frac{\pi}{2}$，及

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos 2nx\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\cos 2nx\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)\cos 2nx\mathrm{d}x\\&=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & n=1,\\ \dfrac{1}{8}, & n=2,\\ 0, & n\geqslant 3,\end{cases}\end{aligned}$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\sin 2nx\mathrm{d}x=0,$$

故　　$$\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) 由于 $f(x)$ 是以 2π 为周期的偶函数，且按段光滑，即可展开为傅里叶级数，并有 $b_n=0$，而

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)\mathrm{d}x\right)=0,$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}(\cos x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{4}{(2m-1)\pi}\times(-1)^m\quad(m=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

故　　$$\operatorname{sgn}(\cos x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n-1)}{2n-1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

2. 求函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

的傅里叶级数并讨论其收敛性.

解　$f(x)$ 的延拓如图 15-8 所示. $f(x)$ 是按段光滑，且为偶函数，即 $b_n=0$，而

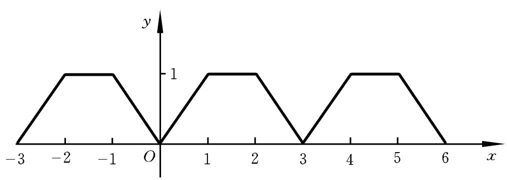

图 15-8

$$a_0=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left(\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}x+\int_2^3(3-x)\mathrm{d}x\right)=\frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2n\pi}{3}x\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}\left(\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_1^2\cos\frac{2n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_2^3(3-x)\cos\frac{2n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{3}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-1\right),$$

故
$$f(x)=\frac{2}{3}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3}-1\right]\frac{\cos\frac{2n\pi x}{3}}{n^2}.$$

而对该级数的任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都收敛于 $f(x)$,因而有 $-\infty<x<+\infty$.

3. 将函数 $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成余弦级数.

解　如图 15-9 所示,将函数 $f(x)$ 作偶延拓,则有

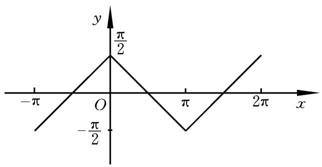

图 15-9

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}(-\cos nx)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}[1-(-1)^n],$$

故
$$\frac{\pi}{2}-x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},\quad x\in[0,\pi].$$

4. 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦级数.

解　将函数 $f(x)$ 作奇延拓后如图 15-10 所示,且

$$a_n=0,n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{8}{\pi}\;\frac{n}{4n^2-1},$$

故
$$f(x)=\cos\frac{x}{2}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin nx,\quad x\in(0,\pi].$$

其中当 $x=0,\pi$ 时,右边级数收敛于 0.

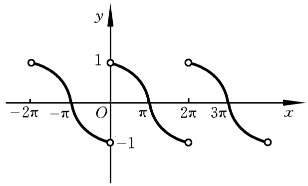

图 15-10

5. 把函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x\leqslant 2,\\ x-3, & 2<x<4\end{cases}$$

在$(0,4)$**上展开成余弦级数.**

解　对 $f(x)$ 作偶延拓,如图 15-11 所示,且

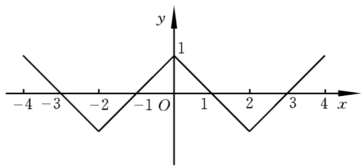

图 15-11

$$b_n=0,$$

$$a_0=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{4}\left[\int_0^2(1-x)\mathrm{d}x+\int_2^4(x-3)\mathrm{d}x\right]=0,$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int_0^2(1-x)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x+\int_2^4(x-3)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\left((1-x)\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}-\left(\frac{4}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{4}\right)\Bigg|_0^2\right.\\&\quad\left.+\left((x-3)\cdot\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}+\left(\frac{4}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{4}\right)\Bigg|_2^4\right]\\&=\left(\frac{4}{n\pi}\right)^2\left[-\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{2}(1+(-1)^n)\right]\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k \text{ 且 } k=2m, \qquad m=1,2,\cdots,\\ \dfrac{8}{(2m-1)^2\pi^2}, & n=2k \text{ 且 } k=2m-1,\end{cases}$$

故
$$f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{(2m-1)}{2}\pi x}{(2m-1)^2},\quad x\in(0,4).$$

6. 把函数 $f(x)=(x-1)^2$ 在 $(0,1)$ 上展开成余弦级数,并推出

$$\pi^2=6\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right).$$

解　对 $f(x)$ 作偶延拓,如图 15-12 所示,则

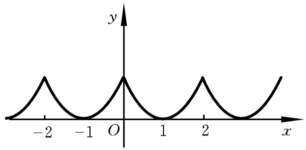

图 15-12

$$b_n=0,$$

$$a_0=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1(x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1(x-1)^2\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2\pi^2},$$

故
$$(x-1)^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2},\quad x\in[0,1],$$

当 $x=0$ 时,由 $f(x)$ 延拓后连续,可得

$$1=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

即
$$\pi^2=6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=6\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right).$$

7. 求下列函数的傅里叶级数展开式:

(1) $f(x)=\arcsin(\sin x)$;　　(2) $f(x)=\arcsin(\cos x)$.

解　(1) 由于 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数,且在 $[-\pi,\pi]$ 内为奇函

数,从而

$$a_n=0,n=0,1,2,\cdots \quad \text{和} \quad f(x)=\begin{cases}-\pi-x, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2},\\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

因而

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k,k=0,1,2,\cdots,\\(-1)^k\dfrac{4}{\pi(2k+1)^2}, & n=2k+1,k=0,1,2,\cdots.\end{cases}\end{aligned}$$

故

$$f(x)=\arcsin(\sin x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x,$$
$$x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) 由于 $f(x)$ 的周期是 2π,在 $[-\pi,\pi]$ 上为偶函数,从而 $b_n=0$,及

$$f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant x<0,\\ \dfrac{\pi}{2}-x, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

因此

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=0,$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{4}{\pi n^2}, & n=2k-1,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

故

$$f(x)=\arcsin(\cos x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

8. 试问如何把定义在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的可积函数 f 延拓到区间 $(-\pi,\pi)$ 内,使它们的傅里叶级数为如下形式:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

解　(1) 为要使 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x, x\in(-\pi,\pi)$. 首先将 $f(x)$ 从 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内到 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内作偶延拓,再根据 $f(x+\pi)=-f(x)$ 延拓到 $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上,最后作偶延拓到 $(-\pi,\pi)$ 上,这样得到的函数是 $(-\pi,\pi)$ 上的偶函数,且 $f(x+\pi)=-f(x)$. 由本章§1习题4可得结论.

(2) 同样按§1习题4的要求,先将 $f(x)$ 从 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内到 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内作奇延拓,再根据 $f(x+\pi)=-f(x)$ 延拓到 $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上,最后作奇延拓到 $(-\pi,\pi)$ 上,这样得到的函数是 $(-\pi,\pi)$ 上的奇函数,且 $f(x+\pi)=-f(x)$,即

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x,\quad x\in(-\pi,\pi).$$

§3　收敛定理的证明

1. 设 f 以 2π 为周期且具有二阶连续的导函数,证明 f 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 f.

证　由所给条件知 $f(x), f'(x)$ 可展开为傅里叶级数:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$f'(x)=\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx),\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

且有 $f(-\pi)=f(\pi), f'(-\pi)=f'(\pi)$,则由§1习题9可知 f, f' 的导函数 f', f'' 的傅里叶系数为

$$a_n''=-n^2a_n,\quad b_n''=-n^2b_n,\quad a_n'=nb_n,\quad b_n'=-na_n,\quad a_0''=0.$$

而由连续函数的可积性,可推出 f'' 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积,再由预备定理1,可得正项级数

$$\frac{a_0''}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n''+b_n'')=\sum_{n=1}^{\infty}n^4(a_n^2+b_n^2)$$

收敛,即取 $\varepsilon=1$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时有

$$n^4(a_n^2+b_n^2)<\varepsilon=1,$$

即

$$0<|a_n|<\frac{1}{n^2},\quad 0<|b_n|<\frac{1}{n^2},$$

且 $|a_n|+|b_n|<\dfrac{2}{n^2}$ 及 $\sum\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,因而当 $n>N$ 时 $\dfrac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛.故由定理 15.1 可知 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$.

2. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上可积函数. 证明:若 f 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 f,则成立帕塞瓦尔(Parseval)等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

这里 a_n,b_n 为 f 的傅里叶系数.

证　由于 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$,则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad x\in[-\pi,\pi].$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{a_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\\&\quad\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\mathrm{d}x\\&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积,知 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有界,再由

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$,故由第十三章 §1 习题 4 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx]$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛. 即

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx]\mathrm{d}x\\&=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+b_n\right.\end{aligned}$$

$$\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\Big]$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

3. 由于帕塞瓦尔等式对于在$[-\pi,\pi]$上满足收敛定理条件的函数也成立. 请应用这个结果证明下列各式:

(1) $\dfrac{\pi^2}{8}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$;　　(2) $\dfrac{\pi^2}{6}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$;

(3) $\dfrac{\pi^4}{90}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$.

解　(1) **由** §1 **习题** 3 **的结论知**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}=f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, & -\pi<x<0,\\ \dfrac{\pi}{4}, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

利用帕塞瓦尔等式,有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2,$$

即
$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

(2) **由** §1 **习题** 1(1) i)**结论知**

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n},\quad x\in(-\pi,\pi).$$

利用帕塞瓦尔等式,有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right]^2,$$

即
$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

(3) **由** §1 **习题** 1(2) i)**的结论知**

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2},\quad x\in(-\pi,\pi).$$

利用帕塞瓦尔等式,有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^n}{n^2}\right]^2,$$

即
$$\frac{\pi^4}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

4. 证明：若 f,g 均为 $[-\pi,\pi]$ 上的可积函数，且它们的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上分别一致收敛于 f 和 g，则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n),$$

其中，a_n,b_n 为 f 的傅里叶系数，α_n,β_n 为 g 的傅里叶系数.

证　由于 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad x\in[-\pi,\pi],$$

及
$$f(x)g(x)=\frac{a_0}{2}g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_ng(x)\cos nx+b_ng(x)\sin nx).$$

由第十三章§1习题4知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_ng(x)\cos nx+b_ng(x)\sin nx)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)g(x)$，同时可知 $f(x)g(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积. 故

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_ng(x)\cos nx+b_ng(x)\sin nx)\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{a_0}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_ng(x)\cos nx+b_ng(x)\sin nx)\mathrm{d}x\\
&=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\mathrm{d}x+b_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n).
\end{aligned}$$

5. 证明：若 f 及其导函数 f' 均在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$，$f(-\pi)=f(\pi)$，且成立帕塞瓦尔等式，则

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

注意：此题有误，若设

$$f(x)=\begin{cases}\pi, & x=-\pi,\\ x, & -\pi<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

则 $f'(x)=1, x\in(-\pi,\pi]$,在周期延拓后满足收敛定理,即满足帕塞瓦尔等式和 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$ 及 $f(-\pi)=f(\pi)$,但不等式不成立.

§4 总 练 习 题

1. 试求三角多项式

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$$

的傅里叶级数展开式.

解 显然 $T_n(x)$ 是以 2π 为周期的光滑函数,它可在 $(-\infty,+\infty)$ 上展开为傅里叶级数,其中

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{A_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(A_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x+B_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x\right)=A_0,\end{aligned}$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)\cos mx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]\cos mx\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}A_m, & 1\leqslant m\leqslant n,\\ 0, & m>n.\end{cases}$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]\sin mx\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}B_m, & 1\leqslant m\leqslant n,\\ 0, & m>n.\end{cases}$$

故 $T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin nx)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$,

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

即 $T_n(x)$ 的傅里叶级数展开式就是其本身.

2. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的可积函数,$a_0,a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为 f 的傅里叶系数,试证明:当

$$A_0=a_0,\quad A_k=a_k,\quad B_k=b_k\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

时，积分$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x$取最小值，且最小值为

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

上述$T_n(x)$是第1题中的三角多项式，A_0,A_k,B_k为它的傅里叶系数.

解　由于

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)\mathrm{d}x,$$

而

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\\&\quad+\sum_{k=1}^{n}\left[A_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x+B_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right]\\&=\pi\left[\frac{A_0a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_ka_k+B_kb_k)\right],\end{aligned}$$

$\int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2)\right]$**（因$T_n(x)$满足帕塞瓦尔等式成立的条件），即**

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-2\pi\left[\frac{A_0a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_ka_k+B_kb_k)\right]+\pi\left[\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2)\right]\\&=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\\&\quad+\pi\left[\frac{(A_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left((a_k-A_k)^2+(b_k-B_k)^2\right)\right]\end{aligned}$$

故当$A_0=a_0,A_k=a_k,B_k=b_k$时取得最小值，且其最小值为

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

3. 设f为以2π为周期，且具有二阶连续可微的函数，

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\quad b_n''=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

若级数 $\sum b_n''$ 绝对收敛,则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{|b_k|}\leqslant\frac{1}{2}\left(2+\sum_{k=1}^{\infty}|b_k''|\right).$$

解　由于 f 是以 2π 为周期,且具有二阶连续可微的函数,由§3.习题1知 $b_n''=-n^2b_n$,再由§3习题3(2)知 $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,即有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(2+\sum_{k=1}^{\infty}|b_k''|\right)&\geqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{\infty}|b_k''|\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}+|b_k''|\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k^2}+k^2\left(\sqrt{|b_k|}\right)^2\right]\\&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}2\cdot\frac{1}{k}\cdot k\sqrt{|b_k|}=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{|b_k|},\end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{|b_k|}\leqslant\frac{1}{2}\left(2+\sum_{k=1}^{\infty}|b_k''|\right).$$

4. 设周期为 2π 的可积函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 满足以下关系式:

(1) $\varphi(-x)=\psi(x)$;　　(2) $\varphi(-x)=-\psi(x)$.

试问 φ 的傅里叶系数 a_n,b_n 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 α_n,β_n 有什么关系?

解　(1) 令 $x=-t$,则有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-t)\cos nt\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x=\alpha_n\quad(n=0,1,2,\cdots),\\b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-t)\sin nt\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\sin nt\mathrm{d}t=-\beta_n\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

(2) 类似(1),有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\cos nt\mathrm{d}t=-\alpha_n\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\sin nt\mathrm{d}t=\beta_n\quad(n=1,2,\cdots).$$

5. 设定义在$[a,b]$上的连续函数列$\{\varphi_n\}$满足关系

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 1, & n=m.\end{cases}$$

对于在$[a,b]$上的可积函数f,定义

$$a_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛,且有不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\leqslant\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

证　令$S_m(x)=\sum\limits_{n=1}^{m}a_n\varphi_n(x)$,由所给的条件可知$f(x)S_m(x)$和$(f(x))^2$在$[a,b]$上是可积的,则

$$0\leqslant\int_a^b[f(x)-S_m(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x-2\int_a^b f(x)S_m(x)\mathrm{d}x+\int_a^b[S_m(x)]^2\mathrm{d}x,$$

其中

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)S_m(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b f(x)\sum_{n=1}^{m}a_n\varphi_n(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{m}a_n\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{m}a_n^2,\end{aligned}$$

$$\int_a^b[S_m(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b\Big[\sum_{n=1}^{m}a_n\varphi_n(x)\Big]^2\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{m}\int_a^b a_n^2\varphi_n^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{m}a_n^2,$$

即可得

$$0\leqslant\int_a^b[f(x)-S_m(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x-\sum_{n=1}^{m}a_n^2,$$

由此可导出

$$\sum_{n=1}^{m}a_n^2\leqslant\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x,$$

而$\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$为一个有限值,故正项级数部分和$\sum\limits_{n=1}^{m}a_n^2$有上界,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛,且有不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\leqslant\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

第十六章　多元函数的极限与连续

知识要点

1. 点列$\{P_k\}$(按距离)收敛于P_0,等价于按坐标收敛于P_0,即

$$P_k \to P_0(k\to\infty) \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\rho(P_k,P_0)=0 \Leftrightarrow x_k\to x_0, y_k\to y_0(k\to\infty),$$

其中,
$$P_k=(x_k,y_k),\quad P_0=(x_0,y_0).$$

2. P_0 是点集 E 的聚点$\Leftrightarrow$存在一个各项互异的点列$\{P_k\}\subset E$,使

$$\lim_{k\to\infty}P_k=P_0.$$

E 的内点与非孤立的界点均为 E 的聚点;闭集含有其全部的聚点;任一有界无穷点集至少有一聚点.

3. 连通的开集称为开域,开域连同其边界称为闭域,闭域必为闭集,但闭集未必为闭域. 开域、闭域,或者开域连同其一部分界点所成的点集,统称为区域.

4. 由于$\mathbf{R}^2$中的任意两点之间无法比较大小,故与$\mathbf{R}$中的完备性定理比较,不存在有单调收敛原理与确界定理. $\mathbf{R}^2$中的完备性定理仅有柯西准则、闭区域套定理、聚点定理及有限覆盖定理.

5. 二元函数是$\mathbf{R}^2$到$\mathbf{R}$的一个映射,它可表示为$z=f(x,y)$,也可表示为点函数形式$z=f(P)$,$P\in\mathbf{R}^2$. 点函数形式与一元函数形式类似,故一元函数微分学中的某些概念常通过点函数形式推广过来.

6. 二元函数极限的定义与一元函数的定义比较,其适用面更为宽松. 它不像一元函数只对在其空心邻域上有定义的点上给出极限定义,而是在$\mathbf{R}^2$中点集聚点上给出极限的定义:

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$$

使得
$$|f(P)-A|<\varepsilon,\forall P\in U^{\circ}(P_0;\delta)\cap D,$$
其中，D 为 f 的定义域.

实际上上述定义方式也适用于一元函数.

7. 二元函数的极限又称为重极限. 累次极限与重极限是两种不同的概念，二者之间无必然的蕴含关系. 只有当二重极限与二个累次极限都存在时，三者必相等；而当二个累次极限存在但不相等时，重极限必不存在.

8. 判定 f 在点 P_0 处不存在极限的方法主要如下：

(1) 选取两条不同的趋于 P_0 的连续曲线（或点列），使其极限值不相等.

(2) 二个累次极限存在但不相等.

9. f 在点 P_0 处连续$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得
$$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon,\quad \forall P\in U(P_0,\delta)\cap D.$$
由此定义可知：

(1) f 在其定义域的孤立点处连续.

(2) 若 $P_0(x_0,y_0)$为 D 的聚点，则
$$f\text{ 在 }P_0\text{ 处连续}\Leftrightarrow\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)\ \Leftrightarrow\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta f(x_0,y_0)=0,$$
其中，
$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$
称为 f 在 P_0 处的全增量.

10. 连续函数具有局部有界性、局部保号性及连续函数的四则运算与复合运算的结果仍为连续函数等性质. 而有界闭域上连续函数具有有界性与最大值、最小值存在性，一致连续性，介值性等整体性质.

11. 初等函数都是其定义域上的连续函数.

习 题 详 解

§1　平面点集与多元函数

1. 判断下列平面点集中哪些是开集、闭集、有界集、区域？并分别指出它们的聚点与界点：

(1) $[a,b)\times[c,d)$；

(2) $\{(x,y)\mid xy\neq 0\}$;

(3) $\{(x,y)\mid xy=0\}$;

(4) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$;

(5) $\{(x,y)\mid x<2,y<2,x+y>2\}$;

(6) $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ **或** $y=0,0\leqslant x\leqslant 1\}$;

(7) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1$ **或** $y=0,1\leqslant x\leqslant 2\}$;

(8) $\{(x,y)\mid x,y$ **均为整数**$\}$;

(9) $\{(x,y)\mid y=\sin\dfrac{1}{x},x>0\}$.

解　(1) $[a,b)\times[c,d)$**是有界集、区域,其聚点为** $E=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$.

(2) $\{(x,y)\mid xy\neq 0\}$**是开集,其聚点为** $E=\mathbf{R}^2$,**界点为**$\{(x,y)\mid xy=0\}$.

(3) $\{(x,y)\mid xy=0\}$**是闭集,其聚点为** $E=\{(x,y)\mid xy=0\}$,**界点为** $\partial E=E=\{(x,y)\mid xy=0\}$.

(4) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$**是开集、区域,其聚点为** $E=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$,**界点为** $\{(x,y)\mid y=x^2\}$.

(5) $\{(x,y)\mid x<2,y<2,x+y>2\}$**是开集、有界集、区域,其聚点为**

$$E=\{(x,y)\mid x\leqslant 2,y\leqslant 2,x+y\geqslant 2\},$$

界点为

$$\{(x,y)\mid x=2,0\leqslant y\leqslant 2\}\cup\{(x,y)\mid y=2,0\leqslant x\leqslant 2\}\cup\{(x,y)\mid x+y=2,0\leqslant x\leqslant 2\}.$$

(6) $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ **或** $y=0,0\leqslant x\leqslant 1\}$**是闭集、有界集,其聚点为**

$$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1 \text{ 或 } y=0,0\leqslant x\leqslant 1\},$$

界点为

$$\partial E=E.$$

(7) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1$ **或** $y=0,1\leqslant x\leqslant 2\}$**是闭集、有界集,其聚点为**

$$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1 \text{ 或 } y=0,1\leqslant x\leqslant 2\},$$

界点为

$$\partial E=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1 \text{ 或 } y=0,1\leqslant x\leqslant 2\}.$$

(8) $\{(x,y)\mid x,y$ **均为整数**$\}$**是闭集,其聚点为**$\varnothing$,**界点为**$\{(x,y)\mid x,y$ **均为整数**$\}$.

(9) $\{(x,y)\mid y=\sin\dfrac{1}{x},x>0\}$**是闭集,其聚点为**

$$E=\{(x,y)\mid y=\sin\frac{1}{x},x>0\}\cup\{(0,y)\mid |y|\leqslant 1\},$$

界点为
$$\partial E=E.$$

2. 试问集合$\{(x,y)\mid 0<|x-a|<\delta,0<|y-b|<\delta\}$与集合$\{(x,y)\mid |x-a|<\delta,|y-b|<\delta,(x,y)\neq(a,b)\}$是否相同?

解　不相同,第一个点集为第二个点集的子集. 因为$E=\{(x,y)\mid x=a,0<|y-b|<\delta\}\cup\{(x,y)\mid y=b,0<|x-a|<\delta\}$不属于第一个点集,但包含于第二个点集.

3. 证明:当且仅当存在各点互不相同的点列$\{P_n\}\subset E,P_n\neq P_0,\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$时,$P_0$是$E$的聚点.

证　设$\{P_n\}\subset E$,且互不相同,$P_n\neq P_0$,因为$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$,所以,对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,当$n>N$时,有

$$|P_n-P_0|<\varepsilon,\quad \text{即}\quad P_n\in U^\circ(P_0;\varepsilon),$$

故P_0为E的聚点.

反之,设P_0为E的聚点,则由聚点的定义,对于$\varepsilon_1=1$,$\exists P_1\in U^\circ(P_0;\varepsilon_1)\cap E$;对于$\varepsilon_2=\min\left(\frac{1}{2},\rho(P_1,P_0)\right)$,$\exists P_2\in U^\circ(P_0;\varepsilon_2)\cap E$,且$\rho(P_2,P_0)<\varepsilon_2\leqslant\rho(P_1,P_0)$,故$P_1\neq P_2$;作归纳假设:已找到$k$个点$\{P_1,P_2,\cdots,P_k\}\subset E,P_i\in U^\circ(P_0;\varepsilon_i)$,其中

$$\varepsilon_i=\min\left(\frac{1}{i},\rho(P_{i-1},P_0)\right),\quad i=1,2,\cdots,k.$$

因为
$$\rho(P_k,P_0)<\rho(P_{k-1},P_0)<\cdots<\rho(P_1,P_0),$$

故$P_1,P_2,\cdots,P_k$互不相同. 现在,对$\varepsilon_{k+1}=\min\left(\frac{1}{k+1},\rho(P_k,P_0)\right)$,$\exists P_{k+1}\in U^\circ(P_0;\varepsilon_{k+1})\cap E$使$P_{k+1}$与$P_1,P_2,\cdots,P_k$互不相同,如此等等,这样就得到了各点互不相同的点列$\{P_n\}\subset E,P_n\neq P_0$,又由于$\rho(P_n,P_0)\leqslant\frac{1}{n}$,故

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0.$$

4. 证明:闭域必为闭集. 举例说明反之不真.

证　设D为闭域,因为闭域是开域连同边界所成的点集,闭集E是E的所有聚点都属于E,所以,对$\forall P\in D$,情况1°:当$P\in$开域$D\Rightarrow P$是D的内点$\Rightarrow$

P 必为D 的聚点;情况$2°$:当$P\in\partial D\subset D\Rightarrow P$ 为D 的非孤立的界点$\Rightarrow P$ 为D 的聚点. 从而得知D 的一切点均为D 的聚点,故D 为闭集.

反之不真. 反例:

$$E=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\text{ 或 }x=2,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

则E 的开域是

$$E_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\},$$

E_1 的边界是 $\partial E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=2\}$.

闭域$E_1\cup\partial E_1\subsetneqq E$,又显然$E$ 中的一切点均为聚点,且为E 的全部聚点,所以E 为闭集,非闭域.

5. 证明:点列$\{P_n(x_n,y_n)\}$收敛于$P_0(x_0,y_0)$的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\quad 和\quad \lim_{n\to\infty}y_n=y_0.$$

证 必要性:设$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$,则对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,有$P_n\in U(P_0;\varepsilon)$,即

$$\rho(P_n,P_0)=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon,$$

从而 $$|x_n-x_0|\leqslant\rho(P_n,P_0)<\varepsilon,\quad |y_n-y_0|\leqslant\rho(P_n,P_0)<\varepsilon.$$

故 $$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=y_0.$$

充分性:设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$,则对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,有$|x_n-x_0|<\varepsilon,\quad |y_n-y_0|<\varepsilon$,从而

$$P_n(x_n,y_n)\in U(P_0(x_0,y_0);\varepsilon)\quad(\text{方邻域}),$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0.$$

6. 求下列各函数的函数值:

(1) $f(x,y)=\left[\dfrac{\arctan(x+y)}{\arctan(x-y)}\right]^2$,求$f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$;

(2) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,求$f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$;

(3) $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$,求$f(tx,ty)$.

解 (1) $$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=\left[\frac{\arctan\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3})}{\arctan\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}-1+\sqrt{3})}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\arctan 1}{\arctan\sqrt{3}}\right]^2=\frac{9}{16}.$$

（2）$f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{2\cdot 1\cdot\dfrac{y}{x}}{1^2+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y).$

（3）$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\tan\dfrac{tx}{ty}$

$$=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\right)=t^2f(x,y).$$

7. 设 $F(x,y)=\ln x\ln y$**，证明：若** $u>0,v>0$**，则**

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

证　$F(xy,uv)=\ln(xy)\ln(uv)=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$

$$=\ln x\ln u+\ln x\ln v+\ln y\ln u+\ln y\ln v$$

$$=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

8. 求下列各函数的定义域，画出定义域的图形，并说明这是何种点集：

（1）$f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$；　　（2）$f(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+3y^2}$；

（3）$f(x,y)=\sqrt{xy}$；　　（4）$f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；

（5）$f(x,y)=\ln x+\ln y$；　　（6）$f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$；

（7）$f(x,y)=\ln(y-x)$；　　（8）$f(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$；

（9）$f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2+1}$；

（10）$f(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$　$(R>r)$.

解　（1）**要使** $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ **有定义，必须** $x^2-y^2\neq 0$**，即** $y\neq\pm x$**，故定义域**

$$D=\{(x,y)\mid y\neq\pm x\},$$

D **的图形如图** 16-1 **所示，**D **为开集，非开域（因为不连通）.**

（2）**要使** $f(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+3y^2}$ **有定义，必须分母** $2x^2+3y^2\neq 0$**，即** $x^2+y^2\neq 0$**，故定义域**

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\},$$

D 的图形如图 16-2 所示,D 为开集,也是开域.

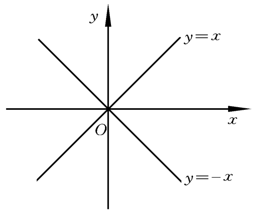

图 16-1

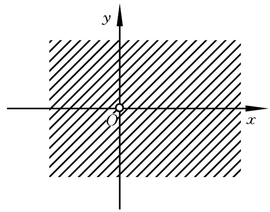

图 16-2

(3) 显然 $f(x,y)=\sqrt{xy}$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0 \text{ 或 } x\leqslant 0,y\leqslant 0\},$$

D 的图形如图 16-3 所示,D 为闭集,也为闭域.

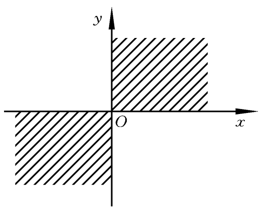

图 16-3

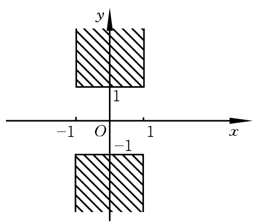

图 16-4

(4) 要使 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$ 有定义,必须

$$1-x^2\geqslant 0,\quad y^2-1\geqslant 0,$$

故定义域 $$D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\geqslant 1\},$$

D 的图形如图 16-4 所示,D 为闭集,非区域(因为不连通).

(5) 显然 $f(x,y)=\ln x+\ln y$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\},$$

D 的图形如图 16-5 所示，D 为开集，也是开域.

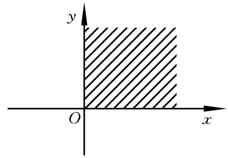

图 16-5

(6) 要使 $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$ 有定义，必须

$$\sin(x^2+y^2)\geqslant 0,$$

即
$$2k\pi\leqslant(x^2+y^2)\leqslant(2k+1)\pi,k=0,1,2,\cdots,$$

故定义域

$$D=\{(x,y)\mid 2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi,k=0,1,2,\cdots\},$$

D 的图形如图 16-6 所示，D 为闭集，非区域.

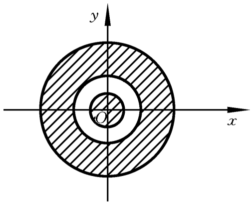

图 16-6

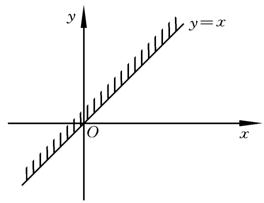

图 16-7

(7) 显然 $f(x,y)=\ln(y-x)$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid y>x\},$$

D 的图形如图 16-7 所示，D 为开集，也是开域.

(8) 显然 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 的定义域

$$D=\mathbf{R}^2,$$

故 D 为开集，也是闭集，是开域也是闭域.

(9) 显然 $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2+1}$ 的定义域

$$D=\mathbf{R}^3,$$

故 D 为开集，也是闭集，是开域也是闭域.

(10) 要使　$f(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$

有定义,必须 $R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0,\quad x^2+y^2+z^2-r^2>0,$

故定义域 $$D=\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\},$$

D 为有界集,但既不是开集,也不是闭集.

9. 证明:开集与闭集具有对偶性——若 E 为开集,则 $\complement E$ 为闭集;若 E 为闭集,则 $\complement E$ 为开集.

证 设 E 为开集,对 $\forall P\in E$,由于 P 为 E 的内点,所以 $\exists\delta>0$,使 $U(P;\delta)\subset E$,因而不存在 $P'\in\complement E$ 使 $\rho(P,P')<\delta$,故 P 不是 $\complement E$ 的聚点,于是 $\complement E$ 的所有聚点都属于 $\complement E$,即 $\complement E$ 为闭集.

另一方面,设 E 为闭集,对 $\forall P\in\complement E$,即 $P\notin E$,因而 P 不是 E 的聚点,故 $\exists\delta>0$,使 $U(P;\delta)\cap E=\varnothing$,即 $U(P;\delta)\subset\complement E$,所以 P 为 $\complement E$ 的内点,即 $\complement E$ 为开集.

10. 证明:

(1) 若 F_1,F_2 为闭集,则 $F_1\cup F_2$ 与 $F_1\cap F_2$ 都为闭集;

(2) 若 E_1,E_2 为开集,则 $E_1\cup E_2$ 与 $E_1\cap E_2$ 都为开集;

(3) 若 F 为闭集,E 为开集,则 $F\backslash E$ 为闭集,$E\backslash F$ 为开集.

证 (1) 由集合中关于并、交、余的对偶律,有

$$\complement(F_1\cup F_2)=(\complement F_1)\cap(\complement F_2),\quad \complement(F_1\cap F_2)=(\complement F_1)\cup(\complement F_2).$$

现设 F_1,F_2 为闭集,则由习题 9 知 $\complement F_1,\complement F_2$ 均为开集. 对 $\forall P\in(\complement F_1)\cap(\complement F_2)$,即 $P\in\complement F_1$ 且 $P\in\complement F_2$,$\exists\delta_1>0,\delta_2>0$,使

$$U(P;\delta_1)\subset\complement F_1,\quad U(P;\delta_2)\subset\complement F_2,$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$,则

$$U(P;\delta)\subset(\complement F_1)\cap(\complement F_2),$$

所以 $$(\complement F_1)\cap(\complement F_2)=\complement(F_1\cup F_2)$$

为开集,故 $F_1\cup F_2$ 为闭集.

又对 $\forall P\in(\complement F_1)\cup(\complement F_2)$,则 $P\in\complement F_1$ 或 $P\in\complement F_2$,由于 $\complement F_1,\complement F_2$ 为开集,所以 $\exists\delta_1>0,\delta_2>0$,使

$$U(P;\delta_1)\subset\complement F_1\quad\text{或}\quad U(P;\delta_2)\subset\complement F_2,$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$,则

$$U(P;\delta)\subset(\complement F_1)\cup(\complement F_2),$$

所以
$$(\complement F_1)\cup(\complement F_2)=\complement(F_1\cap F_2)$$
为开集，故 $F_1\cap F_2$ 为闭集.

(2) 设 E_1,E_2 为开集，由习题 9 知 $\complement E_1$，$\complement E_2$ 均为闭集，又由习题 10(1) 知
$$(\complement E_1)\cap(\complement E_2)=\complement(E_1\cup E_2),\quad (\complement E_1)\cup(\complement E_2)=\complement(E_1\cap E_2)$$
均为闭集，故 $E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2$ 均为开集.

(3) 设 F 为闭集，E 为开集，由集合运算知
$$F\backslash E=F\cap\complement E.$$
由于 E 为开集，所以 $\complement E$ 为闭集，从而 $F\cap\complement E=F\backslash E$ 为闭集；又因为
$$E\backslash F=E\cap\complement F,$$
由于 F 为闭集，所以 $\complement F$ 为开集，从而 $E\cap\complement F=E\backslash F$ 为开集.

11. 试把闭域套定理推广为闭集套定理，并证明之.

闭集套定理：设 $\{D_n\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集列，它满足：

i) $D_n\supset D_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$；

ii) $d_n=d(D_n)$，$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$，

则存在惟一的点 $P_0\in D_n$，$n=1,2,\cdots$.

证 任取点列 $P_n\in D_n$，$n=1,2,\cdots$，由条件 i) 知 $D_{n+p}\subset D_n$，因此 $P_n,P_{n+p}\in D_n$，从而有
$$\rho(P_n,P_{n+p})\leqslant d_n\to 0\quad(n\to\infty).$$
由柯西收敛准则知，$\exists P_0\in\mathbf{R}^2$，使
$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0.$$
现在，任意固定 n，对 $\forall p\in\mathbf{N}_+$，有
$$P_{n+p}\in D_{n+p}\subset D_n,$$
令 $p\to+\infty$，由于 D_n 为闭集，P_0 作为 D_n 的聚点必然属于 D_n，即
$$\lim_{p\to+\infty}P_{n+p}=P_0\in D_n,n=1,2,\cdots.$$
最后证明 P_0 的惟一性. 若 $\exists P_1\in D_n$，$n=1,2,\cdots$，则由于
$$\rho(P_0,P_1)\leqslant\rho(P_0,P_n)+\rho(P_1,P_n)\leqslant 2d_n\to 0\quad(n\to\infty),$$
所以
$$\rho(P_0,P_1)=0,\quad 即\quad P_0=P_1.$$

12. 证明：定理 16.4（有限覆盖定理）.

有限覆盖定理：设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为一有界闭域，$\{\Delta_\alpha\}$ 为一开域族，它覆盖了 D

(即 $D\subset\bigcup\limits_{\alpha}\Delta_\alpha$),则在 $\{\Delta_\alpha\}$ 中必存在有限个开域 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$,它们同样覆盖了 D(即 $D\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Delta_i$).

证　反证法:假设不能用 $\{\Delta_\alpha\}$ 中有限个开域覆盖 D. 因为 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为一有界闭域,所以 $\exists a,b,c,d\in\mathbf{R}$,使

$$D\subset G=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}.$$

用直线 $x=\frac{1}{2}(a+b)$, $y=\frac{1}{2}(c+d)$ 将矩形域 G 分成四个小矩形域 $G_{1i}(i=1,2,3,4)$,而 $G_{1i}(i=1,2,3,4)$ 将 D 划分为若干个小闭域,且其中至少有一个闭域不能被有限开域覆盖,记此闭域为 D_1, D_1 所在的小矩形域为 G_{11},且设

$$G_{11}=\{(x,y)\mid a_1\leqslant x\leqslant b_1,c_1\leqslant y\leqslant d_1\},$$

则 $D_1\subset D$, $D_1\subset G_{11}\subset G$,且

$$r_1=d(D_1)\leqslant d(G_{11})=\frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}.$$

又用直线 $x=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$, $y=\frac{1}{2}(c_1+d_1)$ 将 G_{11} 分成四个小矩形域 $G_{2i}(i=1,2,3,4)$,而 $G_{2i}(i=1,2,3,4)$ 将 D_1 划分为若干个小闭域,且其中至少有一个闭域不能被有限个开域覆盖,记此闭域为 D_2, D_2 所在的小矩形域为 G_{21},且设

$$G_{21}=\{(x,y)\mid a_2\leqslant x\leqslant b_2,c_2\leqslant y\leqslant d_2\},$$

则 $D_2\subset D_1$, $D_2\subset G_{21}\subset G_{11}$,且

$$r_2=d(D_2)\leqslant d(G_{21})=\frac{1}{2}\sqrt{(b_1-a_1)^2+(d_1-c_1)^2}.$$

因为 $b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$, $d_1-c_1=\frac{1}{2}(d-c)$,所以

$$r_2=d(D_2)\leqslant\frac{1}{2^2}\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}.$$

重复上述过程并不断进行下去,得到一个闭域套 $\{D_n\}$,它满足

i) $D_n\supset D_{n+1}$, $n=1,2,\cdots$;

ii) $r_n=d(D_n)\leqslant\frac{1}{2^n}\sqrt{(b-a)^2+(c-d)^2}$ $(n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$.

即 $\{D_n\}$ 是闭域套,且其中每一个闭域 D_n 都不能用有限个开域覆盖. 其中

$$D_n\subset G_{n1}=\{(x,y)\mid a_n\leqslant x\leqslant b_n,c_n\leqslant y\leqslant d_n\},$$

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a),\quad d_n-c_n=\frac{1}{2^n}(d-c).$$

由闭域套定理知，存在惟一点$P_0\in D_n(n=1,2,\cdots)$. 由于$\{\Delta_\alpha\}$是D的一个开覆盖，故$\exists\Delta_{\alpha'}\in\{\Delta_\alpha\}$使$P_0\in\Delta_{\alpha'}$.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$使当$n>N$时，有

$$D_n\subset\Delta_{\alpha'}.$$

这表明D_n能用$\{\Delta_\alpha\}$中的一个开域$\Delta_{\alpha'}$所覆盖，与挑选D_n时的假设"不能用$\{\Delta_\alpha\}$中有限个开域覆盖"相矛盾，故必存在$\{\Delta_\alpha\}$中有限个开域$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$来覆盖$D$.

§2　二元函数的极限

1. 试求下列极限(包括非正常极限)：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$；　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy+1}{x^4+y^4}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{1}{2x-y}$；　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

解　(1) 因为$0\leqslant\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{x^2y^2}{2|x||y|}=\dfrac{1}{2}|x||y|\to0((x,y)\to(0,0))$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$$

(2) 作极坐标代换. 令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{1+r^2}{r^2}=+\infty.$$

(3) 令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=\lim_{r\to0}\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}-1}=\lim_{r\to0}\left(1+\sqrt{1+r^2}\right)=2.$$

(4) 令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy+1}{x^4+y^4}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\sin\theta\cos\theta+1}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}.$$

对$\forall M>0$，因为$r\to 0$，所以不妨设$0<r<1$，由于

$$\frac{r^2\sin\theta\cos\theta+1}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}=\frac{\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta+1}{r^4\cdot\frac{1}{4}(3+\cos 4\theta)}=\frac{4+2r^2\sin 2\theta}{r^4(3+\cos 4\theta)}>\frac{2}{4r^4},$$

取$\delta=\min\left(1,\sqrt[4]{\frac{1}{2M}}\right)$，则当$0<r<\delta$时，便有

$$\frac{r^2\sin\theta\cos\theta+1}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}>M.$$

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy+1}{x^4+y^4}=+\infty.$$

（5）因为$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(2x-y)=0$，由无穷小与无穷大之间的关系，知

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{1}{2x-y}=\infty.$$

（6）因为$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0$，而$\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$，利用有界函数与无穷小之积仍为无穷小，即知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

（7）令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{\sin r^2}{r^2}=1.$$

2. 讨论下列函数在$(0,0)$点的重极限与累次极限：

（1）$f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$；　　（2）$f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$；

（3）$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；　　（4）$f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$；

（5）$f(x,y)=y\sin\dfrac{1}{x}$；　　（6）$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$；

（7）$f(x,y)=\dfrac{e^x-e^y}{\sin xy}$.

解　（1）令$y=kx(k\neq 0)$，则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2}{1+k^2}=\frac{k^2}{1+k^2}$$

由于极限值随 k 的变化而变化,故重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{x^2+y^2}$ 不存在.

累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2}\lim_{x\to 0}0=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}1=1.$$

(2) 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0$,而 $\left|\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant 1$,

所以重极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0.$$

累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=\lim_{x\to 0}\left[\sin\frac{1}{x}\left(\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{y}\right)\right]$$

不存在,同理 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 不存在.

(3) 令 $y=kx$,则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{k^2x^2+(1-k)^2}=\begin{cases}1, & k=1,\\ 0, & k\neq 1,\end{cases}$$

所以重极限不存在.

累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}0=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

(4) 令 $y=-x$,则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}}=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^3}{x^2-x}=0,$$

又令 $y=x^3-x^2$,则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^3-x^2}}=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^9-3x^8+3x^7-x^6}{x^3}=1,$$

所以重极限不存在.

累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}x=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{y\to 0}y^2=0.$$

(5) 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y=0$,而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$,所以重极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}y\sin\frac{1}{x}=0.$$

累次极限
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}y\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}0=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}y\sin\frac{1}{x}=\lim_{y\to 0}\left[y\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\right]$$

不存在.

(6) 令 $y=x$,则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^3}=0,$$

又令 $x=y^2-y$,则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2-y}}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2(y^4-2y^3+y^2)}{y^3+(y^6-3y^5+3y^4-y^3)}=\frac{1}{3}.$$

所以重极限不存在.

累次极限
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\lim_{x\to 0}0=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

(7) 令 $y=x$,则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{e^x-e^y}{\sin xy}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{\sin x^2}=0,$$

又令 $x=y-y^2$,则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y-y^2}}\frac{e^x-e^y}{\sin xy}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y(e^{-y^2}-1)}{\sin(y^2-y^3)}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2-y^3}=-1,$$

所以重极限不存在.

累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^x-e^y}{\sin xy}$ 与 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^y}{\sin xy}$ 都不存在.

3. 证明:若 1° $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$ 存在且等于 A;2° y 在 b 的某邻域内,存在

有$\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=\varphi(y)$，则$\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=A$.

证　依题意，即证

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)=\lim_{y\to b}\varphi(y)=A.$$

设 $y\in U(b;\delta_1)$，因为

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=A,$$

所以对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $0<|x-a|<\delta_2$，$0<|y-b|<\delta_2$ 时，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

又因为
$$\lim_{x\to a}f(x,y)=\varphi(y),\quad y\in U(b;\delta_1),$$

$\exists\delta_3>0$，当 $0<|x-a|<\delta_3$，$|y-b|<\delta_1$ 时，有

$$|f(x,y)-\varphi(y)|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$，则对上面的 $\varepsilon>0$，当 $0<|x-a|<\delta$，$0<|y-b|<\delta$ 时，有

$$|\varphi(y)-A|\leqslant|\varphi(y)-f(x,y)|+|f(x,y)-A|<2\varepsilon.$$

故
$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)=A.$$

4．试应用 ε-δ 定义证明：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

证　因为对$\forall x,y\in\mathbf{R}$，有 $x^2+y^2\geqslant2|x|\cdot|y|$，因此

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2}|x|,$$

所以，对$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $0<|x|<\delta$，$0<|y|<\delta$ 时，就有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon.$$

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

5．叙述并证明：二元函数极限的惟一性定理，局部有界性定理与局部保号性定理.

（1）二元函数极限的惟一性定理：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$存在，则此极限惟一.

（2）二元函数局部有界性定理：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$存在，则 $f(x,y)$在

$P_0(a,b)$的某一空心邻域内有界.

(3) 二元函数的局部保号性定理：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A>0$（或$<0$），则对任何正数$r<A$（或$r<-A$），存在$U^\circ(P_0)$，使得对一切$(x,y)\in U^\circ(P_0)$有

$$f(x,y)>r>0 \quad (\text{或 } f(x,y)<-r<0).$$

证 (1) 反证法：假设

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A,\quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=B, \text{且 } A<B.$$

因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$，所以，对给定的$\varepsilon_0=\dfrac{B-A}{2}>0$，$\exists\delta_1>0$，当$(x,y)\in U^\circ((a,b);\delta_1)$时，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon_0,$$

即
$$\frac{3A-B}{2}<f(x,y)<\frac{A+B}{2};$$

同理，由 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=B$，对上面的$\varepsilon_0>0$，$\exists\delta_2>0$，当$(x,y)\in U^\circ((a,b);\delta_2)$时，有

$$|f(x,y)-B|<\varepsilon_0,$$

即
$$\frac{A+B}{2}<f(x,y)<\frac{3B-A}{2}.$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当$(x,y)\in U^\circ((a,b);\delta)$时，有

$$\frac{A+B}{2}<f(x,y)<\frac{A+B}{2}.$$

故矛盾，所以假设不对，即极限惟一.

(2) 由于极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$ 存在，所以，对$\varepsilon_0=1$，$\exists\delta>0$，当$(x,y)\in U^\circ(P_0;\delta)$时，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon_0=1,$$

于是
$$\begin{aligned}|f(x,y)|&=|f(x,y)-A+A|\leqslant|f(x,y)-A|+|A|<1+A\\&=M,\quad (x,y)\in U^\circ(P_0;\delta)\end{aligned}$$

故$f(x,y)$在$U^\circ(P_0;\delta)$内有界.

(3) 设$A>0$（对于$A<0$的情况可类似地证明），对$\forall r\in(0,A)$，由 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$，则对$\varepsilon_0=A-r>0$，$\exists\delta>0$，当$(x,y)$在$U^\circ(P_0;\delta)$时，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon_0=A-r,$$

即
$$f(x,y)>A-\varepsilon_0=r.$$
故结论成立.

6. 试写出下列类型极限的精确定义:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)=A$;　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)} f(x,y)=A$.

解　(1) 若对$\forall\varepsilon>0,\exists M>0$,当$x>M,y>M$时,有
$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$
则称$(x,y)\to(+\infty,+\infty)$时,$f(x,y)$以$A$为极限,记为
$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)=A.$$
(2) 若对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,M>0$,当$0<|x|<\delta$且$y>M$时,有
$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$
则称$(x,y)\to(0,+\infty)$时,$f(x,y)$以A为极限,记为
$$\lim_{(x,y)\to(0,+\infty)} f(x,y)=A.$$

7. 试求下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{x\sin y}$;　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,0)} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解　(1) 利用极坐标代换. 令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,当$(x,y)\to(+\infty,+\infty)$时,$r\to+\infty$,由于
$$0<\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=\frac{r^2}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}=\frac{1}{r^2}\frac{4}{(3+\cos4\theta)}\leqslant\frac{4}{2r^2}\to0\quad(r\to+\infty),$$
故
$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^2}=0.$$
(2)
$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}\\&=\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}[x^2e^{-x}e^{-y}+y^2e^{-y}e^{-x}]\\&=\lim_{x\to+\infty}(x^2e^{-x})\cdot\lim_{y\to+\infty}e^{-y}+\lim_{y\to+\infty}(y^2e^{-y})\cdot\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0.\end{aligned}$$
(3)
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{x\sin y}&=\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left[\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\frac{\sin y}{y}}\\&=\left[\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\sin y}{y}}\end{aligned}$$

$$=e^1=e.$$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,0)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,0)}\frac{x}{x+y}}=e^1=e.$

8. 试作一函数 $f(x,y)$ 使当 $x\to+\infty, y\to+\infty$ 时,

(1) 两个累次极限存在而重极限不存在;

(2) 两个累次极限不存在而重极限存在;

(3) 重极限与累次极限都不存在;

(4) 重极限与一个累次极限存在,另一个累次极限不存在.

解 (1) 令 $f(x,y)=\frac{y^2}{x^2+y^2}$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{x^2+y^2}=1,\quad \lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{y^2}{x^2+y^2}=0,$$

但由定理16.6的推论2知重极限不存在.

(2) 令 $f(x,y)=\frac{1}{x}\sin x\cos y+\frac{1}{y}\sin y\cos x$,由于

$$\lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin x\cos y=\lim_{y\to+\infty}\left[\cos y\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin x\right]=\lim_{y\to+\infty}0=0,$$

但是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在,故 $\lim\limits_{y\to+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,y)$ 不存在. 同理 $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$ 也不存在.

又因为 $|\sin x\cos y|\leqslant 1, |\sin y\cos x|\leqslant 1$,所以

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{1}{x}\sin x\cos y=0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{1}{y}\sin y\cos x=0,$$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}f(x,y)=0$,故重极限存在.

(3) 令 $f(x,y)=x\sin y+y\cos x$,则易知,当 $x\to+\infty, y\to+\infty$ 时,重极限与两个累次极限均不存在.

(4) 令 $f(x,y)=\frac{1}{x}\cos y$,则

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{1}{x}\cos y=0,$$

$$\lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cos y=\lim_{y\to+\infty}0=0,$$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{x}\cos y$ 不存在.

9. 证明定理 16.5 及其推论 3.

（1）定理 16.5：$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A$ 的充要条件是，对于 D 的任一子集 E，只要 P_0 是 E 的聚点，就有

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E}}f(P)=A.$$

（2）推论 3：极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)$ 存在的充要条件是，对于 D 中任一满足条件 $P_n\neq P_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 的点列 $\{P_n\}$，它所对应的函数列 $\{f(P_n)\}$ 都收敛.

证　（1）必要性：设 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A$，所以对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $P\in U^\circ(P_0;\delta)\cap D$ 时，有

$$|f(P)-A|<\varepsilon.$$

由于 $E\subset D$，P_0 为 E 的聚点，所以 $U^\circ(P_0;\delta)\cap E\neq\varnothing$，故当 $P\in U^\circ(P_0;\delta)\cap E\subset U^\circ(P_0;\delta)\cap D$ 时，有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

即表明

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E}}f(P)=A.$$

充分性：设 $E\subset D$，P_0 为 E 的聚点，

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E}}f(P)=A.$$

下面采用反证法：假设 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)\neq A$，则必 $\exists\varepsilon_0$，对 $\forall\delta_n=\dfrac{1}{n}>0$，$\exists P_n\in U^\circ(P_0;\delta_n)\cap D$，使 $|f(P_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$ 且 P_n 互不相同.

因为
$$E=\{P_n\}\subset D,\ \lim_{n\to\infty}\rho(P_n,P_0)\leqslant\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0,$$

所以 P_0 为 E 的聚点，这与条件 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in E}}f(P)=\lim\limits_{n\to\infty}f(P_n)=A$ 相矛盾，故假设不对，即有

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A.$$

(2) 必要性:设$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A$,令$E=\{P_n\}\subset D$,由$P_n\neq P_0$,$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$,知$P_0$为$E$的聚点,故由上面已证的定理16.5,即知

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E}}f(P)=\lim_{n\to\infty}f(P_n)=A.$$

充分性:设当$P_0\neq P_n\in D$,$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$时,有$\lim\limits_{n\to\infty}f(P_n)=A$收敛.

首先,应说明的是上面的极限是惟一的. 采用反证法:假设

$$\exists\{P_n^{(1)}\}\subset D,\quad \{P_n^{(2)}\}\subset D,\quad \lim_{n\to\infty}P_n^{(1)}=\lim_{n\to\infty}P_n^{(2)}=P_0,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}f(P_n^{(1)})=A,\quad \lim_{n\to\infty}f(P_n^{(2)})=B,$$

但$A<B$,则对于给定的$\varepsilon_0=\dfrac{B-A}{2}>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,当$n>N$时,有

$$f(P_n^{(1)})<A+\varepsilon_0=\frac{A+B}{2}=B-\varepsilon_0<f(P_n^{(2)}).$$

故发生矛盾,即假设不对,所以$A=B$.

其次,利用类似于定理16.5充分性证明中采用的反证法可证

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A.$$

§ 3 二元函数的连续性

1. 讨论下列函数的连续性:

(1) $f(x,y)=\tan(x^2+y^2)$; (2) $f(x,y)=[x+y]$;

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0;\end{cases}$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(5) $f(x,y)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ y, & x\text{ 为有理数};\end{cases}$

(6) $f(x,y)=\begin{cases}y^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(7) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$；　　(8) $f(x,y)=e^{-\frac{x}{y}}$.

解　(1) 当 $x^2+y^2=\dfrac{\pi}{2}+k\pi=\dfrac{1+2k}{2}\pi$ 时，$f(x,y)=\tan(x^2+y^2)$ 间断，故 $\tan(x^2+y^2)$ 的间断曲线为圆族

$$x^2+y^2=\frac{\pi}{2}(1+2k),\quad k=0,1,2,\cdots.$$

(2) 当 $x+y=\pm n$ 时，$f(x,y)=[x+y]$ 间断，故 $[x+y]$ 的间断曲线为直线族

$$x+y=\pm n,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

(3) 因为对 $\forall(x_0,0)\in\mathbf{R}^2$，$x_0\neq 0$，有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}\frac{\sin xy}{y}=x_0\neq f(x_0,0)=0,$$

所以间断点集为 $\{(x,y)\mid x\neq 0,y=0\}$.

(4) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 连续，当 $(x,y)=(0,0)$ 时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{xy}\cdot\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=1\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r}=0=f(0,0),$$

故 $f(x,y)$ 在全平面连续.

(5) 对 $\forall(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，$y_0\neq 0$，有

$$f(x_0,y_0)=\begin{cases}0, & x_0\ \text{为无理数},\\ y_0, & x_0\ \text{为有理数}.\end{cases}$$

i) 当 x_0 为无理数时，取有理点列 $\{x_n\}$，使 $x_n\to x_0\,(n\to\infty)$，则

$$\lim_{\substack{x_n\to x_0\\ y=y_0}}f(x,y)=\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_0)=\lim_{n\to\infty}y_0=y_0\neq 0=f(x_0,y_0).$$

ii) 当 x_0 为有理数时，取无理点列 $\{x_n\}$，使 $x_n\to x_0\,(n\to\infty)$，则

$$\lim_{\substack{x_n\to x_0\\ y=y_0}}f(x,y)=\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_0)=\lim_{n\to\infty}0=0\neq y_0=f(x_0,y_0).$$

而对 $\forall(x_0,0)\in\mathbf{R}^2$，有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}f(x,y)=0=f(x_0,y_0),$$

故 $f(x,y)$ 仅在直线 $y=0$ 上连续,间断点集为 $\{(x,y)\mid y\neq 0\}$.

(6) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2\ln(x^2+y^2)=\lim_{r\to 0}(2r^2\ln r)(\sin^2\theta)=0=f(0,0),$$

所以 $f(x,y)$ 在全平面连续.

(7) 因为 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\neq k\pi, y=k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\},$$

所以 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

(8) 因为 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y\neq 0\},$$

所以 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

2. 叙述并证明二元连续函数的局部保号性.

二元连续函数局部保号性定理:若函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续,且 $f(P_0)>0$(或 <0),则对任何正数 $r<f(P_0)$(或 $r<-f(P_0)$),存在某邻域 $U(P_0)$,使对一切 $P(x,y)\in U(P_0)$,有

$$f(P)>r \quad (\text{或 } f(P)<-r).$$

证　记 $A=f(P_0)$,则二元连续函数局部保号性定理为二元函数极限局部保号性定理的特例,其证明见本章 §2 习题 5.

3. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{(x^2+y^2)^p}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}\quad (p>0),$$

试讨论它在 $(0,0)$ 点处的连续性.

解　令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{(x^2+y^2)^p}=\lim_{r\to 0} r^{1-2p}\cos\theta$$

$$=\begin{cases}0, & 0<p<\dfrac{1}{2},\\ \text{不存在}, & p\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

所以当 $0<p<\dfrac{1}{2}$ 时, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处连续, $p\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点

处不连续.

4. 设 $f(x,y)$ 定义在闭矩形域 $S=[a,b]\times[c,d]$. 若 f 对 y 在 $[c,d]$ 上处处连续,对 x 在 $[a,b]$(且关于 y)为一致连续,证明 f 在 S 上处处连续.

证　对 $\forall P_0(x_0,y_0)\in S$,因为 $f(x,y)$ 对 y 在 $[c,d]$ 上处处连续,所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$,当 $c\leqslant y\leqslant d,|y-y_0|<\delta_1$ 时,有

$$|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2.$$

又由于 $f(x,y)$ 对 x 在 $[a,b]$ 上且关于 y 一致连续,因而对上面的 $\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$,当 $x_1,x_2\in[a,b]$ 时,对 $\forall y\in[c,d]$,在 $|x_1-x_2|<\delta_2$ 时,有

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|<\varepsilon/2.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $(x,y)\in S,|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

即表明 $f(x,y)$ 在 P_0 处连续,由 $P_0\in S$ 的任意性,知 $f(x,y)$ 在 S 上处处连续.

5. 证明:若 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界闭域,f 为 D 上连续函数,且 f 不是常数函数,则 $f(D)$ 不仅有界(定理 16.8),而且是闭区间.

证　因为 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为有界闭域,$f(x,y)$ 在 D 上连续,所以由定理 16.8 知,$f(x,y)$ 在 D 上取最小值 m 和最大值 M. 又由于 f 不是常数函数,因而 $m<M$,从而对 $\forall\mu\in(m,M)$,由定理 16.10(介值性定理)知,$\exists P_0\in D$,使 $f(P_0)=\mu$,故 $f(D)=[m,M]$.

6. 设 $f(x,y)$ 在区域 $G\subset\mathbf{R}^2$ 上对 x 连续,对 y 满足利普希茨条件:

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中 $(x,y'),(x,y'')\in G$,L 为常数,试证明 f 在 G 上处处连续.

证　首先,若 $L=0$,则由 $f(x,y')=f(x,y'')$ 且 $f(x,y)$ 在 G 上对 x 连续,即知 $f(x,y)$ 在 G 上处处连续.

其次,若 $L>0$,对任给聚点 $P_0(x_0,y_0)\in G$,因为 $f(x,y)$ 对 x 连续,所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$,当 $P(x,y_0)\in G,|x-x_0|<\delta_1$ 时,有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2.$$

取 $\delta=\min\left\{\delta_1,\dfrac{\varepsilon}{2L}\right\}$,则当 $P(x,y)\in G,|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&\leqslant L|y-y_0|+\frac{\varepsilon}{2}<L\cdot\frac{\varepsilon}{2L}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以$f(x,y)$在P_0点处连续，由$P_0\in G$的任意性即知$f(x,y)$在G上处处连续.

7. 若一元函数$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，令

$$f(x,y)=\varphi(x),\quad (x,y)\in D=[a,b]\times(-\infty,+\infty).$$

试讨论f在D上是否连续？是否一致连续？

解　$f(x,y)$在D上连续且一致连续.

因为$\varphi(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，所以$\varphi(x)$在$[a,b]$上一致连续. 因而对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x_1,x_2\in[a,b],|x_1-x_2|<\delta$时，有

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|<\varepsilon.$$

由于$f(x,y)=\varphi(x)$与y无关，所以对$\forall P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D$，当$|x_1-x_2|<\delta,|y_1-y_2|<\delta$(或$\rho(P_1,P_2)<\sqrt{2}\,\delta$)时，就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|<\varepsilon.$$

故$f(x,y)$在D上一致连续.

8. 设$f(x,y)=\dfrac{1}{1-xy},(x,y)\in D=[0,1)\times[0,1)$，

证明：f在D上连续，但不一致连续.

证　(1) $f(x,y)=\dfrac{1}{1-xy}$在D上连续.

因对$\forall P_0(x_0,y_0)\in D,0\leqslant x_0<1,0\leqslant y_0<1,x_0y_0<1$，有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{1}{1-xy}=\frac{1}{1-x_0y_0}=f(x_0,y_0),$$

故$f(x,y)$在D上连续.

(2) $f(x,y)$在D上不一致连续.

因为对于$\varepsilon_0=1$，对无论多么小的正数$\delta\left(<\dfrac{1}{24}\right)$，只要取

$$P_0(x_0,y_0)=\left(1-\frac{\delta}{2},1-\frac{\delta}{2}\right),\quad P_1(x_1,y_1)=\left(1-\frac{\delta}{3},1-\frac{\delta}{3}\right)\in D,$$

虽然有
$$\rho(P_1,P_0)=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}=\frac{1}{\sqrt{18}}\delta<\delta,$$

但是
$$\begin{aligned}|f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)|&=\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{\delta}{3}\right)^2}-\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{\delta}{2}\right)^2}\\&=\frac{12-5\delta}{\delta(6-\delta)(4-\delta)}>\frac{12-5\delta}{24\delta}>12-\frac{5}{24}\end{aligned}$$

$$>1=\varepsilon_0.$$

故 $f(x,y)=\dfrac{1}{1-xy}$ 在 D 内不一致连续.

9. 设 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上分别对每一自变量 x 和 y 是连续的，并且每当固定 x 时 f 对 y 是单调的，证明 f 是 $\mathbf{R}^2$ 上的二元连续函数.

证　任取 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，故只须证明 $f(x,y)$ 在 P_0 处连续.

不妨设每当固定 x 时 f 对 y 是单调递减. 因为 $f(x,y)$ 对 y 是连续的，所以对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $|y-y_0|<\delta_1$ 时，有

$$|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2,$$

即
$$f(x_0,y_0)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x_0,y)<f(x_0,y_0)+\varepsilon/2.$$

又因为 $f(x,y)$ 对 x 是连续的，同样对上面的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时，有

$$|f(x,y_0+\delta)-f(x_0,y_0+\delta)|<\varepsilon/2,$$

即
$$f(x_0,y_0+\delta)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x,y_0+\delta)<f(x_0,y_0+\delta)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|f(x,y_0-\delta)-f(x_0,y_0-\delta)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

亦即
$$f(x_0,y_0-\delta)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x,y_0-\delta)<f(x_0,y_0-\delta)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

这里，$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)&<f(x,y_0-\delta)-f(x_0,y_0)\\&<f(x_0,y_0-\delta)+\frac{\varepsilon}{2}-f(x_0,y_0)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)&>f(x,y_0+\delta)-f(x_0,y_0)\\&>f(x_0,y_0+\delta)-\frac{\varepsilon}{2}-f(x_0,y_0)>-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=-\varepsilon,\end{aligned}$$

即
$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

这表明 $f(x,y)$ 在 P_0 处连续.

§4　总 练 习 题

1. 设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 是有界闭集，$d(E)$ 为 E 的直径. 证明：存在 $P_1,P_2\in E$，使得

$\rho(P_1,P_2)=d(E)$.

证　因为闭集 E 可能无聚点,所以分下列两种情况加以证明.

情况(1):设有界闭集 $E\subset\mathbf{R}^2$ 没有聚点,则 E 中只有有限个孤立点. 因为 E 中若有无限个孤立点,则由聚点定理知 E 在 $\mathbf{R}^2$ 中至少有一个聚点,但有界闭集 E 无聚点,所以 E 中只有有限个孤立点,由 $d(E)$ 的定义:

$$d(E)=\sup_{P,P'\in E}\rho(P,P'),$$

以及 E 中点的个数的有限性,即知 $\exists P_1,P_2\in E$ 使 $\rho(P_1,P_2)=d(E)$.

情况(2):设有界闭集 E 中有聚点,由 $d(E)$ 的定义及上确界的概念,知对 $\forall\delta>0,\exists P,P'\in E$,使

$$d(E)-\delta<\rho(P,P')\leqslant d(E).$$

现取一数串 $\delta_n=\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots$,则得到点列 $\{P_n\}\subset E,\{P_n'\}\subset E$,使

$$d(E)-\delta_n<\rho(P_n,P_n')\leqslant d(E).$$

对于有界点列 $\{P_n\}\subset E$,无论 $\{P_n\}$ 中有无限个互不相同的点(此时可用聚点定理),还是 $\{P_n\}$ 中包含无穷个相同的点,都存在子列 $\{P_{n_k}\}\subset\{P_n\}$ 使

$$\lim_{k\to\infty}P_{n_k}=P_1\in E.$$

故对数串 $\delta_{n_k}=\dfrac{1}{n_k}$,有

$$d(E)-\delta_{n_k}<\rho(P_{n_k},P_{n_k}')\leqslant d(E).$$

同样,对于有界点列 $\{P_{n_k}'\}\subset E$,无论 $\{P_{n_k}'\}$ 中有无限个互不相同的点(此时可用聚点定理),还是 $\{P_{n_k}'\}$ 中包含无穷个相同的点,都存在子列 $\{P_{n_{k_r}}'\}\subset\{P_{n_k}'\}\subset\{P_n'\}$,使

$$\lim_{r\to\infty}P_{n_{k_r}}'=P_2\in E.$$

由于 $\{n_{k_r}\}\subset\{n_k\}$,所以 $\{P_{n_{k_r}}\}\subset\{P_{n_k}\}$,故有

$$\lim_{r\to\infty}P_{n_{k_r}}=P_1.$$

最后,对数串 $\delta_{n_{k_r}}=\dfrac{1}{n_{k_r}}$,有

$$d(E)-\delta_{n_{k_r}}<\rho(P_{n_{k_r}},P_{n_{k_r}}')\leqslant d(E).$$

令 $r\to\infty$，则有

$$\rho(P_1,P_2)=d(E).$$

2. 设
$$f(x,y)=\frac{1}{xy},r=\sqrt{x^2+y^2},k>1,$$
$$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{k}x\leqslant y\leqslant kx\right\},$$
$$D_2=\{(x,y)\,|\,x>0,y>0\}.$$
试分别讨论 $i=1,2$ 时极限 $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty\\(x,y)\in D_i}}f(x,y)$ 是否存在？为什么？

解　(1) $i=1$ 时，$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{k}\leqslant x\leqslant kx\right\}$. 若记 $\alpha=\arctan\frac{1}{k}$，$\beta=\arctan k$，又令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则 D_1 又可表示为

$$D_1=\{(r,\theta)\,|\,\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,0\leqslant r<+\infty\},$$

这里 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ 且 $\alpha<\frac{\pi}{4}$. 故极限

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\(x,y)\in D_1}}f(x,y)=\lim_{\substack{r\to+\infty\\\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta}}\frac{1}{r^2\sin\theta\cos\theta}=0\text{ 存在.}$$

(注：因为 $\frac{1}{2}\sin2\alpha\leqslant\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta\leqslant1$，所以 $1\leqslant\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\leqslant\frac{2}{\sin2\alpha}$ 有界.)

(2) $i=2$ 时，$D_2=\{(x,y)\,|\,x>0,y>0\}$ 为第一象限内的区域. 令 $y=x$，则

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}\,x\to+\infty\quad(x\to+\infty),$$

故
$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\(x,y)\in D_2}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y=x}}f(x,y)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

又令 $y=\mathrm{e}^{-x}(x>0)$，则

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\mathrm{e}^{-2x}}\to+\infty\quad(x\to+\infty),$$

故
$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\(x,y)\in D_2}}f(x,y)=\lim_{\substack{r\to+\infty\\y=\mathrm{e}^{-x}}}f(x,y)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty,$$

所以极限 $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty\\(x,y)\in D_2}}f(x,y)$ 不存在.

3. 设 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=\varphi(y_0)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\psi(x_0)=0$，且在 (x_0,y_0) 附近有 $|f(x,y)-\varphi(y)|\leqslant\psi(x)$. 证明

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

证　因为 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=\varphi(y_0)=A$，所以对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $|y-y_0|<\delta_1$ 时，有

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|=|\varphi(y)-A|<\varepsilon/2.$$

又由 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\psi(x_0)=0$，同样对上面的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时，有

$$|\psi(x)-\psi(x_0)|=|\psi(x)-0|=\psi(x)<\varepsilon/2.$$

再由已给条件，知 $\exists\delta_3>0$，当 $(x,y)\in U((x_0,y_0);\delta_3)$ 时，有

$$|f(x,y)-\varphi(y)|\leqslant\psi(x).$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$，则当 $(x,y)\in U((x_0,y_0);\delta)$ 时，有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-A|&\leqslant|f(x,y)-\varphi(y)|+|\varphi(y)-A|\leqslant\psi(x)+|\varphi(y)-A|\\&<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

故
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

4. 设 f 为定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数，α 是任一实数，

$$E=\{(x,y)\mid f(x,y)>\alpha,(x,y)\in\mathbf{R}^2\},$$
$$F=\{(x,y)\mid f(x,y)\geqslant\alpha,(x,y)\in\mathbf{R}^2\}.$$

证明：E 是开集，F 是闭集.

证　(1) 取 $\forall\ P_0(x_0,y_0)\in E$，则 $f(x_0,y_0)>\alpha$，即

$$f(x_0,y_0)-\alpha>0,$$

由于 $f(x,y)$ 在 P_0 处连续，所以 $f(x,y)-\alpha$ 也在 P_0 处连续，且

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y)-\alpha)=f(x_0,y_0)-\alpha>0,$$

故由连续函数局部保号性定理知 $\exists\delta>0$，使当 $(x,y)\in U(P_0;\delta)$ 时，有

$$f(x,y)-\alpha>0,\quad \text{即}\quad f(x,y)>\alpha,$$

这表明

$$U(P_0;\delta)\subset E,$$

即 P_0 为 E 的内点，因而 E 为开集.

(2) 因为 $F=\mathbf{R}^2/E$，又 $\mathbf{R}^2$ 为闭集，而 E 为开集，故由 §1 习题10 知 F 为闭集.

5. 设 f 在有界开集 E 上一致连续. 证明：

(1) 可将 f 连续延拓到 E 的边界;

(2) f 在 E 上有界.

证　(1) f 能连续延拓到 E 的边界,是指:对 $\forall P_0(x_0,y_0)\in\partial E$,若极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in E}} f(x,y)=A$($A$ 为有限数)存在,则定义 $f(P_0)=A$,就可以使 $f(x,y)$ 在 P_0 处连续.

首先,由 f 在有界开集 E 上一致连续可知,对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)\in E$,$\rho(P_1,P_2)<\delta$ 时,有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon. \tag{①}$$

现对 $\forall P_0(x_0,y_0)\in\partial E$,由于开集 E 中每一点均为内点,而界点 $P_0\in\partial E$ 的任何邻域内既有 E 中的点也有不属于 E 中的点,所以 P_0 为 E 的聚点. 在 E 中任取满足条件 $P_n\neq P_0$,$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 的点列 $\{P_n\}$,下面证明点列 $\{f(P_n)\}$ 收敛.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 可知,对上面的 $\delta>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$,$m>N$ 时,有

$$\rho(P_n,P_0)<\delta/2,\quad \rho(P_m,P_0)<\delta/2,$$

从而

$$\rho(P_n,P_m)<\delta/2+\delta/2=\delta.$$

再由式①,有

$$|f(P_n)-f(P_m)|<\varepsilon.$$

所以点列 $\{f(P_n)\}$ 为柯西点列,故 $\{f(P_n)\}$ 收敛. 由定理16.5 的推论3 即知极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in E}} f(P)$ 存在. 故 f 可以连续延拓到 $P_0\in\partial E$,即 f 可连续延拓到 ∂E.

(2) 设 $F=E\cup\partial E$,则 F 为有界闭集,由(1)的证明知 f 为有界闭集 F 上的连续函数,因而 f 在 F 上有界,从而 f 在 E 上有界.

6. 设 $u=\varphi(x,y)$ 与 $v=\psi(x,y)$ 在 xy 平面中的点集 E 上一致连续;φ 与 ψ 把点集 E 映射为 uv 平面中的点集 D,$f(u,v)$ 在 D 上一致连续. 证明复合函数 $f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在 E 上一致连续.

证　因为 $f(u,v)$ 在 D 上一致连续,所以对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,对 $\forall P_1(u_1,v_1)$,$P_2(u_2,v_2)\in D$,当 $\rho(P_1,P_2)<\delta$ 时,有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon.$$

又因为 $u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$ 在 xy 平面中的点集 E 上一致连续,故对上面的 $\delta>0$,$\exists\tau>0$,对 $\forall Q_1(x_1,y_1)$,$Q_2(x_2,y_2)\in E$,当 $\rho(Q_1,Q_2)<\tau$ 时,有

$$|u_1-u_2|=|\varphi(Q_1)-\varphi(Q_2)|<\delta/2,$$
$$|v_1-v_2|=|\psi(Q_1)-\psi(Q_2)|<\delta/2.$$

综合上述，对上面的$\forall\varepsilon>0,\exists\tau>0$，对$\forall Q_1,Q_2\in E$，当$\rho(Q_1,Q_2)<\tau$时，有

$$\rho((u_1,v_1),(u_2,v_2))\leqslant|u_1-u_2|+|v_1-v_2|<\delta,$$

从而 $|f(\varphi(Q_1),\psi(Q_1))-f(\varphi(Q_2),\psi(Q_2))|=|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon.$

这表明$f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$在$E$上一致连续.

7. 设$f(t)$在区间(a,b)内连续可导，函数

$$F(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\quad(x\neq y),F(x,x)=f'(x)$$

定义在区域$D=(a,b)\times(a,b)$内. 证明：对任何$c\in(a,b)$，有

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)}F(x,y)=f'(c).$$

证 取$\Delta x\neq\Delta y$，使$x=c+\Delta x\in(a,b)$，$y=c+\Delta y\in(a,b)$，不妨设$\Delta x<\Delta y$，由$f(t)$在(a,b)内连续可导知$f(t)$在闭区间$[c+\Delta x,c+\Delta y]$上连续，在开区间$(c+\Delta x,c+\Delta y)$内可导，则由拉格朗日中值定理知，$\exists\xi=c+\Delta x+\theta(\Delta y-\Delta x)\in(c+\Delta x,c+\Delta y)$，$0<\theta<1$，使

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c+\Delta y)}{\Delta x-\Delta y}=f'(\xi)$$
$$=f'(c+\Delta x+\theta(\Delta y-\Delta x)),\quad 0<\theta<1.$$

利用$f'(t)$的连续性，则有

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)}F(x,y)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(c+\Delta x)-f(c+\Delta y)}{\Delta x-\Delta y}$$
$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f'(c+\Delta x+\theta(\Delta y-\Delta x))=f'(c).$$

第十七章　多元函数微分学

知 识 要 点

1. 多元函数的偏导数实际上就是将它视为一元函数（这时需将其他自变量固定）时的导数，如$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$. 显然可偏导是一个很弱的条件，它不具有一元函数中的“可导必连续”的性质，但因其计算容易，故多元微分学中许多概念或计算均由偏导数表出. 注意若 f 在 (x_0,y_0) 及 (x_0,y_0) 邻域用不同的函数给出，则需用偏导数定义来求. 对于抽象函数求高阶混合偏导数时一般认为与求偏导次序无关，值均相等.

2. 全微分是函数全增量的近似值，是自变量增量的线性函数，二者的误差是自变量增量的高阶无穷小. 可微是较强的条件，如同一元函数中导数作用一样，在多元微分学中许多概念、定理都不能缺少它. 判定可微除用定义外，还可用可微的充分条件：偏导数连续. 与一元函数的微分一样，一阶全微分具有形式的不变性，高阶全微分不具有形式的不变性.

3. 复合函数求偏导的链式法则较一元函数更为复杂，使用时一定要掌握利用复合结构的方法求偏导数（注意复合函数的偏导函数仍然保持原先的复合结构）. 在第二十三章中还将介绍用关联矩阵法求复合函数的偏导数.

4. 在 f 可微的条件下，f 的梯度 $\mathrm{grad}\ f$ 相当于 f 的导数，具有与一元函数导数运算的类似性质. 非零梯度 $\mathrm{grad}\ f$ 主要有两个作用：

（1） $\mathrm{grad}\ f$ 的方向是函数增加最快的方向，沿梯度方向的方向导数取最大值 $|\mathrm{grad}\ f|$. 因此梯度是研究多元函数变化的重要工具.

（2） $\mathrm{grad}\ f$ 是函数 f 的等值线（面）$f(x,y)=C$（$f(x,y,z)=C$）的法线的方向向量（见第十八章）.

5. 当 f 在 P_0 点可微时，f 沿 l 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\left.\mathrm{grad}\, f\right|_{P_0}\cdot \boldsymbol{l}_0$，其中，$\boldsymbol{l}_0$ 为 l 的单位向量.

6. 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域 $U(P_0)$ 有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数，则对 $U(P_0)$ 内任一点 (x,y) 有泰勒公式：

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\mathrm{d}f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\mathrm{d}^nf(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1}f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)),\quad 0<\theta<1,$$

其中，$\mathrm{d}^kf=\left((x-x_0)\dfrac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^kf$　(即 f 的 k 阶全微分).

当 $n=0$ 时，泰勒公式即为中值公式.

7. 函数的极值点必须是函数定义域的内点. P_0 为极值点的必要条件是 $\mathrm{d}f(P_0)=0$，即 $f_x(P_0)=f_y(P_0)=0$(或者说 $\mathrm{grad}\, f|_{P_0}=0$). 由泰勒公式，$P_0$ 为极值点的充分条件是 $\mathrm{d}f(P_0)=0$，$\mathrm{d}^2f(P_0)$ 恒正或恒负. 由于

$$\mathrm{d}^2f(P_0)=(x-x_0,y-y_0)\boldsymbol{H}_f(P_0)(x-x_0,y-y_0)^{\mathrm{T}},$$

故 $\mathrm{d}^2f(P_0)$ 的符号可由 f 在 P_0 的黑赛矩阵 $\boldsymbol{H}_f(P_0)$ 的正定性来确定(定理17.11).

8. 若多元连续函数 f 在区域 D 内只有惟一的极值点，则该点未必是最值点. 此性质不同于一元函数，体现了在 $\mathbf{R}^2$ 中动点变化的自由度比 $\mathbf{R}$ 中自由度大得多.

习 题 详 解

§1　可　微　性

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^2y$；　　(2) $z=y\cos x$；

(3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(4) $z=\ln(x^2+y^2)$；

(5) $z=e^{xy}$；　　(6) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$；

(7) $z=xye^{\sin(xy)}$；　　(8) $u=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z}$；

(9) $u=(xy)^z$；　　(10) $u=x^{y^z}$.

解　(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2$.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-y\sin x$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos x$.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot 2x=-\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$，

同理
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$.

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$.

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

(7) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{\sin(xy)}+xye^{\sin(xy)}\cdot\cos(xy)\cdot y=(y+xy^2\cos(xy))e^{\sin(xy)}$，

同理
$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x+x^2y\cos(xy))e^{\sin(xy)}.$$

(8) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}-\dfrac{1}{z}$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{z}{y^2}$，　$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{z^2}$.

(9) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=z(xy)^{z-1}\cdot y$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=z(xy)^{z-1}\cdot x$，　$\dfrac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\cdot\ln(xy)$.

(10) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^z\cdot x^{y^z-1}$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{y^z}\cdot(\ln x)\cdot\dfrac{\partial(y^z)}{\partial y}=z\cdot y^{z-1}x^{y^z}\ln x$，

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}(\ln x)\frac{\partial y^z}{\partial z}=y^zx^{y^z}\ln x\ln y.$$

2. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$；**求** $f_x(x,1)$.

解　**因为** $f(x,1)=x$，**所以**

$$f_x(x,1)=1.$$

3. 设

$$f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

考察函数 f 在原点(0,0)的偏导数.

解 由偏导数的定义,有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0\text{ 存在,}$$

而 $$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\sin\dfrac{1}{y^2}}{y}=\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y^2}\text{ 不存在.}$$

4. 证明函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0,0)处连续但偏导数不存在.

证 因为 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}z=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0=f(0,0),$$

所以 f 在点(0,0)处连续. 但

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\text{ 不存在,}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|}{y}\text{ 也不存在.}$$

5. 考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

在点(0,0)处的可微性.

解 首先 $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0=A,$$

同理 $$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0=B,$$

又 $$\Delta z-A\Delta x-B\Delta y=\Delta z=\Delta x\cdot\Delta y\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

而 $$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-A\Delta x-B\Delta y}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\theta\cos\theta\sin\frac{1}{\rho^2}=0,$$

所以 $$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

故 f 在点 $(0,0)$ 处可微.

6. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在,但在此点不可微.

证　令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0} r\sin\theta\cos^2\theta=0=f(0,0),$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

又 $$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2\cdot 0}{x^2+0^2}=0=A,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\frac{0^2\cdot y}{0^2+y^2}=0=B,$$

所以 f 在点 $(0,0)$ 的偏导数存在.

下面证明 f 在点 $(0,0)$ 处不可微. 采用反证法:假设 f 在点 $(0,0)$ 处可微,则

$$\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

即 $$\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=o(\rho), \qquad ①$$

其中 $$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

由于式①对 $\forall \Delta x,\Delta y$ 都成立,故取 $\Delta x=\Delta y$,则

$$\frac{(\Delta x)^3}{2(\Delta x)^2}=\frac{1}{2}\Delta x=o(\sqrt{2}\,|\Delta x|)$$

是不可能的. 故假设不对,即 f 在点 $(0,0)$ 处不可微.

7. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在,但偏导数在点 $(0,0)$ 处不连续,而 f 在原点 $(0,0)$ 处可微.

证　(1) **由于** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{r\to 0} r^2\sin\dfrac{1}{r}=0=f(0,0)$，

故 f **在点** $(0,0)$ **处连续.**

(2) **因为** $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot x^2\sin\dfrac{1}{|x|}$

$$=\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{|x|}=0=A,$$

同理
$$f_y(0,0)=0=B,$$

所以 f **在点** $(0,0)$ **处的偏导数存在.**

(3) **因为** $f_x=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$

令 $y=0$，**则**

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}\left[2x\sin\frac{1}{|x|}-\frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|}\right]\text{不存在},$$

所以 $f_x(x,y)$ **在点** $(0,0)$ **处不连续. 同理可证** $f_y(x,y)$ **也在点** $(0,0)$ **处不连续.**

(4) **由于** $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-A\Delta x-B\Delta y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\cdot\sin\dfrac{1}{\rho}=0$，

所以
$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

即 f **在点** $(0,0)$ **处可微.**

8. 求下列函数在给定点的全微分：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$ **在点** $(0,0)$，$(1,1)$；

(2) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **在点** $(1,0)$，$(0,1)$.

解　(1) **因为** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，

所以　$\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=0$，　$\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=f_x(1,1)\mathrm{d}x+f_y(1,1)\mathrm{d}y=-4\mathrm{d}x-4\mathrm{d}y$.

(2) **因为** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-1}(2x)}{x^2+y^2}=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

所以
$$\mathrm{d}z\Big|_{(1,0)}=0,\quad \mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=\mathrm{d}x.$$

9. 求下列函数的全微分：

(1) $z=y\sin(x+y)$；　　(2) $u=xe^{yz}+e^{-z}+y$.

解　(1) **因为** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos(x+y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin(x+y)+y\cos(x+y)$，

所以

$$\begin{aligned}dz&=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\\&=y\cos(x+y)dx+(\sin(x+y)+y\cos(x+y))dy.\end{aligned}$$

(2) **因为** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{yz}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xze^{yz}+1$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=xye^{yz}-e^{-z}$，

所以

$$\begin{aligned}du&=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\\&=e^{yz}dx+(1+xze^{yz})dy+(xye^{yz}-e^{-z})dz.\end{aligned}$$

10. 求曲面 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ **在点** $\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ **处的切平面方程与法线方程.**

解　**因为**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y},$$

所以

$$f_x(1,1)=-\frac{1}{2},\quad f_y(1,1)=\frac{1}{2},$$

则切平面方程

$$z-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1),\quad \text{即}\quad x-y+2z=\frac{\pi}{2},$$

法线方程

$$\frac{x-1}{-\dfrac{1}{2}}=\frac{y-1}{\dfrac{1}{2}}=\frac{z-\dfrac{\pi}{4}}{-1},\quad \text{即}\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\dfrac{\pi}{4}}{2}.$$

11. 求曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ **在点**$(3,1,1)$**处的切平面方程与法线方程.**

解　**因为竖坐标** $z=1>0$，**所以**

$$z=\sqrt{3x^2+y^2-27}.$$

由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+y^2-27}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{3x^2+y^2-27}},$$

$$f_x(3,1)=9,\quad f_y(3,1)=1,$$

故切平面方程

$$z-1=9\cdot(x-3)+1\cdot(y-1),\quad \text{即}\quad 9x+y-z=27,$$

法线方程

$$\frac{x-3}{9}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}.$$

12. **在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点的切平面平行于平面 $x+3y+z+9=0$；并写出这切平面方程和法线方程.**

解　因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y,\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$，所以曲面 $z=xy$ 上在切点为 (x,y,z) 处的切平面的法线向量为 $\{y,x,-1\}$，平面 $x+3y+z+9=0$ 的法线向量为 $\{1,3,1\}$，故有

$$\begin{cases} z=xy, \\ \dfrac{y}{1}=\dfrac{x}{3}=\dfrac{-1}{1}, \end{cases}$$

解之可得，切点 $(x,y,z)=(-3,-1,3)$，因而切平面的法线向量为 $\{-1,-3,-1\}$，则切平面方程

$$-1(x+3)-3(y+1)-1(z-3)=0,\quad \text{即}\quad x+3y+z+3=0,$$

法线方程

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

13. **计算近似值：**

(1) $1.002\times 2.003^2\times 3.004^3$；　　(2) $\sin 29°\times \tan 46°$.

解　(1) 令　$f(x,y,z)=xy^2z^3.$

取点　$(x_0,y_0,z_0)=(1,2,3),\Delta x=0.002,\Delta y=0.003,\Delta z=0.004.$

因为　$f(1,2,3)=108,\quad f_x(1,2,3)=y^2z^3\Big|_{(1,2,3)}=108,$

$f_y(1,2,3)=2xyz^3\Big|_{(1,2,3)}=108,\quad f_z(1,2,3)=3xy^2z^2\Big|_{(1,2,3)}=108,$

所以

$$\begin{aligned} &1.002\times 2.003^2\times 3.004^3 \\ \approx{}& f(1,2,3)+f_x(1,2,3)\Delta x+f_y(1,2,3)\Delta y+f_z(1,2,3)\Delta z \\ ={}&108+108(0.002+0.003+0.004)=108.97. \end{aligned}$$

（2）令
$$z=f(x,y)=\sin x\tan y,$$
取点
$$(x_0,y_0)=\left(\frac{\pi}{6},\quad\frac{\pi}{4}\right),\quad \Delta x=-\frac{\pi}{180},\quad \Delta y=\frac{\pi}{180}.$$

因为 $f(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2}$，　$f_x(x_0,y_0)=\cos x\cdot\tan y\Big|_{\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$f_y(x_0,y_0)=\sin x\cdot\sec^2 y\Big|_{\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)}=1$，

所以 $\sin 29°\tan 46°\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y=0.5023.$

14. 设圆台上下底的半径分别为 $R=30\text{cm}$，$r=20\text{cm}$，高 $h=40\text{cm}$. 若 R，r，h 分别增加 3mm，4mm，2mm，求此圆台体积变化的近似值.

解　圆台的体积
$$V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+R^2+rR).$$
取点 $(R_0,r_0,h_0)=(30,20,40)$，　$\Delta R=0.3$，　$\Delta r=0.4$，　$\Delta h=0.2$.

因为 $\dfrac{\partial V}{\partial R}=\dfrac{\pi h}{3}(2R+r)$，　$\dfrac{\partial V}{\partial r}=\dfrac{\pi h}{3}(2r+R)$，　$\dfrac{\partial V}{\partial h}=\dfrac{\pi}{3}(r^2+R^2+rR)$，

所以
$$\begin{aligned}\Delta V&=V(R_0+\Delta R,r_0+\Delta r,h_0+\Delta h)-V(R_0,r_0,h_0)\\&\approx \mathrm{d}V(R_0,r_0,h_0)\\&=\frac{\partial V}{\partial R}\Big|_{(R_0,r_0,h_0)}\Delta R+\frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{(R_0,r_0,h_0)}\Delta r+\frac{\partial V}{\partial h}\Big|_{(R_0,r_0,h_0)}\Delta h\\&=\frac{40\pi}{3}[(60+20)\times 0.3+(40+30)\times 0.4]\\&\quad+\frac{\pi}{3}(20^2+30^2+20\times 30)\times 0.2\\&\approx 2576(\text{cm}^3).\end{aligned}$$

15. 证明：若二元函数 f 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P)$ 内的偏导函数 f_x 与 f_y 有界，则 f 在 $U(P)$ 内连续.

证　首先证明 f 在 $P(x_0,y_0)$ 处连续. 根据条件，$\exists M>0$，使
$$|f_x(x,y)|\leqslant M,\quad |f_y(x,y)|\leqslant M,\quad \forall (x,y)\in U(P),$$
于是，由拉格朗日中值定理，有
$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&=|f_y(x,y_0+\theta_1\Delta y||\Delta y|+|f_x(x_0+\theta_2\Delta x,y_0||\Delta x|\\&\leqslant M(|\Delta x|+|\Delta y|),\end{aligned}$$

其中 $$\Delta x=x-x_0,\quad \Delta y=y-y_0,\quad 0<\theta_1,\theta_2<1.$$
由此可见 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，故 f 在 $P(x_0,y_0)$处连续.

其次，对$\forall P_1(x_1,y_1)\in U(P)$，由于 P_1 为 $U(P)$的内点，故存在 P_1 的某邻域$U'(P_1)\subset U(P)$，且f_x,f_y 在$U'(P_1)$内有界，则由上面的证明知f 在P_1 处连续，由 $P_1\in U(P)$的任意性知 f 在$U(P)$内连续.

16. 设二元函数 f 在区域 $D=[a,b]\times[c,d]$上连续.

(1) 若在 $\mathrm{int}D$ 内有 $f_x\equiv 0$，试问 f 在 D 上有何特性?

(2) 若在 $\mathrm{int}D$ 内有 $f_x\equiv f_y\equiv 0$，f 又怎样?

(3) 在(1)的讨论中，关于f 在D 上的连续性假设可否省略? 长方形区域可否改为任意区域?

解　(1) 取定 $x_0\in[a,b]$，对$\forall x\in[a,b]$，$y\in[c,d]$，即$(x,y)\in D$，由于 $f_x\equiv 0$，则由拉格朗日中值定理，有
$$f(x,y)-f(x_0,y)=f_x(\xi,y)(x-x_0)=0,$$
其中，ξ 在 x_0 与 x 之间，即
$$f(x,y)=f(x_0,y)=\varphi(y).$$
又由 f 在 D 上连续，故 $f=\varphi(y)$在$[c,d]$上连续.

(2) 由于 $f_x=f_y\equiv 0$，$(x,y)\in\mathrm{int}D$，所以由(1)的讨论知 $f\equiv C$(C 为常数).

(3) 在(1)的讨论中，关于 f 在 D 上连续性假设可以省略，$f(x,y)=\varphi(y)$，$y\in[c,d]$，但 $\varphi(y)$不一定连续.

长方形区域不能随意改为任意区域. 因为，在条件 $f_x\equiv 0$ 下，$f(x,y)=\varphi(y)$可能在区间$[c,d]$上不能定义. 例如，取 $c<c_1<d_1<d$，$a<a_1<b$，记
$$D_1=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant a_1,c_1\leqslant y\leqslant d_1\}=[a,a_1]\times[c_1,d_1],$$
令 $$D=[a,b]\times[c,d]\backslash D_1,$$
即 D 为原矩形区域内挖去一个小矩形区域 D_1. 又令
$$f(x,y)=\begin{cases} y, & (x,y)\in[a,a_1]\times[c,c_1],\\ 2y, & (x,y)\in[a,a_1]\times[d_1,d],\\ 3y, & (x,y)\in[a_1,b]\times[c,d].\end{cases}$$
条件 $f_x\equiv 0$，$(x,y)\in\mathrm{int}D$ 仍然满足，但当 $y\in[c,c_1]$时，$f(x,y)=\varphi(y)=y$，而

当 $y\in[c,d]\supset[c,c_1]$ 时，$\varphi(y)=3y$，矛盾．所以 D 为任意区域时(1)的函数特性不存在．

17．试证在原点(0,0)的充分小邻域内，有

$$\arctan\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y.$$

证　令
$$f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1+xy},$$
定义域
$$D=\{(x,y)\mid xy\neq-1\}.$$
由于
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}\frac{(1+xy)-(x+y)y}{(1+xy)^2}=\frac{1-y^2}{(1+xy)^2+(x+y)^2},$$
同理
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1-x^2}{(1+xy)^2+(x+y)^2},$$
取 $0<\delta<1$，则 f_x,f_y 在 $U((0,0);\delta)$ 内连续(注：$|xy|\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)<\frac{1}{2}\delta^2<1$)，因而 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微分，故由近似公式，有
$$f(x,y)\approx f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y=x+y.$$

18．求曲面 $z=\frac{x^2+y^2}{4}$ 与平面 $y=4$ 的交线在 $x=2$ 处的切线与 Ox 轴的交角．

解　由于交线方程为
$$\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4},\\ y=4,\end{cases}$$
所以由偏导数的几何意义，知
$$\tan\varphi\Big|_{(2,4)}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,4)}=\frac{1}{2}x\Big|_{(2,4)}=1,$$
故
$$\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

19．试证：

(1) 乘积的相对误差限近似于各因子相对误差限之和；

(2) 商的相对误差限近似于分子和分母相对误差限之差．

证　(1) 仅证两个因子乘积的情况(有限个因子乘积的情况为自然推广)．

设 $z=f(x,y)g(x,y)$，$f(x,y)$，$g(x,y)$ 可微．因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x g+f g_x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y g+f g_y,$$

$$\Delta z\approx \mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=(f_x g+f g_x)\Delta x+(f_y g+f g_y)\Delta y,$$

所以

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right|=\left|\frac{\Delta z}{fg}\right|\approx\left|\frac{f_x g+f g_x}{fg}\Delta x+\frac{f_y g+f g_y}{fg}\Delta y\right|$$

$$=\left|\left(\frac{f_x}{f}\Delta x+\frac{f_y}{f}\Delta y\right)+\left(\frac{g_x}{g}\Delta x+\frac{g_y}{g}\Delta y\right)\right|=\left|\frac{\Delta f}{f}+\frac{\Delta g}{g}\right|.$$

(2) 设 $z=\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$，f,g 可微．因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{g f_x-f g_x}{g^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{g f_y-f g_y}{g^2},$$

$$\Delta z\approx \mathrm{d}z=\frac{1}{g^2}[(g f_x-f g_x)\Delta x+(g f_y-f g_y)\Delta y]$$

$$=\frac{1}{g}(f_x\Delta x+f_y\Delta y)-\frac{f}{g^2}(g_x\Delta x+g_y\Delta y)=\frac{\mathrm{d}f}{g}-\frac{f\mathrm{d}g}{g^2},$$

所以

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right|=\left|\frac{g\Delta z}{f}\right|\approx\left|\frac{\mathrm{d}f}{f}-\frac{\mathrm{d}g}{g}\right|\approx\left|\frac{\Delta f}{f}-\frac{\Delta g}{g}\right|.$$

20．测得一物体的体积 $V=4.45\mathrm{cm}^3$，其绝对误差限为 $0.01\mathrm{cm}^3$；又测得重量 $W=30.80\mathrm{g}$，其绝对误差限为 $0.01\mathrm{g}$．求由公式 $d=\dfrac{W}{V}$ 算出的比重 d 的相对误差限和绝对误差限．

解　因为 $|\Delta V|\leqslant 0.01$，$|\Delta W|\leqslant 0.01$，则由习题19(2)知

$$|\Delta d|\leqslant\left|\frac{\Delta W}{V}\right|+\left|\frac{W\Delta V}{V^2}\right|=\frac{0.01}{4.45}+\frac{30.80\times 0.01}{4.45^2}=0.0178\approx 0.02,$$

$$\left|\frac{\Delta d}{d}\right|\leqslant\left|\frac{\Delta W}{W}\right|+\left|\frac{\Delta V}{V}\right|=\frac{0.01}{30.80}+\frac{0.01}{4.45}=0.002572\approx 0.26\%.$$

所以绝对误差限为 0.02，相对误差限为 0.26%．

§2　复合函数微分法

1．求下列复合函数的偏导数或导数：

(1) 设 $z=\arctan(xy)$，$y=\mathrm{e}^x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$；

（2）设 $z=\frac{x^2+y^2}{xy}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$；

（3）设 $z=x^2+xy+y^2, x=t^2, y=t$，求$\frac{dz}{dt}$；

（4）设 $z=x^2\ln y, x=\frac{u}{v}, y=3u-2v$，求$\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$；

（5）设 $u=f(x+y,xy)$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$；

（6）设 $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$.

解　（1）这里把x,y看作中间变量，复合后仅是自变量x的一元函数，于是

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2y^2}+\frac{x}{1+x^2y^2}e^x=\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}.$$

（2）
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(xy)\cdot 2x-(x^2+y^2)\cdot y}{(xy)^2}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}+\frac{x^2+y^2}{xy}\cdot e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\cdot\frac{(xy)\cdot 2x-(x^2+y^2)\cdot y}{(xy)^2}$$
$$=\left(1+\frac{x^2+y^2}{xy}\right)\frac{x^2-y^2}{x^2y}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}},$$

同理
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(1+\frac{x^2+y^2}{xy}\right)\frac{y^2-x^2}{xy^2}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}.$$

（3）这里把x,y看作中间变量，复合后仅是自变量t的一元函数，于是

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=(2x+y)\cdot 2t+(x+2y)\cdot 1=4t^3+3t^2+2t.$$

（4）这里x,y为中间变量，x,y为u,v的二元函数，复合后为u,v的二元函数，于是

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=(2x\ln y)\frac{1}{v}+\frac{x^2}{y}\cdot 3$$
$$=\frac{2u}{v^2}\ln(3u-2v)+\frac{3u^2}{v^2(3u-2v)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=(2x\ln y)\left(-\frac{u}{v^2}\right)+\frac{x^2}{y}(-2)$$
$$=-\frac{\partial u^2}{v^3}\ln(3u-2v)-\frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}.$$

（5）令$s=x+y, t=xy$，则$u=f(s,t)$，于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}+y\frac{\partial f}{\partial t}=f_1'+yf_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}+x\frac{\partial f}{\partial t}=f_1'+xf_2'.$$

(6) 令 $s=\frac{x}{y}, t=\frac{y}{z}$,则 $u=f(s,t)$,于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{1}{y}+f_2'\cdot 0=\frac{1}{y}f_1',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=f_1'\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+f_2'\cdot\frac{1}{z}=-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}=f_1'\cdot 0+f_2'\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{y}{z^2}f_1'.$$

2. 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$,**其中** f **为可微函数,验证:**

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

解　令 $s=x^2-y^2$,**则** $z=\frac{y}{f(s)}$,**由于**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-yf'(s)\frac{\partial s}{\partial x}}{f^2}=-\frac{2xyf'(s)}{f^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f-yf'(s)\frac{\partial s}{\partial y}}{f^2}=\frac{f+2y^2f'(s)}{f^2},$$

故

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf'(s)}{f^2}+\frac{f+2y^2f'(s)}{yf^2}=\frac{1}{yf}=\frac{z}{y^2}.$$

3. 设 $z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$,**其中** f **为可微函数,证明:**

$$\frac{\partial z}{\partial x}\sec x+\frac{\partial z}{\partial y}\sec y=1.$$

证　令 $s=\sin x-\sin y$,**则** $z=\sin y+f(s)$,**由于**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\frac{\partial s}{\partial x}=f'(s)\cos x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos y+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\frac{\partial s}{\partial y}=\cos y+f'(s)(-\cos y),$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}\sec x+\frac{\partial z}{\partial y}\sec y=f'(s)\cos x\sec x+\cos y\sec y-f'(s)\cos y\sec y$$

$$=f'(s)+1-f'(s)=1.$$

4. 设 $f(x,y)$ 可微，证明：在坐标旋转变换

$$x=u\cos\theta-v\sin\theta,\quad y=u\sin\theta+v\cos\theta$$

之下，$(f_x)^2+(f_y)^2$ 是一个形式不变量，即若

$$g(u,v)=f(u\cos\theta-v\sin\theta,u\sin\theta+v\cos\theta),$$

则必有 $(f_x)^2+(f_y)^2=(g_u)^2+(g_v)^2$（其中旋转角 θ 是常数）.

证　这里 x,y 为中间变量，又 x,y 为 u,v 的二元函数，复合后为 u,v 的二元函数，由于

$$\frac{\partial g}{\partial u}=g_u=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta,$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}=g_v=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=f_x(-\sin\theta)+f_y\cos\theta,$$

故

$$\begin{aligned}(g_u)^2+(g_v)^2&=(\cos\theta\cdot f_x+\sin\theta\cdot f_y)^2+(-\sin\theta\cdot f_x+\cos\theta\cdot f_y)^2\\&=\cos^2\theta(f_x)^2+2\cos\theta\sin\theta(f_x)(f_y)+\sin^2\theta(f_y)^2\\&\quad+\sin^2\theta(f_x)^2-2\cos\theta\sin\theta(f_x)(f_y)+\cos^2\theta(f_y)^2\\&=(f_x)^2+(f_y)^2.\end{aligned}$$

5. 设 $f(u)$ 是可微函数，$F(x,t)=f(x+2t)+f(3x-2t)$. 试求：

$$F_x(0,0)\quad \text{与}\quad F_t(0,0).$$

解　因为

$$F_x=f'(x+2t)+3f'(3x-2t),$$

$$F_t=2f'(x+2t)-2f'(3x-2t),$$

所以

$$F_x(0,0)=4f'(0),$$

$$F_t(0,0)=2f'(0)-2f'(0)=0.$$

6. 若函数 $u=F(x,y,z)$ 满足恒等式 $F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)(k>0)$，则称 $F(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数. 试证下述关于齐次函数的欧拉定理：可微函数 $F(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数的充要条件是

$$xF_x(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=kF(x,y,z).$$

并证明：$z=\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-xy$ 为 2 次齐次函数.

证　必要性：设可微函数 $F(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数，即满足关系

$$F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)\quad \forall t\in\mathbf{R}. \qquad ①$$

令 $u=tx,v=ty,w=tz$，将式①两边函数分别看作 t 的函数，对 t 求导，有

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}=F_u\cdot x+F_v\cdot y+F_w\cdot z=kt^{k-1}F,$$

上式对任意 t 均成立，故令 $t=1$，即得

$$xF_x+yF_y+zF_z=kF.$$

充分性：设可微函数 $F(x,y,z)$ 满足方程

$$xF_x+yF_y+zF_z=kF. \tag{②}$$

为了证明式①成立，令 $g(t)=t^{-k}F(tx,ty,tz)$，对 t 求导，有

$$\begin{aligned}g'(t)&=-kt^{-(k+1)}F(tx,ty,tz)+t^{-k}[xF_1'+yF_2'+zF_3']\\&=t^{-(k+1)}[-kF(tx,ty,tz)+(tx)F_1'+(ty)F_2'+(tz)F_3']=0.\end{aligned}$$

所以 $g(t)\equiv$ 常数.

令 $t=1$，$g(1)=F(x,y,z)$，故有

$$g(t)=g(1)=F(x,y,z),\quad \text{对}\forall t\in\mathbf{R}.$$

即表明
$$F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z),$$

因此可微函数 $F(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数.

由于 $\dfrac{(tx)(ty)^2}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}}-(tx)(ty)=t^2\left[\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-xy\right]$，

所以 $z=\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-xy$ 为 2 次齐次函数.

7. 设 $f(x,y,z)$ 具有性质 $f(tx,t^ky,t^mz)=t^nf(x,y,z)\ (t>0)$，证明：

(1) $f(x,y,z)=x^nf\left(1,\dfrac{y}{x^k},\dfrac{z}{x^m}\right)$；

(2) $xf_x(x,y,z)+kyf_y(x,y,z)+mzf_z(x,y,z)=nf(x,y,z)$.

证　(1) 因为对 $\forall t>0$，有

$$f(tx,t^ky,t^mz)=t^nf(x,y,z),$$

所以取 $t=\dfrac{1}{x}(>0)$，则有

$$f\left(1,\frac{y}{x^k},\frac{z}{x^m}\right)=\frac{1}{x^n}f(x,y,z),$$

即
$$f(x,y,z)=x^nf\left(1,\frac{y}{x^k},\frac{z}{x^m}\right).$$

(2) 令 $u=tx,v=t^ky,s=t^mz$，则

$$f(u,v,s)=t^n f(x,y,z)\quad (t>0),$$

两边对 t 求导，有

$$xf_u+kt^{k-1}yf_v+mt^{m-1}zf_s=nt^{n-1}f(x,y,z),$$

上式两边同乘以 t，有

$$txf_u+kt^k yf_v+mt^m zf_s=nt^n f(x,y,z)=nf(u,v,s),$$

即

$$uf_u+kvf_v+msf_s=nf(u,v,s).$$

将 u,v,s 分别换为 x,y,z，则

$$xf_x+kyf_y+mzf_z=nf(x,y,z).$$

8. 设由行列式表示的函数

$$D(t)=\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

其中，$a_{ij}(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$的导数都存在，证明

$$\frac{\mathrm{d}D(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{k1}(t) & \cdots & a'_{kn}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

证　由 n 阶行列式的定义以及函数乘积的求导公式，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}D(t)}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}(t)a_{2p_2}(t)\cdots a_{np_n}(t)\Big]\\
&=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}\Big[\sum_{k=1}^{n}a_{1p_1}(t)\cdots a_{(k-1)p_{k-1}}a'_{kp_k}(t)a_{(k+1)p_{k+1}}(t)\cdots\\
&\quad a_{np_n}(t)\Big]\\
&=\sum_{k=1}^{n}\Big[\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}(t)\cdots a'_{kp_k}(t)\cdots a_{np_n}(t)\Big]\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{k1}(t) & \cdots & a'_{kn}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

§3 方向导数与梯度

1. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点(1,1,2)处沿方向 l(其方向角分别为 60°,45°,60°)的方向导数.

解 因为

$$f_x(1,1,2)=(y^2-yz)\Big|_{(1,1,2)}=-1,$$

$$f_y(1,1,2)=(2xy-xz)\Big|_{(1,1,2)}=0,$$

$$f_z(1,1,2)=(3z^2-xy)\Big|_{(1,1,2)}=11,$$

l 的方向余弦为

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,1,2)}=f_x(1,1,2)\cos\frac{\pi}{3}+f_y(1,1,2)\cos\frac{\pi}{4}+f_z(1,1,2)\cos\frac{\pi}{3}=5.$$

2. 求函数 $u=xyz$ 在点 $A(5,1,2)$处沿到点 $B(9,4,14)$的方向$\overrightarrow{AB}$上的方向导数.

解 因为

$$f_x(5,1,2)=(yz)\Big|_{(5,1,2)}=2,$$

$$f_y(5,1,2)=(xz)\Big|_{(5,1,2)}=10,$$

$$f_z(5,1,2)=(xy)\Big|_{(5,1,2)}=5.$$

向量

$$\overrightarrow{AB}=(9-5,4-1,14-2)=(4,3,12),$$

其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}}=\frac{4}{13},$$

$$\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}}=\frac{3}{13},$$

$$\cos\gamma=\frac{12}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}}=\frac{12}{13},$$

所以 $$\left.\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{AB}}\right|_{(5,1,2)}=f_x(5,1,2)\cos\alpha+f_y(5,1,2)\cos\beta+f_z(5,1,2)\cos\gamma$$

$$=\frac{98}{13}.$$

3. 求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy-4x+2y-4z$ **在点** $A(0,0,0)$**及点** $B\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)$ **处的梯度以及它们的模.**

解　因为

$$f_x(0,0,0)=(2x+y-4)\Big|_{(0,0,0)}=-4,$$

$$f_y(0,0,0)=(4y+x+2)\Big|_{(0,0,0)}=2,$$

$$f_z(0,0,0)=(6z-4)\Big|_{(0,0,0)}=-4.$$

所以

$$\mathrm{grad}\ f(A)=(-4,2,-4),$$

$$|\mathrm{grad}\ f(A)|=\sqrt{4^2+2^2+4^2}=6.$$

又因为

$$f_x\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)=(2x+y-4)\Big|_{\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)}=3,$$

$$f_y\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)=(4y+x+2)\Big|_{\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)}=-5,$$

$$f_z\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)=(6z-4)\Big|_{\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)}=0,$$

所以

$$\mathrm{grad}\ f(B)=(3,-5,0),$$

$$|\mathrm{grad}\ f(B)|=\sqrt{3^2+5^2+0^2}=\sqrt{34}.$$

4. 设函数 $u=\ln\left(\frac{1}{r}\right)$**，其中，**$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$**，求** u **的梯度；并指出在空间哪些点上成立等式** $|\mathrm{grad}\ u|=1$.

解　因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

$$=-\frac{x-a}{r^2},$$

同理
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y-b}{r^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z-c}{r^2}.$$

所以
$$\operatorname{grad} u=-\frac{1}{r^2}(x-a,y-b,z-c).$$

又因为
$$|\operatorname{grad} u|=\frac{1}{r^2}\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=\frac{1}{r},$$

所以,使
$$|\operatorname{grad} u|=\frac{1}{r}=1,$$

即球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$ **上的点使**$|\operatorname{grad} u|=1$ **成立**.

5. **设函数**$u=\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$,**求它在点**$(a,b,c)$**的梯度**.

解　因为
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(a,b,c)}=\left.\left(-\frac{2x}{a^2}\right)\right|_{(a,b,c)}=-\frac{2}{a},$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(a,b,c)}=\left.\left(-\frac{2y}{b^2}\right)\right|_{(a,b,c)}=-\frac{2}{b},$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(a,b,c)}=\left.\left(\frac{2z}{c^2}\right)\right|_{(a,b,c)}=\frac{2}{c},$$

所以
$$\left.\operatorname{grad} u\right|_{(a,b,c)}=\left(-\frac{2}{a},-\frac{2}{b},\frac{2}{c}\right).$$

6. **证明**:

(1) $\operatorname{grad}(u+c)=\operatorname{grad} u$($c$ **为常数**);

(2) $\operatorname{grad}(\alpha u+\beta v)=\alpha\operatorname{grad} u+\beta\operatorname{grad} v$ (α,β **为常数**);

(3) $\operatorname{grad}(uv)=u\operatorname{grad} v+v\operatorname{grad} u$;

(4) $\operatorname{grad} f(u)=f'(u)\operatorname{grad} u$.

证　(1) **左边**$=\operatorname{grad}(u+c)=\left(\dfrac{\partial(u+c)}{\partial x},\dfrac{\partial(u+c)}{\partial y},\dfrac{\partial(u+c)}{\partial z}\right)$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\operatorname{grad} u=\text{右边}.$$

(2) **左边**$=\operatorname{grad}(\alpha u+\beta v)=\left(\dfrac{\partial(\alpha u+\beta v)}{\partial x},\dfrac{\partial(\alpha u+\beta v)}{\partial y},\dfrac{\partial(\alpha u+\beta v)}{\partial z}\right)$
$$=\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial v}{\partial x},\alpha\frac{\partial u}{\partial y}+\beta\frac{\partial v}{\partial y},\alpha\frac{\partial u}{\partial z}+\beta\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\beta\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\alpha\operatorname{grad} u+\beta\operatorname{grad} v$$
$=$**右边**.

(3) **左边**$=\mathrm{grad}(uv)=\left(\frac{\partial(uv)}{\partial x},\frac{\partial(uv)}{\partial y},\frac{\partial(uv)}{\partial z}\right)$

$$=\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x},u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y},u\frac{\partial v}{\partial z}+v\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=u\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=u\,\mathrm{grad}\,v+v\,\mathrm{grad}\,u$$

$=$**右边**.

(4) **左边**$=\mathrm{grad}\,f(u)=\left(\frac{\partial f(u)}{\partial x},\frac{\partial f(u)}{\partial y},\frac{\partial f(u)}{\partial z}\right)$

$$=\left(f'(u)\frac{\partial u}{\partial x},f'(u)\frac{\partial u}{\partial y},f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)=f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$=f'(u)\mathrm{grad}\,u=$**右边**.

7. 设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,**试求**:

(1) $\mathrm{grad}\,r$；　　(2) $\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}$.

解　(1) **令**$u=x^2+y^2+z^2$,**则**

$$r=\sqrt{u},\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2r},\quad \mathrm{grad}\,u=2(x,y,z).$$

故由本节习题6(4),**有**

$$\mathrm{grad}\,r=\frac{1}{r}(x,y,z).$$

(2) **同样令**$u=x^2+y^2+z^2$,**则**

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{u}},\quad f'(u)=-\frac{1}{2}\frac{1}{u^{3/2}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{r^3},\quad \mathrm{grad}\,u=2(x,y,z),$$

故

$$\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^3}(x,y,z).$$

8. 设$u=x^2+y^2+z^2-3xyz$,**试问在怎样的点集上**$\mathrm{grad}\,u$ **分别满足**:

(1) **垂直于**z **轴**；　　(2) **平行于**z **轴**；　　(3) **恒为零向量**.

解　**首先**$\mathrm{grad}\,u=(u_x,u_y,u_z)=(2x-3yz,2y-3xz,2z-3xy)$.

(1) **要求**$\mathrm{grad}\,u$ **垂直于**z **轴**,**即**$\mathrm{grad}\,u\cdot(0,0,1)=0$,**故**

$$2z-3xy=0,$$

所以曲面$z=\frac{3}{2}xy$ **上的点处**$\mathrm{grad}\,u$ **垂直于**z **轴**.

(2) 要求 $\mathrm{grad}\ u$ 平行于 z 轴,即 $\mathrm{grad}\ u\times(0,0,1)=0$,或

$$\frac{2x-3yz}{0}=\frac{2y-3xz}{0}=\frac{2z-3xy}{1},\quad 即\quad \begin{cases}2x-3yz=0,\\2y-3xz=0,\end{cases}$$

由此知直线 $\begin{cases}y=x\\z=\dfrac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=-x\\z=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$ 上的点处 $\mathrm{grad}\ u$ 平行于 z 轴.

(3) 要求 $\mathrm{grad}\ u=(2x-3yz,2y-3xz,2z-3xy)=\mathbf{0}$,即

$$2x-3yz=0,\quad 2y-3xz=0,\quad 2z-3xy=0,$$

故在点 $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ 处 $\mathrm{grad}\ u$ 为零向量.

9. 设 $f(x,y)$ 可微,l 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个确定向量. 倘若处处有 $f_l(x,y)\equiv 0$,试问此函数 f 有何特征?

解 设 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$,由于

$$f_l(x,y)=f_x(x,y)\cos\alpha+f_y(x,y)\cos\beta=0,$$

所以 $\mathrm{grad}\ f(x,y)\perp\boldsymbol{l}$.

10. 设 $f(x,y)$ 可微,l_1 与 l_2 是 $\mathbf{R}^2$ 上一组线性无关向量. 试证明:若 $f_{l_i}(x,y)\equiv 0(i=1,2)$,则 $f(x,y)\equiv$ 常数.

证 设 $\quad \boldsymbol{l}_1=(\cos\alpha_1,\cos\beta_1),\quad \boldsymbol{l}_2=(\cos\alpha_2,\cos\beta_2)$,

对 $\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$,由于 $f_{l_i}(x,y)\equiv 0$,即

$$\begin{cases}f_x\cos\alpha_1+f_y\cos\beta_1=0,\\f_x\cos\alpha_2+f_y\cos\beta_2=0.\end{cases}$$

又 l_1 与 l_2 线性无关,即

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以上面的线性方程组只有零解

$$f_x(x,y)=0,\quad f_y(x,y)=0.$$

故由本章 §1 习题 16(2) 知 $f(x,y)\equiv$ 常数.

§4　泰勒公式与极值问题

1. 求下列函数的高阶偏导数：

（1）$z=x^4+y^4-4x^2y^2$，**所有二阶偏导数**；

（2）$z=e^x(\cos y+x\sin y)$，**所有二阶偏导数**；

（3）$z=x\ln(xy)$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$；

（4）$u=xyze^{x+y+z}$，$\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$；

（5）$z=f(xy^2,x^2y)$，**所有二阶偏导数**；

（6）$u=f(x^2+y^2+z^2)$，**所有二阶偏导数**；

（7）$z=f\left(x+y,xy,\dfrac{x}{y}\right)$，$z_x$，$z_{xx}$，$z_{xy}$.

解　（1）**因为**　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，

所以
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=12x^2-8y^2,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=12y^2-8x^2,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-16xy=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

（2）**因为**
$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x(\cos y+x\sin y)+e^x\sin y=e^x[\cos y+(1+x)\sin y],$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^x(-\sin y+x\cos y),$$

所以
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=e^x[\cos y+(1+x)\sin y]+e^x\sin y$$
$$=e^x[\cos y+(x+2)\sin y],$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=e^x(-\cos y-x\sin y),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=e^x[-\sin y+(1+x)\cos y]=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

（3）**因为**
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=1+\ln(xy),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{1}{y},$$

所以 $$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=0,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=-\frac{1}{y^2}.$$

（4）**因为** $\frac{\partial u}{\partial x}=yz\mathrm{e}^{x+y+z}+xyz\mathrm{e}^{x+y+z}=(1+x)yz\mathrm{e}^{x+y+z}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=yz\mathrm{e}^{x+y+z}+(1+x)yz\mathrm{e}^{x+y+z}=(2+x)yz\mathrm{e}^{x+y+z},\cdots,\frac{\partial^p u}{\partial x^p}$$
$$=(p+x)yz\mathrm{e}^{x+y+z},$$

再由于函数中 x,y,z **具有对称性，所以有**

$$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=(p+x)(q+y)(r+z)\mathrm{e}^{x+y+z}.$$

（5）**令** $s=xy^2,t=x^2y$，**则** $z=f(s,t)$，**记**

$$f_1'=\frac{\partial f}{\partial s},\quad f_2'=\frac{\partial f}{\partial t},\quad f_{11}''=\frac{\partial^2 f}{\partial s^2},\quad f_{22}''=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},\quad f_{12}''=f_{21}''=\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y}.$$

因为
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial s}{\partial x}+f_2'\frac{\partial t}{\partial x}=y^2f_1'+2xyf_2',$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\frac{\partial s}{\partial y}+f_2'\frac{\partial t}{\partial y}=2xyf_1'+x^2f_2',$$

所以
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2f_1'+2xyf_2'\right)=y^2\frac{\partial f_1'}{\partial x}+2yf_2'+2xy\frac{\partial f_2'}{\partial x}\\&=y^2\left(f_{11}''\frac{\partial s}{\partial x}+f_{12}''\frac{\partial t}{\partial x}\right)+2yf_2'+2xy\left(f_{21}''\frac{\partial s}{\partial x}+f_{22}''\frac{\partial t}{\partial x}\right)\\&=y^2(y^2f_{11}''+2xyf_{12}'')+2yf_2'+2xy(y^2f_{21}''+2xyf_{22}'')\\&=y^4f_{11}''+4xy^3f_{12}''+4x^2y^2f_{22}''+2yf_2',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2xyf_1'+x^2f_2')=2xf_1'+2xy\frac{\partial f_1'}{\partial y}+x^2\frac{\partial f_2'}{\partial y}\\&=2xf_1'+2xy(f_{11}''2xy+f_{12}''x^2)+x^2(2xyf_{21}''+x^2f_{22}'')\\&=4x^2y^2f_{11}''+4x^3yf_{12}''+x^4f_{22}''+2xf_1',\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2f_1'+2xyf_2'\right)=2yf_1'+y^2\frac{\partial f_1'}{\partial y}+2xf_2'+2xy\frac{\partial f_2'}{\partial y}$$

$$=2yf_1'+y^2\left(f_{11}''\cdot 2xy+f_{12}''x^2\right)+2xf_2'+2xy\left(f_{21}''2xy+f_{22}''x^2\right)$$

$$=2xy^3f_{11}''+5x^2yf_{12}''+2x^3yf_{22}''+2yf_1'+2xf_2'=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial z}.$$

（6）**因为** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xf'$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2yf'$， $\dfrac{\partial u}{\partial z}=2zf'$，

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'+2x\frac{\partial f'}{\partial x}=2f'+4x^2f'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2x\frac{\partial f'}{\partial y}=4xyf'',$$

同理

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=4xzf'',\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2f'+4y^2f'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2f'+4z^2f'',\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=4yzf''.$$

（7）**令** $s=x+y,t=xy,v=\dfrac{x}{y}$，**则** $z=f(s,t,v)$，**记**

$$f_1'=\frac{\partial f}{\partial s},\quad f_2'=\frac{\partial f}{\partial t},\quad f_3'=\frac{\partial f}{\partial v};$$

$$f_{11}''=\frac{\partial^2 f}{\partial s^2},\quad f_{22}''=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},\quad f_{33}''=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$f_{12}''=\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t},\quad f_{13}''=\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial v},\quad f_{23}''=\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial v}.$$

因为

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'+\frac{1}{y}f_3',$$

所以

$$z_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f_1'+yf_2'+\frac{1}{y}f_3'\right)=\frac{\partial f_1'}{\partial x}+y\frac{\partial f_2'}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial f_3'}{\partial x}$$

$$=f_{11}''+yf_{12}''+\frac{1}{y}f_{13}''+y\left(f_{21}''+yf_{22}''+\frac{1}{y}f_{23}''\right)+\frac{1}{y}\left(f_{31}''+yf_{32}''+\frac{1}{y}f_{33}''\right)$$

$$=f_{11}''+y^2f_{22}''+\frac{1}{y^2}f_{33}''+2yf_{12}''+\frac{2}{y}f_{13}''+2f_{23}''.$$

$$z_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'+yf_2'+\frac{1}{y}f_3'\right)$$

$$=\frac{\partial f_1'}{\partial y}+f_2'+y\frac{\partial f_2'}{\partial y}-\frac{1}{y^2}f_3'+\frac{1}{y}\frac{\partial f_3'}{\partial y}$$

$$=f_{11}''+xf_{12}''-\frac{x}{y^2}f_{13}''+f_2'+y\left(f_{21}''+xf_{22}''-\frac{x}{y^2}f_{23}''\right)-\frac{1}{y^2}f_3'$$

$$+\frac{1}{y}\left(f''_{31}+xf''_{32}-\frac{x}{y^2}f''_{33}\right)$$

$$=f''_{11}+xyf''_{22}-\frac{x}{y^3}f''_{33}+(x+y)f''_{12}+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)f''_{13}+f'_2-\frac{1}{y^2}f'_3.$$

2. 设 $u=f(x,y),x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,**证明:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

证　因为 $u=f(x,y),x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,**所以**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\theta,\\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}=-\dfrac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta+\dfrac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta,\end{cases}$$

由上式解出$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$,**得**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial u}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

同理可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

将上面两式相加,有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

3. 设 $u=f(r),r^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$,**证明:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}.$$

证　因为

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r},$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{r-x_i\dfrac{x_i}{r}}{r^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\frac{x_i}{r}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{r^2-x_i^2}{r^3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\frac{x_i^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2-x_i^2}{r^3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r^3}\left(nr^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}.$$

4. 设 $v=\frac{1}{r}g\left(t-\frac{r}{c}\right)$ **,** c **为常数,** $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$**. 证明:**

$$v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}=\frac{1}{c^2}v_{tt}.$$

证　因为

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{r}g',\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{1}{r}g'',$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=g\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{\partial \dfrac{1}{r}}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial g\left(t-\dfrac{r}{c}\right)}{\partial x}$$

$$=-\frac{1}{r^2}g\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{1}{r}g'\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}g-\frac{1}{c}\frac{x}{r^2}g',$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{r^3-x\cdot 3r^2\cdot\dfrac{x}{r}}{r^6}g-\frac{x}{r^3}g'\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{x}{r}-\frac{1}{c}\frac{r^2-x\cdot 2r\cdot\dfrac{x}{r}}{r^4}g'$$

$$-\frac{1}{c}\frac{x}{r^2}g''\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{x}{r}$$

$$=\frac{3x^2-r^2}{r^5}g+\frac{3x^3-r^2}{cr^4}g'+\frac{x^2}{c^2r^3}g''.$$

同理

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{3y^2-r^2}{r^5}g+\frac{3y^2-r^2}{cr^4}g'+\frac{y^2}{c^2r^3}g'',$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{3z^2-r^2}{r^5}g+\frac{3z^2-r^2}{cr^4}g'+\frac{z^2}{c^2r^3}g''.$$

故

$$v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}=\frac{1}{c^2r}g''=\frac{1}{c^2}v_{tt}.$$

5. 证明定理 17.8 **的推论.**

推论:若函数 f **在区域** D **上存在偏导数,且**

$$f_x=f_y\equiv 0,$$

则 f 在区域 D 上为常量函数.

证　取定 $P_0(x_0,y_0)\in D$,取 $\forall P(x,y)\in D$,因为 D 是连通域,所以可以用全部在 D 内的折线连接 P_0 和 P. 若 $P_1(x_1,y_1)$ 是折线上 P_0 后面的一个顶点,则由于 f 在 D 内偏导数连续,且 $f_x=f_y\equiv 0$,故在定理 17.8 中的公式(8)中令 $h=x_1-x_0,k=y_1-y_0$,立即得出

$$f(x_1,y_1)=f(x_0,y_0).$$

如此逐步推算,由一个顶点到另一个顶点,最后可得

$$f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

即 f 在区域 D 上为常量函数.

6. 通过对 $F(x,y)=\sin x\cos y$ 施用中值定理,证明对某 $\theta\in(0,1)$,有

$$\frac{3}{4}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}.$$

证　取 $(a,b)=(0,0),(a+h,b+k)=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$,由于 $F(x,y)=\sin x\cos y$ 在全平面连续,故由中值定理(定理 17.8)知,$\exists\theta\in(0,1)$,使

$$F\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)-F(0,0)=F_x\left(0+\theta\frac{\pi}{3},0+\theta\frac{\pi}{6}\right)h+F_y\left(0+\theta\frac{\pi}{3},0+\theta\frac{\pi}{6}\right)k,$$

即
$$\frac{3}{4}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}.$$

7. 求下列函数在指定点处的泰勒公式:

(1) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 在点 $(0,0)$(到二阶为止);

(2) $f(x,y)=\frac{x}{y}$ 在点 $(1,1)$(到三阶为止);

(3) $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 在点 $(0,0)$;

(4) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1,-2)$.

解　(1) 由于 $x_0=0,y_0=0,n=2$,因此有

$$f(x,y)=\sin(x^2+y^2),\quad f(0,0)=0,$$

$$f_x(x,y)=2x\cos(x^2+y^2),\quad f_x(0,0)=0,$$

$$f_y(x,y)=2y\cos(x^2+y^2),\quad f_y(0,0)=0,$$

$$f_{xx}(x,y)=2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2),\quad f_{xx}(0,0)=2,$$

$$f_{yy}(x,y)=2\cos(x^2+y^2)-4y^2\sin(x^2+y^2)\quad ,f_{yy}(0,0)=2,$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-4xy\sin(x^2+y^2),\quad f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)=0.$$

故
$$f(x,y)=\sin(x^2+y^2)=x^2+y^2+R_2.$$

又因为
$$f_{x^3}(x,y)=-12x\sin(x^2+y^2)-8x^3\cos(x^2+y^2),$$
$$f_{x^2y}(x,y)=-4y\sin(x^2+y^2)-8x^2y\cos(x^2+y^2),$$
$$f_{xy^2}(x,y)=-4x\sin(x^2+y^2)-8xy^2\cos(x^2+y^2),$$
$$f_{y^3}(x,y)=-12y\sin(x^2+y^2)-8y^3\cos(x^2+y^2),$$

所以
$$R_2=\frac{1}{3!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(\theta x,\theta y)$$
$$=-\frac{2}{3}[3\theta(x^2+y^2)^2\sin(\theta^2x^2+\theta^2y^2)+2\theta^3(x^2+y^2)^3\cos(\theta^2x^2+\theta^2y^2)]$$
$$(0<\theta<1).$$

（2）**由于** $x_0=1,y_0=1,x=1+h,y=1+k,n=3$，**因此有**

$$f(x,y)=\frac{x}{y},\quad f(1,1)=1;$$
$$f_x=\frac{1}{y},\quad f_x(1,1)=1,$$
$$f_y=-\frac{x}{y^2},\quad f_y(1,1)=-1,$$
$$f_{xx}=0,\quad f_{xx}(1,1)=0,$$
$$f_{yy}=\frac{2x}{y^3},\quad f_{yy}(1,1)=2,$$
$$f_{xy}=-\frac{1}{y^2},\quad f_{xy}(1,1)=-1,$$
$$f_{x^3}=0,\quad f_{x^3}(1,1)=0,$$
$$f_{x^2y}=0,\quad f_{x^2y}(1,1)=0,$$
$$f_{xy^2}=\frac{2}{y^3},\quad f_{xy^2}(1,1)=2,$$
$$f_{y^3}=-\frac{6x}{y^4},\quad f_{y^3}(1,1)=-6,$$
$$f_{x^4}=0,\quad f_{x^2y^2}=0,\quad f_{xy^3}=-\frac{6}{y^4},\quad f_{y^4}=\frac{24x}{y^5}.$$

故
$$\frac{x}{y}=f(1,1)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(1,1)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(1,1)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(1,1)+\frac{1}{4!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(1+\theta h,1+\theta h)$$

$$=1+h-k-hk+k^2+hk^2-k^3+\left[-\frac{hk^3}{(1+\theta k)^4}+\frac{1+\theta h}{(1+\theta k)^5}k^4\right]$$

$$(0<\theta<1).$$

(3) **由于** $x_0=y_0=0, x=h, y=k$**,因此有**

$$f(x,y)=\ln(1+x+y),\quad f(0,0)=0,$$

$$f_x=(1+x+y)^{-1},$$

$$f_y=(1+x+y)^{-1},$$

$$f_{xx}=f_{yy}=f_{xy}=-(1+x+y)^{-2},$$

$$f_{x^3}=2(1+x+y)^{-3}=f_{x^2y}=f_{xy^2}=f_{y^3},$$

$$\vdots$$

$$f_{x^iy^j}=(-1)^{i+j-1}(i+j-1)!\ (1+x+y)^{-i-j},$$

$$f_{x^ix^j}(0,0)=(-1)^{i+j-1}(i+j-1)!\ (i,j=1,2,\cdots,n,n+1).$$

故
$$\ln(1+x+y)=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(0,0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\theta h,\theta k)$$

$$=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{(x+y)^r}{r}+(-1)^n\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x+\theta y)^{n+1}}$$

$$(0<\theta<1).$$

(4) **由于** $x_0=1, y_0=-2, x=1+h, y=-2+k$**,因此有**

$$f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5,\quad f(1,-2)=5,$$

$$f_x=4x-y-6,\quad f_x(1,-2)=0,$$

$$f_y=-x-2y-3,\quad f_y(1,-2)=0,$$

$$f_{xx}=4,\quad f_{xy}=-1,\quad f_{yy}=-2.$$

故　$2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$

$$=f(1,-2)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(1,-2)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(1,-2)$$

$$=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.$$

8. 求下列函数的极值点：

（1）$z=3axy-x^3-y^3(a>0)$；

（2）$z=x^2-xy+y^2-2x+y$；

（3）$z=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

解　（1）**由方程组**

$$\begin{cases} z_x=3ay-3x^2=0, \\ z_y=3ax-3y^2=0, \end{cases}$$

得 z **的稳定点** $P_1(0,0)$，$P_2(a,a)$，**由于**

$$z_{xx}=-6x,\quad z_{xy}=3a,\quad z_{yy}=-6y,$$

因此：

1° $z_{xx}(0,0)=0$，$z_{xx}(0,0)z_{yy}(0,0)-z_{xy}^2(0,0)=-9a^2<0$，**故** $P_1(0,0)$ **不是极值点**.

2° $z_{xx}(a,a)=-6a<0$，$z_{xx}(a,a)z_{yy}(a,a)-z_{xy}^2(a,a)=27a^2>0$，**故** $z=3axy-x^3-y^3$ **在** $P_2(a,a)$ **处取极大值** a^3.

（2）**由方程组**

$$\begin{cases} z_x=2x-y-2=0, \\ z_y=-x+2y+1=0, \end{cases}$$

得 z **的稳定点** $P_0(1,0)$，**由于**

$$z_{xx}=2,\quad z_{xy}=-1,\quad z_{yy}=2,$$

$$z_{xx}(1,0)=2>0,\quad (z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2)(1,0)=-6<0.$$

因此 z **在** $P_0(1,0)$ **处取极小值** $z(1,0)=-1$.

（3）**由方程组**

$$\begin{cases} z_x=e^{2x}(1+2x+4y+2y^2)=0, \\ z_y=e^{2x}(2+2y)=0, \end{cases}$$

得 z **的稳定点** $P_0\left(\frac{1}{2},-1\right)$. **由于**

$$z_{xx}=e^{2x}(4+4x+8y+4y^2),\quad z_{xy}=e^{2x}(4+4y),\quad z_{yy}=2e^{2x},$$

$$z_{xx}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2e>0,\quad (z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2)\left(\frac{1}{2},-1\right)=4e^2>0,$$

故 z **在** $P_0\left(\frac{1}{2},-1\right)$ **处取极小值，极小值为** $z\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{1}{2}e$.

9. 求下列函数在指定范围内的最大值与最小值:

(1) $z=x^2-y^2,\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$;

(2) $z=x^2-xy+y^2,\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$;

(3) $z=\sin x+\sin y-\sin(x+y),\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 2\pi\}$.

解 (1) 由方程组

$$\begin{cases}f_x=2x=0,\\ f_y=-2y=0,\end{cases}$$

得 f 在指定区域内只有惟一稳定点 $P_0(0,0)$,且

$$f(P_0)=0.$$

在边界 $x^2+y^2=4$ 上,$z=x^2-y^2=2x^2-4,x\in[-2,2]$,且 $f(\pm 2,0)=4$,$f(0,\pm 2)=-4$. 故最大值 $f(\pm 2,0)=4$,最小值 $f(0,\pm 2)=-4$.

(2) 由方程组

$$\begin{cases}f_x=2x-y=0,\\ f_y=-x+2y=0,\end{cases}$$

得 f 的稳定点 $P_0(0,0)$,且

$$f(P_0)=0.$$

由于区域 $\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$ 的边界由四条直线所围成,故下面分别讨论:

1° 在直线 $l_1:x+y=1,0\leqslant x\leqslant 1$ 上,由于

$$z=x^2-xy+y^2=x^2-x(1-x)+(1-x)^2=3x^2-3x+1,$$

令

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=6x-3=0,$$

得 $x=\dfrac{1}{2}$,从而 $y=\dfrac{1}{2}$,故

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\quad f(0,1)=1,\quad f(1,0)=1.$$

2° 在直线 $l_2:x+y=-1,-1\leqslant x\leqslant 0$ 上,由于

$$z=x^2-xy+y^2=x^2-x(-1-x)+(-1-x)^2=3x^2+3x+1,$$

令

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=6x+3=0,$$

得 $x=-\dfrac{1}{2}$,从而 $y=-\dfrac{1}{2}$,故

$$f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\quad f(0,-1)=1,\quad f(-1,0)=1.$$

3° 在直线 l_3：$-x+y=1,-1\leqslant x\leqslant 0$ 上，由于

$$z=x^2-xy+y^2=x^2-x(1+x)+(1+x)^2=x^2+x+1,$$

令

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+1=0,$$

得 $x=-\frac{1}{2}$，从而 $y=\frac{1}{2}$，故

$$f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\quad f(0,1)=1,\quad f(-1,0)=1.$$

4° 在直线 l_4：$x-y=1,0\leqslant x\leqslant 1$ 上，由于

$$z=x^2-xy+y^2=x^2-x(x-1)+(x-1)^2=x^2-x+1,$$

令

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x-1=0,$$

得 $x=\frac{1}{2}$，从而 $y=-\frac{1}{2}$，故

$$f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\quad f(0,-1)=1,\quad f(1,0)=1.$$

综合上述，最大值是 $f(0,1)=f(1,0)=f(0,-1)=f(-1,0)=1$，最小值 $f(0,0)=0$.

(3) 由方程组

$$\begin{cases} f_x=\cos x-\cos(x+y)=2\sin\dfrac{y}{2}\sin\left(x+\dfrac{y}{2}\right)=0, \\ f_y=\cos y-\cos(x+y)=2\sin\dfrac{x}{2}\sin\left(y+\dfrac{x}{2}\right)=0, \end{cases}$$

得 f 在指定区域内惟一稳定点 $P_0\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，且

$$f(P_0)=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

区域 $\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 2\pi\}$ 的边界由三条直线所围成，故下面分别讨论：

1° 在直线 l_1：$y=0,0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上，由于

$$z=\sin x-\sin x=0,$$

故在直线 l_1 上，$z=0$.

$2°$ 在直线 $l_2: x=0, 0\leqslant y\leqslant 2\pi$ 上，同理 $z=0$.

$3°$ 在直线 $l_3: x+y=2\pi, 0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上，由于

$$z=\sin x+\sin(2\pi-x)-\sin(2\pi)=0,$$

故在直线 l_3 上，$z=0$.

综合上述，最大值是 $f(P_0)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，最小值是 0.

10. 在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中，求出面积为最大的三角形.

解　设三角形的边长分别为 $x, y, z=2p-x-y$，则此三角形的面积 S 为

$$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)},$$

故令 $f(x,y)=p(p-x)(p-y)(x+y-p)$，其定义域为

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant p, 0\leqslant y\leqslant p, p\leqslant x+y\leqslant 2p\}.$$

由方程组

$$\begin{cases} f_x=p(p-y)(2p-2x-y)=0, \\ f_y=p(p-x)(2p-2y-x)=0, \end{cases}$$

得 f 的惟一稳定点 $P_0\left(\frac{2}{3}p, \frac{2}{3}p\right)$，且

$$f(P_0)=\frac{1}{27}p^4.$$

区域 D 的边界由直线 $l_1: y=p, 0\leqslant x\leqslant p$，直线 $l_2: x=p, 0\leqslant y\leqslant p$，直线 $l_3: x+y=p, 0\leqslant x\leqslant p$ 所围成，所以在直线 l_1, l_2, l_3 上均有 $f(x,y)=0$，故 $f(x,y)$ 的最大值 $f(P_0)=\frac{1}{27}p^4$，此时 $x=y=z=\frac{2}{3}p$，即在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中，等边三角形的面积为最大.

11. 在 xy 平面上求一点，使它到三直线 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 的距离平方和最小.

解　设 $P(x,y)$ 为所求点，P 到直线 $x=0, y=0, x+2y-16=0$ 的距离分别为

$$d_1=|y|, \quad d_2=|x|, \quad d_3=\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}.$$

故令

$$f(x,y)=x^2+y^2+\frac{1}{5}(x+2y-16)^2.$$

由方程组

$$\begin{cases} f_x=2x+\dfrac{2}{5}(x+2y-16)=0, \\ f_y=2y+\dfrac{4}{5}(x+2y-16)=0, \end{cases}$$

得 f **的稳定点** $P_0\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$. **由于** P_0 **是** f **在全平面惟一的稳定点,又由于此问题的实际背景,知** $f(x,y)$**必存在最小值,故** $P_0\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$ **就是最小值点,最小值** $f(P_0)=\dfrac{128}{5}$.

12. 已知平面上 n **个点的坐标分别是**

$$A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\cdots,A_n(x_n,y_n),$$

试求一点,使它与这 n **个点距离的平方和最小.**

解　**设所求点是** $P(x,y)$,**依题意知目标函数为**

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2].$$

由方程组

$$\begin{cases} f_x=2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)=2nx-2\sum_{i=1}^{n}x_i=0, \\ f_y=2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y-y_i)=2ny-2\sum_{i=1}^{n}y_i=0, \end{cases}$$

得 f **的稳定点** $P_0\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i,\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$. **由于**

$$f_{xx}=2n,\quad f_{xy}=0,\quad f_{yy}=2n,$$

$$f_{xx}(P_0)=2n>0,\quad (f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)=4n^2>0,$$

故 P_0 **为极小值点,亦为最小值点.**

13. 证明:函数 $u=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ $(a,b$ **为常数)满足热传导方程**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证　**因为** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}\left(-\dfrac{(x-b)}{2a^2t}\right)=-\dfrac{x-b}{4a^3\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$,

所以
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[-\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}+\frac{(x-b)^2}{8a^5\sqrt{\pi}\,t^{5/2}}\right]e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}.$$

又因为
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left[-\frac{1}{4a\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}+\frac{(x-b)^2}{8a^3\sqrt{\pi}\,t^{5/2}}\right]e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}},$$

故
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

14. 证明:函数$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$($a,b$ **为常数)满足拉普拉斯方程**
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

证　因为
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\cdot\frac{1}{2}\frac{2(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$
$$=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

所以
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2-(x-a)\cdot 2(x-a)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}$$
$$=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}.$$

同理
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}.$$

故
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

15. 证明:若函数$u=f(x,y)$**满足拉普拉斯方程**
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

则函数$v=f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ **也满足此方程.**

证　令$s=\frac{x}{x^2+y^2}$,$t=\frac{y}{x^2+y^2}$,**则**$v=f(s,t)$. **为了方便,记**
$$f_s=f_1',\quad f_t=f_2',\quad f_{ss}=f_{11}'',\quad f_{st}=f_{12}'',\quad f_{tt}=f_{22}'',$$

由于
$$\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\frac{\partial s}{\partial x}+f_2'\frac{\partial t}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\left(f_{11}''\frac{\partial s}{\partial x}+f_{12}''\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{\partial s}{\partial x}+f_1'\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\left(f_{21}''\frac{\partial s}{\partial x}+f_{22}''\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{\partial t}{\partial x}+f_2'\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$
$$=f_{11}''\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+2f_{12}''\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x}+f_{22}''\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+f_1'\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+f_2'\frac{\partial^2 t}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'\frac{\partial s}{\partial y}+f_2'\frac{\partial t}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\left(f_{11}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial s}{\partial y}+f_1'\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\left(f_{21}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial t}{\partial y}+f_2'\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

$$=f_{11}''\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2+2f_{12}''\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial y}+f_{22}''\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+f_1'\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+f_2'\frac{\partial^2 t}{\partial y^2},$$

所以
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2\right]f_{11}''+2\left[\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial y}\right]f_{12}''$$
$$+\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right]f_{22}''+\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right)f_1'$$
$$+\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)f_2'.$$

又因为
$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial s}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3},\quad \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},$$
$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}=\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3},\quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=\frac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3}.$$

所以
$$\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0,$$
$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2=\frac{y^2+2x^2y^2+x^2}{(x^2+y^2)^4}=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}=\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2.$$

最后,由已知条件 $f_{11}''+f_{22}''=0$,有
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}(f_{11}''+f_{22}'')=0.$$

16. 设函数 $u=\varphi(x+\psi(y))$,证明
$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证　因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'\cdot\psi'$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''\cdot\psi'$,

所以
$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi'\cdot\varphi''\cdot\psi'=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

17. 设 f_x,f_y 和 f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在,f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 连续,证明 $f_{xy}(x_0,y_0)$ 也存在,且 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

证 设f_x,f_y,f_{yx}在$U(P_0(x_0,y_0);\delta)$内存在. 为了证明结论成立,要理解混合偏导数f_{yx}的含义和充分利用f_{yx}在$P_0(x_0,y_0)$处连续的条件. 为此,任取改变量$h=\Delta x\neq 0,k=\Delta y\neq 0$,使点

$$(x_0+h,y_0+k),(x_0+h,y_0),(x_0,y_0+k)\in U(P_0(x_0,y_0);\delta).$$

作辅助函数

$$g(y)=\frac{f(x_0+h,y)-f(x_0,y)}{h},$$

因为在$U(P_0(x_0,y_0);\delta)$内f_y存在,所以

$$g'(y)=\frac{f_y(x_0+h,y)-f_y(x_0,y)}{h},\quad y\in[y_0,y_0+k]\text{或}y\in[y_0+k,y_0].$$

故对$g(y)$在$[y_0,y_0+k]$(或$[y_0+k,y_0]$)上用拉格朗日中值定理:

$$\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k}=g'(y_0+\theta_1 k)\ (0<\theta_1<1),$$

即
$$z(h,k)=\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0)}{hk}$$
$$=\frac{f_y(x_0+h,y_0+\theta_1 k)-f_y(x_0,y_0+\theta_1 k)}{h}.$$

又令
$$\varphi(x)=f_y(x,y_0+\theta_1 k),\quad x\in[x_0,x_0+h]\text{或}x\in[x_0+h,x_0].$$

因为f_{yx}在$U(P_0(x_0,y_0);\delta)$内存在,所以

$$\varphi'(x)=f_{yx}(x,y_0+\theta_1 k),$$

对$\varphi(x)$在$[x_0,x_0+h]$(或$[x_0+h,x_0]$)上用拉格朗日中值定理:

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}=\varphi'(x_0+\theta_2 h)\ (0<\theta_2<1),$$

即
$$\frac{f_y(x_0+h,y_0+\theta_1 k)-f_y(x_0,y_0+\theta_1 k)}{h}=f_{yx}(x_0+\theta_2 h,y_0+\theta_1 k),$$

也就是
$$z(h,k)=f_{yx}(x_0+\theta_2 h,y_0+\theta_1 k).$$

由f_{yx}在$P_0(x_0,y_0)$处的连续性知

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}z(h,k)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}f_{yx}(x_0+\theta_2 h,y_0+\theta_1 k)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

又由于f_x存在,故

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}z(h,k)\\&=\frac{1}{k}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}{h}-\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\right]\\&=\frac{1}{k}[f_x(x_0,y_0+k)-f_x(x_0,y_0)].\end{aligned}$$

再由第十六章§2习题3的结论，就有

$$f_{xy}(x_0,y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(x_0,y_0+k)-f_x(x_0,y_0)}{k}=\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}z(h,k)$$
$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}z(h,k)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

18. 设 f_x,f_y 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在且在点 (x_0,y_0) 可微，则有

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

证　设 f_x,f_y 在 $U(P_0(x_0,y_0);\delta)$ 内存在，任取 $h\neq 0$，使

$$(x_0+h,y_0+h),(x_0+h,y_0),(x_0,y_0+h)\in U(P_0(x_0,y_0);\delta).$$

作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x,y_0+h)-f(x,y_0).$$

因为在 $U(P_0(x_0,y_0);\delta)$ 内 f_x 存在，所以

$$\varphi'(x)=f_x(x,y_0+h)-f_x(x,y_0),\quad x\in[x_0,x_0+h]\text{或}x\in[x_0+h,x_0],$$

故对 $\varphi(x)$ 在 $[x_0,x_0+h]$（或 $[x_0+h,x_0]$）上用拉格朗日中值定理并引进记号：

$$g(h)=f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+h)+f(x_0,y_0)$$
$$=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta_1 h)\cdot h$$
$$=[f_x(x_0+\theta_1 h,y_0+h)-f_x(x_0+\theta_1 h,y_0)]h\quad(0<\theta_1<1).$$

又因为 f_x 在 P_0 处可微，所以

$$f_x(x_0+\theta_1 h,y_0+h)-f_x(x_0,y_0)=f_{xx}(x_0,y_0)\theta_1 h+f_{xy}(x_0,y_0)h$$
$$+o(\sqrt{\theta_1^2h^2+h^2}),$$

$$f_x(x_0+\theta_1 h,y_0)-f_x(x_0,y_0)$$
$$=f_{xx}(x_0,y_0)\theta_1 h+f_{xy}(x_0,y_0)(y_0-y_0)+o(\sqrt{\theta_1^2h^2})$$
$$=f_{xx}(x_0,y_0)\theta_1 h+o(\theta_1|h|).$$

从而

$$g(h)=[f_{xy}(x_0,y_0)h+o(h)]h.$$

同理，若令 $\psi(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y)$，$y\in[y_0,y_0+h]$ 或 $y\in[y_0+h,y_0]$，作与上面类似的推导，有

$$g(h)=[f_{yx}(x_0,y_0)h+o(h)]h.$$

因此

$$f_{xy}(x_0,y_0)+\frac{o(h)}{h}=f_{yx}(x_0,y_0)+\frac{o(h)}{h},$$

令 $h\to 0$，则有

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

19. 设

$$u=\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}.$$

求：(1) $u_x+u_y+u_z$；(2) $xu_x+yu_y+zu_z$；(3) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$.

解　(1) 由第十七章§2习题8，有

$$u_x=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\2x&0&0\end{vmatrix}=-(z^2-y^2)+2x(z-y),$$

$$u_y=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\0&2y&0\end{vmatrix}=(z^2-x^2)-2y(z-x),$$

$$u_z=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&1\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\0&0&2z\end{vmatrix}=-(y^2-x^2)+2z(y-x),$$

故
$$u_x+u_y+u_z=0.$$

(2) 由(1)有

$$xu_x+yu_y+zu_z=3(z-y)(x-y)(x-z).$$

(3) 由(1)有

$$u_{xx}=2(z-y),\quad u_{yy}=-2(z-x),\quad u_{zz}=2(y-x),$$

故
$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,$$

20. 设 $f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx$，试按 h,k,l 的正数幂展开 $f(x+h,y+k,z+l)$.

解　因为　$f_x=2Ax+Dy+Fz,\quad f_{xx}=2A,\quad f_{xy}=D,\quad f_{xz}=F,$

$$f_y=2By+Dx+Ez,\quad f_{yy}=2B,\quad f_{yx}=D,\quad f_{yz}=E,$$

$$f_z=2Cz+Ey+Fx,\quad f_{zz}=2C,\quad f_{zx}=f_{xz}=F,\quad f_{zy}=f_{yz}=E.$$

所以，由三元函数的泰勒公式，有

$$\begin{aligned}&f(x+h,y+k,z+l)\\&=f(x,y,z)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z)\\&\quad+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^2f(x,y,z)\end{aligned}$$

$$=f(x,y,z)+(2Ax+Dy+Fz)h+(2By+Dx+Ez)k+(2Cz+Ey+Fx)l+\frac{1}{2}(2Ah^2+2Bk^2+2Cl^2+2Dhk+2Ekl+2Fhl)$$
$$=f(x,y,z)+(2Ax+Dy+Fz)h+(2By+Dx+Ez)k+(2Cz+Ey+Fx)l+f(h,k,l).$$

§5　总练习题

1. 设 $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$**,证明**

$$f_x+f_y+f_z=(x+y+z)^2.$$

证　因为 $f_x=2xy+z^2,\quad f_y=2yz+x^2,\quad f_z=2zx+y^2,$

所以 $\quad f_x+f_y+f_z=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=(x+y+z)^2.$

2. 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点的偏导数 $f_x(0,0)$**与** $f_y(0,0)$**,并考察** $f(x,y)$**在**$(0,0)$**的可微性.**

解　由偏导数定义有

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{y^3}{y^3}\right)=-1.$$

又因为 $\quad \Delta f-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}-x+y=\dfrac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2},$

对于极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}[\Delta f-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y]=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

令 $y=x$ **和** $y=2x$**,则**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{0}{(2x^2)^{3/2}}=0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x}}\frac{-2x^3}{5\sqrt{5}\,x^3}=-\frac{2}{5\sqrt{5}},$$

故极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$不存在，因而 $f(x,y)$在$(0,0)$处不可微.

3. 设

$$u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

证明：(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=0$；(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=\dfrac{n(n-1)}{2}u$.

证 (1) 由第十七章§2 习题8，有

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & ix_k^{i-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_k^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

故

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & ix_k^{i-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_k^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{i-1} & x_2^{i-1} & \cdots & x_k^{i-1} & \cdots & x_n^{i-1} \\ 0 & 0 & \cdots & ix_k^{i-1} & \cdots & 0 \\ x_1^{i+1} & x_2^{i+1} & \cdots & x_k^{i+1} & \cdots & x_n^{i+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_k^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ x_1^{i-1} & x_2^{i-1} & \cdots & x_k^{i-1} & \cdots & x_n^{i-1}\\ ix_1^{i-1} & ix_2^{i-1} & \cdots & ix_k^{i-1} & \cdots & ix_n^{i-1}\\ x_1^{i+1} & x_2^{i+1} & \cdots & x_k^{i+1} & \cdots & x_n^{i+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_k^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$=0$(**因为上面行列式中第** i **行与** $i+1$ **行成比例**).

(2) **由**(1) **有**

$$\sum_{k=1}^{n}x_k\frac{\partial u}{\partial x_k}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & ix_k^{i} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_k^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ x_1^{i-1} & x_2^{i-1} & \cdots & x_k^{i-1} & \cdots & x_n^{i-1}\\ ix_1^{i} & ix_2^{i} & \cdots & ix_k^{i} & \cdots & ix_n^{i}\\ x_1^{i+1} & x_2^{i+1} & \cdots & x_k^{i+1} & \cdots & x_n^{i+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_k^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}iu=\frac{n(n-1)}{2}u.$$

4. 设函数 $f(x,y)$ **具有连续的** n **阶导数，试证函数** $g(t)=f(a+ht,b+kt)$ **的** n **阶导数**

$$\frac{\mathrm{d}^n g(t)}{\mathrm{d}t^n}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+ht,b+kt).$$

证　用数学归纳法证明.

当 $n=1$ **时,** $\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}=f_x(a+ht)\cdot h+f_y(b+kt)\cdot k$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a+ht,b+kt).$$

所以当 $n=1$ **时,公式成立.**

归纳假设 $n=r$ **时公式成立,即**

$$\frac{\mathrm{d}^r g(t)}{\mathrm{d}t^r}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(a+ht,b+kt)$$

$$=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}h^j k^{r-j}\frac{\partial^r f}{\partial x^j\partial y^{r-j}}\bigg|_{(a+ht,b+kt)},$$

则当 $n=r+1$ **时,由于**

$$\frac{\mathrm{d}^{r+1}g(t)}{\mathrm{d}t^{r+1}}=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}h^j k^{r-j}\left[h\frac{\partial^{r+1}f}{\partial x^{j+1}\partial y^{r-j}}+k\frac{\partial^{r+1}f}{\partial x^j\partial y^{r-j-1}}\right]\bigg|_{(a+ht,b+kt)}$$

$$=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}h^{j+1}k^{r-j}\frac{\partial^{r+1}f}{\partial x^{j+1}\partial y^{r-j}}\bigg|_{(a+ht,b+kt)}$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}h^j k^{r-j+1}\frac{\partial^{r+1}f}{\partial x^j\partial y^{r-j+1}}\bigg|_{(a+ht,b+kt)}$$

$$=\sum_{i=1}^{r+1}\binom{r}{i-1}h^i k^{r-i+1}\frac{\partial^{r+1}f}{\partial x^i\partial y^{r-i+1}}\bigg|_{(a+ht,b+kt)}$$

$$+\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}h^i k^{r-i+1}\frac{\partial^{r+1}f}{\partial x^i\partial y^{r-i+1}}\bigg|_{(a+ht,b+kt)}$$

$$=\left[h^{r+1}\frac{\partial^{r+1}f}{\partial x^{r+1}}+k^{r+1}\frac{\partial^{r+1}f}{\partial y^{r+1}}\right]\bigg|_{(a+ht,b+kt)}$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\left[\binom{r}{i-1}+\binom{r}{i}\right]h^i r^{r-i+1}\frac{\partial^{r+1}f}{\partial x^i\partial y^{r-i+1}}\bigg|_{(a+ht,b+kt)}$$

$$=\sum_{i=0}^{r+1}\binom{r+1}{i}h^i k^{r+1-i}\frac{\partial^{r+1}f}{\partial x^i\partial y^{r+1-i}}\bigg|_{(a+ht,b+kt)}$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{r+1}f(a+ht,b+kt).$$

$\left(\textbf{注意:}\binom{r}{i-1}+\binom{r}{i}=\binom{r+1}{i}.\right)$

故公式成立.

5. 设

$$\varphi(x,y,z)=\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+z & e+x & f+y \\ g+y & h+z & k+x \end{vmatrix},$$

求$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$.

解　由第十七章§2习题8,有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d+z & e+x & f+y \\ g+y & h+z & k+x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 0 & 1 & 0 \\ g+y & h+z & k+x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+z & e+x & f+y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(e+x)(k+x)-(f+y)(h+z)+(a+x)(k+x)-(c+z)(g+y)$$
$$+(a+x)(e+x)-(b+y)(d+z),$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=k+x+e+x+a+x+k+x+a+x+e+x=6x+2(a+e+k).$$

6. 设

$$\Phi(x,y,z)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(y) & g_2(y) & g_3(y) \\ h_1(z) & h_2(z) & h_3(z) \end{vmatrix},$$

求$\dfrac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y\partial z}$.

解　由第十七章§2习题8,有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ g_1(y) & g_2(y) & g_3(y) \\ h_1(z) & h_2(z) & h_3(z) \end{vmatrix},\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=\begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ g_1'(y) & g_2'(y) & g_3'(y) \\ h_1(z) & h_2(z) & h_3(z) \end{vmatrix},$$

故

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y\partial z}=\begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ g_1'(y) & g_2'(y) & g_3'(y) \\ h_1'(z) & h_2'(z) & h_3'(z) \end{vmatrix}.$$

7. 设函数$u=f(x,y)$在$\mathbf{R}^2$上有$u_{xy}=0$,试求u关于x,y的函数式.

解　因为对$\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$,有

$$u_{xy}=0,$$

所以
$$u_x=\int u_{xy}\mathrm{d}y+C(x)=C(x),$$
故
$$u(x,y)=\int u_x\mathrm{d}x=\int C(x)\mathrm{d}x+g(y)$$
$$=f(x)+g(y)+C\quad (C\text{ 为任意常数}).$$

8. **设** f **在点** $P_0(x_0,y_0)$ **可微,且在** P_0 **给定了** n **个向量** $\boldsymbol{l}_i,i=1,2,\cdots,n$,**相邻两个向量之间的夹角为** $\frac{2\pi}{n}$. **证明**
$$\sum_{i=1}^{n}f_{\boldsymbol{l}_i}(P_0)=0.$$

证 **设** $\boldsymbol{l}_1=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,**由于相邻两向量之间的夹角为** $\frac{2\pi}{n}$,**故**
$$\boldsymbol{l}_i=\left(\cos\left(\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right),\quad \sin\left(\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)\right),\quad i=1,2,\cdots,n.$$
因为 f **在** P_0 **处可微,所以** f **在** P_0 **处沿方向** $\boldsymbol{l}_i$ **的方向导数存在,且有**
$$\sum_{i=1}^{n}f_{\boldsymbol{l}_i}(P_0)=\sum_{i=1}^{n}\left[f_x(P_0)\cos\left(\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)+f_y(P_0)\sin\left(\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)\right]$$
$$=f_x(P_0)\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\alpha+\frac{i2\pi}{n}\right)+f_y(P_0)\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\alpha+\frac{i2\pi}{n}\right)$$
$$=f_x(P_0)\sum_{i=1}^{n}\left[\cos\alpha\cos\frac{i2\pi}{n}-\sin\alpha\sin\frac{i2\pi}{n}\right]$$
$$+f_y(P_0)\sum_{i=1}^{n}\left[\sin\alpha\cos\frac{i2\pi}{n}+\cos\alpha\sin\frac{i2\pi}{n}\right].$$

(**注意:此处用到** $\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha,\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha.$)

又由有限项三角级数公式:
$$\sum_{i=1}^{n}\sin ix=\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}\csc\frac{x}{2},$$
$$\sum_{i=1}^{n}\cos ix=\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}\csc\frac{x}{2},$$
令 $x=\frac{2\pi}{n}$,**则**
$$\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2\pi}{n}i=0,\quad \sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2\pi}{n}i=0,$$

故
$$\sum_{i=1}^{n} f_{l_i}(P_0)=0.$$

9. 设 $f(x,y)$ 为 n 次齐次函数，而且 m 次可微. 证明

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f=n(n-1)\cdots(n-m+1)f.$$

证　因为 $f(x,y)$ 为 n 次齐次函数，所以有

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

令 $g(t)=f(tx,ty)$，则由本章总练习题 4，有

$$\frac{\mathrm{d}^m g(t)}{\mathrm{d}t^m}=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(tx,ty),$$

又
$$\frac{\mathrm{d}^m g(t)}{\mathrm{d}t^m}=\frac{\mathrm{d}^m(t^n f(x,y))}{\mathrm{d}t^m}=n(n-1)\cdots(n-m+1)t^{n-m}f(x,y),$$

故取 $t=1$，则有

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x,y)=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x,y).$$

10. 对于函数 $f(x,y)=\sin\dfrac{y}{x}$，试证

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f=0.$$

证　因为
$$f(tx,ty)=\sin\frac{ty}{tx}=\sin\frac{y}{x}=f(x,y),$$

所以 $f(x,y)$ 为 0 次齐次函数，故由上题有

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f=0.$$

第十八章　隐函数定理及其应用

知 识 要 点

1. 隐函数定理是微分学理论的重要组成部分. 用方程(或方程组)所确定的隐函数(或隐函数组),不仅包括了所有的显函数,也包括了许多有用的非初等函数. 实际上许多数学问题,如某些微分方程的解,只能用隐函数表出.

隐函数(组)定理主要讨论在什么样的条件下由隐函数方程(或方程组)可惟一地确定隐函数(组);确定的隐函数(组)是否具有连续性与可微性;如何求得隐函数导数或偏导数.

注意隐函数(组)定理只是局部性定理,无论定理的条件或结论,均是局部性的.

2. 虽然隐函数一般不能表为显函数,但我们仍可以求得其导数或偏导数,可以研究隐函数的各种分析性质. 至于求隐函数的导数或偏导数主要有两个步骤:

(1) 确定因变量与自变量. 因变量的个数等于该隐函数方程或方程组的雅各比矩阵的秩. 如方程组 $F(x,y,u,v)=0$, $G(x,y,u,v)=0$ 的雅各比矩阵为

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y & F_u & F_v \\ G_x & G_y & G_u & G_v \end{bmatrix}_{P_0}.$$

不妨设其秩为 2,且其 2 阶子式 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}\neq 0$,则 x,y 为因变量;u,v 为自变量.

(2) 求导数或求偏导数.

方法一是,将因变量表成自变量的函数,并代入隐函数方程或方程组使之成为恒等式,再关于自变量求导数或求偏导数,最后解得所求的导数或偏

导数.

方法二是,套隐函数定理中给出的计算导数或偏导数的公式. 套公式时应注意将隐函数方程或方程组中的变量均视为自变量.

3. 若 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 具有连续的偏导数,则在 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$ 的区域 D 内存在惟一的一组反函数 $x=x(u,v),y=y(u,v),(u,v)\in D'$,且

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1.$$

变量变换 $T:u=u(x,y),v=v(x,y)$ 是 D 到 D' 的一一对应.

4. 偏导数的几何应用.

由隐函数方程 $F(x,y)=0$(或 $F(x,y,z)=0$)决定的平面光滑曲线(或空间光滑曲面),可看作是函数 F 的等值线(或等值面),因此其法线的方向向量可由 $\mathrm{grad}\ F$ 表出. 空间曲线若由两曲面的交表出:$F=0,G=0$,则曲线的切向量可由 $\mathrm{grad}\ F\times\mathrm{grad}\ G$ 给出.

用参数式定义的曲线:$x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ 的切向量可由 $(x'(t),y'(t),z'(t))$ 表出. 用参数式定义的曲面 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 所对应的点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量可由 $(x_u'(u_0,v_0),y_u'(u_0,v_0),z_u'(u_0,v_0))\times(x_v'(u_0,v_0),y_v'(u_0,v_0),z_v'(u_0,v_0))$ 给出.

5. 条件极值的求法有如下两种.

(1) 由约束方程或方程组中解出隐函数,代入目标函数,使之成为自由极值问题. 该方法通过消元(降维)化为自由极值问题. 但由方程或方程组中解出隐函数是较困难的.

(2) 用拉格朗日乘数法. 通过建立拉格朗日函数求得其稳定点之后往往可以根据问题本身特点来判定该点即为所求的条件极值点. 该方法虽然在建立拉格朗日函数时增添了未知数(升维),但其应用面却更广泛了.

习 题 详 解

§1 隐　函　数

1. 方程 $\cos x+\sin y=\mathrm{e}^{xy}$ 能否在原点的某邻域内确定隐函数 $y=f(x)$ 或 x

$=g(y)$?

解　令

$$F(x,y)=\cos x+\sin y-e^{xy},$$

因为

$$F_x=-\sin x-ye^{xy},\quad F_y=\cos y-xe^{xy},$$

所以 F,F_x,F_y **在** $\mathbf{R}^2$ **上连续,又由于**

$$F(0,0)=0,\quad F_y(0,0)=1\neq 0\ (\text{但}\ F_x(0,0)=0),$$

故由隐函数存在惟一性定理知,方程$F(x,y)=0$,**即**$\cos x+\sin y=e^{xy}$**在原点的某邻域内能确定隐函数** $y=f(x)$.

2. 方程 $xy+z\ln y+e^{xz}=1$ **在点**$(0,1,1)$**的某邻域内能否确定出某一个变量为另外两个变量的函数**?

解　令

$$F(x,y,z)=xy+z\ln y+e^{xz}-1,$$

因为

$$F_x=y+ze^{xz},\quad F_y=x+\frac{z}{y},\quad F_z=\ln y+xe^{xz},$$

所以 F,F_x,F_y,F_z **在包含点**$(0,1,1)$**的区域**

$$D=\{(x,y,z)\mid x\in\mathbf{R},y>0,z\in\mathbf{R}\}$$

内连续,又由于

$$F(0,1,1)=0,\quad F_x(0,1,1)=2\neq 0,$$

$$F_y(0,1,1)=1\neq 0\ (\text{但}\ F_z(0,1,1)=0),$$

故由隐函数存在惟一性定理知,方程$F(x,y,z)=0$,**即**$xy+z\ln y+e^{xz}=1$ **在点**$(0,1,1)$**的某邻域内能确定隐函数** $x=f(y,z)$**和** $y=g(x,z)$.

3. 求由下列方程所确定的隐函数的导数:

(1) $x^2y+3x^4y^3-4=0$,**求**$\dfrac{dy}{dx}$;

(2) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$,**求**$\dfrac{dy}{dx}$;

(3) $e^{-xy}+2z-e^z=0$,**求**$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(4) $a+\sqrt{a^2-y^2}=ye^u$,$u=\dfrac{x+\sqrt{a^2-y^2}}{a}$ $(a>0)$,**求**$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$;

(5) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-5=0$,**求**$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(6) $z=f(x+y+z,xyz)$,**求**$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial x}{\partial y},\dfrac{\partial y}{\partial z}$.

解　(1) **令**

$$F(x,y)=x^2y+3x^4y^3-4,$$

因为 $$F_x=2xy+12x^3y^3,\quad F_y=x^2+9x^4y^2,$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2y+12x^2y^3}{x+9x^3y^2}(x\neq 0).$$

(2) 令 $$F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x},$$

因为 $$F_x=\frac{x+y}{x^2+y^2},\quad F_y=\frac{y-x}{x^2+y^2},$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x+y}{x-y}(x\neq y).$$

(3) 令 $$F(x,y,z)=e^{-xy}+2z-e^z,$$

因为 $$F_x=-ye^{-xy},\quad F_y=-xe^{-xy},\quad F_z=2-e^z,$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{ye^{-xy}}{2-e^z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xe^{-xy}}{2-e^z}.$$

(4) 在等式 $a+\sqrt{a^2-y^2}=ye^u, u=\frac{1}{a}(x+\sqrt{a^2-y^2})$ 两边分别求微分:

$$-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy=e^u dy+ye^u du,$$

$$du=\frac{1}{a}\left(dx-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy\right),$$

所以 $$-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy=e^u dy+ye^u\cdot\frac{1}{a}\left(dx-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy\right),$$

解出 $$\frac{dy}{dx}=\frac{-ye^u}{ay(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}+ae^u-y^2e^u(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}}.$$

化简有 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

故 $$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\sqrt{a^2-y^2}\cdot\frac{dy}{dx}+y\cdot\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{dy}{dx}}{(a^2-y^2)}$$

$$=\frac{y+\frac{y^3}{a^2-y^2}}{(a^2-y^2)}=\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}.$$

(5) 令 $$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-5,$$

因为 $$F_x=2x-2,\quad F_y=2y+2,\quad F_z=2z-4,$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1-x}{z-2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y+1}{2-z}.$$

(6) 令 $$F(x,y,z)=z-f(x+y+z,xyz),$$
因为 $$F_x=-f_1'-yzf_2',\quad F_y=-f_1'-xzf_2',\quad F_z=1-f_1'-xyf_2',$$
所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{f_1'+yzf_2'}{1-f_1'-xyf_2'},$$
$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}=-\frac{f_1'+xzf_2'}{f_1'+yzf_2'},$$
$$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{F_z}{-F_y}=\frac{1-f_1'-xyf_2'}{f_1'+xzf_2'}.$$

4. 设 $z=x^2+y^2$,其中 $y=f(x)$ 为由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 所确定的隐函数,求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$.

解 令 $$F(x,y)=x^2-xy+y^2-1,$$
因为 $$F_x=2x-y,\quad F_y=-x+2y,$$
所以 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{2x-y}{x-2y}.$$
又因为 $z=x^2+y^2$,所以
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x+2y\cdot\frac{2x-y}{x-2y}=\frac{2x^2-2y^2}{x-2y},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(4x-4yy')(x-2y)-(2x^2-2y^2)(1-2y')}{(x-2y)^2}$$
$$=\frac{4x-2y}{x-2y}+\frac{6x}{(x-2y)^3}.$$

5. 设 $u=x^2+y^2+z^2$,其中 $z=f(x,y)$ 是由方程 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 所确定的隐函数,求 u_x 及 u_{xx}.

解 令 $$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz,$$
因为 $$F_x=3x^2-3yz,\quad F_y=3y^2-3xz,\quad F_z=3z^2-3xy,$$
所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x^2-yz}{xy-z^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\left(2x-y\frac{\partial z}{\partial x}\right)(xy-z^2)-(x^2-yz)\left(y-2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(xy-z^2)^2}$$
$$=\frac{1}{(xy-z^2)^2}\left[2x(xy-z^2)-y(x^2-yz)-y(x^2-yz)+2z\frac{(x^2-yz)^2}{xy-z^2}\right]$$

$$=\frac{1}{(xy-z^2)^3}[2x(xy-z^2)^2-2y(x^2-yz)(xy-z^2)+2z(x^2-yz)^2]$$
$$=\frac{2xz(x^3+y^3+z^3-3xyz)}{(xy-z^2)^3}=0.$$

又因为 $u=x^2+y^2+z^2$**,所以**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u_x=2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2\frac{x^2z-yz^2}{xy-z^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u_{xx}=2+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2+2\frac{(x^2-yz)^2}{(xy-z^2)^2}.$$

6. 求由下列方程所确定的隐函数的偏导数:

(1) $x+y+z=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$**,求** z **对于** x,y **的一阶与二阶偏导数;**

(2) $F(x,x+y,x+y+z)=0$**,求**$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$**和**$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　(1) **令**　$F(x,y,z)=x+y+z-\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$,

因为　$F_x=1+\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$,　$F_y=1+\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$,　$F_z=1+\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$,

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-1,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(2)**令**　$G(x,y,z)=F(x,x+y,x+y+z)$,

因为　$G_x=F'_1+F'_2+F'_3$,　$G_y=F'_2+F'_3$,　$G_z=F'_3$,

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x}{G_z}=-\frac{F'_1+F'_2+F'_3}{F'_3},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z}=-\frac{F'_2+F'_3}{F'_3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{F'_3\left(\frac{\partial F'_1}{\partial x}+\frac{\partial F'_2}{\partial x}+\frac{\partial F'_3}{\partial x}\right)-(F'_1+F'_2+F'_3)\frac{\partial F'_3}{\partial x}}{(F'_3)^2}$$
$$=\frac{-1}{(F'_3)^2}\left\{F'_3\left[F''_{11}+F''_{12}+F''_{13}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right.\right.$$
$$\left.+F''_{21}+F''_{22}+F''_{23}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{31}+F''_{32}+F''_{33}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]$$
$$\left.-(F'_1+F'_2+F'_3)\left[F''_{31}+F''_{32}+F''_{33}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\right\},$$

利用 $1+\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'+F_2'}{F_3'}$**,将上式化简,有**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(F_3')^3}[(F_3')^2(F_{11}''+2F_{12}''+F_{22}'')$$
$$-2F_3'(F_1'+F_2')(F_{13}''+F_{23}'')+F_{33}''(F_1'+F_2')^2].$$

7. 证明:设方程 $F(x,y)=0$ **所确定的隐函数** $y=f(x)$ **具有二阶导数,则当** $F_y\neq0$ **时,有**

$$F_y^3y''=\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{xy} & F_x\\ F_{xy} & F_{yy} & F_y\\ F_x & F_y & 0\end{vmatrix}.$$

证　因为 $y'=-\frac{F_x}{F_y}$**,所以**

$$y''=-\frac{F_y\cdot\frac{\partial F_x}{\partial x}-F_x\cdot\frac{\partial F_y}{\partial x}}{F_y^2}=-\frac{F_y(F_{xx}+F_{xy}\cdot y')-F_x(F_{yx}+F_{yy}\cdot y')}{F_y^2}$$
$$=-\frac{1}{F_y^3}[F_y^2F_{xx}-2F_xF_yF_{xy}+F_x^2F_{yy}],$$

故
$$F_y^3y''=2F_xF_yF_{xy}-F_y^2F_{xx}-F_x^2F_{yy}=\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{xy} & F_x\\ F_{xy} & F_{yy} & F_y\\ F_x & F_y & 0\end{vmatrix}.$$

8. 设 f **是一元函数,试问应对** f **提出什么条件,方程**

$$2f(xy)=f(x)+f(y)$$

在点(1,1)的邻域内就能确定出惟一的 y **为** x **的函数?**

解　此题用定理 18.1 **加以讨论.**

令 $F(x,y)=2f(xy)-f(x)-f(y)$**,则:**

1° $F(x,y)$**应在(1,1)为内点的某一区域** $D\subset\mathbf{R}^2$ **上连续,因此** $f(x)$**应在** $x=1$**的某一邻域内连续.**

2° **初始条件** $F(1,1)=2f(1)-f(1)-f(1)=0$ **已满足.**

3° **在** D **内存在连续的偏导数** $F_y=2xf'(xy)-f'(y)$**,所以** $f(x)$**在** $x=1$ **的邻域应有连续的导数.**

4° $F_y(1,1)\neq0$**,则应有** $2f'(1)-f'(1)=f'(1)\neq0$.

综合上述，当 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某一邻域内有连续的导数，且 $f'(1)\neq 0$ 时，方程

$$2f(xy)=f(x)+f(y)$$

在点(1,1)的邻域内就能确定出惟一的 y 为 x 的函数.

§2　隐函数组

1. 试讨论方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{2}z^2, \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

在点(1,−1,2)的附近能否确定形如 $x=f(z)$，$y=g(z)$ 的隐函数组？

解　此题用定理18.4加以讨论.

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-\dfrac{1}{2}z^2$，$G(x,y,z)=x+y+z-2$，则：

1° $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 内连续.

2° 初始条件 $F(1,-1,2)=0$，$G(1,-1,2)=0$ 满足.

3° $F_x=2x$，$F_y=2y$，$F_z=-z$，$G_x=1$，$G_y=1$，$G_z=1$ 在 $\mathbf{R}^3$ 内连续.

4° 雅可比(Jacobi)行列式

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2(x-y),$$

在(1,−1,2)处
$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,-1,2)}=4\neq 0,$$

因此，方程组 $\begin{cases} F=0, \\ G=0 \end{cases}$ 在(1,−1,2)的附近能确定形如 $x=f(z)$，$y=g(z)$ 的隐函数组.

2. 求下列方程组所确定的隐函数组的导数：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2=ax, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$；

(2) $\begin{cases} x-u^2-yv=0, \\ y-v^2-xu=0, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$；

（3）$\begin{cases} u=f(ux,v+y), \\ v=g(u-x,v^2y), \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解　（1）在方程组中每一方程两边分别对 x 求导数：

$$\begin{cases} 2x+2yy'+2zz'=0, \\ 2x+2yy'=a, \end{cases}$$

解之，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a-2x}{2y},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{a}{2z}.$$

（2）将方程组中变量 u,v 均看作 x,y 的函数，分别对 x,y 求偏导数：

$$\begin{cases} 1-2u\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \\ -u-x\dfrac{\partial u}{\partial x}-2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2u\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial v}{\partial y}-v=0, \\ -x\dfrac{\partial u}{\partial y}-2v\dfrac{\partial v}{\partial y}+1=0, \end{cases}$$

解之，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2v+uy}{4uv-xy},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-x-2u^2}{4uv-xy},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-y-2v^2}{4uv-xy},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2u+xv}{4uv-xy}.$$

（3）在方程组中每一方程两边分别对 x 求偏导：

$$\begin{cases} u_x=(u+xu_x)f'_1+v_xf'_2, \\ v_x=(u_x-1)g'_1+(2yvv_x)g'_2, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (1-xf'_1)u_x-f'_2v_x=uf'_1, \\ g'_1u_x+(2yvg'_2-1)v_x=g'_1, \end{cases}$$

解之，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} uf'_1 & -f'_2 \\ g'_1 & 2yvg'_2-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-xf'_1 & -f'_2 \\ g'_1 & 2yvg'_2-1 \end{vmatrix}}=\frac{uf'_1(2yvg'_2-1)+f'_2g'_1}{(1-xf'_1)(2yvg'_2-1)+f'_2g'_1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1-xf_1' & uf_1' \\ g_1' & g_1'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1-xf_1' & -f_2' \\ g_1' & 2yvg_2'-1\end{vmatrix}}=\frac{g_1'(1-xf_1')-uf_1'g_1'}{(1-xf_1')(2yvg_2'-1)+f_2'g_1'}.$$

3. 求下列函数组所确定的反函数组的偏导数：

(1) $\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v,\\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v,\end{cases}$ **求** u_x, v_x, u_y, v_y；

(2) $\begin{cases}x=u+v,\\ y=u^2+v^2,\\ z=u^3+v^3,\end{cases}$ **求** z_x.

解　(1) **将方程组中变量** u,v **均看作** x,y **的函数，分别对** x,y **求偏导数：**

$$\begin{cases}1=\mathrm{e}^u u_x+u_x\sin v+(u\cos v)v_x,\\ 0=\mathrm{e}^u u_x-u_x\cos v+(u\sin v)v_x,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(\mathrm{e}^u+\sin v)u_x+(u\cos v)v_x=1,\\ (\mathrm{e}^u-\cos v)u_x+(u\sin v)v_x=0,\end{cases}$$

解之，有

$$u_x=\frac{\begin{vmatrix}1 & u\cos v\\ 0 & u\sin v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^u+\sin v & u\cos v\\ \mathrm{e}^u-\cos v & u\sin v\end{vmatrix}}=\frac{\sin v}{1+\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)},$$

$$v_x=\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^u+\sin v & 1\\ \mathrm{e}^u-\cos v & 0\end{vmatrix}}{u+u\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)}=\frac{\cos v-\mathrm{e}^u}{u+u\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)}.$$

同理，由

$$\begin{cases}0=\mathrm{e}^u u_y+u_y\sin v+(u\cos v)v_y,\\ 1=\mathrm{e}^u u_y-u_y\cos v+(u\sin v)v_y,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(\mathrm{e}^u+\sin v)u_y+(u\cos v)v_y=0,\\ (\mathrm{e}^u-\cos v)u_y+(u\sin v)v_y=1,\end{cases}$$

有

$$u_y=\frac{-\cos v}{1+\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)},\quad v_y=\frac{\mathrm{e}^u+\sin v}{u+u\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)}.$$

(2) **由** $z=u^3+v^3$，**有**

$$z_x=3u^2u_x+3v^2v_x,$$

另一方面,由方程组

$$\begin{cases}x=u+v,\\ y=u^2+v^2,\end{cases}$$

有

$$\begin{cases}1=u_x+v_x,\\ 0=2uu_x+2vv_x,\end{cases}$$

解之,有

$$u_x=\frac{v}{v-u},\quad v_x=\frac{u}{u-v},$$

所以

$$z_x=\frac{3u^2v-3uv^2}{v-u}=-3uv.$$

4. 设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程组

$$x=\mathrm{e}^{u+v},\quad y=\mathrm{e}^{u-v},\quad z=uv$$

(u,v 为参量)所定义的函数,求当 $u=0,v=0$ 时的 $\mathrm{d}z$.

解　首先,由 $x=\mathrm{e}^{u+v},y=\mathrm{e}^{u-v}$,有

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{u+v}(\mathrm{d}u+\mathrm{d}v),\\ \mathrm{d}y=\mathrm{e}^{u-v}(\mathrm{d}u-\mathrm{d}v),\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=x\mathrm{d}u+x\mathrm{d}v,\\ \mathrm{d}y=y\mathrm{d}u-y\mathrm{d}v,\end{cases}$$

解之,有

$$\mathrm{d}u=\frac{1}{2xy}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y),\quad \mathrm{d}v=\frac{1}{2xy}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y),$$

又由 $z=uv$,有

$$\mathrm{d}z=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\frac{v}{2xy}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+\frac{u}{2xy}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\\&=\frac{u+v}{2x}\mathrm{d}x+\frac{v-u}{2y}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由于 $u=0,v=0$ 时,$z=0,x=1,y=1$,故

$$\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=0.$$

5. 设以 u,v 为新的自变量变换下列方程:

(1) $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,$v=\arctan\dfrac{y}{x}$;

(2) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,设 $u=xy$,$v=\dfrac{x}{y}$.

解　(1) **因为** $\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{x^2+y^2}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y),$$

$$\mathrm{d}v=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}y=\frac{1}{x^2+y^2}(-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y),$$

所以 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{z_u}{x^2+y^2}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+\frac{z_v}{x^2+y^2}(-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$

$$=\frac{xz_u-yz_v}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{yz_u+xz_v}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y^2}\left(x\frac{\partial z}{\partial u}-y\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y^2}\left(y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

从而有

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2}\left[(x+y)\left(x\frac{\partial z}{\partial u}-y\frac{\partial z}{\partial v}\right)-(x-y)\left(y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v},$$

即以 u,v **为新自变量的方程为**

$$\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

(2) **因为** $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial z}{\partial u}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right)$

$$=\left(y\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}x+\left(x\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}y,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=y\left[yz_{uu}+\frac{1}{y}z_{uv}\right]+\frac{1}{y}\left[yz_{vu}+\frac{1}{y}z_{vv}\right]$$

$$=y^2z_{uu}+2z_{uv}+\frac{1}{y^2}z_{vv},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\\&=x\left[xz_{uu}-\frac{x}{y^2}z_{uv}\right]+\frac{2x}{y^3}z_v-\frac{x}{y^2}\left[xz_{vu}-\frac{x}{y^2}z_{vv}\right]\\&=x^2z_{uu}-\frac{2x^2}{y^2}z_{uv}+\frac{x^2}{y^4}z_{vv}+\frac{2x}{y^3}z_v,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\\&=x^2\left[y^2z_{uu}+2z_{uv}+\frac{1}{y^2}z_{vv}\right]-y^2\left[x^2z_{uu}-\frac{2x^2}{y^2}z_{uv}+\frac{x^2}{y^4}z_{vv}+\frac{2x}{y^3}z_v\right]\\&=4x^2\left[z_{uv}-\frac{1}{2xy}z_v\right],\end{aligned}$$

即以 u,v 为新自变量的方程为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

6. 设函数 $u=u(x,y)$ 由方程组

$$u=f(x,y,z,t),\quad g(y,z,t)=0,\quad h(z,t)=0$$

所确定,求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解　首先

$$\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z+f_t\mathrm{d}t,$$

又由方程组 $\begin{cases}g(y,z,t)=0,\\h(z,t)=0,\end{cases}$ 有

$$\begin{cases}g_y\mathrm{d}y+g_z\mathrm{d}z+g_t\mathrm{d}t=0,\\h_z\mathrm{d}z+h_t\mathrm{d}t=0,\end{cases}$$

解之,有

$$\mathrm{d}z=\frac{\begin{vmatrix}-g_y\mathrm{d}y & g_t\\0 & h_t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}g_z & g_t\\h_z & h_t\end{vmatrix}}=\frac{-g_yh_t}{\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}t=\frac{\begin{vmatrix}g_z & -g_y\mathrm{d}y\\h_z & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}g_z & g_t\\h_z & h_t\end{vmatrix}}=\frac{g_yh_z}{\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}\mathrm{d}y,$$

所以

$$\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+\left[f_y-\frac{f_zg_yh_t}{\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}+\frac{f_tg_yh_z}{\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}\right]\mathrm{d}y,$$

因而
$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_y+g_y\frac{\dfrac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}}{\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}.$$

7. 设 $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ **和** $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$, $z=z(s,t)$ **都有连续的一阶偏导数，证明**

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}.$$

证　将 x,y,z 看作中间变量，$u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$ 分别对 s,t 求偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial s}=u_xx_s+u_yy_s+u_zz_s,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=u_xx_t+u_yy_t+u_zz_t,$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}=v_xx_s+v_yy_s+v_zz_s,\quad \frac{\partial v}{\partial t}=v_xx_t+v_yy_t+v_zz_t,$$

则
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}u_s & u_t\\ v_s & v_t\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}u_xx_s+u_yy_s+u_zz_s & u_xx_t+u_yy_t+u_zz_t\\ v_xx_s+v_yy_s+v_zz_s & v_xx_t+v_yy_t+v_zz_t\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}u_xx_s & u_xx_t\\ v_xx_s & v_xx_t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u_xx_s & u_yy_t\\ v_xx_s & v_yy_t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u_xx_s & u_zz_t\\ v_xx_s & v_zz_t\end{vmatrix}\\
&\quad+\begin{vmatrix}u_yy_s & u_xx_t\\ v_yy_s & v_xx_t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u_yy_s & u_yy_t\\ v_yy_s & v_yy_t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u_yy_s & u_zz_t\\ v_yy_s & v_zz_t\end{vmatrix}\\
&\quad+\begin{vmatrix}u_zz_s & u_xx_t\\ v_zz_s & v_xx_t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u_zz_s & u_yy_t\\ v_zz_s & v_yy_t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u_zz_s & u_zz_t\\ v_zz_s & v_zz_t\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_s & x_t\\ y_s & y_t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u_y & u_z\\ v_y & v_z\end{vmatrix}\begin{vmatrix}y_s & y_t\\ z_s & z_t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u_z & u_x\\ v_z & v_x\end{vmatrix}\begin{vmatrix}z_s & z_t\\ x_s & x_t\end{vmatrix}\end{aligned}$$

即
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}.$$

8. 设 $u=\dfrac{y}{\tan x}$, $v=\dfrac{y}{\sin x}$. **证明：当** $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $y>0$ **时，**u,v **可以用来作为曲线坐标；解出** x,y **作为** u,v **的函数；画出** xy **平面上** $u=1$, $v=2$ **所对应的坐标曲线；计算**$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$**和**$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$**，并验证它们互为倒数.**

解　(1) 将 u,v 作为曲线的坐标，即表明函数组

$$u=\frac{y}{\tan x},\quad v=\frac{y}{\sin x}$$

存在反函数组，其主要条件为

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0.$$

因为　$u_x=-y\csc^2 x,\quad u_y=\cot x,\quad v_x=-y\csc x\cot x,\quad v_y=\csc x,$

所以　$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-y^2\csc^2 x & \cot x\\ -y\csc x\cot x & \csc x\end{vmatrix}=-y\csc^3 x+y\csc x\cot^2 x$$

$$=-\frac{y}{\sin x}<0\ \left(0<x<\frac{\pi}{2},y>0\right).$$

故 u,v 可以用来作为曲线坐标.

（2）由　$$y=u\tan x=v\sin x,$$

得　$$\cos x=\frac{u}{v},$$

即　$$x=\arccos\frac{u}{v}.$$

又　$$y=u\tan x=u\sqrt{\sec^2 x-1}=u\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}$$

$$=u\sqrt{\frac{v^2}{u^2}-1}=\sqrt{v^2-u^2},$$

因而　$$\begin{cases}x=\arccos\dfrac{u}{v},\\ y=\sqrt{v^2-u^2},\end{cases}$$

（3）当 $\begin{cases}u=1\\ v=2\end{cases}$ 时，有

$$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3},\\ y=\sqrt{3}.\end{cases}$$

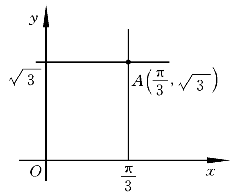

图 18-1

xOy 平面 $u=1,v=2$ 所对应的坐标曲线如图 18-1 所示.

（4）因为　$$x_u=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{v^2}}}\ \frac{1}{v}=-\frac{1}{\sqrt{v^2-u^2}}=-\frac{1}{y},$$

$$x_v=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{v^2}}}\left(-\frac{u}{v^2}\right)=\frac{u}{v}\ \frac{1}{\sqrt{v^2-u^2}}=\frac{\cos x}{y},$$

$$y_u=\frac{-u}{\sqrt{v^2-u^2}}=-\frac{1}{\tan x},$$

$$y_v=\frac{v}{\sqrt{v^2-u^2}}=\frac{1}{\sin x},$$

所以 $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{y} & \frac{\cos x}{y}\\ -\frac{1}{\tan x} & \frac{1}{\sin x}\end{vmatrix}=-\frac{\sin x}{y}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}.$$

9. 将以下式中的(x,y,z)变换成球面坐标(r,θ,φ)的形式：

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

解　球面坐标ρ,θ,φ与直角坐标x,y,z之间的关系为

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta.$$

对于极坐标$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$变换，根据第十七章§4习题2的证明过程和结论，有

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2,$$

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

下面将变换分两步进行：

首先令 $$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\ (z\text{ 不变}),$$

再令 $$\begin{cases}z=\rho\cos\theta,\\ r=\rho\sin\theta\end{cases}\ (\varphi\text{ 不变}).$$

(1) 由$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\end{cases}$有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2,$$

所以 $$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

又由$\begin{cases}z=\rho\cos\theta,\\ r=\rho\sin\theta,\end{cases}$有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2,$$

故
$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

（2）由$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\end{cases}$有
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

所以
$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

又由$\begin{cases}z=\rho\cos\theta,\\ r=\rho\sin\theta,\end{cases}$有
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

为了求$\frac{\partial u}{\partial r}$，将第十七章§4习题2中的$x$换为$z$，$y$换为$r$，则根据计算出的$\frac{\partial u}{\partial y}$，有
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\cos\theta}{\rho}\ \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

因此，有
$$\begin{aligned}\Delta_2 u&=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{\rho}\ \frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\cot\theta}{\rho^2}\ \frac{\partial u}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

10. 设$u=\frac{x}{r^2}$，$v=\frac{y}{r^2}$，$w=\frac{z}{r^2}$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

（1）试求以u,v,w为自变量的反函数组；

（2）计算$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$.

解　（1）因为　$u^2+v^2+w^2=\frac{1}{r^4}(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{r^2}$，

所以$x=ur^2=\frac{u}{u^2+v^2+w^2}$，　$y=vr^2=\frac{v}{u^2+v^2+w^2}$，　$z=wr^2=\frac{w}{u^2+v^2+w^2}$.

（2）因为　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{r^2}-\frac{2x^2}{r^4}$，　$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{r^4}$，　$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2xz}{r^4}$.

同理　$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2xy}{r^4}$，　$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{r^2}-\frac{2y^2}{r^4}$，　$\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{2yz}{r^4}$，

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{2xz}{r^4},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{2yz}{r^4},\quad \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{r^2}-\frac{2z^2}{r^4}.$$

所以
$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} r^{-2}-2x^2r^{-4} & -2xyr^{-4} & -2xzr^{-4} \\ -2xyr^{-4} & r^{-2}-2y^2r^{-4} & -2yzr^{-4} \\ -2xzr^{-4} & -2yzr^{-4} & r^{-2}-2z^2r^{-4} \end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{r^{12}}[-x^6-y^6-z^6-3x^4y^2-3x^4z^2-3x^2y^4-3y^4z^2$$
$$-3x^2z^4-3y^2z^4-6x^2y^2z^2]$$
$$=-\frac{1}{r^{12}}(x^2+y^2+z^2)=-\frac{1}{r^6}.$$

§3　几何应用

1. 求平面曲线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$上任一点处的切线方程，并证明这些切线被坐标轴所截取的线段等长.

解　令
$$F(x,y)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}},$$
因为
$$F_x=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},\quad F_y=\frac{2}{3}y^{-\frac{2}{3}},$$
所以曲线上任一点(x_0,y_0) ($x_0\neq 0$ **或** $y_0\neq 0$)**处的切线方程为**
$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0,$$
即
$$\frac{2}{3}x_0^{-\frac{1}{3}}(x-x_0)+\frac{2}{3}y_0^{-\frac{1}{3}}(y-y_0)=0,$$
或
$$xx_0^{-\frac{1}{3}}+yy_0^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$
分别令 $x=0$ **和** $y=0$，**则得此切线在** y **轴和** x **轴上的截距分别为**
$$a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}},\quad a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}}.$$
切线被坐标轴所截取线段长为
$$\left[(a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}})^2\right]^{\frac{1}{2}}=a.$$
故这些切线被坐标轴所截取的线段等长.

2. 求下列曲线在所示点处的切线与法平面：

(1) $x=a\sin^2 t,y=b\sin t\cos t,z=c\cos^2 t$，**在点** $t=\frac{\pi}{4}$；

（2）$2x^2+3y^2+z^2=9, z^2=3x^2+y^2$，**在点**$(1,-1,2)$.

解 （1）**切点为**$\left(x\left(\frac{\pi}{4}\right), y\left(\frac{\pi}{4}\right), z\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$，

因为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2a\sin t\cos t$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b\cos^2 t-b\sin^2 t$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-2c\sin t\cos t$，

所以切向量为 $\left(x'\left(\frac{\pi}{4}\right), y'\left(\frac{\pi}{4}\right), z'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=(a,0,-c)$，

故切线方程为
$$\frac{x-\frac{a}{2}}{a}=\frac{y-\frac{b}{2}}{0}=\frac{z-\frac{c}{2}}{-c},$$

法平面方程为
$$a\left(x-\frac{a}{2}\right)-c\left(z-\frac{c}{2}\right)=0,$$

即
$$ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2).$$

（2）**设**$F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-9, G(x,y,z)=z^2-3x^2-y^2$，**在点**$(1,-1,2)$**处，有**

$$F_x=4,\quad F_y=-6,\quad F_z=4,$$
$$G_x=-6,\quad G_y=2,\quad G_z=4.$$
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=-32,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=-40,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=-28.$$

所以切向量为$(8,10,7)$，**切线方程为**
$$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}.$$

法平面方程为
$$8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0,$$

或
$$8x+10y+7z-12=0.$$

3. 求下列曲面在所示点处的切平面与法线：

（1）$y-\mathrm{e}^{2x-z}=0$，**在点**$(1,1,2)$；

（2）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，**在点**$\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

解 （1）**令**
$$F(x,y,z)=y-\mathrm{e}^{2x-z},$$

因为
$$F_x=-2\mathrm{e}^{2x-z},\quad F_y=1,\quad F_z=\mathrm{e}^{2x-z},$$
$$F_x(1,1,2)=-2,\quad F_y(1,1,2)=1,\quad F_z(1,1,2)=1,$$

所以切平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(-2,1,1)$，

切平面方程为
$$-2(x-1)+(y-1)+(z-2)=0,$$
即
$$2x-y-z+1=0,$$
法线方程为
$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}.$$

（2）令
$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$
因为
$$F_x=\frac{2x}{a^2},\quad F_y=\frac{2y}{b^2},\quad F_z=\frac{2z}{c^2},$$
$$F_x\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}\,a},$$
$$F_y\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}\,b},$$
$$F_z\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}\,c},$$
所以切平面的法向量为
$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}\,a},\frac{2}{\sqrt{3}\,b},\frac{2}{\sqrt{3}\,c}\right),$$
切平面方程为
$$\frac{2}{\sqrt{3}\,a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}\,b}\left(y-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}\,c}\left(z-\frac{c}{\sqrt{3}}\right)=0,$$
即
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3},$$
法线方程为
$$\frac{x-\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{a}}=\frac{y-\frac{b}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{b}}=\frac{z-\frac{c}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{c}}.$$

4. 证明对任意常数 ρ,φ，球面 $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ 与锥面 $x^2+y^2=\tan^2\varphi\cdot z^2$ 是正交的.

证　设点 (x,y,z) 是球面 $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ 与锥面 $x^2+y^2=(\tan^2\varphi)z^2$ 交线上任意一点. 显然，球面 $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ 在 (x,y,z) 处切平面的法向量
$$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z).$$

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-(\tan^2\varphi)z^2$，

因为
$$F_x=2x,F_y=2y,F_z=-2(\tan^2\varphi)z,$$

所以锥面 $x^2+y^2=(\tan^2\varphi)z^2$ 在点 (x,y,z) 处切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}_2=(x,y,-(\tan^2\varphi)z)$$

由
$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=x^2+y^2-(\tan^2\varphi)z^2=0$$

知
$$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2,$$

故球面与锥面在交点处是正交的.

5. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面，使它平行于平面

$$x+4y+6z=0.$$

解　平面 $x+4y+6z=0$ 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(1,4,6).$$

令
$$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21,$$

因为
$$F_x=2x,\quad F_y=4y,\quad F_z=6z,$$

所以曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 (x,y,z) 处的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}_2=(x,2y,3z).$$

由于所求曲面的切平面平行于已知平面，所以 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$，即有

$$\begin{cases}x^2+2y^2+3z^2=21,\\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{2y}{4}=\dfrac{3z}{6},\end{cases}$$

解之有
$$2x=y=z=\pm1,$$

即切点为 $\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)$ 或 $\left(-\dfrac{1}{2},-1,-1\right)$. 故所求切平面方程为

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)+4(y-1)+6(z-1)=0,\text{即 } x+4y+6z=21,$$

或
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)+4(y+1)+6(z+1)=0,\text{即 } x+4y+6z=-21.$$

6. 在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上求出一点，使曲线在此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解　显然平面 $x+2y+z=4$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$，又曲线 $x=t,y=t^2$，$z=t^3$ 在点 $(x(t),y(t),z(t))$ 处切线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(x'(t),y'(t),z'(t))=(1,2t,3t^2).$$

由切线应平行于平面，则 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$，即

$$1+4t+3t^2=0,$$

解得
$$t_1=-1,\quad t_2=-\frac{1}{3}.$$
故所求切点为$(-1,1,-1)$和$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$.

7. 求函数
$$u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
在点$M(1,2,-2)$处沿曲线
$$x=t,\quad y=2t^2,\quad z=-2t^4$$
在该点切线方向的方向导数.

解　显然,所给曲线在点$M(1,2,-2)$处切线的方向向量为
$$\boldsymbol{s}=(x'(t),y'(t),z'(t))|_M=(1,4t,-8t^3)|_{t=1}=(1,4,-8),$$
$\boldsymbol{s}$ 的方向余弦为　$\cos\alpha=\frac{1}{9},\quad \cos\beta=\frac{4}{9},\quad \cos\gamma=-\frac{8}{9}.$

则
$$\boldsymbol{s}^\circ=\left(\frac{1}{9},\frac{4}{9},-\frac{8}{9}\right).$$
又因为
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$
所以
$$\operatorname{grad} u(M)=\left(\frac{8}{27},-\frac{2}{27},\frac{2}{27}\right),$$
故
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}}\right|_M=\operatorname{grad} u(M)\cdot\boldsymbol{s}^\circ=\frac{1}{9}\times\frac{8}{27}+\frac{4}{9}\times\left(-\frac{2}{27}\right)+\left(\frac{-8}{9}\right)\times\frac{2}{27}$$
$$=-\frac{16}{243}.$$

8. 试证明:函数$F(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的梯度恰好是F 的等值线在点P_0的法向量(设F 有连续一阶偏导数).

证　函数$F(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处的等值线方程为
$$F(x,y)=F(x_0,y_0),$$
在P_0 处切线的斜率为
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{P_0}=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)},$$
因此切线的方向向量为
$$\boldsymbol{s}=(F_y(x_0,y_0),-F_x(x_0,y_0)),$$

从而等值线在 P_0 处法线的方向向量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x(x_0,y_0),F_y(x_0,y_0))=\operatorname{grad} u(P_0).$$

9. 确定正数 λ,使曲面 $xyz=\lambda$ 与椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在某一点相切(即在该点有公共切平面).

解 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为公共切点,则满足

$$\begin{cases}x_0y_0z_0=\lambda,\\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1.\end{cases}$$

因为曲面 $xyz=\lambda$ 和曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在 P_0 处切平面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=(y_0z_0,x_0z_0,x_0y_0) \quad 和 \quad \boldsymbol{n}_2=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right).$$

且两曲面在 P_0 处有公共切平面,故它们的切平面法向量平行,则

$$\frac{\frac{x_0}{a^2}}{y_0z_0}=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{x_0z_0}=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{x_0y_0}=t.$$

又由 $x_0y_0z_0=\lambda$ 可推出

$$\frac{x_0^2}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2},$$

即
$$3\cdot\frac{x_0^2}{a^2}=1,\quad 3\cdot\frac{y_0^2}{b^2}=1,\quad 3\cdot\frac{z_0^2}{c^2}=1,$$

或
$$x_0=\pm\frac{a}{\sqrt{3}},\quad y_0=\pm\frac{b}{\sqrt{3}},\quad z_0=\pm\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

故当 $\lambda=\frac{abc}{3\sqrt{3}}>0$ 时,两曲面在切点

$$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right) 或 \left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}},-\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$$

$$或\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right) 或 \left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},-\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$$

处有公共切平面.

10. 求曲面 $x^2+y^2+z^2=x$ 的切平面,使其垂直于平面 $x-y-\frac{1}{2}z=2$ 和

$x-y-z=2$.

解　显然曲面 $x^2+y^2+z^2-x=0$ 在任一点处的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(2x-1,2y,2z)$$

平面 $x-y-\frac{1}{2}z=2$ 和 $x-y-z=2$ 的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right),\quad \boldsymbol{n}_2=(1,-1,-1),$$

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right).$$

依题意，有 $\boldsymbol{n}//(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)$，即

$$\frac{2x-1}{\frac{1}{2}}=\frac{2y}{\frac{1}{2}}=\frac{2z}{0}=\lambda,$$

将 $y=x-\frac{1}{2}$，$z=0$ 代入曲面方程，有

$$x^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-x=0,$$

解之，有
$$x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

所以过点 $\left(\frac{1}{2}\pm\frac{1}{4}\sqrt{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{4},0\right)$ 的切平面方程分别为

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=0,$$

即
$$x+y=\frac{1+\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=0,$$

即
$$x+y=\frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

11. 求两曲面 $F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$ 的交线在 xy 平面上的投影曲线的切线方程.

解　为了求投影曲线方程，只需从 $F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$ 中消去变量 z. 为此，假设 $F_z\neq 0$，则由 $F(x,y,z)=0$ 确定二元函数 $z=z(x,y)$，将 $z=z(x,y)$ 代入 G，有

$$G(x,y,z(x,y))=0,$$

所以投影曲线方程为

$$\begin{cases}G(x,y,z(x,y))=0,\\ z=0.\end{cases}$$

由 $G(x,y,z(x,y))=0$（即为投影柱面方程）可确定一个一元函数 $y=y(x)$，令

$$H(x,y)=G(x,y,z(x,y)),$$

因为　$H_x=G_x+G_z z_x,\quad H_y=G_y+G_z z_y,\quad z_x=-\dfrac{F_x}{F_z},\quad z_y=-\dfrac{F_y}{F_z},$

所以
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{H_x}{H_y}=\frac{G_zF_x-G_xF_z}{G_yF_z-G_zF_y},$$

故投影曲线 $\begin{cases}G(x,y,z(x,y))=0,\\ z=0\end{cases}$ 在此曲线上点 $P_0(x_0,y_0,0)$ 处的切线方程为

$$y-y_0=\frac{G_z(P_1)F_x(P_1)-G_x(P_1)F_z(P_1)}{G_y(P_1)F_z(P_1)-G_z(P_1)F_y(P_1)}(x-x_0),$$

或
$$\begin{aligned}&(G_z(P_1)F_x(P_1)-G_x(P_1)F_z(P_1))(x-x_0)\\&+(G_z(P_1)F_y(P_1)-G_y(P_1)F_z(P_1))(y-y_0)=0,\end{aligned}$$

其中
$$P_1=P_1(x_0,y_0,z_0(x_0,y_0)).$$

§4　条 件 极 值

1. 应用拉格朗日乘数法，求下列函数的条件极值：

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$，若 $x+y-1=0$；

(2) $f(x,y,z,t)=x+y+z+t$，若 $xyzt=c^4$（其中 $x,y,z,t>0,c>0$）；

(3) $f(x,y,z)=xyz$，若 $x^2+y^2+z^2=1$，$x+y+z=0$.

解　(1) 令 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$，

由
$$\begin{cases}L_x=2x+\lambda=0,\\ L_y=2y+\lambda=0,\\ L_\lambda=x+y-1=0,\end{cases}$$

解出
$$x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{2},\quad \lambda=-1.$$
又因为 $g(x)=x^2+(1-x)^2, g'(x)=2x-2(1-x), g''(x)=2+2=4$，

所以
$$g''\left(\frac{1}{2}\right)=4>0,$$
从而 $x=\frac{1}{2}$ 为 $g(x)$ 的极小值点，即 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点，故 $f(x,y)$ 的极小值为 $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

（2）令 $L(x,y,z,t,\lambda)=x+y+z+t+\lambda(xyzt-c^4)$，

由
$$\begin{cases} L_x=1+\lambda yzt=0, \\ L_y=1+\lambda xzt=0, \\ L_z=1+\lambda xyt=0, \\ L_t=1+\lambda xyz=0, \\ L_\lambda=xyzt-c^4=0, \end{cases}$$
解出
$$x=y=z=t=c, \lambda=-\frac{1}{c^3}.$$
设条件方程 $xyzt=c^4$ 所确定的隐函数为 $t=t(x,y,z)$，记
$$F(x,y,z)=f(x,y,z,t(x,y,z)),$$
因为
$$F_x=f_x+f_tt_x=1-\frac{t}{x},\quad F_y=f_y+f_tt_y=1-\frac{t}{y},$$
$$F_z=f_z+f_tt_z=1-\frac{t}{z},$$
所以
$$F_{xx}=\frac{2t}{x^2},\quad F_{yy}=\frac{2t}{y^2},\quad F_{zz}=\frac{2t}{z^2},$$
$$F_{xy}=\frac{t}{xy},\quad F_{xz}=\frac{t}{xz},\quad F_{yz}=\frac{t}{yz}.$$
则 $F(x,y,z)$ 在 $P_0(c,c,c)$ 处的三阶黑赛矩阵为
$$\boldsymbol{H}_F(P_0)=\begin{bmatrix} \frac{2}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & \frac{2}{c} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{2}{c} \end{bmatrix}.$$

由
$$\frac{2}{c}>0,\begin{bmatrix}\frac{2}{c} & \frac{1}{c}\\ \frac{1}{c} & \frac{2}{c}\end{bmatrix}=\frac{3}{c^2}>0,\quad \begin{bmatrix}\frac{2}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}\\ \frac{1}{c} & \frac{2}{c} & \frac{1}{c}\\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{2}{c}\end{bmatrix}=\frac{4}{c^3}>0$$
知,三阶黑赛矩阵$H_F(P_0)$是正定的. 故$P_1(c,c,c,c)$为$f(x,y,z,t)$在条件$xyzt=c^4$下的极小值点,其极小值为$f(c,c,c,c)=4c$.

(3) 令$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x+y+z)=0$,

则
$$\begin{cases}L_x=yz+2\lambda x+\mu=0, & ①\\ L_y=xz+2\lambda y+\mu=0, & ②\\ L_z=xy+2\lambda z+\mu=0, & ③\\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0, & ④\\ L_\mu=x+y+z=0, & ⑤\end{cases}$$
①×x+②×y+③×z,有
$$3xyz+2\lambda(x^2+y^2+z^2)+\mu(x+y+z)=3xyz+2\lambda=0,$$
解得
$$\lambda=-\frac{3}{2}xyz.$$
①+②+③,有
$$yz+xz+xy+2\lambda(x+y+z)+3\mu=yz+xz+xy+3\mu=0,$$
解得
$$\mu=-\frac{1}{3}(yz+xz+xy).$$
又①-②,①-③,②-③,得方程组
$$\begin{cases}z(x-y)(1+3xy)=0, & ⑥\\ x(y-z)(1+3zy)=0, & ⑦\\ y(z-x)(1+3xz)=0, & ⑧\end{cases}$$

为了解上述方程组,下面先证明:方程⑥、⑦、⑧成立,当且仅当$x-y=0$,$y-z=0$,$z-x=0$中只有一式成立.

若至少有两式成立,不妨设$x-y=0$,$y-z=0$,则$x=y=z$,于是由约束条件$x+y+z=0$得知$x=y=z=0$,这又与条件$x^2+y^2+z^2=1$相矛盾.

若都不成立,即$x-y\neq0$,$y-z\neq0$,$z-x\neq0$,则x,y,z都不为零. 因为若$x=0$,则由$x+y+z=0$和$x^2+y^2+z^2=1$知

$$y=z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}，\text{或 } yz=\pm\frac{1}{2}，$$

但 $x=0$ 时式⑥化为 $yz=0$，矛盾，故 x,y,z 均不为 0，于是有

$$1+3xy=0，\quad 1+3yz=0，\quad 1+3xz=0，$$

即

$$xy=yz=xz=-\frac{1}{3}，$$

从而 $x=y=z$，这又与 $1+3x^2=0$ 相矛盾.

综合上面的分析，要使方程组⑥、⑦、⑧成立，则 $x-y=0,y-z=0,z-x=0$ 中只能有一个式子成立.

现设 $x-y=0$，则 $y-z\neq0,z-x\neq0$，但

$$1+3zy=0，\quad 1+3xz=0，$$

所以 $x=y,yz=xz=-\frac{1}{3}$，又由方程⑤，有

$$\begin{cases}2x+z=0，\\ xz=-\dfrac{1}{3}，\end{cases}$$

解之，有

$$x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}，\quad z=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

同理，有

$$x=z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}，\quad y=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}；$$

$$y=z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}，\quad x=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

故得 6 个解

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)，\quad\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)，$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)，\quad\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)，$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)，\quad\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

设由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1，\\ x+y+z=0\end{cases}$ 确定隐函数 $y=y(x),z=z(x)$，则由

$$\begin{cases} 2x+2yy'+2zz'=0, \\ 1+y'+z'=0, \end{cases}$$

有
$$y'=\frac{z-x}{y-z}, \quad z'=\frac{x-y}{y-z},$$

$$y''=\frac{(y-z)(z'-1)-(z-x)(y'-z')}{(y-z)^2},$$

$$z''=\frac{(y-z)(1-y')-(x-y)(y'-z')}{(y-z)^2}.$$

又
$$f(x,y,z)=xyz,$$

$$f'=yz+xy'z+xyz',$$

$$f''=xy''z+xyz''+xy'z'+2y'z+2yz',$$

在 $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ 处,

$$y'=-1, \quad z'=0, \quad f'(P_1)=0,$$

$$y''\Big|_{P_1}=-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad z''\Big|_{P_1}=\frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$f''(P_1)=\frac{4}{\sqrt{6}}+\frac{2\sqrt{6}}{9}+\frac{2\sqrt{6}}{18}>0,$$

所以 P_1 为极小值点,极小值为 $f(P_1)=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$. 类似地,

$$P_2\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad P_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

也为极小值点,极小值

$$f(P_2)=f(P_3)=f(P_1)=-\frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

在 $P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ 处,

$$y'=-1, \quad z'=0, \quad f'(P_4)=0,$$

$$y''\Big|_{P_4}=\frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad z''\Big|_{P_4}=-\frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$f''(P_4)=-\frac{4}{\sqrt{6}}-\frac{2\sqrt{6}}{9}-\frac{2\sqrt{6}}{18}<0,$$

所以 P_4 为极大值点,极大值为 $f(P_4)=\frac{1}{3\sqrt{6}}$. 类似地,

$$P_5\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\quad P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

也为极大值点,极大值

$$f(P_5)=f(P_6)=f(P_4)=\frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

2. (1) 求表面积一定而体积最大的长方体;

(2) 求体积一定而表面积最小的长方体.

解　(1) 设长方体的长、宽、高分别为 x,y,z,则体积

$$V=xyz\ (x>0,y>0,z>0),$$

约束条件为

$$2xy+2xz+2yz=S\ (\text{表面积}).$$

令

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda(2xy+2xz+2yz-S),$$

由

$$\begin{cases}L_x=yz+2\lambda y+2\lambda z=0,\\ L_y=xz+2\lambda x+2\lambda z=0,\\ L_z=xy+2\lambda x+2\lambda y=0,\\ L_\lambda=2xy+2xz+2yz-S=0,\end{cases}$$

解之,有

$$x=y=z=\sqrt{\frac{S}{6}}.$$

依题意,所求长方体的体积在约束条件下确实存在最大值,所以边长为 $\sqrt{\frac{S}{6}}$ 的正方体的体积最大.

(2) 设长方体的长、宽、高分别为 x,y,z,则目标函数为

$$S=2xy+2xz+2yz\ (x>0,y>0,z>0),$$

约束条件为

$$V=xyz\ (\text{体积}\ V\ \text{为常数}).$$

令

$$L(x,y,z,\lambda)=2xy+2yz+2xz+\lambda(xyz-V),$$

由

$$\begin{cases}L_x=2y+2z+\lambda yz=0,\\ L_y=2x+2z+\lambda xz=0,\\ L_z=2x+2y+\lambda xy=0,\\ L_\lambda=xyz-V=0,\end{cases}$$

得 $$2xy+2xz=2xy+2yz,$$
所以 $$x=y.$$
同理有 $$y=z.$$
因而 $$x=y=z=\sqrt[3]{V}.$$
依题意,所求表面积最小的长方体确实存在,所以边长为 $\sqrt[3]{V}$ 的正方体表面积最小.

3. 求空间一点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的最短距离.

解　设 (x,y,z) 为平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上任意一点,则目标函数为
$$f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,$$
约束条件为 $$Ax+By+Cz+D=0.$$
令 $$L(x,y,z,\lambda)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda(Ax+By+Cz+D),$$
则
$$\begin{cases}L_x=2(x-x_0)+\lambda A=0, & ①\\ L_y=2(y-y_0)+\lambda B=0, & ②\\ L_z=2(z-z_0)+\lambda C=0, & ③\\ L_\lambda=Ax+By+Cz+D=0, & ④\end{cases}$$
①×A+②×B+③×C,有
$$2(Ax+By+Cz)-2(Ax_0+By_0+Cz_0)+\lambda(A^2+B^2+C^2)=0,$$
解之,有 $$\lambda_0=\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2},$$
从而有 $$x_1=x_0-\frac{A}{2}\lambda_0,\quad y_1=y_0-\frac{B}{2}\lambda_0,\quad z_1=z_0-\frac{C}{2}\lambda_0.$$
依题意,点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 确实存在最短距离,且为
$$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4. 证明:在 n 个正数的和为定值条件
$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a$$
下,这 n 个正数的乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值为 $\frac{a^n}{n^n}$. 并由此结果推出 n 个正数的几何中值不大于算术中值

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

证　目标函数为 $\quad f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n,$

约束条件为 $$x_1+x_2+\cdots+x_n=a.$$

令 $\quad L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=x_1x_2\cdots x_n+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-a),$

由
$$\begin{cases}L_{x_i}=x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n+\lambda=0,\ i=1,2,\cdots,n,\\ L_\lambda=x_1+x_2+\cdots+x_n-a=0,\end{cases}$$

有 $$x_1x_2\cdots x_n+\lambda x_i=0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

所以 $\quad n(x_1x_2\cdots x_n)+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)=n(x_1x_2\cdots x_n)+\lambda a=0,$

$$\lambda=-\frac{n(x_1x_2\cdots x_n)}{a},$$

即 $$x_1x_2\cdots x_{i-1}x_i\cdots x_n-\frac{n(x_1x_2\cdots x_n)}{a}=0,$$

$$x_i=\frac{a}{n},\ i=1,2,\cdots,n.$$

依题意，n **个正数** $x_1,x_2,\cdots,x_n$ **的乘积** $x_1x_2\cdots x_n$ **确实有最大值，且为** $\frac{a^n}{n^n}$.

因为对任何正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，**当** $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ **时，有**

$$x_1x_2\cdots x_n\leqslant\frac{a^n}{n^n},$$

所以 $$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{a}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

5. **设** $a_1,a_2,\cdots,a_n$ **为已知的** n **个正数，求**

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$$

在限制条件 $$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant1$$

下的最大值.

解　因为 $$\frac{\partial f}{\partial x_i}=a_i>0,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

所以 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ **在** n **维单位球** $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$ **内无稳定点，因而在此球内部** f **不取最大值，即** f **的最大值应在边界** $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ **上达到.**

令 $\quad L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k+\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1),$

由
$$\begin{cases} L_{x_k}=a_k+2\lambda x_k=0, \\ L_\lambda=\sum_{k=1}^n x_k^2-1=0. \end{cases} \quad k=1,2,\cdots,n,$$

可得
$$\lambda>0,\quad x_k=-\frac{a_k}{2\lambda},$$

从而有
$$\frac{1}{4\lambda^2}\sum_{k=1}^n a_k^2=1,$$
$$\lambda=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}.$$

所以
$$x_k=\frac{a_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}} \quad 或 \quad x_k=-\frac{a_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}},\ k=1,2,\cdots,n.$$

故 f 在限制条件 $\sum_{k=1}^n x_k^2\leqslant 1$ 下的最大值为$\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}$,最小值为$-\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}$.

6. 求函数
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

在条件
$$\sum_{k=1}^n a_kx_k=1\quad(a_k>0,k=1,2,\cdots,n)$$

下的最小值.

解 令 $$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=\sum_{k=1}^n x_k^2+\lambda\left(\sum_{k=1}^n a_kx_k-1\right),$$

由
$$\begin{cases} L_{x_k}=2x_k+\lambda a_k=0,\ k=1,2,\cdots,n, \\ L_\lambda=\sum_{k=1}^n a_kx_k-1=0, \end{cases}$$

可得
$$2\sum_{k=1}^n a_kx_k+\lambda\sum_{k=1}^n a_k^2=2+\lambda\sum_{k=1}^n a_k^2=0,\quad \lambda=-\frac{2}{\sum_{k=1}^n a_k^2}.$$

所以
$$x_k=-\frac{1}{2}\lambda a_k=\frac{a_k}{\sum_{k=1}^n a_k^2},\ k=1,2,\cdots,n.$$

因为 f 有下界 0,所以 f 存在最小值,且为$\dfrac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2}$.

§5　总 练 习 题

1. **方程** $y^2-x^2(1-x^2)=0$ **在哪些点的邻域内可惟一地确定连续可导的隐函数** $y=f(x)$?

解　令 $$F(x,y)=y^2-x^2(1-x^2),$$

因为 $$F_x=4x^3-2x,\quad F_y=2y$$

在 $\mathbf{R}^2$ **连续,又当** $y\neq 0$ **时,** $F_y=2y\neq 0$**,所以**

$$F(x,y)=y^2-x^2(1-x^2)=0,$$

在 $(x,y)\in D=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\neq 0\}$ **的邻域内可惟一地确定连续可导的隐函数** $y=f(x)$.

2. **设函数** $f(x)$ **在区间** (a,b) **内连续,函数** $\varphi(y)$ **在区间** (c,d) **内连续,而且** $\varphi'(y)>0$. **问在怎样条件下,方程**

$$\varphi(y)=f(x)$$

能确定函数 $$y=\varphi^{-1}(f(x)).$$

并研究例子: (1) $\sin y+\operatorname{sh}y=x$;　(2) $\mathrm{e}^{-y}=-\sin^2 x$.

解　此题主要用隐函数存在惟一性定理来讨论.

设 $F(x,y)=\varphi(y)-f(x),(x,y)\in D=\{(x,y)\mid a<x<b,c<y<d\}$,

若① $F(x,y)$ **在以** $P_0(x_0,y_0)$ **为内点的区域** $D\subset\mathbf{R}^2$ **上连续(由已知条件满足);**

② **要满足初始条件** $F(x_0,y_0)=0$**,则要求对** $\forall a<x<b,\exists c<y<d$ **使** $\varphi(y)-f(x)=0$;

③ **要满足在** D **内存在连续的偏导数** $F_y=\varphi'(y)$**,则要求** $\varphi'(y)$ **在** (c,d) **内连续;**

④ $F_y(x_0,y_0)\neq 0$**,由已知条件** $F_y(x_0,y_0)=\varphi'(y_0)>0$ **满足.**

综合上述,当对 $\forall x\in(a,b),\exists y\in(c,d)$ **使** $\varphi(y)-f(x)=0$**,且** $\varphi'(y)$ **在** (c,d) **内连续时,在这样的点** $P(x,y)$ **的某邻域** $U(P)\subset D$ **内时,方程** $\varphi(y)=f(x)$ **能确定函数** $y=\varphi^{-1}(f(x))$.

例子: (1) $\sin y+\operatorname{sh}y=x$.

令 $$\varphi(y)=\sin y+\operatorname{sh} y,\quad f(x)=x,$$
因为 $f(x)=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$\varphi(y)=\sin y+\operatorname{sh} y$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$\varphi'(y)=\cos y+\operatorname{ch} y>0$ 且连续，由于 $\varphi(y)$ 的值域为 $(-\infty,+\infty)$，故对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\exists y\in(-\infty,+\infty)$ 使 $\varphi(y)=f(x)$，所以由上面的讨论知方程

$$\sin y+\operatorname{sh} y=x$$

能确定隐函数

$$y=\varphi^{-1}(f(x)).$$

(2) $$\mathrm{e}^{-y}=-\sin^2 x.$$

令 $$\varphi(y)=\mathrm{e}^{-y},\quad f(x)=-\sin^2 x,$$
因为 $\varphi(y)=\mathrm{e}^{-y}>0$，$f(x)\leqslant 0$，所以等式 $\varphi(y)=f(x)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 内不成立，故不能确定隐函数.

3. 设 $f(x,y,z)=0$，$z=g(x,y)$，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 由 $f(x,y,z)=0$，$g(x,y)-z=0$，有

$$\begin{cases} f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z=0, \\ g_x\mathrm{d}x+g_y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=0, \end{cases}$$

解之，有
$$\mathrm{d}y=\frac{\begin{vmatrix} -f_x\mathrm{d}x & f_z \\ -g_x\mathrm{d}x & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-(f_x+f_zg_x)}{f_y+f_zg_y}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\begin{vmatrix} f_y & -f_x\mathrm{d}x \\ g_y & -g_x\mathrm{d}x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & -1 \end{vmatrix}}=\frac{f_yg_x-f_xg_y}{f_y+f_zg_y}\mathrm{d}x,$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{f_x+f_zg_x}{f_y+f_zg_y},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{f_yg_x-f_xg_y}{f_y+f_zg_y}.$$

4. 已知 $G_1(x,y,z)$，$G_2(x,y,z)$，$f(x,y)$ 都是可微的，

$$g_i(x,y)=G_i(x,y,f(x,y)),\ i=1,2.$$

证明：
$$\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} -f_x & -f_y & 1 \\ G_{1x} & G_{1y} & G_{1z} \\ G_{2x} & G_{2y} & G_{2z} \end{vmatrix}.$$

证　因为 $\dfrac{\partial g_i}{\partial x}=G_{ix}+G_{iz}f_x$，$\dfrac{\partial g_i}{\partial y}=G_{iy}+G_{iz}f_y$，$i=1,2$，

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x,y)}&=\begin{vmatrix}G_{1x}+G_{1z}f_x & G_{1y}+G_{1z}f_y\\ G_{2x}+G_{2z}f_x & G_{2y}+G_{2z}f_y\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}G_{1x} & G_{1y}+G_{1z}f_y\\ G_{2x} & G_{2y}+G_{2z}f_y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}G_{1z}f_x & G_{1y}+G_{1z}f_y\\ G_{2z}f_x & G_{2y}+G_{2z}f_y\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}G_{1x} & G_{1y}\\ G_{2x} & G_{2y}\end{vmatrix}+f_y\begin{vmatrix}G_{1x} & G_{1z}\\ G_{2x} & G_{2z}\end{vmatrix}+f_x\begin{vmatrix}G_{1z} & G_{1y}\\ G_{2z} & G_{2y}\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}-f_x & -f_y & 1\\ G_{1x} & G_{1y} & G_{1z}\\ G_{2x} & G_{2y} & G_{2z}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

5. 设 $x=f(u,v,w)$，$y=g(u,v,w)$，$z=h(u,v,w)$，**求**

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z}.$$

解　在 $x=f(u,v,w)$，$y=g(u,v,w)$，$z=h(u,v,w)$**中，将** u,v,w **看作** x，y,z **的三元函数，并对** x **求偏导数，有**

$$\begin{cases}1=f_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_v\dfrac{\partial v}{\partial x}+f_w\dfrac{\partial w}{\partial x},\\[2ex] 0=g_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g_v\dfrac{\partial v}{\partial x}+g_w\dfrac{\partial w}{\partial x},\\[2ex] 0=h_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+h_v\dfrac{\partial v}{\partial x}+h_w\dfrac{\partial w}{\partial x},\end{cases}$$

解之，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}}{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}},$$

同理，有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(f,h)}{\partial(v,w)}}{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}}{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}}.$$

6. 试求下列方程所确定的函数的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$：

（1）$x^2+u^2=f(x,u)+g(x,y,u)$；

（2）$u=f(x+u,yu)$.

解　(1) **令** $F(x,y,u)=x^2+u^2-f(x,u)-g(x,y,u)$,

因为
$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-f_1'-g_1',\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-g_2',\quad \frac{\partial F}{\partial u}=2u-f_2'-g_3'$$

所以
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}=\frac{2x-f_1'-g_1'}{f_2'+g_3'-2u},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}=\frac{-g_2'}{f_2'+g_3'-2u}.$$

(2) **令**
$$F(x,y,u)=u-f(x+u,yu),$$

因为
$$F_x=-f_1',\quad F_y=-uf_2',\quad F_u=1-f_1'-yf_2',$$

所以
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_u}=\frac{f_1'}{1-f_1'-yf_2'},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_u}=\frac{uf_2'}{1-f_1'-yf_2'}.$$

7. 据理说明:在点$(0,1)$**近旁是否存在连续可微的**$f(x,y)$**和**$g(x,y)$**,满足**$f(0,1)=1$,$g(0,1)=-1$,**且**
$$[f(x,y)]^3+xg(x,y)-y=0,$$
$$[g(x,y)]^3+yf(x,y)-x=0.$$

解　**此题用隐函数组定理讨论.**

令
$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=u^3+xv-y=0\\G(x,y,u,v)=v^3+yu-x=0\end{cases}\qquad ①$$

由于
$$F_x=v,\quad F_y=-1,\quad F_u=3u^2,\quad F_v=x,$$
$$G_x=-1,\quad G_y=u,\quad G_u=y,\quad G_v=3v^2,$$

则方程组①满足:

i) F,G **在以点** $P_0(0,1,1,-1)$**为内点的区域即** $\mathbf{R}^4$ **上连续;**

ii) $F(P_0)=0$,$G(P_0)=0$;

iii) **在** $\mathbf{R}^4$ **上具有一阶连续偏导数;**

iv) $J=\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix}3u^2 & x\\ y & 3v^2\end{vmatrix}\right|_{P_0}=(9u^2v^2-xy)\Big|_{P_0}=9>0.$

所以方程组①惟一确定了定义在点$Q_0(0,1)$的某一(二维空间)邻域$U(Q_0)$内的两个二元函数

$$u=f(x,y),\quad v=g(x,y),$$

使得

1° $1=f(0,1)$，$-1=g(0,1)$，且当$(x,y)\in U(Q_0)$时，

$$(x,y,f(x,y),g(x,y))\in U(P_0),$$

$$F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,$$

$$G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0;$$

2° $f(x,y)$，$g(x,y)$在$U(Q_0)$内连续且存在一阶连续偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{3v^3+x}{9u^2v^2-xy},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=\frac{3u^2+yv}{9u^2v^2-xy},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=\frac{3v^2+xu}{9u^2v^2-xy},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{3u^3+y}{9u^2v^2-xy}.$$

8．设(x_0,y_0,z_0,u_0)满足方程组

$$f(x)+f(y)+f(z)=F(u),$$

$$g(x)+g(y)+g(z)=G(u),$$

$$h(x)+h(y)+h(z)=H(u),$$

这里所有的函数假定有连续的导数.

(1) 说出一个能在该点邻域内确定x,y,z为u的函数的充分条件；

(2) 在$f(x)=x$，$g(x)=x^2$，$h(x)=x^3$的情形下，上述条件相当于什么？

解　(1) 令 $$\begin{cases}F_1(x,y,z,u)=f(x)+f(y)+f(z)-F(u),\\ G_1(x,y,z,u)=g(x)+g(y)+g(z)-G(u),\\ H_1(x,y,z,u)=h(x)+h(y)+h(z)-H(u).\end{cases}$$

由隐函数组定理知，所给方程组在该点邻域内确定x,y,z为u的函数的充分条件为

$$\left.\frac{\partial(F_1,G_1,H_1)}{\partial(x,y,z)}\right|_{(x_0,y_0,z_0,u_0)}=\begin{vmatrix}f'(x_0) & f'(y_0) & f'(z_0)\\ g'(x_0) & g'(y_0) & g'(z_0)\\ h'(x_0) & h'(y_0) & h'(z_0)\end{vmatrix}\neq 0.$$

(2) 在 $f(x)=x, g(x)=x^2, h(x)=x^3$ 的情形下,上述条件相当于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 3x_0^2 & 3y_0^2 & 3z_0^2 \end{vmatrix}=6(y_0-x_0)(z_0-x_0)(z_0-y_0)\neq 0,$$

即 x_0, y_0, z_0 为互不相等的三个数.

9. 求由下列方程所确定的隐函数的极值:

(1) $x^2+2xy+2y^2=1$;

(2) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a>0)$.

解 (1) 令
$$F(x,y)=x^2+2xy+2y^2-1,$$
由
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x+y}{x+2y}=0,$$
得
$$y=-x,$$
代入原方程,有
$$x^2=1,$$
所以稳定点为 $(1,-1),(-1,1)$.

又
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{(x+2y)(1+y')-(x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2}=\frac{xy'-y}{(x+2y)^2},$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{(1,-1)}=1>0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{(-1,1)}=-1<0,$$
所以极小值为 $y(1)=-1$,极大值 $y(-1)=1$.

(2) 令
$$F(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2),$$
由
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{a^2x-2x(x^2+y^2)}{2y(x^2+y^2)+a^2y}=0,$$
得方程组
$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2}, \\ (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2}, \\ x^2-y^2=\dfrac{1}{4}a^2, \end{cases}$$
解之,有
$$x=\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a,\quad y=\pm\sqrt{\frac{1}{8}}a.$$

又
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{a^2-a^2(y')^2-4(x+yy')^2-2(x^2+y^2)(1+(y')^2)}{2y(x^2+y^2)+a^2y},$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{\left(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a,\ \sqrt{\frac{1}{8}}a\right)}=-\frac{3}{\sqrt{2}\,a}<0,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{\left(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a,-\sqrt{\frac{1}{8}}a\right)}=\frac{3}{\sqrt{2}a}>0,$$

所以极大值为$\sqrt{\frac{1}{8}}a$,极小值为$-\sqrt{\frac{1}{8}}a$.

10. 设 $y=F(x)$和一组函数 $x=\varphi(u,v)$,$y=\psi(u,v)$,那么由方程 $\psi(u,v)=F(\varphi(u,v))$可以确定函数 $v=v(u)$. 试用 $u,v,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u},\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}$表示$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　由 $x=\varphi(u,v)$,$y=\psi(u,v)$,有

$$\mathrm{d}x=\varphi_u\mathrm{d}u+\varphi_v\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}y=\psi_u\mathrm{d}u+\psi_v\mathrm{d}v,$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi_u\mathrm{d}u+\psi_v\mathrm{d}v}{\varphi_u\mathrm{d}u+\varphi_v\mathrm{d}v}=\frac{\psi_u+\psi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}}{\varphi_u+\varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}},$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\psi_u+\psi_v v_u)\right](\varphi_u+\varphi_v v_u)^{-1}+(\psi_u+\psi_v v_u)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_u+\varphi_v v_u)^{-1}\\&=(\varphi_u+\varphi_v v_u)^{-1}[\psi_{uu}u_x+\psi_{uv}v_u u_x+\psi_{vu}u_x v_u+\psi_{vv}(v_u)^2u_x+\psi_v v_{uu}u_x]\\&\quad-(\psi_u+\psi_v v_u)(\varphi_u+\varphi_v v_u)^{-2}[\varphi_{uu}u_x+\varphi_{uv}v_u u_x+\varphi_{vu}v_u u_x\\&\quad+\varphi_{vv}(v_u)^2u_x+\varphi_v v_{uu}u_x].\end{aligned}$$

由
$$1=\varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

有
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\varphi_u+\varphi_v v_u},$$

则
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=&\left(\varphi_u+\varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^{-3}\left\{\left(\varphi_u+\varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)\left[\psi_{uu}+2\psi_{uv}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+\psi_{vv}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2+\psi_v\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}\right]\right.\\&\left.-\left(\psi_u+\psi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)\left[\varphi_{uu}+2\varphi_{uv}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+\varphi_{vv}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2+\varphi_v\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}\right]\right\}.\end{aligned}$$

11. 试证明:二次型

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$$

在单位球面
$$x^2+y^2+z^2=1$$

上的最大值和最小值恰好是矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}A&F&E\\F&B&D\\E&D&C\end{bmatrix}$$

的最大特征值和最小特征值.

证　令

$$F(x,y,z,\lambda)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy-\lambda(x^2+y^2+z^2-1),$$

于是
$$\begin{cases}L_x=2Ax+2Ez+2Fy-2\lambda x=2[(A-\lambda)x+Fy+Ez]=0, & ①\\ L_y=2By+2Dz+2Fx-2\lambda y=2[Fx+(B-\lambda)y+Dz]=0, & ②\\ L_z=2Cz+2Dy+2Ex-2\lambda z=2[Ex+Dy+(C-\lambda)z]=0, & ③\\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0. & ④\end{cases}$$

由①$\times x+$②$\times y+$③$\times z$,有

$$\lambda=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=f(x,y,z).$$

所以$f(x,y,z)$在$x^2+y^2+z^2=1$上取的最大值、最小值即为参数λ的取值. 另一方面,由条件$x^2+y^2+z^2=1$知,x,y,z不全为零,故线性齐次方程组中的①、②、③有非零解的充要条件为

$$\begin{vmatrix}A-\lambda & F & E\\ F & B-\lambda & D\\ E & D & C-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

即λ为矩阵$\boldsymbol{\Phi}$的特征值. 所以矩阵$\boldsymbol{\Phi}$的最大特征值和最小特征值亦为$f(x,y,z)$在$x^2+y^2+z^2=1$上的最大值和最小值.

12. 设n为正整数,$x,y>0$. 用条件极值法证明:

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

证　由于$n=1$时,左边=右边;$n=2$时,利用$x^2+y^2\geqslant 2xy$,即得

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

所以下面讨论$n\geqslant 3$的情况.

设
$$f(x,y)=\frac{x^n+y^n}{2},$$

约束条件为$x+y=a$.

令
$$F(x,y,\lambda)=\frac{x^n+y^n}{2}+\lambda(x+y-a),$$

由
$$\begin{cases} L_x=\dfrac{n}{2}x^{n-1}+\lambda=0, \\ L_y=\dfrac{n}{2}y^{n-1}+\lambda=0, \\ L_\lambda=x+y-a=0, \end{cases}$$

解出 $x=y=\dfrac{a}{2}$，稳定点为 $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$.

因为
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=f'_x+f'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'_x-f'_y=\frac{n}{2}x^{n-1}-\frac{n}{2}y^{n-1},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}=\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}-\frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{n(n-1)}{2}(x^{n-2}+y^{n-2}),$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)}=\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2}>0.$$

而稳定点是惟一点，所以极小值
$$f\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^n+\left(\frac{a}{2}\right)^n\right]=\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

也是 $f(x,y)$ 的最小值．从而对 $\forall x>0,y>0,f(x,y)\geqslant f\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$，即
$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

13. 求出椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限中的切平面与三个坐标面所成四面体的最小体积.

解　设 $P_0(x_0,y_0,z_0)(x_0,y_0,z_0>0)$ 为切点，令
$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$

因为
$$F_x(P_0)=\frac{2}{a^2}x_0,\quad F_y(P_0)=\frac{2}{b^2}y_0,\quad F_z(P_0)=\frac{2}{c^2}z_0,$$

所以椭球面在 P_0 处的切平面方程为
$$\frac{2}{a^2}x_0(x-x_0)+\frac{2}{b^2}y_0(y-y_0)+\frac{2}{c^2}z_0(z-z_0)=0,$$

即
$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

分别令 $y=z=0,x=z=0,x=y=0$，则得切平面在 x 轴，y 轴，z 轴上的截距分别为

$$\frac{a^2}{x_0},\quad \frac{b^2}{y_0},\quad \frac{c^2}{z_0}.$$

所以四面体的体积即目标函数为

$$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{6}\ \frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0},$$

约束条件为

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1.$$

令 $F(x_0,y_0,z_0,\lambda)=\frac{1}{6}a^2b^2c^2\ \frac{1}{x_0y_0z_0}+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)$，

则
$$\begin{cases} L_{x_0}=-\dfrac{d}{x_0^2y_0z_0}+\dfrac{2\lambda x_0}{a^2}=0, & ① \\ L_{y_0}=-\dfrac{d}{x_0y_0^2z_0}+\dfrac{2\lambda y_0}{b^2}=0, & ② \\ L_{z_0}=-\dfrac{d}{x_0y_0z_0^2}+\dfrac{2\lambda z_0}{c^2}=0, & ③ \\ L_\lambda=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}-1=0, & ④ \end{cases}$$

其中
$$d=\frac{1}{6}a^2b^2c^2.$$

由①$\times x_0+$②$\times y_0+$③$\times z_0$ 有

$$2\lambda=\frac{3d}{x_0y_0z_0},$$

将上式代入式①，有

$$-\frac{d}{x_0^2y_0z_0}+\frac{x_0}{a^2}\ \frac{3d}{x_0y_0z_0}=0,$$

即
$$\frac{3x_0^2}{a^2}=1,$$

故
$$x_0=\frac{a}{\sqrt{3}}\ (x_0>0).$$

同理
$$y_0=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad z_0=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

依题意，四面体一定存在最小体积，且为

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

14. 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 $F(x,y,z)=1$ 的非奇异点，F 在 $U(P_0)$ 可微，且为 n 次齐次函数．证明：此曲面在 P_0 处的切平面方程为

$$xF_x(P_0)+yF_y(P_0)+zF_z(P_0)=n.$$

证　因 $F(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数，故

$$F(tx,ty,tz)=t^nF(x,y,z),$$

两边对 t 求导，有

$$xF_{tx}+yF_{ty}+zF_{tz}=nt^{n-1}F(x,y,z).$$

令 $t=1$，并以 P_0 代之，有

$$x_0F_x(P_0)+y_0F_y(P_0)+z_0F_z(P_0)=nF(P_0).$$

又由于曲面 $F(x,y,z)-1=0$ 在 P_0 处切平面的法向量

$$\boldsymbol{n}=(F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0)),$$

故切平面方程为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0.$$

即
$$xF_x(P_0)+yF_y(P_0)+zF_z(P_0)=n.$$

第十九章　含参量积分

知 识 要 点

1. 与无穷级数一样,含参量积分是构造新函数的重要工具. 它既可表示初等函数,也可定义非初等函数. 本章重点讨论在什么条件下含参量积分具有三个分析性质:连续性、可积性和可微性. 它们同样反映了两种极限运算的换序问题.

2. 含参量的常义积分$I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y, x\in[a,b]$,**在被积函数**$f(x,y)$**在**$[a,b]\times[c,d]$**上连续时连续、可积,且**

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)\mathrm{d}y,\quad x_0\in[a,b],$$

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

若$f(x,y)$**及其偏导数**$f_x(x,y)$**在**$[a,b]\times[c,d]$**上连续,则**$I(x)$**在**$[a,b]$**上可微,且**$\forall\ x\in[a,b]$,**有**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y+f(x,\mathrm{d}(x))d'(x)-f(x,c(x))c'(x),$$

其中,$c(x),d(x)$**在**$[a,b]$**上可微,且**$c\leqslant c(x),d(x)\leqslant d$.

3. 含参量积分的可微性与可积性丰富了定积分的计算方法. 通过引进参数,交换运算顺序,如积分号下微分法,积分号下积分法等,可以解决一些不能求出原函数(即原函数不是初等函数)的积分计算问题.

4. 对于不定积分,若

$$\int f(x,y)\mathrm{d}y=F(x,y)+C,$$

则对 x 求导有

$$\int f_x(x,y)\mathrm{d}y=F_x(x,y)+C_1,$$

其中，$f_x(x,y)$，$F_x(x,y)$均假设存在.

5. 对于含参量的反常积分的连续性、可微性或可积性，即极限与积分、求导与积分及积分与积分之间次序的可交换性，除被积函数满足连续条件外还需一致收敛的条件（这与函数项级数类似，毕竟积分是求和的推广）.

6. 含参量反常积分一致收敛的判定是与函数项级数一致收敛的判定是平行的，它有

(1) 柯西一致收敛准则；

(2) M 判别法（优函数判别法）；

(3) 阿贝尔判别法与狄利克雷判别法；

(4) 余积分准则 $\lim\limits_{M\to+\infty}\sup\limits_{x\in I}\left|\int_M^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right|=0$ 或

$\lim\limits_{M\to d}\sup\limits_{x\in I}\left|\int_M^{d}f(x,y)\mathrm{d}y\right|=0$ （其中，$y=d$ 为 $f(x,y)$的瑕点）；

(5) 一致收敛的定义.

7. 欧拉积分

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,s>0;$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,p>0,q>0.$$

在理论和实践上的地位仅次于初等函数，应用十分广泛. 它们分别在其定义域上连续且有连续的导数或偏导数. 其重要性质有

(1) 递推公式：$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$（特别 $\Gamma(n+1)=n!$ $(n\in\mathbf{N})$）；

(2) 余元公式：$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}$ $(0<\alpha<1)$；

(3) 倍元公式：$\Gamma(2\alpha)=\dfrac{2^{2\alpha-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)$ $(\alpha>0)$；

(4) 对称性：$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$；

(5) 转换公式：$\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

重要常数有 $$\Gamma(1)=1,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

8. 对于积分的计算,有时我们能得到具体的积分值,有时则不能.当后一情形发生时,常将其表达成某些特殊函数(如欧拉积分)的函数值.

习 题 详 解

§1 含参量正常积分

1. 设$f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$(**这个函数在**$x=y$**时不连续**),**试证由含参量积分**

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

所确定的函数在$(-\infty,+\infty)$**上连续,并作函数**$F(y)$**的图象.**

解 (1) **当**$y<0$**时,因为**$0\leqslant x\leqslant 1$,**所以**

$$x-y>0,\quad \operatorname{sgn}(x-y)=1,$$

故 $$F(y)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1 1\mathrm{d}x=1.$$

(2) **当**$0\leqslant y\leqslant 1$**时,**

$$\begin{aligned}F(y)&=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^y \operatorname{sgn}(x-y)\mathrm{d}x+\int_y^1 \operatorname{sgn}(x-y)\\&=\int_0^y(-1)\mathrm{d}x+\int_y^1 1\mathrm{d}x=1-2y.\end{aligned}$$

(3) **当**$y>1$**时,**

$$\begin{aligned}F(y)&=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(-1)\mathrm{d}x=-1.\end{aligned}$$

故 $$F(y)=\begin{cases}1, & y<0,\\ 1-2y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ -1, & y>1.\end{cases}$$

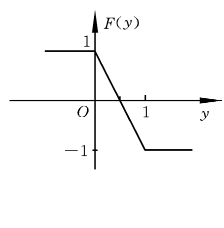

图 19-1

函数$F(y)$**的图象如图** 19-1 **所示.**

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$.

解　(1) 记 $f(x,\alpha)=\sqrt{x^2+\alpha^2}$，由于 $f(x,\alpha)=\sqrt{x^2+\alpha^2}$ 在区域 $D=[-1,1]\times[-1,1]$ 上连续，根据定理 19.1，有

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\lim_{\alpha\to 0}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x=1.$$

(2) 记 $f(x,\alpha)=x^2\cos\alpha x$，由于 $f(x,\alpha)=x^2\cos\alpha x$ 在区域 $D=[0,2]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，根据定理 19.1，有

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\lim_{\alpha\to 0}x^2\cos\alpha x=\int_{0}^{2}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

3. 设 $F(x)=\int_{x}^{x^2}\mathrm{e}^{-xy^2}\,\mathrm{d}y$，**求** $F'(x)$.

解　记 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy^2}$，则

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy^2},\quad f_x(x,y)=-y^2\mathrm{e}^{-xy^2}$$

在 $\mathbf{R}^2$ 上连续，根据定理 19.4，有

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_{x}^{x^2}f_x(x,y)\,\mathrm{d}y+f(x,x^2)(x^2)'-f(x,x)\\&=-\int_{x}^{x^2}y^2\mathrm{e}^{-xy^2}\,\mathrm{d}y+2x\mathrm{e}^{-x^5}-\mathrm{e}^{-x^3}.\end{aligned}$$

4. 应用对参量的微分法，求下列积分：

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,\mathrm{d}x\ (a^2+b^2\neq 0)$；

(2) $\int_{0}^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为

$$\begin{aligned}&a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\\&=a^2(1-\cos^2x)+b^2\cos^2x=a^2-(a^2-b^2)\cos^2x\\&=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}\cdot 2\cos^2x+\frac{a^2-b^2}{2}\\&=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{a^2-b^2}{2}\cos 2x,\end{aligned}$$

所以

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{a^2-b^2}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(1-\alpha\cos x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$\alpha=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\quad 0\leqslant|\alpha|\leqslant 1.$$

令

$$I(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(1-\alpha\cos x)\mathrm{d}x,$$

则当 $0<|\alpha|<1$ **时，有**

$$I'(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{-\cos x}{1-\alpha\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{1-\alpha\cos x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}\frac{1}{1-\alpha\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\tan\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

由于 $I(0)=0$**，所以**

$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha}I'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_0^{\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$=\pi\left[\ln|\alpha|+\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{|\alpha|}\right]\Bigg|_0^{\alpha}$$

$$=\pi\ln(1+\sqrt{1-\alpha^2})\Big|_0^{\alpha}=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}.$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{\pi}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{\pi}{2}\ln\left\{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

(2) **利用**(1)**中** $I(\alpha)$ **的计算结果，有**

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\ln\left[(1+a^2)\left(1-\frac{2a}{1+a^2}\cos x\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\pi\ln(1+a^2)+\int_0^{\pi}\ln\left[\left(1-\frac{2a}{1+a^2}\right)\cos x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\pi\ln(1+a^2)+\pi\ln\left\{\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2}\right]\right\}$$

$$=\pi\ln(1+a^2)+\pi\ln\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{|1-a|}{1+a^2}\right)\right]$$

$$=\pi\ln\left[\frac{1}{2}(1+a^2)\left(1+\frac{|1-a|}{1+a^2}\right)\right]$$

$$=\begin{cases}0, & |a|\leqslant 1,\\ \pi\ln a^2, & |a|>1.\end{cases}$$

5. 应用积分号下的积分法，求下列积分：

(1) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ (b>a>0)$；

(2) $\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ (b>a>0)$.

解　(1) **因为** $\int_a^b x^y dy=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$**，所以**

$$I=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1 dx\int_a^b \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot x^y dy.$$

由于　$\left|\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\leqslant 1,\quad \lim\limits_{x\to 0^+}x^y=0,\quad \lim\limits_{x\to 0^+}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot x^y=0,$

所以被积函数

$$f(x,y)=x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)$$

可视为$[0,1]\times[a,b]$**上的连续函数，则由定理**19.6**，有**

$$I=\int_a^b dy\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot x^y dx.$$

又因为　$J=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot x^y dx=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{y+1}x^{y+1}\right)$

$$=\left[\frac{1}{y+1}x^{y+1}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]\Bigg|_0^1+\int_0^1\frac{1}{y+1}x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{y+1}\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{y+1}x^{y+1}\right)$$

$$=\left[\frac{1}{(y+1)^2}x^{y+1}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{1}{(y+1)^2}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot x^y dx$$

$$=\frac{1}{(y+1)^2}-\frac{1}{(y+1)^2}J,$$

所以

$$J=\frac{1}{1+(y+1)^2}.$$

故

$$I=\int_a^b\frac{1}{1+(y+1)^2}dy=\arctan(b+1)-\arctan(a+1).$$

(2) 因为$\int_a^b x^y \mathrm{d}y=\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}$,所以

$$I=\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}y.$$

由于 $\left|\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\right|\leqslant 1,\quad \lim\limits_{x\to 0^+}x^y=0,\quad \lim\limits_{x\to 0^+}x^y\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)=0,$

所以被积函数

$$f(x,y)=x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right),$$

可视为$[0,1]\times[a,b]$上的连续函数,则由定理19.6,有

$$I=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

又因为

$$\begin{aligned}J&=\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{y+1}x^{y+1}\right)\\&=\left[\frac{1}{y+1}x^{y+1}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{1}{y+1}x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y+1}\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{y+1}x^{y+1}\right)\\&=\frac{1}{y+1}-\left[\frac{1}{(y+1)^2}x^{y+1}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]\Bigg|_0^1\\&\quad-\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{y+1}-\frac{1}{(y+1)^2}J,\end{aligned}$$

所以

$$J=\frac{y+1}{1+(y+1)^2}.$$

故

$$I=\int_a^b\frac{y+1}{1+(y+1)^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+(b+1)^2}{1+(a+1)^2}.$$

6. 试求累次积分:

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\quad 与\quad\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x,$$

并指出它们为什么与定理19.6的结果不符.

解 因为

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y&=\int_0^1\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}y-\int_0^1\frac{y}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}(x^2+y^2)\end{aligned}$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}y+\int_0^1 y\mathrm{d}\,\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}y+\frac{y}{x^2+y^2}\bigg|_0^1-\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{1+x^2},$$

所以 $$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\bigg|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

同理 $$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$$

两个累次积分不相等的原因是 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在原点 $(0,0)$ 处极限不存在，故 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续性条件不满足.

7. 研究函数 $F(y)=\displaystyle\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 的连续性，其中 $f(x)$ 在闭区间上是正的连续函数.

解　(1) 当 $y\neq 0$ 时，因为 $g(x,y)=\dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}$ 在矩形域

$$R=[0,1]\times[c,d]\ \text{或}\ R=[0,1]\times[-d,-c]\ (0<c<d)$$

上连续，所以由定理 19.1 知

$$F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

当 $y\neq 0$ 时连续.

(2) 当 $y=0$ 时，因为正的连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值 $m>0$，所以

$$\Delta F=F(0+\Delta y)-F(0)=F(\Delta y)=\int_0^1 \frac{\Delta y f(x)}{x^2+(\Delta y)^2}\mathrm{d}x\geqslant m\int_0^1 \frac{\Delta y}{x^2+(\Delta y)^2}\mathrm{d}x$$

$$=m\cdot\arctan\frac{x}{\Delta y}\bigg|_0^1=m\arctan\frac{1}{\Delta y},$$

而 $$\lim_{\Delta y\to 0^+}\Delta F=\lim_{\Delta y\to 0^+} m\arctan\frac{1}{\Delta y}=\frac{m\pi}{4}>0,$$

因此，$F(y)$ 在 $y=0$ 处不连续.

8. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,A]$ 上连续，证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t=f(x)-f(a)\ (a<x<A).$$

证　记 $I(h)=\int_a^x f(t+h)\mathrm{d}t$，则

$$I(h)=\int_a^x f(t+h)\mathrm{d}t=\int_{a+h}^{x+h} f(u)\mathrm{d}u,$$

$$I(0)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$I'(h)=f(x+h)-f(a+h),\quad I'(0)=f(x)-f(a),$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t=\lim_{h\to 0}\frac{I(h)-I(0)}{h}=I'(0)=f(x)-f(a).$$

9. 设

$$F(x,y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}(x-yz)f(z)\mathrm{d}z,$$

其中 $f(z)$ 为可微函数，求 $F_{xy}(x,y)$.

解

$$\begin{aligned}F_x&=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}f(z)\mathrm{d}z+(x-y\cdot xy)f(xy)(xy)_x'\\&\quad-\left(x-y\cdot\frac{x}{y}\right)f\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)_x'\\&=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}f(z)\mathrm{d}z+y(x-xy^2)f(xy),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{xy}&=xf(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)+(x-3xy^2)f(xy)+y(x-xy^2)f'(xy)\cdot x\\&=(2x-3xy^2)f(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)+(x^2y-x^2y^3)f'(xy).\end{aligned}$$

10. 设

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi,\quad F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

其中 $0<k<1$ (这两个积分称为完全椭圆积分).

(1) 试求 $E(k)$ 与 $F(k)$ 的导数，并以 $E(k)$ 与 $F(k)$ 来表示它们；

(2) 证明 $E(k)$ 满足方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

证　(1)

$$\begin{aligned}E'(k)&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-k^2\sin^2\varphi-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{k}[E(k)-F(k)],$$

$$F'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{3/2}}\mathrm{d}\varphi=-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-k^2\sin^2\varphi-1}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{3/2}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{k}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-3/2}\mathrm{d}\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\varphi\right],$$

利用恒等式

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{1-k^2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{k^2}{1-k^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}[\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}],$$

有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\varphi,$$

所以

$$F'(k)=\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}.$$

（2）**由**（1）**知**

$$E'(k)=\frac{1}{k}[E(k)-F(k)],$$

$$F'(k)=\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k},$$

则

$$E''(k)=-\frac{1}{k^2}[E(k)-F(k)]+\frac{1}{k}[E'(k)-F'(k)]$$

$$=-\frac{1}{k^2}[E(k)-F(k)]+\frac{1}{k^2}[E(k)-F(k)]-\frac{E(k)}{k^2(1-k^2)}+\frac{F(k)}{k^2}$$

$$=\frac{F(k)}{k^2}-\frac{E(k)}{k^2(1-k^2)},$$

所以

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=\frac{F(k)}{k^2}-\frac{E(k)}{k^2(1-k^2)}+\frac{E(k)}{k^2}-\frac{F(k)}{k^2}+\frac{E(k)}{1-k^2}$$

$$=0.$$

§2　含参量反常积分

1. 证明下列各题：

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$ **在**$(-\infty,+\infty)$**上一致收敛；**

（2）$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}y$ **在**$[a,b]$ $(a>0)$**上一致收敛；**

(3) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$.

i) 在$[a,b]$ $(a>0)$上一致收敛;

ii) 在$[0,b]$上不一致收敛;

(4) $\int_0^1 \ln(xy)\mathrm{d}y$ 在$\left[\frac{1}{b},b\right]$ $(b>1)$上一致收敛;

(5) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 在$(-\infty,b]$ $(b<1)$上一致收敛.

证　(1) 因为对$\forall y\in(-\infty,+\infty)$,有

$$\left|\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right|<\frac{1}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{x^2},$$

而广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^{+\infty}=1$$

收敛,所以由 M 判别法知$\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(2) 因为对$\forall a\leqslant x\leqslant b$, $y\geqslant 0$,有

$$a^2y\leqslant x^2y,\quad \mathrm{e}^{a^2y}\leqslant\mathrm{e}^{x^2y},$$

则

$$\mathrm{e}^{-x^2y}\leqslant\mathrm{e}^{-a^2y},$$

又广义积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2y}\mathrm{d}y=-\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-a^2y}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{a^2}$$

收敛,所以由 M 判别法知$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$ $(a>0)$上一致收敛.

(3) i) 因为对$\forall a\leqslant x\leqslant b(a>0)$,有

$$x\mathrm{e}^{-xy}\leqslant b\mathrm{e}^{-ay},$$

而广义积分

$$\int_0^{+\infty}b\mathrm{e}^{-ay}\mathrm{d}y=-\frac{b}{a}\mathrm{e}^{-ay}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{b}{a}$$

收敛,所以由 M 判别法知$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$ $(a>0)$上一致收敛.

ii) 因为对$\forall M>0$,取 ε_0 使 $\varepsilon_0\geqslant\mathrm{e}^{-bM}$,则当 $0<x<\frac{1}{M}\ln\frac{1}{\varepsilon_0}\leqslant b$ 时,

$$\int_{M}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y \xlongequal{xy=t} \int_{Mx}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t}\Big|_{Mx}^{+\infty} = \mathrm{e}^{-Mx} > \varepsilon_0,$$

所以$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$ 在$[0,b]$上不一致收敛.

（4）显然 $y=0$ 为瑕点. 由于

$$\int_0^1 \ln(xy)\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{b}} \ln(xy)\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{b}}^1 \ln(xy)\mathrm{d}y,$$

故分别加以讨论.

i）含参量正常积分$\left(\int_{\frac{1}{b}}^1 \ln(xy)\mathrm{d}y\right)$：

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{b}}^1 \ln(xy)\mathrm{d}y &= \int_{\frac{1}{b}}^1 \ln x\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{b}}^1 \ln y\mathrm{d}y = \left(1-\frac{1}{b}\right)\ln x + (y\ln y - 1)\Big|_{\frac{1}{b}}^1 \\ &= \left(1-\frac{1}{b}\right)\ln x + \left(\frac{1}{b}\ln b + \frac{1}{b} - 1\right).\end{aligned}$$

ii）含参量反常积分$\left(\int_0^{\frac{1}{b}} \ln(xy)\mathrm{d}y\right)$：

因为 $0\leqslant y\leqslant \frac{1}{b}$，$\frac{1}{b}\leqslant x\leqslant b$，所以

$$\frac{1}{b}y \leqslant xy \leqslant by,$$

$$\ln\frac{y}{b} \leqslant \ln(xy) \leqslant \ln(by) \leqslant 0,$$

$$|\ln(xy)| \leqslant \left|\ln\frac{y}{b}\right| = |\ln y - \ln b| = \ln b - \ln y.$$

由于

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{b}} (\ln b - \ln y)\mathrm{d}y &= \frac{1}{b}\ln b - \int_0^{\frac{1}{b}} \ln y\mathrm{d}y = \frac{1}{b}\ln b - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{b}} \ln y\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{b}\ln b - \lim_{\varepsilon\to 0^+}[y\ln y - y]\Big|_{\varepsilon}^{\frac{1}{b}} \\ &= \frac{1}{b}\ln b - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{b}\ln b - \frac{1}{b} - \varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon\right] \\ &= \frac{2}{b}\ln b + \frac{1}{b}.\end{aligned}$$

故由 M 判别法知$\int_0^1 \ln(xy)\mathrm{d}y$ 在$\left[\frac{1}{b}, b\right]$ $(b>1)$上一致收敛.

(5) 当 $0<p<b$ 时，$x=0$ 为瑕点.

因为 $0\leqslant x\leqslant 1,-\infty<p\leqslant b$，所以

$$x^p\geqslant x^b,\quad \frac{1}{x^p}\leqslant\frac{1}{x^b},$$

而无界函数的反常积分 $\int_0^1\frac{1}{x^b}\mathrm{d}x$ 当 $b<1$ 时是收敛的，故由 M 判别法知 $\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,b]$ $(b<1)$ 上一致收敛.

2. 从等式 $\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}$ 出发，计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x\ (b>a>0).$$

解　因为 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$ 在 $[0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续，又因为

$$0<\mathrm{e}^{-xy}\leqslant\mathrm{e}^{-ax},\quad \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{a}$$

收敛，由 M 判别法知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，所以根据定理 19.11 有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\left[-\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-xy}\right]\Big|_0^{+\infty}\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\ln\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

3. 证明函数

$$F(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

证　首先

$$\begin{aligned}F(y)&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-y}\int_{-y}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\\&=\int_{-y}^0\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\int_{-y}^0\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 e^{-t^2} 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，由变下限的定积分的性质知对 $\forall\ y\in(-\infty,+\infty)$，$\int_{-y}^0\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在 y 处连续，从而 $F(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

4. 求下列积分

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-a^2x^2}-\mathrm{e}^{-b^2x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$;

（2）$\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin xt}{t}dt$；

（3）$\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{1-\cos xy}{x^2}dx$.

解　（1）**不妨设** $|a|<|b|$，**因为** $f(x,y)=e^{-yx^2}$ **在** $[0,+\infty)\times[a^2,b^2]$ **上连续，又由于** $0<e^{-yx^2}\leqslant e^{-a^2x^2}$，**广义积分**

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}dx=\frac{1}{|a|}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{1}{|a|}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

收敛，由 M **判别法知** $\int_0^{+\infty} e^{-yx^2}dx$ **在** $[a^2,b^2]$ **上一致收敛，所以根据定理** 19.11 **有**

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}dx &=\int_0^{+\infty}dx\int_{a^2}^{b^2}e^{-yx^2}dy=\int_{a^2}^{b^2}dy\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}dx\\ &\xlongequal{t=\sqrt{y}\,x}\int_{a^2}^{b^2}dy\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-t^2}dt\\ &=\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}dy=\sqrt{\pi}\sqrt{y}\Big|_{a^2}^{b^2}\\ &=\sqrt{\pi}(|b|-|a|).\end{aligned}$$

（2）**令**　$I(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin xt}{t}dt,\quad f(x,t)=e^{-t}\frac{\sin xt}{t}$，

由于　$\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\cdot|f(x,t)|=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t|\sin xt|}{e^t}=0$，

所以广义积分在 $(-\infty,+\infty)$ **收敛，又**

$$\lim_{t\to0^+} e^{-t}\frac{\sin xt}{t}=x,$$

所以 $f(x,t)$ **在** $(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$ **上连续，而**

$$f_x(x,t)=e^{-t}\cos xt,$$

$$|f_x(x,t)|=|e^{-t}\cos xt|\leqslant e^{-t},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=1,$$

由 M **判别法知**　$\int_0^{+\infty} f_x(x,t)dt=\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos xt\,dt$

在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,故由定理19.10有

$$I'(x)=\int_0^{+\infty}f_x(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos xt\mathrm{d}t=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\mathrm{e}^{-t}\cos xt\mathrm{d}t$$
$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+x^2}(x\sin xt-\cos xt)\right]\Bigg|_0^b=\frac{1}{1+x^2}.$$

从而有
$$I(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t=\int_0^x I'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\arctan x.$$

(3) 记$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{1-\cos xy}{x^2}\mathrm{d}x,\quad f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\frac{1-\cos xy}{x^2}$,

由于
$$\lim_{x\to+\infty}x^2|f(x,y)|=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos xy}{\mathrm{e}^x}=0,$$

所以广义积分在$(-\infty,+\infty)$上收敛,又

$$\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-x}\frac{1-\cos xy}{x^2}=\frac{1}{2}y^2,$$

所以$f(x,y)$在$(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$上连续,而

$$f_y(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\frac{\sin xy}{x},\quad |f_y(x,y)|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}=0,$$

由比较法则的极限形式知$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$收敛,故由$M$判别法知

$$\int_0^{+\infty}f_y(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{\sin xy}{x}$$

在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,则由定理19.10以及(2)的结果,有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{1-\cos xy}{x^2}\mathrm{d}x=I(y)=\int_0^y I'(y)\mathrm{d}y=\int_0^y\arctan u\mathrm{d}u$$
$$=y\arctan y-\frac{1}{2}\ln(1+y^2).$$

5. 回答下列问题:

(1) 对极限$\lim\limits_{x\to0^+}\int_0^{+\infty}2xy\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y$能否施行极限与积分运算顺序的交换来求解?

(2) 对$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}(2y-2xy^3)\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}x$能否运用积分顺序交换来求解?

(3) 对$F(x)=\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}y$能否运用积分与求导运算顺序交换来求解?

解 (1) 首先$\lim\limits_{x\to0^+}\int_0^{+\infty}2xy\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y=\lim\limits_{x\to0^+}\int_0^{+\infty}(-1)\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}(-xy^2)$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[-\mathrm{e}^{-xy^2}\right]\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x\to 0^+}1=1,$$

其次
$$\int_0^{+\infty}\lim_{x\to 0}(2xy\mathrm{e}^{-xy^2})\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}0\mathrm{d}y=0.$$

所以极限与积分运算顺序不能交换．主要原因是$\int_0^{+\infty}2xy\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y$ 在$[0,a]$$(a>0)$上不一致收敛，即定理 19.9 条件不满足．下面证明$\int_0^{+\infty}2xy\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y$ 在$[0,a]$$(a>0)$上不一致收敛.

因为对$\forall M>0$，取ε_0 使$\varepsilon_0\geqslant \mathrm{e}^{-aM^2}$，则当$0<x<\dfrac{1}{M^2}\ln\dfrac{1}{\varepsilon_0}\leqslant a$ 时，
$$\int_M^{+\infty}2xy\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y=(-\mathrm{e}^{-xy^2})\Big|_M^{+\infty}=\mathrm{e}^{-xM^2}>\varepsilon_0,$$
所以$\int_0^{+\infty}2xy\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y$ 在$[0,a]$$(a>0)$上不一致收敛.

(2) 首先
$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}(2y-2xy^3)\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{t=xy^2}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{2}{y}(1-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1\frac{2}{y}(t\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^{+\infty}\mathrm{d}y=\int_0^1 0\mathrm{d}y=0\ (y=0\ \text{也对}),$$

其次
$$\int_0^1(2y-2xy^3)\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\int_0^1(1-xy^2)\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}(xy^2)$$
$$=\frac{1}{x}\int_0^x(1-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}(x=0\ \text{也对}),$$

则
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^1(2y-2xy^3)\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1.$$

所以积分运算顺序不能交换．主要原因是$\int_0^{+\infty}(2y-2xy^3)\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}x$ 在$[0,1]$上不一致收敛．即定理 19.11 条件不满足．下面证明$\int_0^{+\infty}(2y-2xy^3)\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}x$ 在$[0,1]$上不一致收敛.

因为对$\forall M>0$，取ε_0 使$\varepsilon_0\geqslant 2M\mathrm{e}^{-M}$，则当$0<y<\dfrac{2M\mathrm{e}^{-M}}{\varepsilon_0}\leqslant 1$ 时，
$$\left|\int_M^{+\infty}(2y-2xy^3)\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}x\right|\xlongequal{t=xy^2}\left|\frac{2}{y}\int_M^{+\infty}(1-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{2}{y}(t\mathrm{e}^{-t})\Big|_M^{+\infty}\right|$$
$$=\frac{2M\mathrm{e}^{-M}}{y}>\varepsilon_0,$$

所以$\int_0^{+\infty}(2y-2xy^3)\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}x$在$[0,1]$上不一致收敛.

(3) 令$f(x,y)=x^3\mathrm{e}^{-x^2y}$,则

$$f_x=3x^2\mathrm{e}^{-x^2y}-2x^4y\mathrm{e}^{-x^2y}$$

在$(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$上连续. 又

$$F(x)=\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}y=x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}(x^2y)=x(-\mathrm{e}^{-x^2y})\Big|_0^{+\infty}=x \text{ 收敛},$$

$$\int_0^{+\infty}f_x(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}(3x^2-2x^4y)\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}(3-2x^2y)\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}(x^2y)$$

$$\xlongequal{t=x^2y}\int_0^{+\infty}(3-2t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1$$

与x取值无关,因此$\int_0^{+\infty}f_x(x,y)\mathrm{d}y$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,所以根据定理19.10知,求导运算与积分运算可以交换顺序后求解.

6. 应用$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{1}{2}}(a>0)$,证明

(1) $\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-\frac{3}{2}}$;

(2) $\int_0^{+\infty}t^{2n}\mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$.

证　(1) 利用分部积分公式,有

$$\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}t\mathrm{d}\mathrm{e}^{-at^2}=-\frac{1}{2a}\left[(t\mathrm{e}^{-at^2})\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-\frac{3}{2}}.$$

(2) $I_n=\int_0^{+\infty}t^{2n}\mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}t^{2n-1}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-at^2}$

$$=-\frac{1}{2a}\left[(t^{2n-1}\mathrm{e}^{-at^2})\Big|_0^{+\infty}-(2n-1)\int_0^{+\infty}t^{2(n-1)}\mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{2n-1}{2a}I_{n-1}\text{(递推公式)},$$

由于$I_0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{1}{2}}$,所以

$$I_n=\frac{2n-1}{2a}I_{n-1}=\frac{2n-1}{2a}\ \frac{2n-3}{2a}I_{n-2}=\cdots=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{(2a)^n}I_0$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-3)(2n-1)}{2^n}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

7. 应用$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$,求$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$.

解　$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2}\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}-\int_0^{+\infty}\frac{x}{2a^2}\frac{\mathrm{d}(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2na^2}\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}(x^2+a^2)^{-n}$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n}\bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2na^2}I_{n-1}=\frac{2n-1}{2na^2}I_{n-1},$$

所以

$$I_n=\frac{2n-1}{2na^2}I_{n-1}\text{（递推公式）},$$

由于$I_0=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$,所以

$$I_n=\frac{2n-1}{2na^2}I_{n-1}=\frac{2n-1}{2na^2}\ \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-2}=\cdots=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\ (a^2)^n}I_0$$

$$=\frac{\pi(2n-1)!!}{2(2n)!!\ a^{2n+1}}.$$

8. 设$f(x,y)$为$[a,b]\times[c,+\infty)$上连续非负函数,

$$I(x)=\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

在$[a,b]$上连续,证明$I(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

证　为了证明此性质,我们先证明关于函数项级数的狄尼定理:

设函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的项$u_n(x)$在$[a,b]$上是连续非负函数,若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上收敛于和函数$I(x)$,且$I(x)$在$[a,b]$上连续,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

令　$\varphi_n(x)=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}u_i(x)=I(x)-S_n(x)$,　$S_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i(x)$.

因为$I(x)$,$S_n(x)$在$[a,b]$上连续,所以$\varphi_n(x)$在$[a,b]$上连续,又$u_n(x)\geqslant 0$,$n=1,2,\cdots$,从而$S_n(x)$单调递增,故$\varphi_n(x)$单调递减,所以对$\forall\ x\in[a,b]$,有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0.$$

下面用反证法:假设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上不一致收敛,即$\{\varphi_n(x)\}$在$[a,b]$上不一致收敛于零,则$\exists\,\varepsilon_0>0$,对$\forall m\in\mathbf{N}$,$\exists n_m>m$及$x_m\in[a,b]$,使得$\varphi_{n_m}(x_m)>\varepsilon_0$. 于是,得数列$\{n_m\}$和$\{x_m\}$($x_m\in[a,b]$). 由聚点定理知,$\{x_m\}$至少有一聚点$x_0\in[a,b]$,且$\{x_m\}$有收敛于$x_0$的子列$\{x_{m_k}\}$:

$$x_{m_k}\to x_0\ \text{及}\ \varphi_{n_{m_k}}(x_{m_k})>\varepsilon_0(k\to\infty).$$

因为$\forall n\in\mathbf{N}$,$\exists k\in\mathbf{N}$,使得

$$n_{m_k}>m_k>k>n,$$

故对$\forall x_{m_k}\in[a,b]$,有

$$\varphi_n(x_{m_k})\geqslant\varphi_{n_{m_k}}(x_{m_k})\geqslant\varepsilon_0.$$

对$\forall n$,由$\varphi_n(x)$的连续性,有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_n(x_{m_k})=\varphi_n(x_0)\geqslant\varepsilon_0,$$

与已知$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=0$矛盾. 故假设不对,从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

现在证明本题结论. 任取严格单调递增数列$\{A_n\}$,使

$$A_0=c,\quad \lim_{n\to\infty}A_n=+\infty.$$

则
$$I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n}f(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$

由所给条件知$u_n(x)=\int_{A_{n-1}}^{A_n}f(x,y)\mathrm{d}y$在$[a,b]$上是连续非负函数,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上收敛于和函数$I(x)$,且$I(x)$在$[a,b]$上连续,则由上面已证关于函数项级数的狄尼定理,知

$$I(x)=\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

在$[a,b]$上一致收敛.

9. 设在$[a,+\infty)\times[c,d]$内成立不等式$|f(x,y)|\leqslant F(x,y)$. 若

$\int_a^{+\infty}F(x,y)\mathrm{d}x$在$y\in[c,d]$上一致收敛，证明$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$在$y\in[c,d]$上一致收敛且绝对收敛.

证　因为$\int_a^{+\infty}F(x,y)\mathrm{d}x$在$y\in[c,d]$上一致收敛，故由一致收敛的柯西准则知，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$实数$M>a$，使当$A_1,A_2>M$时，对一切$y\in[c,d]$，都有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}F(x,y)\mathrm{d}x\right|=\int_{A_1}^{A_2}F(x,y)\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

从而有
$$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,y)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{A_1}^{A_2}|f(x,y)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{A_1}^{A_2}F(x,y)\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

这表明$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$在$y\in[c,d]$上一致收敛.

由$|f(x,y)|\leqslant F(x,y)$，$\int_a^{+\infty}F(x,y)\mathrm{d}x$在$y\in[c,d]$上一致收敛，根据比较判别法知$\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x$在$y\in[c,d]$上收敛，即$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$在$y\in[c,d]$上绝对收敛.

§3　欧拉积分

1. 计算$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$，$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$，$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)$，$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)$.

解
$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(1-\frac{5}{2}\right)}{-\frac{5}{2}}=-\frac{2}{5}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{2}{5}\frac{\Gamma\left(1-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{4}{15}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{15}\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}$$
$$=-\frac{8}{15}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\Gamma\left(1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)=\Gamma\left(1+\frac{2n-1}{2}\right)=\frac{2n-1}{2}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)$$

$$=\frac{2n-1}{2}\Gamma\left(1+\frac{2n-3}{2}\right)=\frac{2n-1}{2}\ \frac{2n-3}{2}\Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right)$$

$$=\cdots=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1-2n}{2}\right)}{\frac{1-2n}{2}}=-\frac{2}{2n-1}\Gamma\left(\frac{3-2n}{2}\right)$$

$$=-\frac{2}{2n-1}\frac{\Gamma\left(1+\frac{3-2n}{2}\right)}{\frac{3-2n}{2}}=\frac{2^2}{(2n-1)(2n-3)}\Gamma\left(\frac{5-2n}{2}\right)$$

$$=\cdots=\frac{(-1)^n2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}.$$

2. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}u\mathrm{d}u,\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}u\mathrm{d}u.$

解　利用公式 $\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2q-1}\varphi\cos^{2p-1}\varphi\mathrm{d}\varphi$**,有**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\cdot(2n-1)!!\ \sqrt{\pi}}{2\cdot n!\ 2^n}=\frac{\pi(2n-1)!!}{n!\ 2^{n+1}}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},n+1\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\,n!\ 2^{n+1}}{2(2n+1)!!\ \sqrt{\pi}}=\frac{n!\ 2^n}{(2n+1)!!}.$$

3. 证明下列各式:

(1) $\Gamma(a)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{a-1}\mathrm{d}x,a>0;$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\Gamma(a)\Gamma(1-a),0<a<1;$

(3) $\int_0^1x^{p-1}(1-x^r)^{q-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{r}\mathrm{B}\left(\frac{p}{r},q\right),p>0,q>0,r>0;$

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

证　(1) **令** $t=\ln\frac{1}{x}, x=\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$，**则**

$$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{a-1}\mathrm{d}x=-\int_{+\infty}^0 t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\Gamma(a).$$

(2) **令** $u=\frac{x}{1+x}$，$x=\frac{u}{1-u}$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{(1-u)^2}\mathrm{d}u$，**则**

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-u)\frac{u^{a-1}}{(1-u)^{a-1}}\frac{1}{(1-u)^2}\mathrm{d}u=\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{-a}\mathrm{d}u$$

$$=\mathrm{B}(a,1-a)=\Gamma(a)\Gamma(1-a).$$

(3) **令** $t=x^r, x=t^{\frac{1}{r}}, \mathrm{d}x=\frac{1}{r}t^{\frac{1}{r}-1}\mathrm{d}t$，**则**

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^r)^{q-1}\mathrm{d}x=\int_0^1 t^{\frac{p-1}{r}}(1-t)^{q-1}\cdot\frac{1}{r}t^{\frac{1}{r}-1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{r}\int_0^1 t^{\frac{p}{r}-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{r}\mathrm{B}\left(\frac{p}{r},q\right).$$

(4) **令** $\frac{1}{t}=x^4+1, 4x^3\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，**则**

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_1^0\frac{1}{4}t\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-\frac{3}{4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

4. 证明公式

$$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(p+1,q)+\mathrm{B}(p,q+1).$$

证　**因为** $\mathrm{B}(p+1,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{p-1}(x-1+1)(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{B}(p,q)-\mathrm{B}(p,q+1),$$

所以

$$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(p+1,q)+\mathrm{B}(p,q+1).$$

5. 已知 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$**,试证**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

证　$I=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx=\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x^2} dx+\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx,$

而
$$\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x^2} dx \xlongequal{x=-t} -\int_{+\infty}^{0} t^2 e^{-t^2} dt=\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx,$$

故
$$I=2\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \xlongequal{t=x^2} \int_{0}^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt=\int_{0}^{+\infty} t^{\frac{3}{2}-1} e^{-t} dt$$
$$=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6. 试将下列积分用欧拉积分表示,并指出参量的取值范围:

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$;

(2) $\int_{0}^{1}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx$.

解　(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2[\sin x]^{2\left(\frac{m+1}{2}-1\right)}[\cos x]^{2\left(\frac{n+1}{2}\right)-1} dx$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right), m>-1, n>-1.$$

(2) **令** $t=\ln \frac{1}{x}, x=e^{-t}, dx=-e^{-t} dt$**,则**

$$\int_{0}^{1}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx=-\int_{+\infty}^{0} t^p e^{-t} dt=\int_{0}^{+\infty} t^{(p+1)-1} e^{-t} dt=\Gamma(p+1), p>-1.$$

§4　总 练 习 题

1. 在区间 $1\leqslant x\leqslant 3$ **内用线性函数** $a+bx$ **近似代替** $f(x)=x^2$**,试求** a,b **使积分** $\int_{1}^{3}(a+bx-x^2)^2 dx$ **取最小值.**

解　令
$$f(a,b)=\int_{1}^{3}(a+bx-x^2)^2 dx,$$

由
$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial a}=2\int_{1}^{3}(a+bx-x^2) dx=4\left(a+2b-\dfrac{13}{3}\right)=0,\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial b}=2\int_{1}^{3} x(a+bx-x^2) dx=4\left(2a+\dfrac{13}{3}b-10\right)=0,\end{cases}$$

得稳定点$\left(-\frac{11}{3},4\right)$.

又 $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}=4>0$，　$\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}=8$，　$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}=\frac{52}{3}$，　$f_{aa}f_{bb}-f_{ab}^2=\frac{16}{3}>0$，

所以当$a=-\frac{11}{3},b=4$时，$\int_1^3(a+bx-x^2)^2\mathrm{d}x$取最小值.

2. 设$u(x)=\int_0^1 k(x,y)v(y)\mathrm{d}y$，其中

$$k(x,y)=\begin{cases}x(1-y), & x\leqslant y,\\ y(1-x), & x>y\end{cases}$$

与$v(y)$为$[0,1]$上的连续函数，证明

$$u''(x)=-v(x).$$

证　当$0\leqslant x\leqslant 1$时，有

$$u(x)=\int_0^1 k(x,y)v(y)\mathrm{d}y=\int_0^x y(1-x)v(y)\mathrm{d}y+\int_x^1 x(1-y)v(y)\mathrm{d}y,$$

所以 $u'(x)=x(1-x)v(x)-\int_0^x yv(y)\mathrm{d}y+\int_x^1(1-y)v(y)\mathrm{d}y-x(1-x)v(x)$

$$=-\int_0^x yv(y)\mathrm{d}y+\int_x^1(1-y)v(y)\mathrm{d}y,$$

$$u''(x)=-xv(x)-(1-x)v(x)=-v(x).$$

3. 求函数　$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{x}\mathrm{d}x$

的不连续点，并作函数$F(a)$的图象.

解　当$a=\pm1$时，

$$F(\pm1)=\int_0^{+\infty}0\mathrm{d}x=0,$$

当$|a|<1$时，　$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{x}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{t=(1-a^2)x}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},$$

当$|a|>1$时，　$F(a)=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a^2-1)x}{x}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{(a^2-1)x=t}-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2},$$

所以$F(a)$的不连续点为$a=\pm1$.

函数 $F(a)$ 的图象如图 19-2 所示.

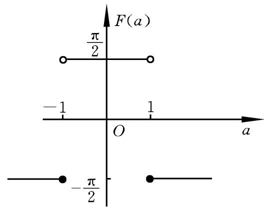

图 19-2

4. 证明：若 $\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ 在 $x \geqslant a$ 时一致收敛于 $F(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,t)=\varphi(t)$ 对任何 $t\in[a,b]\subset[0,+\infty)$ 一致成立，则

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

证　因为 $F(x)=\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $x\geqslant 0$ 上一致收敛，所以 $\forall \varepsilon>0, \exists N_1>0$，当 $M>N_1$ 时，对 $\forall x\geqslant 0$ 都有

$$\left|\int_0^M f(x,y)\mathrm{d}y-F(x)\right|<\varepsilon.$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,t)=\varphi(t)$ 对 $\forall t\in[0,M]\subset[0,+\infty)$ 一致成立，即对上面的 $\varepsilon>0, \exists N_2>0$，当 $x>N_2, t\in[0,M]$ 时，有

$$|f(x,t)-\varphi(t)|<\varepsilon/M,$$

从而有

$$\left|\int_0^M f(x,t)\mathrm{d}t-\int_0^M \varphi(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^M |f(x,t)-\varphi(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon,$$

这表明
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^M f(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^M\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

现对 $\forall x\geqslant 0$，取 $A_1, A_2>N_1$，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{A_2} f(x,t)\mathrm{d}t-\int_0^{A_1} f(x,t)\mathrm{d}t\right|\\ \leqslant&\left|\int_0^{A_2} f(x,t)\mathrm{d}t-F(x)\right|+\left|\int_0^{A_1} f(x,t)\mathrm{d}t-F(x)\right|<2\varepsilon,\end{aligned}$$

固定 $A_1, A_2>N_1$，令 $x\to+\infty$，则

$$\left|\int_0^{A_2}\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_0^{A_1}\varphi(t)\mathrm{d}t\right|<2\varepsilon.$$

根据柯西存在准则，知反常积分 $\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t$ 收敛，记为

$$I=\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

由于 $\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=I$，所以对于上面的 $\varepsilon>0, \exists N_3>0$，当 $M>N_3$ 时，有

$$\left|\int_0^M \varphi(t)\mathrm{d}t-I\right|<\varepsilon.$$

综合上述，取 $N=\max\{N_1,N_3\}$，则当 $x>N_2,M>N$ 时，有

$$|F(x)-I|\leqslant\left|F(x)-\int_0^M f(x,t)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^M f(x,t)\mathrm{d}t-\int_0^M\varphi(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$+\left|\int_0^M\varphi(t)\mathrm{d}t-I\right|<3\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

5. 设 $f(x)$ 为二阶可微函数，$F(x)$ 为可微函数，证明函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)\mathrm{d}z$$

满足弦振动方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初始条件
$$u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=F(x).$$

证　因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}[f'(x-at)+f'(x+at)]+\frac{1}{2a}[F(x+at)-F(x-at)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{1}{2a}[F'(x+at)-F'(x-at)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{a}{2}[f'(x+at)-f'(x-at)]+\frac{1}{2}[F(x+at)+F(x-at)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{2}[f''(x+at)+f''(x-at)]+\frac{a}{2}[F'(x+at)-F'(x-at)],$$

所以
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$u(x,0)=\frac{1}{2}[f(x)+f(x)]+\frac{1}{2a}\int_x^x F(z)\mathrm{d}z=f(x),$$

$$u_t(x,0)=\frac{a}{2}[f'(x)-f'(x)]+\frac{1}{2}[F(x)+F(x)]=F(x).$$

故得证.

6. 证明：

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{6}$；　　(2) $\displaystyle\int_0^u\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^2}{n^2}$，$0\leqslant u\leqslant 1$.

证　(1) 因为
$$\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1-x}=-\infty,$$

所以 $x=0$ 为瑕点($x=1$ 非瑕点).

由于
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |x|<1,$$

所以
$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ln x\right)\mathrm{d}x.$$

虽然 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\ln x$ 在$[0,1]$上不一致收敛,但在$[0,1]$上可逐项积分. 事实上,在$(0,1)$内,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\ln x$ 为等比级数,有

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}\ln x, & 0<x<1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$$

故 $S(1-0)\neq S(0)$,级数不一致收敛. 而

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}x^k\ln x=\left(\frac{x}{1-x}\ln x\right)x^n,$$

$\dfrac{x}{1-x}\ln x$ 在$(0,1)$内有界,即 $|R_n(x)|\leqslant Mx^n$,从而

$$\left|\int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|R_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{M}{n+1}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

则
$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^n\ln x\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln x\mathrm{d}x^{n+1}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left[(x^{n+1}\ln x)\Big|_0^1-\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^1\right]\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=-\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

(2) 因为 $\ln(1-t)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n}$,

所以
$$\int_0^u\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t=-\int_0^u\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^u\frac{t^{n-1}}{n}\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n^2},0\leqslant u\leqslant 1.$$

第二十章 曲 线 积 分

知 识 要 点

1. 曲线积分分为两类，第一型曲线积分是数量函数在可求长曲线上的积分（它是定积分概念的推广），第二型曲线积分是向量函数在有向的可求长曲线上的积分. 二者差别如下：

	第一型曲线积分	第二型曲线积分
表达式	$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$	$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 或 $\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$
积分变量	弧长	坐标
被积函数	数量函数	向量函数
物理意义	质量等	功、环流量等
方向性	无	有
基本性质	线性性 积分曲线可加性 积分的不等式性质 积分中值定理	线性性 积分曲线可加性
联系	$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}_0\mathrm{d}s=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$	

2. 若曲线 $L: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=k(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta$，是光滑或按段光滑的，被积函数 f 或 $\boldsymbol{F}$ 在 L 上连续，则曲线积分可化为定积分：

(1) $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$

$$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\kappa(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\kappa(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

(2) $\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$

$$=\pm\int_\alpha^\beta[P(\varphi(t),\psi(t),\kappa(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t),\kappa(t))\psi'(t)$$
$$+R(\varphi(t),\psi(t),\kappa(t))\kappa'(t)]\mathrm{d}t,$$

其中,当曲线沿参数增大方向时取"+"号,否则取"−"号.

3. 曲线积分中被积函数的自变量不是独立的,受曲线方程的约束,当曲线方程是面交式时,常利用曲线方程来简化被积表达式.

4. 利用对称性简化曲线积分.

如果曲线 L 可以分为具有某种对称性(例如关于某坐标轴对称,关于原点对称;对于空间曲线还可以考虑关于某坐标面对称)的两段 L_1 和 L_2,且被积函数的绝对值 $|f|$ 在 L_1 上各点处的值与其在 L_2 上各对称点处的值相等,则

(1) $$\int_L f\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & \text{当 } f \text{ 在对称点异号},\\ 2\int_{L_1} f\mathrm{d}s, & \text{当 } f \text{ 在对称点同号}.\end{cases}$$

(2) $$\int_L f\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{当 } f\mathrm{d}x \text{ 在对称点异号},\\ 2\int_{L_1} f\mathrm{d}x, & \text{当 } f\mathrm{d}x \text{ 在对称点同号}.\end{cases}$$

在第二型曲线积分中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}$ 或 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$ 的各分量具有方向性. 规定:$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的指向与积分曲线方向相同,当某点处切线方向与 x 轴正向成锐角时 $\mathrm{d}x>0$,夹角为钝角时 $\mathrm{d}x<0$;对 $\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 的正负规定类似. 显然(2)对 $\int_L f\mathrm{d}y,\int_L f\mathrm{d}z$ 有类似的结论.

常见的有,若平面曲线关于 x 轴对称,则在对称点处 $\mathrm{d}y$ 不变号,$\mathrm{d}x$ 变号,而空间曲线关于 xOy 平面对称时,在对称点处 $\mathrm{d}z$ 不变号,$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 均变号.

5. 利用轮换对称性简化曲线积分.

若在平面曲线 L 的方程中把 x 换成 y,y 换成 x,或在空间曲线 L 的方程中把 x 换作 y,y 换作 z,z 换作 x 后曲线方程不变,则称 L 具有轮换对称性. 对于轮换对称曲线上的曲线积分也可将其被积函数的自变量进行轮换,且有

(1) L 为平面曲线时,

i) $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_L f(y,x)\mathrm{d}s.$

ii) $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_L P(y,x)\mathrm{d}y+Q(y,x)\mathrm{d}x.$

取"—"号的原因是轮换后坐标系不保持右手系.

(2) L 为空间曲线时,

i) $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_L f(y,z,x)\mathrm{d}s=\int_L f(z,x,y)\mathrm{d}s.$

ii)
$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\int_L P(y,z,x)\mathrm{d}y+Q(y,z,x)\mathrm{d}z+R(y,z,x)\mathrm{d}x\\&=\int_L P(z,x,y)\mathrm{d}z+Q(z,x,y)\mathrm{d}x+R(z,x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

取"+"号的原因是轮换后坐标系仍为右手系.

6. 第二型曲线积分除可转化为定积分外,还有其他的计算方法,详见第二十一章与第二十二章.

习 题 详 解

§1 第一型曲线积分

1. 计算下列第一型曲线积分:

(1) $\int_L (x+y)\mathrm{d}s$,其中,L 是以 $O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(0,1)$ 为顶点的三角形;

(2) $\int_L (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s$,其中,$L$ 是以原点为中心,R 为半径的右半圆周;

(3) $\int_L xy\mathrm{d}s$,其中,L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限中的部分;

(4) $\int_L |y|\mathrm{d}s$,其中,L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$;

(5) $\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$,其中,$L$ 为螺旋线 $x=a\cos t$,$y=a\sin t$,$z=bt$ ($0\leqslant t$

$\leqslant 2\pi$)的一段；

（6）$\int_L xyz\mathrm{d}s$，其中，L 是曲线 $x=t, y=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}, z=\frac{1}{2}t^2 (0\leqslant t\leqslant 1)$ 的一段；

（7）$\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中，$L$ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x=y$ 相交的圆周.

解　（1）因为 $L=OA+AB+BO$，又

$$OA:\begin{cases} x=x, \\ y=0, \end{cases} \quad 0\leqslant x\leqslant 1;$$

$$AB:\begin{cases} x=x, \\ y=1-x, \end{cases} \quad 0\leqslant x\leqslant 1;$$

$$BO:\begin{cases} x=0, \\ y=y, \end{cases} \quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L (x+y)\mathrm{d}s &= \int_{OA}(x+y)\mathrm{d}s+\int_{AB}(x+y)\mathrm{d}s+\int_{BO}(x+y)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 (x+0)\sqrt{1^2+0^2}\mathrm{d}x \\ &\quad +\int_0^1 (x+1-x)\sqrt{1^2+(-1)^2}\mathrm{d}x \\ &\quad +\int_0^1 (0+y)\sqrt{0+1^2}\mathrm{d}y \\ &= 1+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

（2）因为

$$L:\begin{cases} x=R\cos\theta, \\ y=R\sin\theta, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\int_L (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s=R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta=\pi R^2.$$

（3）因为

$$L:\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta, \end{cases} \quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L xy\mathrm{d}s &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\theta+b^2}\mathrm{d}[(a^2-b^2)\sin^2\theta] \\ &= \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\frac{2}{3}[(a^2-b^2)\sin^2\theta+b^2]^{3/2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.\end{aligned}$$

(4) 因为单位圆周关于x轴对称，被积函数为y的偶函数，又上半单位圆周

$$L_1:\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

所以 $$\int_L|y|\mathrm{d}s=2\int_{L_1}y\mathrm{d}s=2\int_0^{\pi}\sin\theta\sqrt{(-\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta=4.$$

(5) $$\begin{aligned}&\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s\\&=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2t+a^2\sin^2t+b^2t^2)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2t+\frac{b^2}{3}t^3\right)\Bigg|_0^{2\pi}\\&=\sqrt{a^2+b^2}\left(2a^2\pi+\frac{8\pi^3b^2}{3}\right).\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}\int_L xyz\mathrm{d}s&=\int_0^1 t\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^2\sqrt{1+2t+t^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}\sqrt{(1+t)^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1(t^{\frac{9}{2}}+t^{\frac{11}{2}})\mathrm{d}t=\frac{16\sqrt{2}}{143}.\end{aligned}$$

(7) 因为 $$L:\begin{cases}y=x,\\ x^2+y^2+z^2=a^2,\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x=x,\\ y=x,\\ z=\pm\sqrt{a^2-2x^2},\end{cases}\quad -\frac{a}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}},$$

又L关于xOy平面对称，且在L上，$f(x,y,z)=\sqrt{2y^2+z^2}=a$，所以

$$\begin{aligned}\int_L\sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s&=2a\int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+1+\left(\frac{2x}{\sqrt{a^2-2x^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\\&=4a\cdot\sqrt{2}a\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{a^2-2x^2}}\mathrm{d}x\\&=4a^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{a}\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}=2\pi a^2.\end{aligned}$$

2. 求曲线 $x=a, y=at, z=\frac{1}{2}at^2\ (0\leqslant t\leqslant 1, a>0)$ **的质量,设其线密度为**

$$\rho=\sqrt{\frac{2z}{a}}.$$

解　质量 $m=\int_L\sqrt{\frac{2z}{a}}\mathrm{d}s=\int_0^1 t\sqrt{0+a^2+(at)^2}\mathrm{d}t=a\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$=\frac{a}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

3. 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\ (0\leqslant t\leqslant \pi)$ **的重心,设其质量分布是均匀的.**

解　设线密度为 μ **(常数),首先质量** m **为**

$$m=\int_L\mu\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}\mu\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=a\mu\int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\mathrm{d}t$$

$$=2a\mu\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4a\mu.$$

其次

$$M_x=\int_L\mu y\mathrm{d}s=2a^2\mu\int_0^{\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4a^2\mu\int_0^{\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\frac{t}{2}=u}8a^2\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3u\mathrm{d}u=8a^2\mu\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{16}{3}a^2\mu,$$

$$M_y=\int_L\mu x\mathrm{d}s=2a^2\mu\int_0^{\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\frac{t}{2}=u}4a^2\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2u-2\sin u\cos u)\sin u\mathrm{d}u$$

$$=-8a^2\mu(u\cos u-\sin u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(\frac{8}{3}a^2\mu\sin^3u\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{3}a^2\mu,$$

则重心坐标为 $\bar{x}=\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{4}{3}a$ **,重心:** $\left(\frac{4}{3}a,\frac{4}{3}a\right)$.

4. 若曲线以极坐标 $\rho=\rho(\theta)\ (\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$ **表示,试给出计算** $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ **的公式,并用此公式计算下列曲线积分:**

(1) $\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$ **,其中,** L **为曲线** $\rho=a\ \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ **的一段;**

(2) $\int_L x\mathrm{d}s$ **,其中,** L **为对数螺线** $\rho=a\mathrm{e}^{k\theta}(k>0)$ **在圆** $r=a$ **内的部分.**

解　因为$L:\rho=\rho(\theta)$，则由直角坐标与极坐标之间变换公式，有

$$L:\begin{cases}x=\rho\cos\theta=\rho(\theta)\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta=\rho(\theta)\sin\theta,\end{cases}\quad \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2,$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}&=\sqrt{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)^2+(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)^2}\\&=\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)},\end{aligned}$$

所以　$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

（1）$\displaystyle\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^a\sqrt{0+a^2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a.$

（2）因为对数螺线$\rho=a\mathrm{e}^{k\theta}(k>0)$在圆$r=a$内的部分为$\rho=a\mathrm{e}^{k\theta},-\infty<\theta\leqslant0$，又

$$\sqrt{\rho'^2+\rho^2}=a\sqrt{1+k^2}\mathrm{e}^{k\theta},$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L x\mathrm{d}s&=\int_{-\infty}^0 a\mathrm{e}^{k\theta}\cos\theta\cdot a\sqrt{1+k^2}\mathrm{e}^{k\theta}\mathrm{d}\theta=a^2\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{2k\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta\\&=a^2\sqrt{1+k^2}\left[\frac{\mathrm{e}^{2k\theta}}{1+4k^2}(2k\cos\theta+\sin\theta)\right]\Bigg|_{-\infty}^0\\&=\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}.\end{aligned}$$

5. 证明：若函数$f(x,y)$在光滑曲线$L:x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta]$上连续，则存在点$(x_0,y_0)\in L$，使得

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=f(x_0,y_0)\Delta L.$$

其中，ΔL为L的弧长.

证　因为　$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t,$$

记　$$F(t)=f(x(t),y(t)),G(t)=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)},$$

由已知条件知$F(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，$G(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续且非负（不变号），则根据推广的定积分第一中值定理知，$\exists t_0\in[\alpha,\beta]$，对应点$(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0))$，使

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=f(x(t_0),y(t_0))\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=f(x_0,y_0)\Delta L.$$

§2　第二型曲线积分

1. 计算第二型曲线积分：

（1）$\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$，**其中**，$L$：i）**沿抛物线** $y=2x^2$，**从** O **到** B **的一段（图** 20-1）；ii）**沿直线** OB：$y=2x$；iii）**沿封闭曲线** $OABO$；

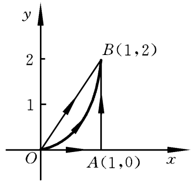

图 20-1

（2）$\int_L (2a-y)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$，**其中**，$L$ **为摆线** $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）**沿** t **增加方向的一段**；

（3）$\oint_L \frac{-x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，**其中**，$L$ **为圆周** $x^2+y^2=a^2$，**依逆时针方向**；

（4）$\oint_L y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y$，**其中**，$L$ **为** $y=\sin x$（$0\leqslant x\leqslant\pi$）**与** x **轴所围的闭曲线，依顺时针方向**；

（5）$\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$，**其中**，$L$：**从**（1，1，1）**到**（2，3，4）**的直线段**.

解　（1）i）**因为** $L=OB$：$y=2x^2$，$0\leqslant x\leqslant 1$，**所以**

$$\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\int_0^1(x\cdot 4x-2x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

ii）**因为** $L=OB$：$y=2x$，$0\leqslant x\leqslant 1$，**所以**

$$\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\int_0^1(2x-2x)\mathrm{d}x=0.$$

iii）**因为** $L=OA+AB+BO$，OA：$y=0$，$0\leqslant x\leqslant 1$，AB：$x=1$，$0\leqslant y\leqslant 2$，

BO：$y=2x$，x 从 1 变到 0，所以

$$\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\int_{OA}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\int_{AB}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\int_{BO}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 0\mathrm{d}x+\int_0^2\mathrm{d}y+\int_1^0(2x-2x)\mathrm{d}x=2.$$

（2）$\displaystyle\int_L(2a-y)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}[(2a-a+a\cos t)a(1-\cos t)+a\sin t]\mathrm{d}t$
$$=\int_0^{2\pi}(a^2-a^2\cos^2 t+a\sin t)\mathrm{d}t=\pi a^2.$$

（3）因为 $L:\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\end{cases}$ $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，所以

$$\oint_L\frac{-x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(-a\cos\theta)(-a\sin\theta)+a\sin\theta\cdot a\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$
$$=2\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\sin\theta=(\sin^2\theta)\Big|_0^{2\pi}=0.$$

（4）记 $A(\pi,0)$，因为 $L=AO+\overset{\frown}{OA}$，其中，$AO$：$y=0$，$x$ 从 π 变化到 0；$\overset{\frown}{OA}$：$y=\sin x$，x 从 0 变化到 π，

$$\oint_L y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y=\int_{AO}y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{OA}}y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y$$
$$=\int_\pi^0 0\mathrm{d}x+\int_0^\pi(\sin x+\sin x\cos x)\mathrm{d}x$$
$$=\left[-\cos x+\frac{1}{2}\sin^2 x\right]\Bigg|_0^\pi=2.$$

（5）因为 L：$x=1+t$，$y=1+2t$，$z=1+3t$，$0\leqslant t\leqslant 1$，所以

$$\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=\int_0^1[(1+t)+2(1+2t)+3(1+3t)]\mathrm{d}t=13.$$

2. 设质点受力作用，力的反方向指向原点，大小与质点离原点的距离成正比. 若质点由 $(a,0)$ 沿椭圆移到 $(0,b)$，求力所作的功.

解　因为
$$L:\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta,\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

当 $(x,y)\in L$ 时，力

$$\boldsymbol{F}=k\sqrt{x^2+y^2}(\cos\theta\cdot\boldsymbol{i}+\sin\theta\cdot\boldsymbol{j})=k\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}\right)$$
$$=k(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\ (k\text{ 为比例系数}),$$

所以功

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a\cos\theta(-a\sin\theta)+b\sin\theta(b\cos\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}k(b^2-a^2)\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{k(b^2-a^2)}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{k(b^2-a^2)}{2}.$$

3. 设一质点受力作用，力的方向指向原点，大小与质点到 xy 平面成反比．若质点沿直线 $x=at,y=bt,z=ct$ $(c\neq0)$ 从 $M(a,b,c)$ 到 $N(2a,2b,2c)$，求力所作的功．

解　因为

$$L:\begin{cases}x=at,\\y=bt,\quad 1\leqslant t\leqslant 2,\\z=ct,\end{cases}$$

当 $(x,y,z)\in L$ 时，力

$$\boldsymbol{F}=\frac{-\mu}{|z|}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{j}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=-\frac{\mu}{|z|\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\ (\mu\text{ 为比例常数})$$

所以功

$$W=-\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\mu\int_L\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{|z|\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\mu\int_1^2\frac{a^2t+b^2t+c^2t}{|c|t^2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{\mu\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|c|}\ln 2.$$

4. 证明曲线积分的估计式：

$$\left|\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant LM,$$

其中，L 为 AB 的弧长，$M=\max\limits_{(x,y)\in AB}\sqrt{P^2+Q^2}$．

利用上述不等式估计积分

$$I_R=\int_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

并证明

$$\lim_{R\to+\infty}I_R=0.$$

证　不妨设 L 为光滑曲线（若分段光滑则分段积分），

$$L:x=x(t),y=y(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

仍然记 $$P=P(x(t),y(t)),\quad Q=Q(x(t),y(t)),$$
由柯西-施瓦茨不等式,有
$$|Px'(t)+Qy'(t)|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)},$$
则
$$\begin{aligned}\left|\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|&=\left|\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_\alpha^\beta|Px'(t)+Qy'(t)|\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_\alpha^\beta\sqrt{P^2+Q^2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t\\&\leqslant M\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=ML.\end{aligned}$$

因为 $$P=\frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2},\quad Q=\frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2},$$
所以在 $L:x^2+y^2=R^2$ 上,
$$P^2+Q^2=\frac{R^2}{(R^2+xy)^4},$$
为了求 $$M=\max_{(x,y)\in L}\sqrt{P^2+Q^2},$$
令 $$L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+y^2-R^2),$$
由
$$\begin{cases}L_x=y+2\lambda x=0,\\L_y=x+2\lambda y=0,\\L_\lambda=x^2+y^2-R^2=0,\end{cases}$$
得稳定点: $\left(\pm\frac{\sqrt2}{2}R,\pm\frac{\sqrt2}{2}R\right),\left(\pm\frac{\sqrt2}{2}R,\mp\frac{\sqrt2}{2}R\right)$.

又 $L\left(\pm\frac{\sqrt2}{2}R,\pm\frac{\sqrt2}{2}R\right)=\frac12R^2,\quad L\left(\pm\frac{\sqrt2}{2}R,\mp\frac{\sqrt2}{2}R\right)=-\frac12R^2,$

故 $$M=\max_{x^2+y^2=R^2}\sqrt{P^2+Q^2}=\frac{R}{\left(R^2-\frac12R^2\right)^2}=\frac{4}{R^3}.$$

因此 $$|I_R|=\left|\int_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}\right|\leqslant\frac{4}{R^3}\cdot2\pi R=\frac{8\pi}{R^2}.$$
显然 $$\lim_{R\to+\infty}I_R=0.$$

5. 计算沿空间曲线的第二型曲线积分:

(1) $\int_L xyz\mathrm{d}z$,**其中**,$L:x^2+y^2+z^2=1$ **与** $y=z$ **相交的圆,其方向按曲线**

依次经过 1，2，7，8 卦限；

（2）$\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中，$L$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的边界曲线，其方向按曲线依次经过 xy 平面部分，yz 平面部分和 zx 平面部分.

解　（1）由　$L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ y=z\end{cases}$　或　$\begin{cases}x^2+2y^2=1\\ y=z\end{cases}$，

得 L 的参数方程

$$L:\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,\\ z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

当 θ 从 0 变到 2π 时，点 (x,y,z) 的变动方向与曲线的指向一致，故

$$\int_L xyz\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{16\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}\pi}{16}.$$

（2）记 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$，$L=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA}$，其中，

$$\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\\ z=0,\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$\overset{\frown}{BC}:\begin{cases}x=0,\\ y=\cos\theta,\\ z=\sin\theta,\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$\overset{\frown}{CA}:\begin{cases}x=\sin\theta,\\ y=0,\\ z=\cos\theta,\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

由图形的对称性以及被积函数中变量的轮换性，知

$$\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x=\int_L (z^2-x^2)\mathrm{d}y=\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

故
$$\begin{aligned}&\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z\\=&3\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x\\=&3\int_{\widehat{AB}}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+3\int_{\widehat{BC}}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+3\int_{\widehat{CA}}(y^2-z^2)\mathrm{d}x\\=&3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta+0+3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos^2\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta\\=&-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=-6\times\frac{2}{3}\times 1=-4.\end{aligned}$$

§3　总练习题

1. 计算下列曲线积分：

(1) $\int_L y\mathrm{d}s$，**其中，L 是由 $y^2=x$ 和 $x+y=2$ 所围的闭曲线；**

(2) $\int_L |y|\mathrm{d}s$，**其中，L 为双纽线** $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$；

(3) $\int_L z\mathrm{d}s$，**其中，L 为圆锥螺线**
$$x=t\cos t,y=t\sin t,z=t,t\in[0,t_0];$$

(4) $\int_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x$，**其中，$L$ 为以 a 为半径，圆心在原点的右半圆周从最上面一点 A 到最下面一点 B；**

(5) $\int_L \frac{\mathrm{d}y-\mathrm{d}x}{x-y}$，**其中，$L$ 是抛物线 $y=x^2-4$，从 $A(0,-4)$ 到 $B(2,0)$ 的一段；**

(6) $\int_L y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，**其中，$L$ 是维维安尼曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2=ax$ $(z\geqslant 0,a>0)$，若从 x 轴正向看去，L 是沿逆时针方向进行的.**

解　(1) **由**
$$\begin{cases}y^2=x,\\x+y=2,\end{cases}$$
得交点：$A(1,1)$**和** $B(4,-2)$.

由 B 点经抛物线 $y^2=x$ 到 A 点的弧记为 L_1，由 A 点经直线 $x+y=2$ 到 B 点的直线段记为 L_2，则

$$L_1:\begin{cases}x=t^2,\\ y=t,\end{cases}\quad -2\leqslant t\leqslant 1,$$

$$L_2:\begin{cases}x=t,\\ y=2-t,\end{cases}\quad 1\leqslant t\leqslant 4,$$

故有 $\int_L y\mathrm{d}s=\int_{L_1}y\mathrm{d}s+\int_{L_2}y\mathrm{d}s=\int_{-2}^{1}t\ \sqrt{4t^2+1}\mathrm{d}t+\int_1^4(2-t)\ \sqrt{1+(-1)^2}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_{-2}^{1}+\sqrt{2}\left(2t-\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_1^4$$

$$=\frac{1}{12}[5\sqrt{5}-17\sqrt{17}]-\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

(2) 因为 L 的极坐标方程为

$$\rho^2=a^2\cos 2\theta,|\theta|\leqslant\frac{\pi}{4}\text{及}|\theta-\pi|\leqslant\frac{\pi}{4},$$

所以 $\mathrm{d}s=\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\sqrt{\frac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}+a^2\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{\rho}\mathrm{d}\theta.$$

由对称性,有

$$\int_L|y|\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho(\theta)\sin\theta\ \frac{a^2}{\rho(\theta)}\mathrm{d}\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta=2a^2(2-\sqrt{2}).$$

(3) $\int_L z\mathrm{d}s=\int_0^{t_0}t\ \sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{t_0}t\ \sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}[(2+t_0)^{\frac{2}{3}}-2\sqrt{2}].$$

(4) 因为 $L:\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\end{cases}$ θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $-\frac{\pi}{2}$,所以

$$\int_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}[a^4\sin^2\theta\cos^2\theta+a^4\sin^2\theta\cos^2\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=-4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=-a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{4}a^4.$$

(5) 因为 $L:\begin{cases}x=x,\\ y=x^2-4,\end{cases}$ $0\leqslant x\leqslant 2$,所以

$$\int_L \frac{\mathrm{d}y-\mathrm{d}x}{x-y}=\int_0^2 \frac{2x-1}{4+x-x^2}\mathrm{d}x=\ln 2.$$

(6) 选择好参数方程是解此题的关键.

将 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 表示为 $\rho^2=a^2$，$x^2+y^2=ax$ 表示为 $r^2=ax$ 或 $r=\sqrt{ax}$. 令 $x=a\cos^2\theta$，则

$$y=a\sin\theta\cos\theta,z=a\sqrt{1-\cos^2\theta}=a|\sin\theta|,$$

于是
$$L:\begin{cases}x=a\cos^2\theta,\\ y=a\sin\theta\cos\theta,\\ z=a\sqrt{1-\cos^2\theta},\end{cases}\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

所以
$$\begin{aligned}\int_L y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z &=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[a^2\sin^2\theta\cos^2\theta(-2a\cos\theta\sin\theta)\\ &\quad+a^2(1-\cos^2\theta)\cdot a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\ &\quad+a^2\cos^4\theta\cdot a\cos\theta\sin\theta(1-\cos^2\theta)^{-\frac{1}{2}}]\mathrm{d}\theta\\ &=2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta\cos^2\theta-\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta\\ &=a^3\left[\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)-\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{\pi}{4}a^3.\end{aligned}$$

2. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，试就如下曲线：

(1) L：连接 $A(a,a)$，$C(b,a)$ 的直线段；

(2) L：连接 $A(a,a)$，$C(b,a)$，$B(b,b)$ 三点的三角形（逆时针方向），计算下列曲线积分：

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s,\quad \int_L f(x,y)\mathrm{d}x,\quad \int_L f(x,y)\mathrm{d}y.$$

解　(1) 因为 $L=AC:\begin{cases}x=x,\\ y=a,\end{cases}\ a\leqslant x\leqslant b$，所以

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,a)\mathrm{d}x,$$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,a)\mathrm{d}x,$$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

（2）因为
$$L=AC+CB+BA,$$
$$AC:\begin{cases}x=x,\\ y=a,\end{cases}\ a\leqslant x\leqslant b,$$
$$CB:\begin{cases}x=b,\\ y=y,\end{cases}\ a\leqslant y\leqslant b,$$
$$BA:\begin{cases}x=x,\\ y=x,\end{cases}\ x\text{ 从 }b\text{ 变到 }a.$$
所以
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,a)\mathrm{d}x+\int_a^b f(b,y)\mathrm{d}y+\int_a^b \sqrt{2}\,f(x,x)\mathrm{d}x,$$
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,a)\mathrm{d}x+\int_b^a f(x,x)\mathrm{d}x,$$
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b f(b,y)\mathrm{d}y+\int_b^a f(y,y)\mathrm{d}y.$$

3. 设 $f(x,y)$ 为定义在平面曲线弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 上的非负连续函数，且在 $\overset{\frown}{AB}$ 上恒大于零.

（1）试证明 $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s>0$；

（2）试问在相同条件下，第二型曲线积分
$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\mathrm{d}x>0$$
是否成立？为什么？

解　（1）设 $\overset{\frown}{AB}$ 为光滑曲线（若分段光滑就分段积分），且
$$\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad \alpha\leqslant t\leqslant \beta,$$
则
$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$
由已知条件知
$$f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}>0,$$
故由定积分的性质，有
$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t>0.$$

（2）在与（1）相同条件下，$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\mathrm{d}x>0$ 一般不能成立. 这是因为第

二型曲线积分与曲线的方向有关.

例:取
$$f(x,y)=x^2+y^2,$$
$$L_1:\begin{cases}x=1,\\ y=y,\end{cases}\quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$
$$L_2:\begin{cases}x=x,\\ y=1,\end{cases}\quad x\text{ 从 }1\text{ 变到 }0,$$
在 L_1 上,
$$f(1,x)=1+y^2>0,$$
在 L_2 上,
$$f(x,1)=x^2+1>0,$$
但
$$\int_{L_1}f(x,y)\mathrm{d}x=0,$$
$$\int_{L_2}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_1^0(1+x^2)\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}<0.$$

第二十一章　重　积　分

知识要点

1. 重积分的定义、可积条件、性质与定积分或第一型曲线积分的定义、可积条件、性质，基本上是平行的，没有实质上的差别. 值得注意的是，重积分的定义、性质、可积条件以及对可积函数类的讨论是按自变量为独立变化的变量极限来处理的，但重积分的计算却是按累次积分的方法来计算的.

2. 二重积分是根据积分区域的形状来化为二次积分的. 若积分区域是x型（或y型），则应化为先对y（或x），后对x（或y）的二次积分. 对于一般的积分区域，或边界曲线的函数是分段函数，则应将其分解为有限个无共同内点的x型或y型区域之并，利用积分区域可加性来计算. 二重积分化为二次积分，应根据被积函数选择积分顺序，要保证内层的积分易积出来，另外应注意二次积分中每个积分的上限要大于下限.

3. 三重积分化为累次积分，有两种方法：一是“先一后二法”. 要求积分区域是母线平行于某坐标轴的柱体（柱体的侧面可能蜕化为曲线），柱体的底面可分别用其他两个变量为自变量的二元函数表出；二是“先二后一法”. 它对积分区域无特殊的要求. 注意定积分的表达式中上限要大于下限.

4. 利用与第一型曲线积分相类似的对称性和轮换对称性可简化重积分的计算.

5. 当重积分的积分区域复杂或者被积函数复杂时可用变量变换的方法来求. 常用的变量变换在二重积分中有极坐标变换，在三重积分中有柱坐标变换和球坐标变换. 应注意它们的适用类型. 由于区域的边界在变换后仍为新区域的边界，因此应将区域的各边界方程用新坐标的方程表出. 这样通过原区域的图形，便能写出新坐标系下的累次积分的积分限. 另外在变量变换

时别忘了乘以新旧坐标下面积元或体积元间的放大系数 $|J|$.

6. 重积分的应用是定积分应用的推广,微元法仍是建立积分表达式的重要方法. 设某所求量 Φ 分布在平面区域 D(或空间区域 V),且 Φ 关于区域具有代数可加性. 若在点 (x,y)(或 (x,y,z))处的任一微小区域上,Φ 的微元量 $\Delta\Phi$ 可近似表示为

$$\mathrm{d}\Phi=f(x,y)\mathrm{d}\sigma \ (\text{或}\ \mathrm{d}\Phi=f(x,y,z)\mathrm{d}V),$$

其中,$\mathrm{d}\sigma$(或 $\mathrm{d}V$)为该微小区域的面积(或体积)微元,且 $\Delta\Phi-\mathrm{d}\Phi$ 是 $\mathrm{d}\sigma$(或 $\mathrm{d}V$)的高阶无穷小,则 Φ 可表示为

$$\Phi=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \left(\text{或}\ \Phi=\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V\right).$$

7. 格林公式反映了平面区域上的二重积分与其边界上的第二型曲线积分之间的联系. 它是微积分基本公式(牛顿-莱布尼兹公式)在多元函数积分学中的推广(见第二十三章),它不但为二重积分和曲线积分带来方便,也为理解高斯公式、斯托克斯公式提供了基础.

8. 曲线积分与路线无关的四个等价命题是重要的理论. 它要求区域 D 是单连通闭区域. 当 D 不是单连通闭区域时,由命题"在 D 内处处成立 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$",不能导出曲线积分与路径无关的结论.

9. 第二型曲线积分的新计算方法.

(1) 利用格林公式:

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

其中,L 为平面闭曲线,L 所围的闭区域为 D,L 取正向,函数 P、Q 在 D 上有连续的一阶偏导数.

若 P、Q 在 D 内有奇点,则需将奇点"挖掉",并在"挖掉"奇点的新区域 D' 上用格林公式.

(2) 利用曲线积分基本定理:

若
$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_L \mathrm{d}f,$$

其中,函数 f 在 L 上有连续的一阶偏导数,则

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=f\Big|_A^B=f(B)-f(A),$$

其中，A,B 为 L 的起点与终点坐标.

10. 反常二重积分分为两类：无界区域上的反常二重积分和无界函数的反常二重积分. 它们仍定义为“部分区域上二重积分”的极限，这与广义积分相似，也有某些与广义积分敛散性判定类似的定理.

习 题 详 解

§1 二重积分概念

1. 把重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$ 作为积分和的极限，计算这个积分值，其中，$D=[0,1]\times[0,1]$，并用直线网

$$x=\frac{i}{n},\quad y=\frac{j}{n}\quad (i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

分割这个正方形为许多小正方形，每个小正方形取其右顶点作为节点.

解　因为 $f(x,y)=xy$ 在有界闭区域 D 上连续，所以 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$ 存在. 直线网

$$x=\frac{i}{n},\quad y=\frac{j}{n}\quad (i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

将区域 D 分成 n^2 个小正方形区域

$$\sigma_{ij}=\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]\quad (i,j=1,2,\cdots,n),$$

其面积为 $\Delta\sigma_{ij}=\dfrac{1}{n^2}$，取 (ξ_i,η_j) 为 σ_{ij} 的右顶点 $\left(\dfrac{i}{n},\dfrac{j}{n}\right)$，于是对于上面的分割，其积分和为

$$\sum_{i,j=1}^{n}f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{ij}{n^4}=\frac{1}{n^4}\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}j\right)=\frac{(1+n)^2}{4n^2},$$

故
$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i,j=1}^{n}f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}.$$

2. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，则 $f(x,y)$ 在 D 上有界.

证　反证法：假设 $f(x,y)$ 在 D 上无界. 现在用任意曲线把 D 分成 n 个可求面积的小区域

$$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n,$$

以 $\Delta\sigma_i$ 表示小区域 σ_i 的面积. 由于 $f(x,y)$ 在 D 上无界，则 $f(x,y)$ 必定在某个小区域 σ_j 上也无界，所以对 $\forall M>0,\exists(\xi_j,\eta_j)\in\sigma_j$，使

$$|f(\xi_j,\eta_j)|>\frac{M+G}{\Delta\sigma_j},$$

其中，
$$G=\left|\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\right|.$$

于是
$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\right|&=\left|f(\xi_j,\eta_j)\Delta\sigma_j+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\right|\\&=|f(\xi_j,\eta_j)\Delta\sigma_j+G|\geqslant|f(\xi_j,\eta_j)\Delta\sigma_j-|G|\\&>\frac{M+G}{\Delta\sigma_j}\Delta\sigma_j-G=M.\end{aligned}$$

这表明，对 D 的任一分割 T，不论细度 $\|T\|$ 多么小，按上面方法选取 (ξ_i,η_i) 时，总能使积分和的绝对值大于任意的正数 M，这与 $f(x,y)$ 在 D 上可积相矛盾，故假设不对，即 $f(x,y)$ 在 D 上有界.

3. 证明二重积分中值定理（性质7）.

二重积分中值定理：若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)S_D$$

其中，S_D 是积分区域 D 的面积.

证　因为 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，故 $f(x,y)$ 在 D 上能取最大值 M 和最小值 m，即

$$m\leqslant f(x,y)\leqslant M,\quad\forall(x,y)\in D.$$

又由于 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 存在，故由性质6，有

$$mS_D\leqslant\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant MS_D,$$

即
$$m\leqslant\frac{1}{S_D}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M.$$
根据有界闭区域上连续函数的介值性定理知，$\exists(\xi,\eta)\in D$，使
$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{S_D}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$
即
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)S_D.$$

4. 若$f(x,y)$为有界闭区域D上的非负连续函数，且在D上不恒为零，则
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma>0.$$

证　因为$f(x,y)$在D上非负且不恒为零，所以$\exists(x_0,y_0)\in D$，使
$$f(x_0,y_0)>0.$$
又因为$f(x,y)$在D上连续，从而$f(x,y)$在(x_0,y_0)处连续，因此，$\exists\delta>0$，对$\forall(x,y)\in U((x_0,y_0);\delta)\cap D$，有
$$f(x,y)>\frac{1}{2}f(x_0,y_0).$$
记$D_1=U((x_0,y_0);\delta)\cap D\subset D$，由于$f(x,y)$在可求面积的区域$D$上可积，故$f(x,y)$在可求面积的区域$D_1$上也可积，又由于在$D$上$f(x,y)\geqslant0$，故
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\geqslant\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma\geqslant\iint_{D_1}\frac{1}{2}f(x_0,y_0)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}f(x_0,y_0)S_{D_1}>0.$$

5. 若$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，且在D内任一子区域$D'\subset D$上有
$$\iint_{D'} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0,$$
则在D上$f(x,y)\equiv0$.

证　反证法：假设$f(x,y)\not\equiv0$，$(x,y)\in D$，不妨设$\exists(x_0,y_0)\in D$，使
$$f(x_0,y_0)>0.$$
因为$f(x,y)$在D上连续，从而$f(x,y)$在(x_0,y_0)处连续，因此，$\exists\delta>0$，对$\forall(x,y)\in U((x_0,y_0);\delta)\cap D$，有
$$f(x,y)>\frac{1}{2}f(x_0,y_0).$$

记$D_1=U((x_0,y_0);\delta)\cap D\subset D$，由于$f(x,y)$在可求面积的区域$D$上可

积,因而 $f(x,y)$在可求面积的区域 D_1 上也可积,且

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \geqslant \iint\limits_{D_1} \frac{1}{2} f(x_0,y_0)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} f(x_0,y_0) S_D > 0.$$

这与条件 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$ 相矛盾,故假设不对,即

$$f(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D.$$

6. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$,证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & (x,y)\text{为 } D \text{ 内有理点(即 } x,y \text{ 皆为有理数)}, \\ 0, & (x,y)\text{为 } D \text{ 内非有理点} \end{cases}$$

在 D 上不可积.

证　对 D 作任意的分割 $T:\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$,则 $f(x,y)$ 关于分割的上和与下和分别为

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i = S_D,$$

$$s(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta\sigma_i = 0,$$

其中,　$M_i = \sup\limits_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y) = 1,\quad m_i = \inf\limits_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y) = 0,\ i=1,2,\cdots,n.$

所以

$$\lim_{\|T\|\to 0} S(T) = S_D \neq \lim_{\|T\|\to 0} s(T) = 0.$$

故 $f(x,y)$在 D 上不可积.

7. 证明:若 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,$g(x,y)$在 D 上可积且不变号,则存在一点$(\xi,\eta)\in D$,使得

$$\iint\limits_{D} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\iint\limits_{D} g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

证　(1) 先证$f(x,y)g(x,y)$在D 上可积. 为此,下面证明关于上和与下和的一个性质.

i) 增加分点后,上和不增,下和不减.

设 $h(x,y)$为定义在有界闭区域 D 上的有界函数,T 是对 D 的任一分割,则 $h(x,y)$关于分割 T 的上和与下和分别为

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i, \quad s(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i,$$

其中，　$M_i=\sup\limits_{(x,y)\in\sigma_i}h(x,y),m_i=\inf\limits_{(x,y)\in\sigma_i}h(x,y),\ i=1,2,\cdots,n.$

不妨设T_1是在T中再添一个分线的新分割，即将σ_i分割成两个小区域σ_i^1和σ_i^2，其他小区域$\sigma_j(j\neq i)$不变．记

$$M_i^k=\sup_{(x,y)\in\sigma_i^k}h(x,y),\quad m_i^k=\inf_{(x,y)\in\sigma_i^k}h(x,y),\ k=1,2$$

则
$$M_i^k\leqslant M_i,\quad m_i^k\geqslant m_i,\ k=1,2$$

所以
$$\begin{aligned}S(T)-S(T_1)&=\sum_{j=1}^{n}M_j\Delta\sigma_j-\Big[\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}M_j\Delta\sigma_j+M_i^1\Delta\sigma_i^1+M_i^2\Delta\sigma_i^2\Big]\\&=M_i\Delta\sigma_i-(M_i^1\Delta\sigma_i^1+M_i^2\Delta\sigma_i^2)\\&=M_i\Delta\sigma_i^1+M_i\Delta_i^2-(M_i^1\Delta\sigma_i^1+M_i^2\Delta\sigma_i^2)\\&=(M_i-M_i^1)\Delta\sigma_i^1+(M_i-M_i^2)\Delta\sigma_i^2\geqslant0,\end{aligned}$$

即
$$S(T_1)\leqslant S(T).$$

同理
$$s(T)-s(T_1)=(m_i-m_i^1)\Delta\sigma_i^1+(m_i-m_i^2)\Delta\sigma_i^2\leqslant0,$$

即
$$s(T_1)\geqslant s(T).$$

ii）$f(x,y)g(x,y)$在D上可积.

因为$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，$g(x,y)$在D上可积，所以$f(x,y)$，$g(x,y)$在D上有界，故$\exists A>0$，使

$$|f(x,y)|\leqslant A,\quad |g(x,y)|\leqslant A,\ (x,y)\in D.$$

由于$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$存在，故根据定理21.5，对$\forall\varepsilon>0$，存在$D$的分割$T_1$和$T_2$，使

$$S^f(T_1)-s^f(T_1)<\frac{\varepsilon}{2A},$$

$$S^g(T_2)-s^g(T_2)<\frac{\varepsilon}{2A}.$$

令$T=T_1+T_2$，则由i）有

$$S^f(T)-s^f(T)\leqslant S^f(T_1)-s^f(T_1)<\frac{\varepsilon}{2A},$$

$$S^g(T)-s^g(T)\leqslant S^g(T_2)-s^g(T_2)<\frac{\varepsilon}{2A},$$

所以 $$S^{fg}(T)-s^{fg}(T)=\sum_T (M_i^{fg}-m_i^{fg})\Delta\sigma_i\leqslant\sum_T (M_i^fM_i^g-m_i^fm_i^g)\Delta\sigma_i$$
$$=\sum_T (M_i^fM_i^g-M_i^gm_i^f+M_i^gm_i^f-m_i^fm_i^g)\Delta\sigma_i$$
$$=\sum_T [(M_i^f-m_i^f)M_i^g+(M_i^g-m_i^g)m_i^f]\Delta\sigma_i$$
$$\leqslant A\left[\sum_T (M_i^f-m_i^f)\Delta\sigma_i+\sum_T (M_i^g-m_i^g)\Delta\sigma_i\right]$$
$$<A\left[\frac{\varepsilon}{2A}+\frac{\varepsilon}{2A}\right]=\varepsilon.$$
故 $f(x,y)g(x,y)$ 在 D 上可积.

（2）因为 $g(x,y)$ 在 D 上不变号，故不妨设 $g(x,y)\geqslant 0,(x,y)\in D$，又 $f(x,y)$ 在 D 上连续，故存在最大值 M 和最小值 m，即
$$m\leqslant f(x,y)\leqslant M,\ (x,y)\in D,$$
或 $$mg(x,y)\leqslant f(x,y)g(x,y)\leqslant Mg(x,y),$$
积分有 $$m\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$
若 $\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$，则
$$\left|\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint_D |f(x,y)||g(x,y)|\mathrm{d}\sigma\leqslant M\iint_D |g(x,y)|\mathrm{d}\sigma$$
$$=M\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma=0,$$
因而 $$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma=0,$$
故结论成立；若 $\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma>0$，则
$$m\leqslant\frac{\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma}\leqslant M.$$
由有界闭区域 D 上连续函数的介值定理知，$\exists(\xi,\eta)\in D$，使
$$f(\xi,\eta)=\frac{\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma},$$

即
$$\iint_D f(x,g)g(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

8. 应用中值定理估计积分
$$I=\iint_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{\mathrm{d}\sigma}{100+\cos^2x+\cos^2y}$$
的值.

解　因为当$(x,y)\in D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 10\}$时,
$$100\leqslant 100+\cos^2x+\cos^2y\leqslant 102,$$
即
$$\frac{1}{102}\leqslant\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}\leqslant\frac{1}{100}.$$
又$S_D=4\times\frac{1}{2}\times 10\times 10=200$,故由中值定理,有
$$\frac{200}{102}\leqslant I\leqslant 2.$$

9. 证明:若平面曲线$x=\varphi(t),y=\psi(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta$光滑(即$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续的导数),则此曲线的面积为零.

证　因为曲线$x=\varphi(t),y=\psi(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta$光滑,故$\varphi'(t),\psi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续,且
$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0,\ t\in[\alpha,\beta].$$
任取$t_0\in[\alpha,\beta]$,记$x_0=\varphi(t_0),y_0=\psi(t_0)$,考虑隐函数组:
$$\begin{cases}F(x,y,t)=x-\varphi(t)=0,\\G(x,y,t)=y-\psi(t)=0.\end{cases}$$
由于
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,t)}=\begin{vmatrix}1 & -\varphi'(t)\\0 & -\psi'(t)\end{vmatrix}=-\psi'(t),$$
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,t)}=\begin{vmatrix}0 & -\varphi'(t)\\1 & -\psi'(t)\end{vmatrix}=\varphi'(t),$$
由隐函数组定理知,当$\psi'(t_0)\neq 0$时,在$U(y_0)$内存在连续函数$x=g(y)$;当$\varphi'(t_0)\neq 0$时,在$U(x_0)$内存在连续函数$y=f(x)$,总之,当$t\in[\alpha,\beta]$时,曲线$x=\varphi(t),y=\psi(t)$为一连续函数的图象,故由定理21.3知,该曲线的面积为零.

§2　直角坐标系下二重积分的计算

1. 设$f(x,y)$在区域D上连续,试将二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$化为不同顺序

的累次积分：

（1）D 由不等式 $y\leqslant x, y\geqslant a, x\leqslant b\ (0<a<b)$所确定的区域；

（2）D 由不等式 $y\leqslant x, y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1$ 所确定的区域；

（3）D 由不等式 $x^2+y^2\leqslant 1$ 与 $x+y\geqslant 1$ 所确定的区域；

（4）$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leqslant 1\}$.

解　（1）因为 D 可以分别表示为 x 型区域

$$D=\{(x,y)\,|\,a\leqslant y\leqslant x, a\leqslant x\leqslant b\}$$

和 y 型区域
$$D=\{(x,y)\,|\,y\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b\},$$

故
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

（2）由
$$\begin{cases} y=x, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

得交点$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 D 可表示为两个 x 型区域的并：

$$D=D_1\cup D_2=\left\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant x, 0\leqslant x\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$\cup\left\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\},$$

也可以表示为 y 型区域

$$D=\left\{(x,y)\,|\,y\leqslant x\leqslant \sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\right\},$$

故
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

（3）由
$$\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

得交点(0,1)和(1,0). 因为 D 可以分别表示为 x 型区域

$$D=\{(x,y)\,|\,1-x\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}, 0\leqslant x\leqslant 1\}$$

和 y 型区域
$$D=\{(x,y)\,|\,1-y\leqslant x\leqslant \sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 1\},$$

故
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

（4）因为 D 是由四条直线

$$x+y=1,\quad x-y=1,\quad -x+y=1,\quad -(x+y)=1$$

围成的菱形区域，所以可将 D 分别表示为两个 x 型区域和两个 y 型区域的并：

$$D_x=\{(x,y)\mid -1-x\leqslant y\leqslant 1+x,-1\leqslant x\leqslant 0\}$$
$$\cup\{(x,y)\mid x-1\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1\}$$

和
$$D_y=\{(x,y)\mid -1-y\leqslant x\leqslant 1+y,-1\leqslant y\leqslant 0\}$$
$$\cup\{(x,y)\mid y-1\leqslant x\leqslant 1-y,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

故
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{1+x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{-1-y}^{1+y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2. 在下列积分中改变累次积分的顺序：

（1）$\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{2x}f(x,y)\mathrm{d}y$；　　（2）$\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$；

（3）$\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y$；

（4）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^3\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)}f(x,y)\mathrm{d}y$.

解　（1）因为 $D=\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant 2x,0\leqslant x\leqslant 2\}$（见图 21-1），

故由
$$\begin{cases}y=x,\\x=2,\end{cases}\text{得交点}(2,2),$$

由
$$\begin{cases}y=2x,\\x=2,\end{cases}\text{得交点}(2,4).$$

将 D 表示为 y 型区域

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y}{2}\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant 2\right\}$$
$$\cup\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y}{2}\leqslant x\leqslant 2,2\leqslant y\leqslant 4\right\},$$

则
$$\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{2x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

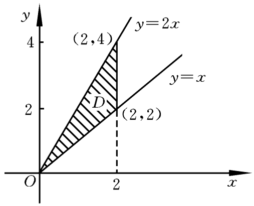

图 21-1

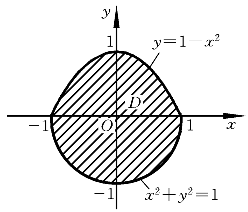

图 21-2

(2) **因为** $D=\{(x,y)\mid -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant 1-x^2,-1\leqslant x\leqslant 1\}$(**见图** 21-2),**故将** D **表示为** y **型区域**

$$D=\{(x,y)\mid -\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant \sqrt{1-y^2},-1\leqslant y\leqslant 0\}$$
$$\cup\{(x,y)\mid -\sqrt{1-y}\leqslant x\leqslant \sqrt{1-y},0\leqslant y\leqslant 1\},$$

则
$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) **因为** $D=\{(x,y)\mid \sqrt{2ax-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{2ax},0\leqslant x\leqslant 2a\}$(**见图** 21-3),**故将** D **表示为** y **型区域**

$$D=\left\{(x,y)\left|\frac{y^2}{2a}\leqslant x\leqslant a-\sqrt{a^2-y^2},0\leqslant y\leqslant a\right.\right\}$$
$$\cup\{(x,y)\mid a+\sqrt{a^2-y^2}\leqslant x\leqslant 2a,0\leqslant y\leqslant a\}$$
$$\cup\left\{(x,y)\left|\frac{y^2}{2a}\leqslant x\leqslant 2a,a\leqslant y\leqslant 2a\right.\right\},$$

则
$$\int_{0}^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}\mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{a}^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

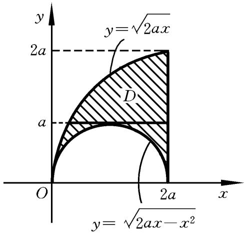

图 21-3

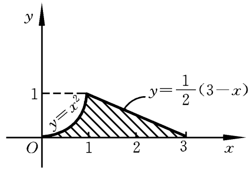

图 21-4

(4) 因为 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x^2,0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\left\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}(3-x),\right.$ $\left.1\leqslant x\leqslant 3\right\}$(见图 21-4),故将 D 表示为 y 型区域

$$D=\{(x,y)\mid\sqrt{y}\leqslant x\leqslant 3-2y,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

则 $$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^3\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

3. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma$,其中,$D$ 由抛物线 $y^2=2px$ 与直线 $x=\frac{p}{2}$ $(p>0)$所围成的区域;

(2) $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中,$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\sqrt{x}\leqslant y\leqslant 2\sqrt{x}\}$;

(3) $\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{2a-x}}(a>0)$,其中,$D$ 为图 21-5 中阴影部分;

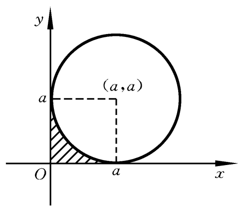

图 21-5

(4) $\iint\limits_D\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sigma$,其中,$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$.

解　(1) 因为 D 可表示为 x 型区域

$$D=\left\{(x,y)\mid -\sqrt{2px}\leqslant y\leqslant \sqrt{2px},0\leqslant x\leqslant \frac{p}{2}\right\},$$

所以
$$\iint_D xy^2\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}xy^2\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{1}{3}x(y^3)\Big|_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{4}{3}\sqrt{2}\,p^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{p}{2}}x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{21}p^5.$$

(2) **由于** $D=\{(x,y)\mid \sqrt{x}\leqslant y\leqslant 2\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 1\}$ **为** x **型区域,故**

$$\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x=\frac{128}{105}.$$

(3) **由于** $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant a-\sqrt{2ax-x^2},0\leqslant x\leqslant a\}$ **为** x **型区域,故**

$$\iint_D\frac{1}{\sqrt{2a-x}}\mathrm{d}\sigma=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}}\frac{1}{\sqrt{2a-x}}\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{2a-x}}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^a\frac{a}{\sqrt{2a-x}}\mathrm{d}x-\int_0^a\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\left[-2a(2a-x)^{\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^a-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a$$
$$=\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a^{\frac{3}{2}}.$$

(4) **因为** D **可表示为** x **型区域**

$$D=\{(x,y)\mid -\sqrt{x-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{x-x^2},0\leqslant x\leqslant 1\},\text{故}$$

$$\iint_D\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}y=2\int_0^1x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{t=\sqrt{1-x}}4\int_0^1t^2(1-t^2)\mathrm{d}t$$
$$=4\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right)\Big|_0^1=\frac{8}{15}.$$

4. 求由坐标平面及 $x=2,y=3,x+y+z=4$ **所围的角柱体的体积.**

解　所围立体如图21-6 **所示. 因为平面**$x+y+z=4$ **与平面**xy **上的交线方程为**

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ z=0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x+y=4, \\ z=0, \end{cases}$$

由
$$\begin{cases} x+y=4, \\ x=2, \end{cases} \text{得交点} A(2,2),$$

由
$$\begin{cases} x+y=4, \\ y=3, \end{cases} \text{得交点} B(1,3),$$

所以 D 可以用 x 型区域表示为

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 3,0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 4-x,1\leqslant x\leqslant 2\},$$

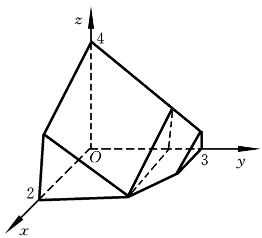

图 21-6

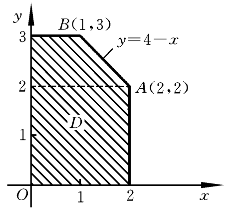

图 21-7

D 的图形如图 21-7 所示，则体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (4-x-y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^3(4-x-y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{4-x}(4-x-y)\mathrm{d}y \\ &=\int_0^1\left[(4-x)y-\frac{1}{2}y^2\right]\Bigg|_0^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left[(4-x)y-\frac{1}{2}y^2\right]\Bigg|_0^{4-x}\mathrm{d}x \\ &=\int_0^1\left(\frac{15}{2}-3x\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{2}(4-x)^2\mathrm{d}x=6+\frac{19}{6}=9\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

其中，等号仅在 $f(x)$ 为常量函数时成立.

证　此不等式证明方法很多，下面利用二重积分证明.

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以二元函数 $F(x,y)=f(x)f(y)$ 在 $D=[a,$

$b]\times[a,b]$上连续，利用不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$，有

$$2f(x)f(y)\leqslant f^2(x)+f^2(y).$$

对上式在区域D上积分，有

$$2\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D(f^2(x)+f^2(y))\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_D f^2(x)\mathrm{d}\sigma,$$

或
$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b f(x)f(y)\mathrm{d}y\leqslant\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}y,$$

即
$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

等号成立当且仅当$f(x)=f(y)$时，即$f(x)$为常量函数.

6. 设平面区域D在x轴和y轴的投影长度分别为l_x和l_y，D的面积为S_D，(α,β)为D内任一点，证明：

(1) $\left|\iint\limits_D(x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant l_xl_yS_D$；

(2) $\left|\iint\limits_D(x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\dfrac{1}{4}l_x^2l_y^2$.

证　(1)
$$\left|\iint\limits_D(x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint\limits_D|x-\alpha||y-\beta|\mathrm{d}\sigma\leqslant l_xl_y\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=l_xl_yS_D.$$

(2) 设D在x轴上的投影区间为$[a,b]$，在y轴上的投影区间为$[c,d]$，则

$$l_x=b-a,\quad l_y=d-c.$$

又$(\alpha,\beta)\in D\subset[a,b]\times[c,d]$，故有

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_D(x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}\sigma\right|&\leqslant\iint\limits_D|x-\alpha||y-\beta|\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]}|x-\alpha||y-\beta|\mathrm{d}\sigma\\&=\int_a^b|x-\alpha|\mathrm{d}x\cdot\int_c^d|y-\beta|\mathrm{d}y\\&=\left[\int_a^\alpha(\alpha-x)\mathrm{d}x+\int_\alpha^b(x-\alpha)\mathrm{d}x\right]\\&\quad\cdot\left[\int_c^\beta(\beta-y)\mathrm{d}x+\int_\beta^d(y-\beta)\mathrm{d}y\right]\\&=\left[\frac{1}{2}(\alpha-a)^2+\frac{1}{2}(b-\alpha)^2\right]\end{aligned}$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2}(\beta-c)^2+\frac{1}{2}(d-\beta)^2\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{4}[(\alpha-a)^2+2(\alpha-a)(b-\alpha)+(b-\alpha)^2]$$

$$\cdot[(\beta-c)^2+2(\beta-c)(d-\beta)+(d-\beta)^2]$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)^2(c-d)^2=\frac{1}{4}l_x^2l_y^2.$$

7. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}, & \text{当}(x,y)\text{为} D \text{中有理点},\\ 0, & \text{当}(x,y)\text{为} D \text{中非有理点},\end{cases}$$

其中,q_x 表示有理数 x 化成既约分数后的分母. 证明 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分存在而两个累次积分不存在.

证　此题的证明与第九章 §3 中例 3 的证明类似.

首先,用类似于第四章 §1 中例 3 的证明方法可证,$f(x,y)$ 在 D 中有理点处不连续,而在其余的点处连续. 下面证明的主要思想是在 $f(x,y)$ 的图象中作平面 $z=\dfrac{\varepsilon}{4}$,在此平面上方只有 $f(x,y)$ 图象中有限个点,这些点在 D 中投影的点含于属于分割 T 的有限个小区域中,当 $\|T\|$ 足够小时,这有限个小区域的面积可以任意小;而 T 中其余小区域上函数的振幅不大于 $\dfrac{\varepsilon}{4}$,将两部分结合起来便可证得 $S(T)-s(T)<\varepsilon$. 下面是具体的证明.

首先,对任意有理数 $x\in[0,1]$,知 $q_x\geqslant 1$,故当 $(x,y)\in D$ 是有理点时,

$$f(x,y)=\frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y}\leqslant 2.$$

任给 $\varepsilon>0$,在 $[0,1]$ 内使得 $\dfrac{1}{q_x}>\dfrac{\varepsilon}{4}$ 的有理点 $\dfrac{p}{q}$ 只有有限个,设它们为 x_1,$x_2,\cdots,x_k$,同样,当 $y_i=x_i\in[0,1]$ 时,$\dfrac{1}{q_y}>\dfrac{\varepsilon}{4}$,$i=1,2,\cdots,k$. 这表明,当 $(x,y)\in D_1=\{(x_i,y_j),i,j=1,2,\cdots,k\}$ 时

$$f(x,y)=\frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y}>\frac{\varepsilon}{2},$$

而当 $(x,y)\in D$ 但 $(x,y)\notin D_1$ 时

$$f(x,y)=\frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

现取自然数$n>\frac{4k}{\sqrt{\varepsilon}}$，将$x$轴，$y$轴上的闭区间$[0,1]$分成$n$等分，即对$D$用直线网：

$$x=\frac{i}{n},\quad y=\frac{j}{n},\quad i,j=1,2,\cdots,n-1$$

进行分割T，分割T将D分成n^2个小正方形区域$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n^2}$，把这些小区域分为$\{\sigma_i',i=1,2,\cdots,m\}$和$\{\sigma_i'',i=1,2,\cdots,n^2-m\}$两类．其中，$\{\sigma_i'\}$为含有$D_1$中的点$(x_i,y_j)$的所有小区域，这类小区域的个数$m\leqslant 4k^2$（因为当所有点$(x_i,y_j)$恰好都为节点时才有$m=4k^2$）；而$\{\sigma_i''\}$为$T$中所有其余不含$D_1$中的点的小区域（$\sigma_i''$的边界上也不含$D_1$中的点），于是

$$M_i'=\sup_{(x,y)\in\sigma_i'}f(x,y)\leqslant 2,\quad m_i'=\inf_{(x,y)\in\sigma_i'}f(x,y)=0,$$

$$M_i''=\sup_{(x,y)\in\sigma_i''}f(x,y)\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\quad m_i''=\inf_{(x,y)\in\sigma_i''}f(x,y)=0,$$

则
$$\begin{aligned}S(T)&=\sum_T M_i\Delta\sigma_i=\sum_{\sigma_i'}M_i'\Delta\sigma_i'+\sum_{\sigma_i''}M_i''\Delta\sigma_i''\\&\leqslant 2\sum_{\sigma_i'}\Delta\sigma_i'+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{\sigma_i''}\Delta\sigma_i''<2\cdot 4k^2\,\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\frac{8k^2}{n^2}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

$$s(T)=\sum_T m_i\Delta\sigma_i=\sum_{\sigma_i'}m_i'\Delta\sigma_i'+\sum_{\sigma_i''}m_i''\Delta\sigma_i''=0,$$

即
$$S(T)-s(T)<\varepsilon.$$

根据定理21.5，知$f(x,y)$在D上可积.

对于累次积分$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$，取

$$y=y_i\in[0,1]\ (1\leqslant i\leqslant k),$$

考虑定积分$\int_0^1 f(x,y_i)\mathrm{d}x$. 对$[0,1]$作任一分割

$$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\},$$

因为在每一个小区间 Δ_j 内均含有有理数和无理数,若 $x_j\in\Delta_j$ 为有理数,则 (x_j,y_i) 为有理点,故

$$f(x_j,y_i)=\frac{1}{q_{x_j}}+\frac{1}{q_{y_i}}>\frac{1}{q_{y_i}};$$

若 $x_j\in\Delta_j$ 为无理数,则 (x_j,y_i) 为无理点,故

$$f(x_j,y_i)=0,$$

所以
$$M_j=\sup_{x\in\Delta_j}f(x,y_i)>\frac{1}{q_{y_i}},\quad m_j=\inf_{x\in\Delta_j}f(x,y_i)=0,$$

$$S(T)=\sum_{j=1}^{n}M_j\Delta x_j>\frac{1}{q_{y_i}},\quad s(T)=\sum_{j=1}^{n}m_j\Delta x_j=0,$$

$$S(T)-s(T)>\frac{1}{q_{y_i}}.$$

故由定理 9.3 知 $f(x,y_i)$ 在 $[0,1]$ 上不可积,即 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 不存在. 同理可证 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ 也不存在.

8. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当}(x,y)\text{为} D \text{中有理点,且} q_x=q_y \text{时},\\ 0, & \text{当}(x,y)\text{为} D \text{中其他点时},\end{cases}$$

其中,q_x 意义同上述第 7 题. 证明 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分不存在,而两个累次积分存在.

证 用任意曲线把 D 分成 n 个可求面积的小区域

$$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$$

由于 $\sigma_i(\forall 1\leqslant i\leqslant n)$ 是可求面积的,故取充分大的质数 p,必定存在一小正方形区域

$$\left[\frac{j-1}{p},\frac{j}{p}\right]\times\left[\frac{k-1}{p},\frac{k}{p}\right]\subset\sigma_i\subset D,1\leqslant j,k\leqslant p-1,$$

则点 $\left(\frac{j-1}{p},\frac{k-1}{p}\right)\in\sigma_i$ 且为有理点. 这表明,每一个 σ_i 中都存在使 $q_x=q_y$ 的有理点 (x,y),当然也存在非有理点,故

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\sigma_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i=1,\quad s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\sigma_i=0,$$

$$S(T)-s(T)=1.$$

根据定理21.5知$f(x,y)$在D上不可积.

对于定积分$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$，当$y\in[0,1]$为无理数时，由于$f(x,y)=0$，所以$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=0$；当$y\in[0,1]$为有理数时，使$q_x=q_y$成立的$x$至多有有限个，所以$f(x,y)$，$y\in[0,1]$在积分区间$[0,1]$上只有有限个间断点，在其他点均连续且$f(x,y)=0$，故$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=0$，从而

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=0.$$

同理可证$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=0.$

§3　格林公式·曲线积分与路线的无关性

1. 应用格林公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L (x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\mathrm{d}y$，其中，$L$是以$A(1,1)$，$B(3,2)$，$C(2,5)$为顶点的三角形，方向取正向；

(2) $\int_{AB}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$，其中，$m$为常数，$AB$为由$(a,0)$到$(0,0)$经过圆$x^2+y^2=ax$上半部的路线.

解　(1) 记D为以A,B,C为顶点的三角形区域，D可以表示为

$$D=D_1\cup D_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{2}(x+1)\leqslant y\leqslant 4x-3,1\leqslant x\leqslant 2\right\}$$

$$\cup\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{2}(x+1)\leqslant y\leqslant 11-3x,2\leqslant x\leqslant 3\right\},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=2(x+y),$$

由格林公式，有

$$\oint_L (x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=-\iint_D(4x+2y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=-\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3}(4x+2y)dy-\int_2^3 dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{11-3x}(4x+2y)dy$$

$$=-\int_1^2[4xy+y^2]\Big|_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3}dx-\int_2^3[4xy+y^2]\Big|_{\frac{1}{2}(x+1)}^{11-3x}dx$$

$$=-\int_1^2\left(\frac{119}{4}x^2-\frac{71}{2}x+\frac{35}{4}\right)dx-\int_2^3\left(-\frac{21}{4}x^2-\frac{49}{2}x+\frac{483}{4}\right)dx$$

$$=-46\,\frac{2}{3}.$$

（2）补一直线 $L_1: y=0, 0\leqslant x\leqslant a$，则圆 $x^2+y^2=ax$ 的上半圆与直线 L_1 围成一闭区域 D，D 的边界的方向为逆时针方向，故由格林公式，有

$$\int_{AB}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma-\int_{L_1}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$=\iint_D m\,d\sigma-\int_0^a 0dx=\frac{m}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{m}{8}\pi a^2.$$

2. 应用格林公式计算下列曲线所围的平面面积：

（1）星形线：$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$；

（2）双纽线：$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

解　（1）根据公式有

$$S_D=\frac{1}{2}\oint_L x dy-y dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t(3a\sin^2 t\cos t)-a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)]dt$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t dt=6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t dt$$

$$=6a^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t dt\right]$$

$$=6a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

（2）令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$r^4=a^2r^2\cos 2\theta,\quad \text{即}\quad r^2=a^2\cos 2\theta.$$

由对称性知，只需计算右半平面部分的面积，由于右半平面双纽线 L_1 的参数方程为

$$x=a\sqrt{\cos2\theta}\cos\theta,\quad y=a\sqrt{\cos2\theta}\sin\theta,\quad -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},$$

故 $S_D=2\cdot\frac{1}{2}\oint_{L_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left\{\left[(a\sqrt{\cos2\theta}\cos\theta)(-a(\cos2\theta)^{-\frac{1}{2}}\sin2\theta\sin\theta+a\sqrt{\cos2\theta}\cos\theta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[(a\sqrt{\cos2\theta}\sin\theta)(-a(\cos2\theta)^{-\frac{1}{2}}\sin2\theta\cos\theta-a\sqrt{\cos2\theta}\sin\theta)\right]\right\}\mathrm{d}\theta$$
$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\mathrm{d}\theta=a^2.$$

3. 证明：若 L 为平面上封闭曲线，$\boldsymbol{l}$ 为任意方向向量，则

$$\oint_L\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=0,$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 为曲线 L 的外法线方向.

证　由于 $\boldsymbol{n}$ 垂直于 L 的切向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\mathrm{d}x+\boldsymbol{j}\mathrm{d}y$（见图 21-8），若设

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\sin\alpha,$$

则 $$\cos\alpha\mathrm{d}x+\sin\alpha\mathrm{d}y=0. \quad ①$$

其次，因为 $\boldsymbol{n},\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{k}$ 构成右手系，故有

$$\boldsymbol{n}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\mathrm{d}s,$$

又 $$\boldsymbol{n}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\cos\alpha\mathrm{d}y-\sin\alpha\mathrm{d}x)\boldsymbol{k},$$

所以 $$\cos\alpha\mathrm{d}y-\sin\alpha\mathrm{d}x=\mathrm{d}s. \quad ②$$

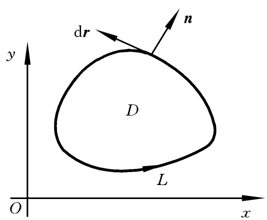

图 21-8

由式①和式②，解出 $$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\quad \sin\alpha=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}.$$

现设 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}\cos\alpha_1+\boldsymbol{j}\sin\alpha_1$，由于 $\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})=\cos\alpha_1\cos\alpha+\sin\alpha_1\sin\alpha$，所以

$$\oint_L\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=\oint_L\cos\alpha_1\mathrm{d}y-\sin\alpha_1\mathrm{d}x=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_D0\mathrm{d}\sigma=0.$$

4. 求积分值 $I=\oint_L[x\cos(\boldsymbol{n},x)+y\cos(\boldsymbol{n},y)]\mathrm{d}s$，其中，$L$ 为包围有界区域的封闭曲线，$\boldsymbol{n}$ 为 L 的外法线方向.

解　设 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\sin\alpha$，由上题有

$$\cos(\boldsymbol{n},x)\mathrm{d}s=\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})\mathrm{d}s=\cos\alpha\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\cdot\mathrm{d}s=\mathrm{d}y,$$

$$\cos(\boldsymbol{n},y)\mathrm{d}s=\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})\mathrm{d}s=\sin\alpha\mathrm{d}s=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot\mathrm{d}s=-\mathrm{d}x,$$

则　$I=\oint_L[x\cos(\boldsymbol{n},x)+y\cos(\boldsymbol{n},y)]\mathrm{d}s=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\iint_D 2\mathrm{d}\sigma=2S_D.$

5. 验证下列积分与路线无关,并求它们的值:

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$;

(2) $\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}$,**沿在右半平面的路线**;

(4) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,**沿不通过原点的路线**;

(5) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y$,**其中**,$\varphi(x)$,$\psi(y)$**为连续函数**.

解　(1) **因为**　$P=x-y,\quad Q=y-x,$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$$

在整个平面上成立,所以曲线积分在整个平面上与路线无关,取直线$L:y=x,0\leqslant x\leqslant 1$,**则**

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=\int_L(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0.$$

(2) **因为**　$P=2x\cos y-y^2\sin x,\quad Q=2y\cos x-x^2\sin y,$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\sin x-2x\sin y=\frac{\partial P}{\partial y}$$

在整个平面上成立,所以曲线积分在整个平面上与路线无关,取折线:$O(0,0)\to A(0,y)\to B(x,y)$,**则**

$$\begin{aligned}&\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^y 2y\mathrm{d}y+\int_0^x(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x=y^2+x^2\cos y+(y^2\cos x)\Big|_0^x\\&=x^2\cos y+y^2\cos x.\end{aligned}$$

(3) **因为**　$P=\frac{y}{x^2},\quad Q=-\frac{1}{x},$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{x^2}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

$$(x,y)\in D=\{(x,y)\mid x>0,y\in\mathbf{R}\},$$

所以曲线积分在右半平面与路线无关,取折线:$A(2,1)\to B(1,1)\to C(1,2)$,**则**

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}=\int_2^1\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\int_1^2\mathrm{d}y=-\frac{3}{2}.$$

(4) **因为**
$$P=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad Q=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

$$(x,y)\in D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\},$$

所以曲线积分在 D **内的任何不包含原点的区域** D_1 **内与路线无关,取折线:**$A(1,0)\to B(1,8)\to C(6,8)$,**则**

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^8\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y+\int_1^6\frac{x}{\sqrt{8^2+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{1+y^2}\,\Big|_0^8+\sqrt{8^2+x^2}\,\Big|_1^6=9.$$

(5) **因为**
$$P=\varphi(x),\quad Q=\psi(y),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=0=\frac{\partial P}{\partial y}$$

在整个平面上成立,所以曲线积分在整个平面上与路线无关. 取折线:$A(2,1)\to B(1,1)\to C(1,2)$,**则**

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y=\int_2^1\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_1^2\psi(y)\mathrm{d}y.$$

6. 求下列全微分的原函数:

(1) $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$;

(2) $\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y+2)+y]\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y)+1]\mathrm{d}y$;

(3) $f(\sqrt{x^2+y^2})x\mathrm{d}x+f(\sqrt{x^2+y^2})y\mathrm{d}y$.

解　(1) **因为**
$$P=x^2+2xy-y^2,\quad Q=x^2-2xy-y^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-2y=\frac{\partial P}{\partial y},\ (x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

所以$(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$ 在整个平面上为某一函数$u(x,y)$的全微分，即$\exists u(x,y)$使

$$\mathrm{d}u=(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$$

由$\frac{\partial u}{\partial x}=P=x^2+2xy-y^2$，则

$$u(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x=\int(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2+C(y),$$

又
$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q=x^2-2xy-y^2=x^2-2xy+C'(y),$$

得
$$C'(y)=-y^2,\quad C(y)=-\frac{1}{3}y^3+C,$$

故
$$u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C.$$

（2）因为　$P=\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y+2)+y]$，　$Q=\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y)+1]$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y)+1]+\mathrm{e}^{x+y}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

所以$\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y+2)+y]\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y)+1]\mathrm{d}y$ 在整个平面上为某一函数$u(x,y)$的全微分，则

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y+2)+y]\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y)+1]\mathrm{d}y\\&=\int_0^y(1-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y+\int_0^x\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y+2)+y]\mathrm{d}x+C_1\\&=(y-y\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^y)\big|_0^y+[y\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{x+y}(x-y+2)-\mathrm{e}^{x+y}]\big|_0^x+C_1\\&=\mathrm{e}^{x+y}(x-y+1)+y\mathrm{e}^x+C.\end{aligned}$$

（3）因为　$P=f(\sqrt{x^2+y^2})x$，　$Q=f(\sqrt{x^2+y^2})y$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(\sqrt{x^2+y^2})=\frac{\partial P}{\partial y},\quad (x,y)\in D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\neq 0\},$$

所以在$\mathbf{R}^2$内任一不包含原点的区域上，$f(\sqrt{x^2+y^2})x\mathrm{d}x+f(\sqrt{x^2+y^2})y\mathrm{d}y$为某一函数$u(x,y)$的全微分. 由于

$$\begin{aligned}&f(\sqrt{x^2+y^2})x\mathrm{d}x+f(\sqrt{x^2+y^2})y\mathrm{d}y\\&=f(\sqrt{x^2+y^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=\sqrt{x^2+y^2}f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2},\end{aligned}$$

故　$u(x,y)=\int uf(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int f(\sqrt{t})\mathrm{d}t$，　$u=\sqrt{x^2+y^2}$，　$t=x^2+y^2$.

7. 为了使曲线积分

$$\int_L F(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$$

与积分路线无关,可微函数$F(x,y)$**应满足怎样的条件?**

解　因为　　$P=yF(x,y)$,　$Q=xF(x,y)$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=F(x,y)+x\frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=F(x,y)+y\frac{\partial F}{\partial y}.$$

要使曲线积分$\int_L F(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$**与积分路线无关,当且仅当**$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$**,即**

$$x\frac{\partial F}{\partial x}=y\frac{\partial F}{\partial y}.$$

8. 计算曲线积分

$$\int_{AMB}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y,$$

其中,$\varphi(y)$**和**$\varphi'(y)$**为连续函数;**AMB **为连接点** $A(x_1,y_1)$**和点** $B(x_2,y_2)$**的任何路线,但与直线段** AB **围成已知大小为** S **的面积.**

解　设闭曲线AMB **与**BA **围成区域**D**,其方向为正方向,则由格林公式,有**

$$\begin{aligned}&\int_{AMB}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]\mathrm{d}\sigma-\int_{BA}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y\\&=\iint_D m\mathrm{d}\sigma+\int_{AB}\mathrm{d}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-mxy]+\int_{AB}m(x-1)\mathrm{d}y\\&=mS_D+[\varphi(y)\mathrm{e}^x-mxy]\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}+m\int_{x_1}^{x_2}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-1)\mathrm{d}x\\&=mS_D+\varphi(y_2)\mathrm{e}^{x_2}-mx_2y_2-\varphi(y_1)\mathrm{e}^{x_1}+mx_1y_1+\frac{m}{2}(y_2-y_1)(x_2+x_1-2).\end{aligned}$$

若闭曲线AMB **与**BA **构成负方向,则上面的二重积分前应添加负号,故**

$$\begin{aligned}&\int_{AMB}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y\\&=\pm mS_D+\varphi(y_2)\mathrm{e}^{x_2}-mx_2y_2-\varphi(y_1)\mathrm{e}^{x_1}+mx_1y_1+\frac{m}{2}(y_2-y_1)(x_2+x_1-2).\end{aligned}$$

9. 设函数 $f(u)$ 具有一阶连续导数,证明对任何光滑封闭曲线 L,有

$$\oint_L f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0.$$

证　因为　$P=f(xy)\cdot y,\quad Q=f(xy)\cdot x,$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=f(xy)+xyf'(xy)=\frac{\partial P}{\partial y}$$

在整个平面上成立,所以对于任何光滑封闭曲线 L,有

$$\oint_L f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0.$$

10. 设函数 $u(x,y)$ 在由封闭的光滑曲线 L 所围的区域 D 上具有二阶连续偏导数,证明

$$\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_L\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$$

其中,$\frac{\partial u}{\partial n}$ 是 $u(x,y)$ 沿 L 外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

证　因为　$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},y),$

由本节习题4,知

$$\cos(\boldsymbol{n},x)\mathrm{d}s=\mathrm{d}y,\quad \cos(\boldsymbol{n},y)\mathrm{d}s=-\mathrm{d}x,$$

则
$$\oint_L\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_L\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\overset{\text{格林公式}}{=\!=\!=\!=}\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

§4　二重积分的变量变换

1. 对积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 进行极坐标变换,并写出变换后不同顺序的累次积分:

(1) 当 D 为由不等式 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2,y\geqslant 0$ 所确定的区域;

(2) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant 0\}$;

(3) $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant x+y\leqslant 1\}$.

解　(1) 作极坐标变换

$$T:\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

则T将D变为$r\theta$平面上的矩形域

$$\Delta=\{(r,\theta)\mid a\leqslant r\leqslant b,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\},$$

故
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$
$$=\int_a^b\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta.$$

（2）作极坐标变换

$$T:\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

则T将右半圆域D变为$r\theta$平面上区域

$$\Delta=\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

或
$$\Delta=\left\{(r,\theta)\mid\arcsin r\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1\right\},$$

故
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}r\int_{\arcsin r}^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta.$$

（3）作极坐标变换

$$T:\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

因为$x=1$变为$r\cos\theta=1,r=\dfrac{1}{\cos\theta}$；$x+y=1$变为$r=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$；$x+y=0$变为$r(\cos\theta+\sin\theta)=0$，所以$T$将$D$（见图21-9）变换为$r\theta$平面上区域$\Delta$，即

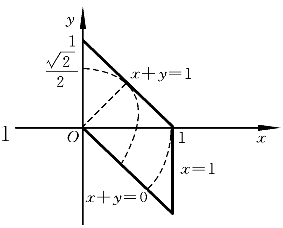

图21-9

$$\Delta=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\cos\theta},-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 0\right\}$$
$$\cup\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)},0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

或
$$\Delta=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$\cup\left\{(r,\theta)\middle|\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}+\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant r\leqslant1\right\}$$

$$\cup\left\{(r,\theta)\middle|-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r},\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant r\leqslant1\right\}$$

$$\cup\left\{(r,\theta)\middle|-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant-\arccos\frac{1}{r},1\leqslant r\leqslant\sqrt{2}\right\},$$

故

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta$$

$$+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}+\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta$$

$$+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta$$

$$+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\arccos\frac{1}{r}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta.$$

2. 用极坐标计算下列二重积分：

（1）$\displaystyle\iint_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中**，$D=\{(x,y)\mid\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant4\pi^2\}$；

（2）$\displaystyle\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中**，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y\}$；

（3）$\displaystyle\iint_D|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中**，$D$ **为圆域**：$x^2+y^2\leqslant a^2$；

（4）$\displaystyle\iint_D f'(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中**，$D$ **为圆域**：$x^2+y^2\leqslant R^2$.

解　（1）$\displaystyle\iint_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\pi^{2\pi}r\sin r\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{2\pi}[\sin r-r\cos r]\Big|_\pi^{2\pi}\mathrm{d}\theta=-6\pi^2.$$

（2）**因为圆** $x^2+y^2=x+y$，**即** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ **在原点处**

的切线为 $y=-x$，所以

$$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta}(\cos\theta+\sin\theta)r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^4\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^4\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\theta\xlongequal{t=\theta-\frac{\pi}{4}}\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}t=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

（3）因为圆域 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 关于坐标轴对称，$|xy|$ 为 x,y 的偶函数，所以

$$\iint\limits_D |xy|\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant0,y\geqslant0}}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a(\sin\theta\cos\theta)r^3\mathrm{d}r$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\sin\theta\cdot\int_0^a r^3\mathrm{d}r$$

$$=4\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^a=\frac{a^4}{2}.$$

（4）$$\iint\limits_D f'(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R f'(r^2)r\mathrm{d}r=\pi\int_0^R f'(r^2)\mathrm{d}r^2$$

$$=\pi f(r^2)\big|_0^R=\pi[f(R^2)-f(0)].$$

3. 在下列积分中引入新变量 u,v 后，试将它化为累次积分：

（1）$\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$，若 $u=x+y,v=x-y$；

（2）$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中，$D=\{(x,y)\mid\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant\sqrt{a},x\geqslant0,y\geqslant0\}$，若 $x=u\cos^4v,y=u\sin^4v$；

（3）$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中，$D=\{(x,y)|x+y\leqslant a,x\geqslant0,y\geqslant0\}$，若 $x+y=u,y=uv$.

解　（1）因为　　$D=\{(x,y)|1-x\leqslant y\leqslant2-x,0\leqslant x\leqslant2\}$

的边界为 $x=0,x=2,x+y=1,x+y=2$，所以变换

$$T:\quad x=\frac{1}{2}(u+v),\quad y=\frac{1}{2}(u-v)$$

将 $x=0$ 变为 $u+v=0$；$x=2$ 变为 $u+v=4$；$x+y=1$ 变为 $u=1$；$x+y=2$ 变为 u

$=2$. 又

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

故
$$\begin{aligned}\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y&=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}\int_1^2\mathrm{d}u\int_{-u}^{4-u}f\left(\frac{1}{2}(u+v),\frac{1}{2}(u-v)\right)\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

(2) 因为变换

$$T:x=u\cos^4 v,\quad y=u\sin^4 v$$

将 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant\sqrt{a}$ 变为 $u\leqslant a$;$x\geqslant 0$ 和 $y\geqslant 0$ 变为 $u\geqslant 0$ 和 $0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}$. 又

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\cos^4 v & -4u\cos^3 v\sin v\\ \sin^4 v & 4u\sin^3 v\cos v\end{vmatrix}=4u\sin^3 v\cos^3 v,$$

所以
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}u\int_0^{\frac{\pi}{2}}4u\sin^3 v\cos^3 v f(u\cos^4 v,u\sin^4 v)\mathrm{d}v.$$

(3) 因为变换

$$T:x=u(1-v),\quad y=uv$$

将 $x+y\leqslant a$ 变为 $u\leqslant a$;$x\geqslant 0$ 变为 $v=\frac{y}{x+y}\leqslant 1$;$y\geqslant 0$ 变为 $u\geqslant 0$ 和 $v\geqslant 0$. 又

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1-v & -u\\ v & u\end{vmatrix}=u,$$

所以
$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^a\mathrm{d}u\int_0^1 uf(u(1-v),uv)\mathrm{d}v\\&=\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^a uf(u(1-v),uv)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

4. 试作适当变换,计算下列积分:

(1) $\iint_D(x+y)\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x+y\leqslant\pi,0\leqslant x-y\leqslant\pi\}$;

(2) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$.

解　(1) **令**

$$T:\begin{cases}x+y=u,\\ x-y=v,\end{cases}$$

即

$$T:\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(u+v),\\ y=\dfrac{1}{2}(u-v).\end{cases}$$

因为 T **将** $0\leqslant x+y\leqslant \pi$ **变为** $0\leqslant u\leqslant \pi$, $0\leqslant x-y\leqslant \pi$ **变为** $0\leqslant v\leqslant \pi$. **又**

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}.$$

所以

$$\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}u\mathrm{d}u\int_0^{\pi}\sin v\mathrm{d}v=\frac{\pi^2}{2}.$$

(2) **令**

$$T:\begin{cases}u=y,\\ v=x+y,\end{cases}$$

即

$$T:\begin{cases}x=v-u,\\ y=u.\end{cases}$$

因为 T **将** $x+y\leqslant 1$ **变为** $v\leqslant 1$; $y\geqslant 0$ **变为** $u\geqslant 0$; $x\geqslant 0$ **变为** $u\leqslant v$ **和** $v\geqslant 0$. **又**

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1,$$

所以

$$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^v e^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u=\int_0^1\left[ve^{\frac{u}{v}}\right]\Big|_0^v\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1 v(e-1)\mathrm{d}v=\frac{1}{2}(e-1).$$

5. 求由下列曲面所围立体 V **的体积:**

(1) V **是由** $z=x^2+y^2$ **和** $z=x+y$ **所围的立体;**

(2) V **是由曲面** $z^2=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ **和** $2z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ **所围的立体.**

解　(1) **由** $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ z=x+y\end{cases}$ **消去** z **后得立体** V **在** xy **平面上的投影区域为**

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\},$$

圆周$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$在原点处的切线为$y=x$，作极坐标变换

$$T: x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

则D变为

$$\Delta=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\cos\theta+\sin\theta,-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}\right\},$$

故
$$\begin{aligned}V&=\iint_D[(x+y)-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta}r[r(\cos\theta+\sin\theta)-r^2]\mathrm{d}r\\&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left[\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)^4-\frac{1}{4}(\cos\theta+\sin\theta)^4\right]\mathrm{d}\theta\\&=\frac{4}{12}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^4\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

(2) 因为V由锥面$z^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$与椭圆抛物面$2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$所围成，由

$$\begin{cases}z^2=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9},\\2z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\end{cases}$$

得交点(0,0,0)和交线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=4,\\z=2,\end{cases}$$

所以投影区域
$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}\leqslant 1\right\}.$$

令
$$T:\begin{cases}x=4r\cos\theta,\\y=6r\sin\theta,\end{cases}$$

则T将D变为

$$\Delta=\{(r,\theta)\,|\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1\},J(r,\theta)=abr=24r,$$

故
$$V=\iint\limits_D\left[\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=24\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r[2r-2r^2]\mathrm{d}r=8\pi.$$

6. 求由下列曲线所围的平面图形面积：

（1）$x+y=a,x+y=b,y=\alpha x,y=\beta x$（$0<a<b,0<\alpha<\beta$）；

（2）$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=x^2+y^2$；

（3）$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$（$x^2+y^2\geqslant a^2$）.

解　（1）**平面图形如图** 21-10 **所示.**

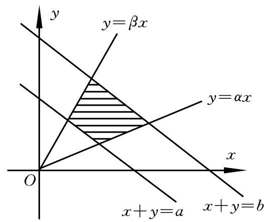

图 21-10

令
$$T:\begin{cases}x+y=u,\\ \dfrac{y}{x}=v,\end{cases}$$
则 T **将由直线** $x+y=a,x+y=b,y=\alpha x,y=\beta x$ **所围的区域** D **变为**
$$\Delta=\{(u,v)\mid a\leqslant u\leqslant b,\alpha\leqslant v\leqslant\beta\}.$$

又
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{x+y}{x^2}$$
$$=\frac{(x+y)^2}{x^2(x+y)}=\frac{(1+v)^2}{u},$$

因而
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{u}{(1+v)^2}.$$

故
$$S_D=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b u\mathrm{d}u\int_\alpha^\beta\frac{1}{(1+v)^2}\mathrm{d}v=\frac{b^2-a^2}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\beta}\right).$$

（2）**作广义极坐标变换**
$$T:\begin{cases}x=ar\cos\theta,\\ y=br\sin\theta,\end{cases}$$
则变换 T **将曲线变为**
$$r=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta},$$
故知曲线是有界的，又由原方程
$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=x^2+y^2$$

知,曲线关于坐标轴对称,$J(r,\theta)=abr$,则

$$S_D=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}r\mathrm{d}r=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=2a^3b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta+2ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=2a^3b\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+2ab^3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}ab(a^2+b^2).$$

(3) 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,则将已知曲线

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)\quad 和\quad x^2+y^2=a^2$$

分别化为

$$双纽线\ r^2=2a^2\cos2\theta\quad 和\quad 圆\ r=a,$$

如图 21-11 所示,由方程组

$$\begin{cases}r^2=2a^2\cos2\theta,\\ r=a,\end{cases}$$

得 $r=a,\theta=\pm\frac{\pi}{6}$,利用对称性,有

$$S_D=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_a^{a\sqrt{2\cos2\theta}}r\mathrm{d}r$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos2\theta-1)\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$$

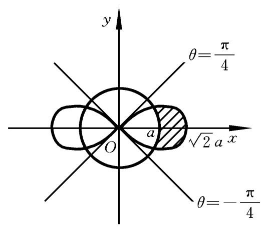

图 21-11

7. 设 $f(x,y)$ 为连续函数,且 $f(x,y)=f(y,x)$,证明:

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(1-x,1-y)\mathrm{d}y.$$

证 因为 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x,0\leqslant x\leqslant 1\}$,

作变换 $T:\begin{cases}u=1-x,\\ v=1-y,\end{cases}$

或 $T:\begin{cases}x=1-u,\\ y=1-v,\end{cases}$

又 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1,$

变换 T **将** D **变为** uv **平面上区域**

$$\Delta=\{(u,v)\mid 0\leqslant u\leqslant v,0\leqslant v\leqslant 1\},$$

故
$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^v f(1-u,1-v)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^v f(1-v,1-u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(1-x,1-y)\mathrm{d}y.$$

8. 试作适当变换，把下列二重积分化为单重积分：

(1) $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中**，$D$ **为圆域**：$x^2+y^2\leqslant 1$；

(2) $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中**，$D=\{(x,y)\mid |y|\leqslant|x|,|x|\leqslant 1\}$；

(3) $\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中**，$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$；

(4) $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中**，$D=\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant 4x,1\leqslant xy\leqslant 2\}$.

解　(1) **作极坐标变换**

$$T:\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

则 T **将** D **变为** $r\theta$ **平面上区域**

$$\Delta=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1\},$$

故
$$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r.$$

(2) **作极坐标变换**

$$T:\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

将 D **按图 21-12 所示分为 6 个区域** D_i $(i=1,2,\cdots,6)$，**在每个小区域** D_i **上先对** θ **求积分，后对** r **求积分，则**

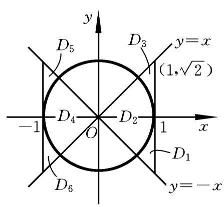

图 21-12

$$\begin{aligned}
&\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iint_{D_2} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_4} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_1} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+\iint_{D_2} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_5} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_6} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_0^1\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} rf(r)\mathrm{d}\theta+\int_0^1\mathrm{d}r\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} rf(r)\mathrm{d}\theta+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\arccos\frac{1}{r}} rf(r)\mathrm{d}\theta\\
&+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} rf(r)\mathrm{d}\theta+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi-\arccos\frac{1}{r}} rf(r)\mathrm{d}\theta\\
&+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{\pi+\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{5\pi}{4}} rf(r)\mathrm{d}\theta\\
=&\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r+\pi\int_1^{\sqrt{2}} rf(r)\mathrm{d}r-4\int_1^{\sqrt{2}} rf(r)\arccos\frac{1}{r}\mathrm{d}r\\
=&\pi\int_0^{\sqrt{2}} rf(r)\mathrm{d}r-4\int_1^{\sqrt{2}} rf(r)\arccos\frac{1}{r}\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

（3）作变换

$$T:\begin{cases}u=x+y,\\ v=x-y,\end{cases}\quad 或\quad T:\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(u+v),\\ y=\dfrac{1}{2}(u-v),\end{cases}$$

而

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

故变换 T 分别将 D 的边界 $x+y=1,x+y=-1,x-y=1,x-y=-1$ 分别变为 $u=1,u=-1,v=1,v=-1$. 则

$$\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\mathrm{d}v\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u.$$

（4）作变换

$$T:\begin{cases}u=xy,\\ v=\dfrac{y}{x},\end{cases}\quad \text{或}\quad T:\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}},\\ y=\sqrt{u}\sqrt{v},\end{cases}$$

则 T 将 D 变为 uv 平面上区域

$$\Delta=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 2,1\leqslant v\leqslant 4\}.$$

又
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{u}\sqrt{v}} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{v^3}}\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v},$$

故
$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_1^4\mathrm{d}v\int_1^2\frac{1}{2v}f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{1}{v}\mathrm{d}v\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u\\&=\ln 2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

§5　三重积分

1. 计算下列积分：

（1）$\iiint\limits_V(xy+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中，$V=[-2,5]\times[-3,3]\times[0,1]$；

（2）$\iiint\limits_V x\cos y\cos z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中，$V=[0,1]\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$；

（3）$\iiint\limits_V\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中，$V$ 是由 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的区域；

（4）$\iiint\limits_V y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中，$V$ 是由 $y=\sqrt{x}$，$y=0$，$z=0$ 及 $x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

解　（1）
$$\begin{aligned}\iiint\limits_V(xy+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_{-2}^5\mathrm{d}x\int_{-3}^3\mathrm{d}y\int_0^1(xy+z^2)\mathrm{d}z\\&=\int_{-2}^5\mathrm{d}x\int_{-3}^3\left(xy+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$=\int_{-2}^{5}\frac{2}{3}\cdot 3\mathrm{d}x=14.$$

(2) $\displaystyle\iiint_V x\cos y\cos z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}.$

(3) **因为** V **在** xy **平面上的投影区域**

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1\},$$

$$z_1(x,y)=0,\quad z_2(x,y)=1-x-y,$$

所以
$$\begin{aligned}\iiint_V\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}z\\&=-\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\right]\Bigg|_0^{1-x-y}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\left[-\frac{1}{1+x+y}-\frac{1}{4}y\right]\Bigg|_0^{1-x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{1}{4}(1-x)-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\right]\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{8}(1-x)^2-\ln|1+x|+\frac{1}{2}x\right]\Bigg|_0^1\\&=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.\end{aligned}$$

(4) **因为** V **在** xy **平面上的投影区域**

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

$$z_1(x,y)=0,\quad z_2(x,y)=\frac{\pi}{2}-x,$$

所以
$$\begin{aligned}\iiint_V y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}y\cos(x+z)\mathrm{d}z\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}[y\sin(x+z)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}y(1-\sin x)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1-\sin x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x\cos x-\sin x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

2. 试改变下列累次积分的顺序：

(1) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$；

(2) $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz$.

解　(1) **因为** V **由三个坐标面以及平面** $x+y=1, z=x+y$ **所围成，所以** V **在** xy **平面上的投影区域**

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x, 0\leqslant x\leqslant 1\},$$

则
$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}dx\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz.$$

V **在** zx **平面上的投影区域**

$$D_1=\{(x,z)\mid 0\leqslant z\leqslant x, 0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{(x,z)\mid x\leqslant z\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 1\},$$

则
$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_0^{1-x}f(x,y,z)dy+\int_0^1 dx\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)dy\\&=\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)dy+\int_0^1 dz\int_z^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y,z)dy.\end{aligned}$$

V **在** yz **平面上的投影区域**

$$D_2=\{(y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant y, 0\leqslant y\leqslant 1\}\cup\{y\leqslant z\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\},$$

则
$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 dy\int_0^y dz\int_0^{1-y}f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_y^1 dz\int_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)dx\\&=\int_0^1 dz\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)dx+\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_0^{1-y}f(x,y,z)dx.\end{aligned}$$

(2) **因为** V **由三坐标面、平面** $x=1, y=1$ **以及旋转抛物面** $z=x^2+y^2$ **所围成（见图 21-13），所以** V **在** xy **平面投影区域**

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\},$$

则
$$I=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz=\int_0^1 dy\int_0^1 dx\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz.$$

V **在** xz **平面上的投影区域（见图 21-14）**

$$D_1=\{(x,z)\mid 0\leqslant z\leqslant x^2, 0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{(x,z)\mid x^2\leqslant z\leqslant x^2+1, 0\leqslant x\leqslant 1\},$$

则
$$I=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}dz\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x^2+1}dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy$$

$$=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dx\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{z}} dx\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy$$
$$+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dx\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy.$$

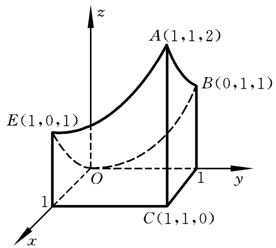

图 21-13

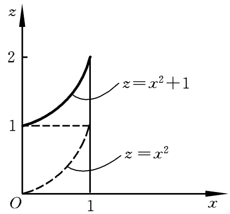

图 21-14

V 在 yz 平面上的投影区域与 V 在 xz 平面上的投影区域形状相同，故将上述累次积分中 x 与 y 交换($f(x,y,z)$不变)即可：

$$I=\int_0^1 dy\int_0^{y^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y^2+1} dz\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx$$
$$=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dy\int_0^1 f(x,y,z)dx+\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{z}} dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx$$
$$+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx.$$

3. 计算下列三重积分与累次积分：

(1) $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$，其中，$V$ 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2rz$ 所确定；

(2) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$

解 (1) 由
$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=r^2,\\ x^2+y^2+z^2=2rz,\end{cases}$$
得两球面的交线
$$\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{3}{4}r^2,\\ z=\dfrac{r}{2},\end{cases}$$

故由两球面所围区域在 xy 平面上的投影区域

$$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\frac{3r^2}{4}\right\}.$$

所以 $$\iiint\limits_V z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r}\rho\mathrm{d}\rho\int_{r-\sqrt{r^2-\rho^2}}^{\sqrt{r^2-\rho^2}}z^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r}\rho\left[(r^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-(r-\sqrt{r^2-\rho^2})^3\right]\mathrm{d}\rho$$

$$=-\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r}\left[(r^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-(r-\sqrt{r^2-\rho^2})^3\right]\mathrm{d}(r^2-\rho^2)$$

$$=-\frac{\pi}{3}\left[\frac{2}{5}(r^2-\rho^2)^{\frac{5}{2}}+r^3(r^2-\rho^2)-2r^2(r^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}r(r^2-\rho^2)^2-\frac{1}{5}(r^2-\rho^2)^{\frac{5}{2}}\right]\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r}$$

$$=\frac{59}{480}\pi r^5.$$

（2）因为 V 在 xy 平面上的投影区域

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

$$z_1(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\quad z_2(x,y)=\sqrt{2-x^2-y^2},$$

所以 $$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{2-r^2}}z^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{6}\int_0^1 r\left[(2-r^2)^{\frac{3}{2}}-r^3\right]\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{6}\left[-\frac{1}{5}(2-r^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{5}r^5\right]\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1).$$

4. 利用适当的坐标变换，计算下列各曲面所围成的体积：

（1）$z=x^2+y^2,z=2(x^2+y^2),y=x,y=x^2$；

（2）$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\ (x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,a>0,b>0,c>0)$.

解　（1）因为 V 由两个旋转抛物面，平面 $y=x$ 和母线平行于 z 轴的柱面 $y=x^2$ 所围成，V 在 xy 平面上的投影区域

$$D=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant x,0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

$$z_1(x,y)=x^2+y^2,\quad z_2(x,y)=2(x^2+y^2),$$

所以

$$V=\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}\mathrm{d}r\int_{r^2}^{2r^2}r\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\theta\sec^8\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^4\theta(1+\tan^2\theta)\mathrm{d}\tan\theta=\frac{3}{35}.$$

（2）**作变换**

$$T:\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos^2\theta,\\ y=br\sin\varphi\sin^2\theta,\\ z=cr\cos\varphi,\end{cases}\quad\begin{cases}0\leqslant r\leqslant 1,\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}a\sin\varphi\cos^2\theta & ar\cos\varphi\cos^2\theta & -2ar\sin\varphi\cos\theta\sin\theta\\ b\sin\varphi\sin^2\theta & br\cos\varphi\sin^2\theta & 2br\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\\ c\cos\varphi & -cr\sin\varphi & 0\end{vmatrix}$$

$$=2abcr^2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta,$$

则

$$V=\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2abc\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}abc.$$

5. 设球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2x$ **上各点的密度等于该点到坐标原点的距离，求这球体的质量.**

解　球体的质量为

$$M=\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

因为球体$(x-1)^2+y^2+z^2\leqslant 1$ **为以**$(1,0,0)$**为球心，半径为** 1 **的球面的内部，故作球坐标变换**

$$T:\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi,\end{cases}$$

$$J=r^2\sin\varphi,$$

则

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\sin\varphi\cos\theta}r^3\sin\varphi\,\mathrm{d}r=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5t\mathrm{d}t$$

$$=16\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times1\right)=\frac{8}{5}\pi.$$

6. 设 $f(x,y,z)$ 在长方体 $V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$ 上可积. 若对任何 $(y,z)\in D=[c,d]\times[e,h]$，定积分

$$F(y,z)=\int_a^b f(x,y,z)\mathrm{d}x$$

存在，证明 $F(y,z)$ 在 D 上可积，且

$$\iint\limits_D F(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

证　用平行于坐标面的平面网 T 作分割，它把 V 分成有限个小长方体

$$v_{ijk}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k].$$

记
$$M_{ijk}=\sup_{(x,y,z)\in v_{ijk}}f(x,y,z),$$
$$m_{ijk}=\inf_{(x,y,z)\in v_{ijk}}f(x,y,z).$$

对于 $[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k]$ 上任一点 (η_j,ξ_k)，在 $\Delta_i=(x_{i-1},x_i)$ 上有

$$m_{ijk}\Delta x_i\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x,\eta_j,\xi_k)\mathrm{d}x\leqslant M_{ijk}\Delta x_i.$$

对下标 i 相加，有

$$\sum_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x,\eta_j,\xi_k)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,\eta_j,\xi_k)\mathrm{d}x=F(\eta_j,\xi_k)$$

及
$$\sum_{i,j,k}m_{ijk}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k\leqslant\sum_{j,k}F(\eta_j,\xi_k)\Delta y_j\Delta z_k\leqslant\sum_{i,j,k}M_{ijk}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k.$$

上式不等式两边是分割 T 的下和与上和. 由于 $f(x,y,z)$ 在 V 上可积，当 $\|T\|\to0$ 时，下和与上和具有相同的极限，这表明 $F(y,z)$ 在 D 上可积，且

$$\iint\limits_D F(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

7. 设 $V=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant1\right\}$，计算下列积分：

(1) $\displaystyle\iiint\limits_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

（2） $\iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\,dx\,dy\,dz$.

解　（1）作广义球坐标变换

$$T:\begin{cases} x=ar\sin\varphi\cos\theta, \\ y=br\sin\varphi\sin\theta, \\ z=cr\cos\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} 0\leqslant r\leqslant 1, \\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \end{cases}$$

$$J=abcr^2\sin\varphi,$$

则
$$\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 abcr^2\sqrt{1-r^2}\sin\varphi\,dr=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$=2\pi abc(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\cdot\left[\frac{r}{8}(2r^2-1)\sqrt{1-r^2}+\frac{1}{8}\arcsin r\right]\Big|_0^1=\frac{1}{4}\pi^2abc.$$

（2）同样利用广义球坐标变换，有

$$\iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\,dx\,dy\,dz=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^2e^r\,dr=4\pi abc(e-2).$$

§6　重积分的应用

1. 求曲面 $az=xy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 内那部分的面积.

解　因为
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{a},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{a},$$

所以
$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2+y^2}.$$

又曲面 $az=xy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 内那部分曲面在 xy 平面上的投影区域

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2\},$$

利用对称性，有

$$\Delta S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r\sqrt{a^2+r^2}\,dr$$

$$=\frac{2\pi}{a}\left[\frac{1}{3}(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^a=\frac{2\pi}{3}a^2(2\sqrt{2}-1).$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截部分的曲面面积.

解　由
$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x, \end{cases}$$
得投影柱面
$$x^2+y^2=2x,$$
故曲面在 xy 平面上的投影区域
$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}.$$
又
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2},$$
所以
$$\Delta S=\iint_D \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r\mathrm{d}r=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=\sqrt{2}\,\pi.$$

3. 求下列均匀密度的平面薄板重心：

（1）半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0$；

（2）高为 h，底分别为 a 和 b 的等腰梯形.

解　（1）设密度为 μ（常数），由于图形关于 y 轴对称，故
$$\bar{x}=0.$$
又质量
$$M=\iint_D \mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 abr\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi ab\mu,$$
对 x 轴的静力矩
$$M_x=\iint_D \mu y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(ab^2\sin\theta)r^2\mathrm{d}r=\mu ab^2\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=\frac{2}{3}ab^2\mu,$$
$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{4b}{3\pi}.$$
故重心
$$(\bar{x},\bar{y})=\left(0,\frac{4b}{3\pi}\right).$$

（2）建立如图 21-15 所示的坐标系，由于质量分布均匀以及其对称性，故知
$$\bar{x}=0.$$

又质量　$M=\mu\cdot S_D=\frac{1}{2}\mu h(a+b)$，

对 x 轴的静力矩

$$M_x=\iint\limits_D \mu y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\mu\int_0^h \mathrm{d}y\int_0^{\frac{1}{2h}[bh-(b-a)y]} y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mu}{h}\int_0^h y[bh-(b-a)y]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\mu h^2}{6b(b+2a)},$$

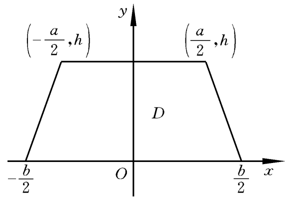

图 21-15

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{h(b+2a)}{3(a+b)}.$$

故重心　$$(\bar{x},\bar{y})=\left(0,\frac{h(b+2a)}{3(a+b)}\right).$$

4. 求下列均匀密度物体的重心：

（1）$z\leqslant 1-x^2-y^2, z\geqslant 0$；

（2）由坐标面及平面 $x+2y-z=1$ 所围的四面体.

解　（1）立体在 xy 平面上投影区域

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

由于质量分布均匀（设密度为 μ）以及其对称性，故知

$$\bar{x}=\bar{y}=0.$$

$$M=\iiint\limits_V \mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}\mathrm{d}z=2\pi\mu\int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi\mu,$$

$$M_z=\iiint\limits_V \mu z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2} z\mathrm{d}z=2\pi\mu\int_0^1\frac{1}{2}r(1-r^2)^2\mathrm{d}r=\frac{\pi\mu}{6}.$$

所以　$$\bar{z}=\frac{M_z}{M}=\frac{1}{3}.$$

故重心　$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\frac{1}{3}\right).$$

（2）立体 V 在 xy 平面上的投影区域

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}(1-x),0\leqslant x\leqslant 1\right\}.$$

设密度为 μ，由于

$$M=\mu\Delta V=\mu\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}\mu,$$

$$M_x=\iiint\limits_V \mu x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mu\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}y\int_{x+2y-1}^0 x\mathrm{d}z$$

$$=\mu\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}x(x+2y-1)\mathrm{d}y=\mu\int_0^1\frac{1}{4}x(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{\mu}{48},$$

$$M_y=\iiint\limits_V \mu y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mu\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}y\int_{x+2y-1}^0 y\mathrm{d}z$$

$$=\mu\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}y(1-x-2y)\mathrm{d}y=\frac{\mu}{24}\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x=\frac{\mu}{96},$$

$$M_z=\iiint\limits_V \mu z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mu\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}y\int_{x+2y-1}^0 z\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{\mu}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}(x+2y-1)^2\mathrm{d}y=-\frac{\mu}{12}\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x=-\frac{\mu}{48},$$

所以 $$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{1}{4},\quad \bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{1}{8},\quad \bar{z}=\frac{M_z}{M}=-\frac{1}{4}.$$

故重心 $$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{4}\right).$$

5. 求下列均匀密度的平面薄板的转动惯量：

(1) **半径为 R 的圆关于其切线的转动惯量；**

(2) **边长为 a 和 b，且夹角为 φ 的平行四边形，关于底边 b 的转动惯量.**

解　(1) **建立如图 21-16 所示的坐标系，则**

$$I_y=\mu\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\theta}r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r=8\mu R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=8\mu R^4\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{5}{4}\pi\mu R^4.$$

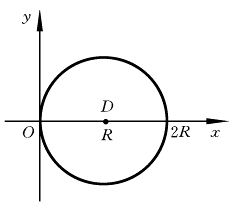

图 21-16

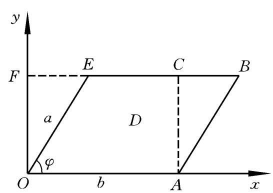

图 21-17

(2) 建立如图21-17 所示的坐标系. 由于质量分布均匀,根据转动惯量概念,知薄板三角形ABC 与薄板三角形OEF 对x 轴的转动惯量相等,从而知平行四边形 $ABEO$ 与矩形 $ACFO$ 对 x 轴的转动惯量相等,即

$$I_x=\iint\limits_D \mu y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_a^b \mathrm{d}x\int_0^{a\sin\varphi} y^2\mathrm{d}y=\frac{\mu}{3}a^3b\sin^3\varphi.$$

6. 计算下列引力:

(1) 均匀薄片 $x^2+y^2\leqslant R^2, z=0$ 对于轴上一点$(0,0,c)(c>0)$处的单位质量的引力;

(2) 均匀柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2, 0\leqslant z\leqslant h$ 对于点 $P(0,0,c)(c>h)$处的单位质量的引力;

(3) 均匀密度的正圆锥体(高h,底半径R)对于在它的顶点处质量为m 的质点的引力.

解 (1) 由均匀薄片的对称性,知

$$F_x=F_y=0.$$

在$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant R^2\}$上任取微块$\mathrm{d}\sigma$(见图21-18),其质量为$\mu\mathrm{d}\sigma$($\mu$ 为密度),它对质点 $P(0,0,c)$的引力在 z 轴上的投影为

$$\mathrm{d}F_z=-k\frac{\mu\mathrm{d}\sigma}{x^2+y^2+c^2}\cos\varphi=-k\frac{\mu c\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+c^2)^{3/2}},$$

所以

$$\begin{aligned}F_z&=-k\mu c\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+c^2)^{3/2}}=-k\mu c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{(c^2+r^2)^{3/2}}\\&=2k\pi\mu c\left[\frac{1}{\sqrt{c^2+r^2}}\right]\Bigg|_0^R\\&=2k\pi\mu\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+R^2}}-1\right)\text{(这里 }k\text{ 为万有引力常数)}.\end{aligned}$$

(2) 建立如图 21-19 所示的坐标系,由对称性,知

$$F_x=F_y=0.$$

在 z 轴上的分量微元为(μ 为密度,k 为万有引力常数)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F_z&=k\frac{\mu\mathrm{d}v}{r^2}\cos\alpha=k\mu\frac{\mathrm{d}v}{x^2+y^2+(z-c)^2}\cdot\frac{z-c}{\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}\\&=k\mu\frac{z-c}{[x^2+y^2+(z-c)^2]^{3/2}}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

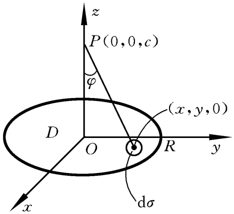

图 21-18

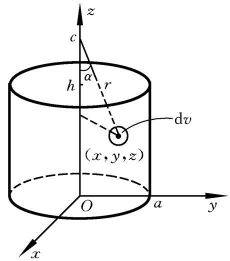

图 21-19

所以
$$\begin{aligned}F_z&=k\mu\iiint\limits_V\frac{z-c}{[x^2+y^2+(z-c)^2]^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=k\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_0^h\frac{z-c}{[r^2+(z-c)^2]^{3/2}}\mathrm{d}z\\&=2k\mu\pi\int_0^a r\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+c^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2-(c-h)^2}}\right]\mathrm{d}r\\&=2k\mu\pi\left[\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+(c-h)^2}-h\right].\end{aligned}$$

（3）建立如图 21-20 所示的坐标系，由对称性，知
$$F_x=F_y=0.$$
在 z 轴上的分量微元为（μ 为密度，k 为万有引力常数）
$$\mathrm{d}F_z=km\mu\frac{z-h}{[x^2+y^2+(h-z)^2]^{3/2}}\mathrm{d}v.$$
又锥面方程为
$$z=h\left(1-\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

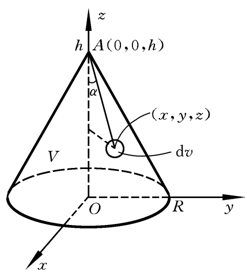

图 21-20

所以
$$\begin{aligned}F_z&=km\mu\iiint\limits_V\frac{z-h}{[x^2+y^2+(h-z)^2]^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=km\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r\int_0^{h\left(1-\frac{1}{R}r\right)}\frac{z-h}{[r^2+(h-z)^2]^{3/2}}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$=-2km\mu\pi\int_0^R r[r^2+(h-z)^2]^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{h\left(1-\frac{r}{R}\right)}\mathrm{d}r$$

$$=-2km\mu\pi\int_0^R\left[\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}-\frac{r}{\sqrt{R^2+r^2}}\right]\mathrm{d}r$$

$$=2km\mu\pi\,\frac{h(h-\sqrt{R^2+h^2})}{\sqrt{R^2+h^2}}.$$

7. 求曲面

$$\begin{cases}x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,\\ y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\\ z=a\sin\psi,\end{cases}\quad \begin{array}{l}0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\\ 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi\end{array}$$

的面积，其中，常数 a,b **满足** $0\leqslant a\leqslant b$.

解　因为

$$x_\psi=-a\sin\psi\cos\varphi,\quad x_\varphi=-(b+a\cos\psi)\sin\varphi,$$
$$y_\psi=-a\sin\psi\sin\varphi,\quad y_\varphi=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,$$
$$z_\psi=a\cos\psi,\quad z_\varphi=0.$$

所以

$$E=x_\psi^2+y_\psi^2+z_\psi^2=a^2,$$
$$F=x_\psi x_\varphi+y_\psi y_\varphi+z_\psi z_\varphi=0,$$
$$G=x_\varphi^2+y_\varphi^2+z_\varphi^2=(b+a\cos\psi)^2,$$
$$\sqrt{EG-F^2}=a(b+a\cos\psi).$$

故

$$\Delta S=\iint_{D'}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}(b+a\cos\psi)\mathrm{d}\psi=4ab\pi^2.$$

8. 求螺旋面

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ z=b\varphi,\end{cases}\quad \begin{array}{l}0\leqslant r\leqslant a,\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\end{array}$$

的面积.

解　因为

$$x_r=\cos\varphi,\quad x_\varphi=-r\sin\varphi,$$
$$y_r=\sin\varphi,\quad y_\varphi=r\cos\varphi,$$
$$z_r=0,\quad z_\varphi=b,$$

所以

$$E=1,\quad G=r^2+b^2,\quad F=0,$$
$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{r^2+b^2}.$$

故
$$\Delta S=\iint\limits_{D'}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\sqrt{b^2+r^2}\,\mathrm{d}r$$
$$=\pi\left[a\sqrt{a^2+b^2}+b^2\ln\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)-b^2\ln b\right].$$

9. 求边长为 a，密度均匀的立方体关于其任一棱边的转动惯量.

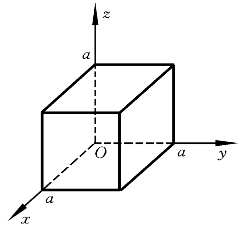

图 21-21

解　建立如图 21-21 所示的坐标系. 下面求对 x 轴的转动惯量. 设密度为 μ，则

$$I_x=\mu\iiint\limits_V(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\mu\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(y^2+z^2)\mathrm{d}z$$
$$=\mu\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\left(ay^2+\frac{1}{3}a^3\right)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2}{3}\mu a^5.$$

§7　n 重积分

1. 计算五重积分

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\limits_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中，$V:x^2+y^2+z^2+u^2+v^2\leqslant r^2$.

解　作五维球坐标变换

$$T:\begin{cases}x=\rho\cos\varphi_1,\\ y=\rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\ z=\rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\\ u=\rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\cos\varphi_4,\\ v=\rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\sin\varphi_4,\end{cases}$$

$$J=\rho^4\sin^3\varphi_1\sin^2\varphi_2\sin\varphi_3,\quad 0\leqslant\rho\leqslant r,\ 0\leqslant\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi_4\leqslant 2\pi,$$

则
$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\limits_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^r\mathrm{d}\rho\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi_1\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi_2\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi_3\int_0^{2\pi}\rho^4\sin^3\varphi_1\sin^2\varphi_2\sin\varphi_3\mathrm{d}\varphi_4$$

$$=\int_0^r \rho^4 \mathrm{d}\rho \int_0^\pi \sin^3\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_1 \int_0^\pi \sin^2\varphi_2 \mathrm{d}\varphi_2 \int_0^\pi \sin\varphi_3 \mathrm{d}\varphi_3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_4$$

$$=\frac{2\pi}{5} r^5 \left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi_1 - \cos\varphi_1\right)\Bigg|_0^\pi \left(\frac{1}{2}\varphi_2 - \frac{1}{4}\sin 2\varphi_2\right)\Bigg|_0^\pi (-\cos\varphi_3)\Bigg|_0^\pi$$

$$=\frac{8}{15}\pi r^5.$$

2. 计算四重积分

$$\iiiint\limits_V \sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-u^2}{1+x^2+y^2+z^2+u^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u,$$

其中，$V: x^2+y^2+z^2+u^2 \leqslant 1$.

解　作四维球坐标变换

$$T:\begin{cases} x=r\cos\varphi_1, \\ y=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ z=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ u=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3, \end{cases}$$

$$J=r^3\sin^2\varphi_1\sin\varphi_2,\quad 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi_1\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi_2\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi_3\leqslant 2\pi,$$

则

$$\iiiint\limits_V \sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-u^2}{1+x^2+y^2+z^2+u^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_3 \int_0^\pi \sin^2\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_1 \int_0^\pi \sin\varphi_2 \mathrm{d}\varphi_2 \int_0^1 r^3 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} \mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^1 r^3\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\mathrm{d}r=\pi^2\int_0^1 r^2\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\mathrm{d}r^2$$

$$=\pi^2\int_0^1 t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\mathrm{d}t=\pi^2\int_0^1\frac{t}{1+t}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t \xlongequal{t=\sin\theta} \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

3. 求 n 维角锥 $x_i\geqslant 0, \dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}\leqslant 1, a_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$**的体积.**

解　作变换

$$T: x_1=a_1t_1, x_2=a_2t_2, \cdots, x_n=a_nt_n,$$

这时

$$J=a_1a_2\cdots a_n.$$

则
$$\Delta V_n=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{V}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=a_1a_2\cdots a_n\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{t_1^2+t_2^2+\cdots+t_n^2\leqslant 1\\ t_i\geqslant 0}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$$
$$=\frac{1}{n!}a_1a_2\cdots a_n(\text{见 §7 } n \text{ 重积分例 } 1).$$

4. 把 $\Omega: x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ 上的 $n(n\geqslant 2)$ 重积分

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\Omega}f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

化为单重积分，其中，$f(u)$ 为连续函数.

解　作 n 维球坐标变换

$$T:\begin{cases}x_1=r\cos\varphi_1,\\ x_2=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\ x_3=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\\ \qquad\vdots\\ x_{n-1}=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\\ x_n=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},\end{cases}$$

$$J=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin^2\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2},$$
$$0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-2}\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant 2\pi,$$

则
$$I=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\Omega}f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1\int_0^{\pi}\sin^{n-3}\varphi_2\mathrm{d}\varphi_2\cdots\int_0^{\pi}\sin^2\varphi_{n-3}\mathrm{d}\varphi_{n-3}\int_0^{\pi}\sin\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{n-1}$$
$$\cdot\int_0^R r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r.$$

因为
$$\int_0^{\pi}\sin^k\theta\mathrm{d}\theta\xlongequal{\theta=\frac{\pi}{2}-t}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k t\mathrm{d}t,$$

又由于
$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2q-1}t\cos^{2p-1}t\mathrm{d}t,$$

所以
$$\int_0^{\pi}\sin^k\theta\mathrm{d}\theta=\mathrm{B}\left(\frac{1+k}{2},\frac{1}{2}\right),$$

故 $I=2\pi \mathrm{B}\left(\frac{1+n-2}{2},\frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1+n-3}{2},\frac{1}{2}\right)\cdots \mathrm{B}\left(\frac{1+n-(n-2)}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\cdot \mathrm{B}\left(\frac{1+n-(n-1)}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot\int_0^R r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n-2}{2}\right)}\cdot\cdots\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-(n-3)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n-(n-3)}{2}\right)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-(n-2)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n-(n-2)}{2}\right)}\cdot\int_0^R r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{n-2}\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\int_0^R r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r=\frac{2(\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^R r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r.$$

§8 反常二重积分

1. 试讨论下列无界区域上二重积分的收敛性:

(1) $\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2)^m}$;

(2) $\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$, D **为全平面**;

(3) $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\mathrm{d}\sigma$ $(0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M)$.

解 (1) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 1\leqslant r<+\infty, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,则

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2)^m}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{+\infty}\frac{1}{r^{2m-1}}\mathrm{d}r=2\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{r^{2m-1}}\mathrm{d}r.$$

i) 当 $2m-1\leqslant 1$,即 $m\leqslant 1$ 时,$\int_1^{+\infty}\frac{1}{r^{2m-1}}\mathrm{d}r$ 发散,所以 $\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2)^m}$ 发散;

ii) 当 $2m-1>1$,即 $m>1$ 时,$\int_1^{+\infty}\frac{1}{r^{2m-1}}\mathrm{d}r$ 收敛,所以

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2)^m}=2\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{r^{2m-1}}\mathrm{d}r=2\pi\left[\frac{1}{2-2m}r^{2-2m}\right]\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{m-1}\text{收敛}.$$

（2）由于被积函数关于 x 轴、y 轴对称，所以

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}=4\iint_{\substack{x\geqslant 0\\ y\geqslant 0}}\frac{1}{(1+x^p)(1+y^q)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^p}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^q}\mathrm{d}y.$$

因为 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散；$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^q}\mathrm{d}y$ 当 $q>1$ 时收敛，当 $q\leqslant 1$ 时发散，所以 $\iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$ 当 $p>1,q>1$ 时收敛，其他情况下均发散.

（3）因为 $0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$，所以

$$\frac{m}{(1+x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(1+x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(1+x^2+y^2)^p}.$$

故只需讨论 $I=\iint_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(1+x^2+y^2)^p}$ 的收敛性.

i）当 $p\leqslant 0$ 时，显然 I 发散；

ii）当 $p>0$ 时，由于

$$\frac{1}{(2+x^2)^p}\leqslant\frac{1}{(1+x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{1}{(1+x^2)^p},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(2+x^2)^p}\mathrm{d}x\leqslant I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^p}\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^p}\mathrm{d}x,$$

则当 $p>\frac{1}{2}$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^p}\mathrm{d}x$ 收敛，从而 I 收敛；当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(2+x^2)^p}\mathrm{d}x$ 发散，从而 I 发散．故

当 $p>\frac{1}{2}$ 时，由 $\iint_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{M\mathrm{d}\sigma}{(1+x^2+y^2)^p}$ 收敛，知 $\iint_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{|\varphi(x,y)|}{(1+x^2+y^2)^p}\mathrm{d}\sigma$ 收敛，从而 $\iint_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\mathrm{d}\sigma$ 收敛；

当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由 $\iint_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{m}{(1+x^2+y^2)^p}\mathrm{d}\sigma$ 发散，知 $\iint_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{|\varphi(x,y)|}{(1+x^2+y^2)^p}\mathrm{d}\sigma$ 发散，再根据定理 21.18 知 $\iint_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\mathrm{d}\sigma$ 发散.

2. 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x.$$

解　作极坐标变换

$$T: x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad 0\leqslant r<+\infty,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

则
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r\mathrm{e}^{-r^2}\cos r^2\mathrm{d}r$$
$$\xlongequal{t=r^2}\pi\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

3. 判别下列积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2)^m}$;　　(2) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(1-x^2-y^2)^m}$.

解　(1) **因为** $P(0,0)$ **为瑕点**, $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^m}$ **在** $0<x^2+y^2\leqslant 1$ **有定义,记**

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad f(x,y)=\frac{1}{r^{2m}},$$

所以根据定理21.20 **知,当**$2m<2$,**即**$m<1$ **时**, $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2)^m}$**收敛;当**$2m\geqslant 2$,**即** $m\geqslant 1$ **时**, $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2)^m}$**发散**.

(2) **显然单位圆周** $x^2+y^2=1$ **上每一点均为瑕点,作极坐标变换** $T: x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,**则**

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(1-x^2-y^2)^m}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r\mathrm{d}r}{(1-r^2)^m}=2\pi\int_0^1\frac{r\mathrm{d}r}{(1-r^2)^m}.$$

故由瑕积分判别法(**定理** 11.6 **的推论** 2)**知,当** $2m-1<1$,**即** $m<1$ **时**, $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(1-x^2-y^2)^m}$**收敛;当** $2m-1\geqslant 1$,**即** $m\geqslant 1$ **时**, $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(1-x^2-y^2)^m}$**发散**.

§9　总 练 习 题

1. 求下列函数在所指定区域 D **内的平均值:**

（1）$f(x,y)=\sin^2 x\cos^2 y, D=[0,\pi]\times[0,\pi]$；

（2）$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2, D=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z\}$.

解　（1）因为 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x\int_0^\pi \cos^2 y\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$,

$$S_D=\pi^2,$$

所以
$$\tilde{f}=\frac{1}{S_D}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4}.$$

（2）由于

$$D=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\},$$

则
$$V_D=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi.$$

作变换

$$T:\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+r\sin\varphi\cos\theta,\\[2mm] y=\dfrac{1}{2}+r\sin\varphi\sin\theta,\\[2mm] z=\dfrac{1}{2}+r\cos\varphi,\end{cases}$$

$$J=r^2\sin\varphi,$$

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2},$$

则
$$\begin{aligned}&\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2\sin\varphi\left[\frac{3}{4}+r^2+r\sin\varphi\cos\theta+r\sin\varphi\sin\theta+r\cos\varphi\right]\mathrm{d}r\\
&=2\pi\int_0^\pi \frac{3}{4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2\mathrm{d}r+2\pi\int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^4\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^3\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^3\mathrm{d}r\\
&\quad+2\pi\int_0^\pi\sin\varphi\cos\varphi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^3\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi.$$

故
$$\tilde{f}=\frac{1}{V_D}\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{6}{5}.$$

2. 计算下列积分:

(1) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}[x+y]\mathrm{d}\sigma$; (2) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}\sigma$.

解 (1) 作变换

$$T:\begin{cases}u=x+y,\\v=y,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}x=u-v,\\y=v,\end{cases}$$

变换 T 将 $y=0,y=2$ 分别变为 $v=0,v=2$;将 $x=0,x=2$ 分别变为 $u=v,u=2+v$. 如图 21-22 所示. 又

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1.$$

所以
$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}[x+y]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D'}[u]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u 0\mathrm{d}v+\int_1^2\mathrm{d}u\int_0^u 1\mathrm{d}v+\int_2^3\mathrm{d}u\int_{u-2}^2 2\mathrm{d}v+\int_3^4\mathrm{d}u\int_{u-2}^2 3\mathrm{d}v$$
$$=6.$$

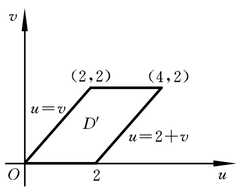

图 21-22

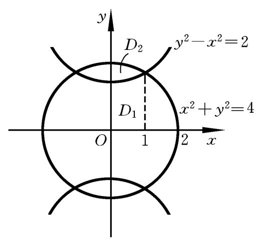

图 21-23

(2) 由于 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)$ 为 x,y 的偶函数,圆域 $x^2+y^2\leqslant 4$ 关于 x 轴、y 轴

对称,故只需考虑在第一象限内的积分. 双曲线$y^2-x^2=2$将第一象限内的区域分为两部分D_1和D_2,如图21-23所示,则

$$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D_1,\\ -1, & (x,y)\in D_2.\end{cases}$$

由
$$\begin{cases}y^2-x^2=2,\\ x^2+y^2=4,\end{cases}$$
得交点$(1,\sqrt{3})$,故

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}\sigma\\ &=4\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-4\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi-8\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=4\pi-8\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y=4\pi-8\int_0^1\left[\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2+x^2}\right]\mathrm{d}x\\ &=4\pi-8\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{2+x^2}-\ln(x+\sqrt{2+x^2})\right]\Bigg|_0^1\\ &=\frac{4\pi}{3}+8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

3. 应用格林公式计算曲线积分

$$\int_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x,$$

其中,L为上半圆周$x^2+y^2=a^2$从$(a,0)$到$(-a,0)$的一段.

解　补直线$L_1:y=0,-a\leqslant x\leqslant a$,则

$$\begin{aligned}\int_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x&=\int_{L+L_1}xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x-\int_{L_1}xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x\\ &=\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{L_1}x^2y\mathrm{d}x\\ &=\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi a^4.\end{aligned}$$

4. 求
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中,$f(x,y)$为连续函数.

解　因为 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\rho^2\}$ 上连续，所以由积分中值定理知，$\exists(\xi,\eta)\in D$，使

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\pi\rho^2 f(\xi,\eta),$$

故
$$\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\rho\to0}f(\xi,\eta)=f(0,0).$$

5. 求 $F'(t)$，设

(1) $F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}}\mathrm{e}^{tx/y^2}\mathrm{d}\sigma\ (t>0)$；

(2) $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中，$f(u)$ 为可微函数；

(3) $F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}} f(xyz)\mathrm{d}V$，其中，$f(u)$ 为可微函数.

解　(1) 作变换

$$T:\begin{cases}x=tu,\\y=tv,\end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}t&0\\0&t\end{vmatrix}=t^2,$$

T 将 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant t,0\leqslant y\leqslant t\}$ 变为

$$\Delta=\{(u,v)\mid 0\leqslant u\leqslant1,0\leqslant v\leqslant1\}.$$

则
$$F(t)=\iint\limits_{\Delta}t^2\mathrm{e}^{u/v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=t^2\iint\limits_{\Delta}\mathrm{e}^{u/v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

故
$$F'(t)=2t\iint\limits_{\Delta}\mathrm{e}^{u/v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{2}{t}\cdot t^2\iint\limits_{\Delta}\mathrm{e}^{u/v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{2}{t}F(t).$$

(2) 利用球坐标变换，有

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r,$$

故
$$F'(t)=4\pi t^2f(t^2).$$

(3) 作变换

$$T:\begin{cases}x=tu,\\ y=tv,\\ z=tw,\end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}t&0&0\\0&t&0\\0&0&t\end{vmatrix}=t^3,$$

T 将 $$V=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant t,0\leqslant y\leqslant t,0\leqslant z\leqslant t\}$$

变为 $$V'=\{(u,v,w)\mid 0\leqslant u\leqslant 1,0\leqslant v\leqslant 1,0\leqslant w\leqslant 1\},$$

则 $$F(t)=\iiint\limits_{V'}t^3f(t^3uvw)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^1t^3f(t^3uvw)\mathrm{d}w$$

故 $$\begin{aligned}F'(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^1t^3f(t^3uvw)\mathrm{d}w\right]=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t^3f(t^3uvw)]\mathrm{d}w\\&=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^1[3t^2f(t^3uvw)+3t^5uvwf'(t^3uvw)]\mathrm{d}w\\&=\frac{3}{t}\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^1t^3f(t^3uvw)\mathrm{d}w+\frac{3}{t}\int_0^1\mathrm{d}(tu)\int_0^1\mathrm{d}(tv)\int_0^1(tu)(tv)(tw)\\&\quad f'(tutvtw)\mathrm{d}(tw)\\&=\frac{3}{t}F(t)+\frac{3}{t}\iiint\limits_V xyzf'(xyz)\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

6. 设 $f(t)=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，**求** $\int_0^1tf(t)\mathrm{d}t$.

解　记 $$D=\{(t,x)\mid 1\leqslant x\leqslant t^2,0\leqslant t\leqslant 1\},$$

则 $$\begin{aligned}\int_0^1tf(t)\mathrm{d}t&=\int_0^1\mathrm{d}t\int_1^{t^2}t\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}t\int_{t^2}^1t\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=-\iint\limits_D t\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}t\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}t=-\int_0^1\left[\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-x^2}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int_0^1x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right).\end{aligned}$$

7. 证明

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=abc\iiint\limits_\Omega f(ax,by,cz)\mathrm{d}V,$$

其中， $$V:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\quad \Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 1.$$

证　作变换

$$T:\begin{cases}x=au,\\y=bv,\\z=cw,\end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{vmatrix}=abc,$$

变换T将V变为

$$V'=\{(u,v,w)\mid u^2+v^2+w^2\leqslant 1\},$$

则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{V'}abcf(au,bv,cw)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=abc\iiint\limits_{\Omega}f(ax,by,cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

8. 试写出单位正方体为积分区域时,柱面坐标系和球面坐标系下的三重积分的上下限.

解　(1) 柱面坐标系的情况.

建立如图21-24所示的坐标系,则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\mathrm{d}r\int_0^1 rf(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\mathrm{d}r\int_0^1 rf(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z.$$

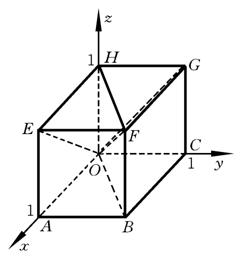

图21-24

(2) 球面坐标系的情况.

作球坐标变换

$$T:\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\y=r\sin\varphi\sin\theta,\\z=r\cos\varphi.\end{cases}$$

因为当$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\left(\text{或}\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$时,$\varphi$和$r$的变化范围都有两个不同的区间.故将单位正方体分为4个小区域:V_1为五面体$OABFE$,V_2为四面体

$OEFH$，V_3 为五面体 $OBCGF$，V_4 为四面体 $OFGH$，线段 EF：$\begin{cases} x=1, \\ z=1 \end{cases}$ 在球坐标系下为

$$EF:\begin{cases} r\sin\varphi\cos\theta=1, \\ r\cos\varphi=1, \end{cases}$$

即
$$\varphi=\operatorname{arccot}\cos\theta,$$

同理，线段 FG 在球坐标系下为

$$\varphi=\operatorname{arccot}\sin\theta,$$

则
$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V \\
&=\iiint\limits_{V_1} f\mathrm{d}V+\iiint\limits_{V_2} f\mathrm{d}V+\iiint\limits_{V_3} f\mathrm{d}V+\iiint\limits_{V_4} f\mathrm{d}V \\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\operatorname{arccot}\cos\theta}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi\cos\theta}} r^2\sin\varphi\, f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\mathrm{d}r \\
&\quad+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\operatorname{arccot}\cos\theta}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} r^2\sin\varphi\, f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\mathrm{d}r \\
&\quad+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\operatorname{arccot}\sin\theta}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi\sin\theta}} r^2\sin\varphi\, f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\mathrm{d}r \\
&\quad+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\operatorname{arccot}\sin\theta}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} r^2\sin\varphi\, f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

证　此不等式的证明有多种方法，下面用二重积分证明.

记
$$D=\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}.$$

因为
$$\begin{aligned}
0&\leqslant\iint\limits_D[f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&=\iint\limits_D[f^2(x)g^2(y)-2f(x)f(y)g(x)g(y)+f^2(y)g^2(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&=\iint\limits_D[f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$-2\iint_D f(x)f(y)g(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以

$$\iint_D [f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\geqslant 2\iint_D f(x)f(y)g(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又

$$\iint_D [f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(y)\mathrm{d}y+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y$$
$$=2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x,$$

$$2\iint_D f(x)f(y)g(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y$$
$$=2\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

故

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

10. 设 $f(x,y)$ 在 $[0,\pi]\times[0,\pi]$ 上连续,且恒取正值,试求

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}(\sin x)(f(x,y))^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}\sigma.$$

解 因为 $f(x,y)$ 在 $[0,\pi]\times[0,\pi]$ 上连续,所以存在最大值 M 和最小值 m,又 $f(x,y)$ 恒取正值,因此 $m>0$,则

$$m^{\frac{1}{n}}\sin x\leqslant(\sin x)(f(x,y))^{\frac{1}{n}}\leqslant M^{\frac{1}{n}}\sin x,(x,y)\in[0,\pi]\times[0,\pi],$$

从而有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}m^{\frac{1}{n}}\sin x\mathrm{d}x\leqslant\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}(\sin x)(f(x,y))^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}M^{\frac{1}{n}}\sin x\mathrm{d}x,$$

即

$$2\pi m^{\frac{1}{n}}\leqslant\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}(\sin x)(f(x,y))^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}\sigma\leqslant 2\pi M^{\frac{1}{n}}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}m^{\frac{1}{n}}=1,\quad\lim_{n\to\infty}M^{\frac{1}{n}}=1,$$

所以根据迫敛性,有

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}(\sin x)(f(x,y))^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}\sigma=2\pi.$$

11. 求由椭圆$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$ **所界的面积，其中，**$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

解　作变换

$$T:\begin{cases}u=a_1x+b_1y+c_1,\\ v=a_2x+b_2y+c_2,\end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0,$$

于是

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

所以

$$S_D=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\frac{1}{|a_1b_2-a_2b_1|}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}.$$

12. 设

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0,$$

求由平面

$$a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3,$$

所界平行六面体的体积.

解　作变换

$$T:\begin{cases}u=a_1x+b_1y+c_1z,\\ v=a_2x+b_2y+c_2z,\\ w=a_3x+b_3y+c_3z,\end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\Delta\neq 0,$$

于是

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\Delta},$$

所以

$$\Delta V=\iiint\limits_V \mathrm{d}V=\frac{1}{|\Delta|}\iiint\limits_{\substack{|u|\leqslant h_1\\ |v|\leqslant h_2\\ |w|\leqslant h_3}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{8}{|\Delta|}h_1h_2h_3.$$

13. 设有一质量分布不均匀的半圆弧$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$**，其线密度为** $\rho=a\theta$（a **为常数**），**求它对原点**$(0,0)$**处质量为** m **的质点的引力.**

解　**在半圆弧上任取一弧微元**$\mathrm{d}s$**，由于**$\forall(x,y)\in\mathrm{d}s$**，则**$\mathrm{d}s$ **对原点**$(0,0)$**处质点的微引力在** x **轴、**y **轴上的分力分别为**（k **为万有引力常数**）

$$\mathrm{d}F_x=k\frac{m\rho\mathrm{d}s}{(x^2+y^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=km\frac{x\rho}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}s,$$

$$\mathrm{d}F_y=k\frac{m\rho\mathrm{d}s}{(x^2+y^2)}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=km\frac{y\rho}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}s.$$

故
$$\begin{aligned}F_x&=\int_L km\frac{x\rho}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}s=\frac{kma}{r^3}\int_0^{\pi}\theta\cdot r\cos\theta\sqrt{(-r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{kma}{r}\int_0^{\pi}\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{2kma}{r},\\F_y&=\int_L km\frac{y\rho}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}s=\frac{kma}{r^3}\int_0^{\pi}\theta\cdot r\sin\theta\sqrt{(-r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{kma}{r}\int_0^{\pi}\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{kma\pi}{r}.\end{aligned}$$

14. 求螺旋线$x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt(0\leqslant t\leqslant2\pi)$**对** z **轴的转动惯量，设曲线的密度为**1.

解　**在螺旋线上任取一弧微元** $\mathrm{d}s$**，又取**$\forall(x,y,z)\in\mathrm{d}s$**，则** $\mathrm{d}s$ **对** z **轴的微转动惯量为**

$$\mathrm{d}J_z=(x^2+y^2)\rho\mathrm{d}s=(x^2+y^2)\mathrm{d}s,$$

故
$$\begin{aligned}J_z&=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^2\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\mathrm{d}t\\&=2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

15. 求摆线$x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant\pi)$**的重心，设其质量分布是均匀的.**

解　**因为总质量**

$$\begin{aligned}M&=\int_L\rho\mathrm{d}s=\rho\int_L\mathrm{d}s=\rho\int_0^{\pi}\sqrt{(a-a\cos t)^2+(a\sin t)^2}\mathrm{d}t\\&=a\rho\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos t}\mathrm{d}t=2a\rho\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4a\rho,\end{aligned}$$

$$M_x=\int_L \rho y\mathrm{d}s=\rho\int_0^{\pi}2a^2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4a^2\rho\int_0^{\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\frac{t}{2}=\theta}8a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=8a^2\rho\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{16}{3}a^2\rho,$$

$$M_y=\int_L \rho x\mathrm{d}s=2a^2\rho\int_0^{\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=2a^2\rho\int_0^{\pi}t\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t-2a^2\rho\int_0^{\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=2a^2\rho\left(-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi}-2a^2\rho\int_0^{\pi}2\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=8a^2\rho-8a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}a^2\rho.$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{4}{3}a,\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{4}{3}a.$$

故重心$(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{4}{3}a,\frac{4}{3}a\right)$.

16. 设$u(x,y),v(x,y)$是具有二阶连续偏导数的函数,证明:

(1) $\displaystyle\iint_D v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma=-\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma+\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$;

(2) $\displaystyle\iint_D\left[u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]\mathrm{d}\sigma=\oint_L\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$,

其中,D为光滑曲线L所围的平面区域,而

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\boldsymbol{n},x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial v}{\partial y}\sin(\boldsymbol{n},x)$$

是$u(x,y),v(x,y)$沿曲线L的外法线$\boldsymbol{n}$的方向导数.

证　(1) 首先,由第二十一章§3习题3,有

$$\mathrm{d}y=\cos(\boldsymbol{n},x)\mathrm{d}s,\quad -\mathrm{d}x=\sin(\boldsymbol{n},y)\mathrm{d}s,$$

在格林公式$\displaystyle\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$中取$P=-Q,Q=P$,有

$$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_L P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x=\oint_L(P,Q)\cdot(\mathrm{d}y,-\mathrm{d}x)$$

$$=\oint_L(P,Q)(\cos(\boldsymbol{n},x),\sin(\boldsymbol{n},y))\mathrm{d}s$$

$$=\oint_L [P\cos(\boldsymbol{n},x)+Q\sin(\boldsymbol{n},y)]\mathrm{d}s,$$

在上式中，取 $P=v\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$Q=v\dfrac{\partial u}{\partial y}$，则

$$\begin{aligned}\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma &= \iint_D\left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\mathrm{d}\sigma\\ &=\oint_L[P\cos(\boldsymbol{n},x)+Q\sin(\boldsymbol{n},y)]\mathrm{d}s\\ &=\oint_L v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\boldsymbol{n},y)\right)\mathrm{d}s\\ &=\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

即
$$\iint_D v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma=-\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma+\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s. \tag{①}$$

（2）将（1）中 u 与 v 交换后，有

$$\iint_D u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma=-\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma+\oint_L u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s, \tag{②}$$

用式②减去（1）中式①，即有

$$\iint_D\left[u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]\mathrm{d}\sigma=\oint_L\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

17. 求指数 λ，使得曲线积分

$$k=\int_{(s_0,t_0)}^{(s,t)}\frac{x}{y}r^\lambda\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}r^\lambda\mathrm{d}y$$

与路线无关（$r^2=x^2+y^2$），并求 k.

解　因为
$$P=\frac{x}{y}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}},\quad Q=-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2x}{y^2}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}-\lambda\frac{x^3}{y^2}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}-1},$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}+\lambda x(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}-1}.$$

所以要使曲线积分与路线无关，则应满足 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即

$$-\frac{2x}{y^2}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}-\lambda\frac{x^3}{y^2}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}-1}=-\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}+\lambda x(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}-1}.$$

上式两边同乘以 $y^2(x^2+y^2)^{1-\frac{\lambda}{2}}$，有

$$x(x^2+y^2)+\lambda x(x^2+y^2)=0,$$

解之，有

$$\lambda=-1 \quad (y\neq 0).$$

故当 $\lambda=-1$ 时，曲线积分在上半平面或下半平面内与路线无关. 因此，设 $t_0>0$（或 $t_0<0$），$t>0$（或 $t<0$），则

$$\begin{aligned}
k&=\int_{(s_0,t_0)}^{(s,t)}\frac{x}{y}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\\
&=\int_{s_0}^{s}\frac{x}{t_0}(x^2+t_0^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\int_{t_0}^{t}\frac{s^2}{y^2}(s^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{t_0}\sqrt{x^2+t_0^2}\Big|_{s_0}^{s}+\frac{1}{y}\sqrt{s^2+y^2}\Big|_{t_0}^{t}\\
&=\frac{1}{t}\sqrt{s^2+t^2}-\frac{1}{t_0}\sqrt{s_0^2+t_0^2}.
\end{aligned}$$

第二十二章　曲面积分

知识要点

1. 曲面积分与曲线积分一样也分为两类. 第一型曲面积分是数量函数在可求面积的曲面上的积分,它是二重积分的推广,二者性质是完全平行的,没有本质的差别. 第二型曲面积分则是向量函数在双侧可求面积的曲面上的积分. 两类曲面积分差别如下:

	第一型曲面积分	第二型曲面积分
表达式	$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$	$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 或 $\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$
积分变量	曲面面积	坐标
被积函数	数量函数	向量函数
物理意义	质量等	流量等
方向性	无	有
基本性质	线性性 积分曲面可加性 积分的不等式性质 积分中值定理	线性性 积分曲面可加性
联系	$\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$	

注:$\boldsymbol{n}$ 为单位向量

2. 若光滑曲面 $S:z=z(x,y),(x,y)\in D$,f 或 $\boldsymbol{F}$ 在 S 上连续,则

(1) $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

(2) $\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_D R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

(3) $\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_D [P(x,y,z(x,y))(-z_x)$

$+Q(x,y,z(x,y))(-z_y)+R(x,y,z(x,y))]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

其中,S 的上侧为正侧时取"+"号,下侧为正侧时取"−"号.

当 S 表为 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(z,x)$ 时有类似的公式成立.

注意:若 S 是母线平行于坐标轴(如 z 轴)的柱面,则求 $\iint\limits_S f\mathrm{d}S$ 时应将 S 表成 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(z,x)$ 再积分,而 $\iint\limits_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

若曲面由参数方程给出,则曲面的参数方程可理解为是对直角坐标系下的曲面作变量变换得到的,于是由第二十三章微分的外积得出的变量变换公式,便可得到在参数式下的积分计算公式(见第二十三章的知识要点).

3. 与曲线积分一样,曲面积分中被积函数的自变量不是独立的,它们受到曲面方程的约束,利用它有时可简化被积表达式.

4. 与曲线积分一样,曲面积分也可利用曲面的对称性或者轮换对称性来简化计算.

(1) 若积分曲面 S 分成对称的两部分 $S=S_1+S_2$(S_1,S_2 可以是关于原点对称,也可以是关于坐标面对称),且在对称点上被积函数的绝对值 $|f|$ 相等,则

i) $$\iint\limits_S f(\boldsymbol{P})\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & \text{当对称点上 } f(\boldsymbol{P}) \text{ 异号时},\\ 2\iint\limits_{S_1} f(\boldsymbol{P})\mathrm{d}S, & \text{当对称点上 } f(\boldsymbol{P}) \text{ 同号时}.\end{cases}$$

ii) $$\iint\limits_S f(\boldsymbol{P})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & \text{当对称点上 } f(\boldsymbol{P})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ 异号时},\\ 2\iint\limits_{S_1} f(\boldsymbol{P})\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{当对称点上 } f(\boldsymbol{P})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ 同号时}.\end{cases}$$

在第二型曲面积分中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ 的各分量具有方向性.

$\mathrm{d}y\mathrm{d}z$、$\mathrm{d}z\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的符号分别由曲面的侧决定的法线方向与 x 轴正向、y 轴正向、z 轴正向的夹角来确定,夹角为锐角时为正,夹角为钝角时为负.

(2) 若曲面 S 为轮换对称的曲面,则

i) $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_S f(y,z,x)\mathrm{d}S=\iint\limits_S f(z,x,y)\mathrm{d}S.$

ii) $\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_S P(y,z,x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_S P(z,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_S Q(y,z,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S Q(z,x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S R(y,z,x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_S R(z,x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

这是因为 x 换作 y,y 换作 z,z 换作 x 后仍保持右手系.

5. 与格林公式类似,高斯公式和斯托克斯公式也是牛顿-莱布尼兹公式的推广. 利用高斯公式,可以把沿三维区域边界的第二型曲面积分转化为该区域上的三重积分. 而斯托克斯公式则把沿一曲面的边界的空间第二型曲线积分同在曲面上的第二型曲面积分联系起来.

高斯公式往往给计算第二型曲面积分带来方便,也常作为首选的方法,但应注意定理的条件以及奇点的处理.

利用斯托克斯公式可以讨论空间单连通区域上曲线积分与路线无关的问题,并得到与平面曲线类似的结果.

6. 场是物理学中的基本概念,主要讨论梯度场($\mathrm{grad}\ u=\nabla u$),散度场($\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}$),旋度场($\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}$). 哈密顿算符 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ 是向量形式的运算符号,可当作向量来运算,但它的三个分量作用到具体函数上时便是求偏导数运算. 利用散度和旋度可以给出高斯公式、斯托克斯公式的向量形式:

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\oiint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},\qquad \iint\limits_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint\limits_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

7. 数量函数的几何模型是等值线(面),梯度作为等值线(面)法线的方向向量,指向该点函数值增大最快的方向. 因此数量函数是用梯度来研究其变化的.

向量函数的几何模型是向量线,向量线的变化表现为空间中每点散发向量线的能力和旋转能力,这便是向量函数中散度和旋度的意义. 因此向量函数是用散度、旋度来研究其变化的.

习 题 详 解

§1　第一型曲面积分

1. 计算下列第一型曲面积分:

(1) $\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$,**其中**,$S$ **是上半球面** $x^2+y^2+z^2=a^2$,$z\geqslant 0$;

(2) $\iint\limits_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$,**其中**,$S$ **为立体** $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ **的边界曲面**;

(3) $\iint\limits_S \dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2}$,**其中**,$S$ **为柱面** $x^2+y^2=R^2$ **被平面** $z=0$,$z=H$ **所截取的部分**;

(4) $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S$,**其中**,$S$ **为平面** $x+y+z=1$ **在第一卦限中的部分**.

解　(1) **因为**　$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S &= a\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= a\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\quad + a\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\pi a^3=\pi a^3.\end{aligned}$$

（2）记上顶面

$$S_1: z=1,\ x^2+y^2\leqslant 1,$$

锥面

$$S_2: z=\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\leqslant 1,$$

当 $z=1$ 时，$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=1;$$

当 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 时，$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2},$$

则
$$\begin{aligned}\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S &= \iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{S_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S\\ &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

（3）因为 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 定义在柱面 $x^2+y^2=R^2$ 上，则 $f=\dfrac{1}{R^2}$，故

$$\iint_S \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}S=\frac{1}{R^2}\iint_S \mathrm{d}S.$$

又 $\iint_S \mathrm{d}S$ 为被积曲面的面积：$S=2\pi RH$，故

$$\iint_S \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}S=\frac{2\pi H}{R}.$$

（4）因为 $z=1-x-y$，$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{3}$，所以

$$\begin{aligned}\iint_D xyz\mathrm{d}S &= \sqrt{3}\iint_{\substack{x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}} xy(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(xy-x^2y-xy^2)\mathrm{d}y\\ &=\sqrt{3}\int_0^1\frac{1}{6}x(1-x)^3\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{120}.\end{aligned}$$

2. 求均匀曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的重心.

解　设密度为 μ，则质量

$$M=\iint_S \mu\mathrm{d}S=\frac{\pi}{2}\mu a^2,$$

$$M_x=\iint_S \mu x\mathrm{d}S=\mu a\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r^2\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$\xlongequal[r=a\sin t]{}\mu a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=\mu a^3\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}\pi\mu a^3.$$

所以
$$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{a}{2},$$

由质量分布均匀以及变量的轮换性,可知

$$\bar{y}=\bar{z}=\frac{a}{2},$$

故重心
$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right).$$

3. 求密度为 ρ 的均匀球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

解　在球面上任取一曲面微元 $\mathrm{d}S$,又任取 $(x,y,z)\in\mathrm{d}S$,则 $\mathrm{d}S$ 对于 z 轴的微转动惯量为

$$\mathrm{d}J_z=\rho(x^2+y^2)\mathrm{d}S,$$

故
$$J_z=\rho\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S=a\rho\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=a\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r=\pi a\rho\int_0^a\frac{r^2-a^2+a^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r^2$$

$$=\pi a\rho\left[\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-2a^2(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_0^a=\frac{4}{3}\pi a^4\rho.$$

4. 计算 $\iint_S z^2\mathrm{d}S$,其中,S 为圆锥表面的一部分,

$$S:\begin{cases}x=r\cos\varphi\sin\theta,\\y=r\sin\varphi\sin\theta,\\z=r\cos\theta,\end{cases}\qquad D:\begin{cases}0\leqslant r\leqslant a,\\0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

这里 θ 为常数 $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

解　因为
$$x_r=\cos\varphi\sin\theta,\quad x_\varphi=-r\sin\varphi\sin\theta,$$

$$y_r=\sin\varphi\sin\theta,\quad y_\varphi=r\cos\varphi\sin\theta,$$

$$z_r=\cos\theta,\quad z_\varphi=0,$$

所以
$$E=x_r^2+y_r^2+z_r^2=1,\quad G=x_\varphi^2+y_\varphi^2+z_\varphi^2=r^2\sin^2\theta,$$

$$F=x_rx_\varphi+y_ry_\varphi+z_rz_\varphi=0,$$

$$\sqrt{EG-F^2}=r\sin\theta,$$

故
$$\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S=\iint\limits_D r^2\cos^2\theta\ \sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\iint\limits_D r^3\sin\theta\cos^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$
$$=\sin\theta\cos^2\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}a^4\sin\theta\cos^2\theta.$$

§2 第二型曲面积分

1. 计算下列第二型曲面积分:

(1) $\iint\limits_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,**其中**,$S$ **为由** $x=y=z=0$,$x=y=z=a$ **六个平面所围的立方体表面,并取外侧为正向;**

(2) $\iint\limits_S (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,**其中**,$S$ **是以原点为中心,边长为** 2 **的立方体表面,并取外侧为正向;**

(3) $\iint\limits_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,**其中**,$S$ **是由平面** $x=y=z=0$ **和** $x+y+z=1$ **所围的四面体表面,并取外侧为正向;**

(4) $\iint\limits_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,**其中**,$S$ **是球面** $x^2+y^2+z^2=1$ **的上半部分,并取外侧为正向;**

(5) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,**其中**,$S$ **是球面**

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$ **并取外侧为正向.**

解 (1) **记**

$$S_1:x=0,\ S_2:x=a,\ S_3:y=0,\ S_4:y=a,\ S_5:z=0,\ S_6:z=a,$$

D_i **为** S_i **相应投影区域**,$i=1,2,\cdots,6$,**则**

$$\iint\limits_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\sum_{i=1}^6\iint\limits_{S_i} y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D_2} y(a-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{D_3} x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{D_4} x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$-\iint_{D_5} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_6}(y^2+ax)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_2} ay\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D_6} ax\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=a\int_0^a y\mathrm{d}y\int_0^a \mathrm{d}z+a\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y=a^4.$$

（2）记

$$S_1:x=1(\text{前面}),\ S_2:x=-1(\text{后面}),\ S_3:y=1(\text{右面}),$$
$$S_4:y=-1(\text{左面}),\ S_5:z=1(\text{上面}),\ S_6:z=-1(\text{下面}),$$

D_i 为 S_i 相应投影区域，$i=1,2,\cdots,6$，则

$$\iint_S (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{i=1}^{6}\iint_{S_i}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}(1+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{D_2}(y-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D_3}(1+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint_{D_4}(z-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$+\iint_{D_5}(1+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_6}(x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=6\iint_{D_6}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\iint_{\substack{-1\leqslant x\leqslant 1\\-1\leqslant y\leqslant 1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=24.$$

（3）记

$$S_1:x=0,\ S_2:y=0,\ S_3:z=0,\ S_4:x+y+z=1,$$

则

$$\iint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{i=1}^{4}\iint_{S_i} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0+0+0+\iint_{D_{yz}} y(1-y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+\iint_{D_{zx}} z(1-x-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{D_{xy}} x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x(1-x-y)\mathrm{d}y=3\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}.$$

（4）**记**

$$S_1: y=\sqrt{1-x^2-z^2},\ z\geqslant 0(\textbf{右侧球面}),$$

$$S_2: y=-\sqrt{1-x^2-z^2}, z\geqslant 0(\textbf{左侧球面}),$$

则 $$\iint_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{S_1} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{S_2} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\iint_{\substack{x^2+z^2\leqslant 1\\ z\geqslant 0}} z\sqrt{1-x^2-z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint_{\substack{x^2+z^2\leqslant 1\\ z\geqslant 0}} z(-\sqrt{1-x^2-z^2})\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=2\iint_{\substack{x^2+z^2\leqslant 1\\ z\geqslant 0}} z\sqrt{1-x^2-z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r=2\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r$$

$$=4\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\xlongequal{r=\sin t}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t$$

$$=4\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-4\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

（5）**对于积分** $\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ **可表示为**

$$z=c\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}, (x,y)\in D_{xy},$$

则 $$\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\left[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\iint_{D_{xy}}\left[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4c\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变换

$$T: x=a+r\cos\theta,\quad y=b+r\sin\theta,$$

则
$$\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\pi R^3 c,$$

同理有
$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{8}{3}\pi R^3 a,\quad \iint_S y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\pi R^3 b,$$

所以
$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

2. 设某流体的流速为 $\boldsymbol{v}=(k,y,0)$，求单位时间内从球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的内部流过球面的流量.

解　单位时间内流体从球面的内部流过球面的流量为

$$E=\iint_S k\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

对于积分 $\iint_S k\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，由于被积函数 $f(x,y,z)=k$ 为常数，前侧曲面 $x=\sqrt{4-y^2-z^2}$ 上的微元 $\mathrm{d}S$ 在 yz 平面上投影为正，后侧曲面 $x=-\sqrt{4-y^2-z^2}$ 上的微元 $\mathrm{d}S$ 在 yz 平面上投影为负，故 $\iint_S k\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，所以

$$\begin{aligned}E&=\iint_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{zx}}\sqrt{4-x^2-z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint_{D_{zx}}(-\sqrt{4-x^2-z^2})\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&=2\iint_{x^2+z^2\leqslant 4}\sqrt{4-x^2-z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}\mathrm{d}r\\&=-\frac{4\pi}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{32}{3}\pi.\end{aligned}$$

3. 计算第二型曲面积分

$$I=\iint_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中，S 是平行六面体（$0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c$）的表面并取外侧为正向，$f(x),g(y),h(z)$ 为 S 上的连续函数.

解　记

$$S_1: x=a（\text{前侧为正向}），$$
$$S_2: x=0（\text{后侧为正向}），$$

积分 $\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ **在另外四个曲面上的积分为零,故**

$$\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}} f(a)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{yz}} f(0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=bc[f(a)-f(0)].$$

由于变量的对称性,类似可得

$$\iint\limits_S g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=ac[g(b)-g(0)],$$

$$\iint\limits_S h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=ab[h(c)-h(0)].$$

所以
$$\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=bc[f(a)-f(0)]+ac[g(b)-g(0)]+ab[h(c)-h(0)].$$

4. 设磁场强度为 $H(x,y,z)$,求从球内出发通过上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,z\geqslant 0$ 的磁通量.

解　磁通量为

$$\Phi=\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

记
$$S_1: x=\sqrt{a^2-y^2-z^2}, z\geqslant 0,\quad S_2: x=-\sqrt{a^2-y^2-z^2},$$

则
$$\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{a^2-y^2-z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{yz}}\left(-\sqrt{a^2-y^2-z^2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=2\iint\limits_{\substack{y^2+z^2\leqslant a^2\\ z\geqslant 0}}\sqrt{a^2-y^2-z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

同理
$$\iint\limits_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi a^3,$$

$$\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

故
$$\Phi=2\pi a^3.$$

§3　高斯公式与斯托克斯公式

1. 应用高斯公式计算下列曲面积分:

(1) $\oiint\limits_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中,$S$ 是单位球面$x^2+y^z+z^2=1$ 的外侧;

(2) $\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中,$S$ 是立方体$0\leqslant x,y,z\leqslant a$ 表面的外侧;

(3) $\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中,$S$ 是锥面$x^2+y^2=z^2$ 与平面$z=h$ 所围空间区域$(0\leqslant z\leqslant h)$的表面,方向取外侧;

(4) $\oiint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中,$S$ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧;

(5) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中,$S$ 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的外侧.

解 (1) 因为 $P=yz,Q=zx,R=xy$,所以由高斯公式,有

$$\oiint\limits_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$
$$=\iiint\limits_V 0\mathrm{d}V=0.$$

(2) 由高斯公式,有

$$\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iiint\limits_V(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=6\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a\mathrm{d}z\int_0^a x\mathrm{d}x=3a^4.$$

(3) 由高斯公式,有

$$\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\iiint\limits_V(x+y+z)\mathrm{d}V=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\mathrm{d}r\int_r^h r[r\cos\theta+r\sin\theta+z]\mathrm{d}z$$
$$=2\int_0^{2\pi}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^h r^2(h-r)\mathrm{d}r+2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\mathrm{d}r\int_r^h rz\mathrm{d}z$$
$$=0+4\pi\int_0^h\frac{1}{2}r(h^2-r^2)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}h^4.$$

（4）由高斯公式，有

$$\oiint\limits_{S} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{12}{5}\pi.$$

（5）添加一曲面$S_1: x^2+y^2\leqslant a^2, z=0$，取下侧为正向，则$S$与$S_1$构成一封闭曲面，外侧为正向，故

$$\iint\limits_{S} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oiint\limits_{S+S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{V} 3\mathrm{d}V-0=2\pi a^3.$$

2. 应用高斯公式计算三重积分

$$\iiint\limits_{V}(xy+yz+zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中，V是由$x\geqslant 0, y\geqslant 0, 0\leqslant z\leqslant 1$与$x^2+y^2\leqslant 1$所确定的空间区域.

解　记

$S_1: x=0, 0\leqslant y, z\leqslant 1$（后侧为正向），

$S_2: y=0, 0\leqslant x, z\leqslant 1$（左侧为正向），

$S_3: z=0, x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1$（下侧为正向），

$S_4: z=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1$（上侧为正向），

$S_5: x^2+y^2=1, 0\leqslant z\leqslant 1$（外侧为正向），

则由高斯公式，有

$$\iiint\limits_{V}(xy+yz+zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\oiint\limits_{S} xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xyz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{5}\iint\limits_{S_i} xyz(\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

$$=0+0+0+\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant 1\\ 0\leqslant z\leqslant 1}} yz\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\substack{0\leqslant z\leqslant 1\\ 0\leqslant x\leqslant 1}} xz\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r+2\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=\frac{11}{24}.$$

3. 应用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

（1）$\oint\limits_L(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中，$L$ 为 $x+y+z=1$ 与三个坐标面的交线，它的走向使所围平面区域上侧在曲线的左侧；

（2）$\oint\limits_L x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$，其中，$L$ 为 $y^2+z^2=1$，$x=y$ 所交的椭圆的正向；

（3）$\oint\limits_L(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z$，其中，$L$ 为以 $A(a,0,0)$，$B(0,a,0)$，$C(0,0,a)$为顶点的三角形沿 $ABCA$ 的方向.

解　（1）如图 22-1 所示．由斯托克斯公式，有

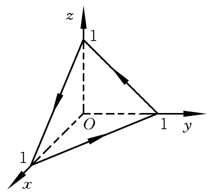

图 22-1

$$I=\oint\limits_L(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}$$

$$=2\iint\limits_S(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里，S 为以 L 为边界的三角形平面.

补曲面

S_1：$z=0$，$x+y\leqslant1$，$x\geqslant0$，$y\geqslant0$（下侧为正向），

S_2：$y=0$，$x+z\leqslant1$，$x\geqslant0$，$z\geqslant0$（左侧为正向），

S_3：$x=0$，$y+z\leqslant1$，$y\geqslant0$，$z\geqslant0$（后侧为正向），

则 S_1，S_2，S_3，S 构成封闭曲面，外侧为正向，由高斯公式，有

$$I=\iiint\limits_V 0\mathrm{d}V-2\sum_{i=1}^{3}\iint\limits_{S_i}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{\substack{x+y\leqslant 1\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0}}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{\substack{x+z\leqslant 1\\x\geqslant 0\\z\geqslant 0}}(x-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\iint\limits_{\substack{y+z\leqslant 1\\y\geqslant 0\\z\geqslant 0}}(z-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=6\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(y-x)\mathrm{d}y=0.$$

(2) 由斯托克斯公式,有

$$\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2y^3 & 1 & z\end{vmatrix}$$

$$=-\iint\limits_S 3x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\text{(因为平面}S\text{垂直于}xy\text{平面)}.$$

这里,S 为以椭圆 L 为边界的平面.

(3) 由斯托克斯公式,有

$$\oint_L(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-z & y-x\end{vmatrix}$$

$$=2\iint\limits_S\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=6\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y=3a^2\text{(与(1)类似)}.$$

这里,S 为以 A,B,C 为顶点的三角形平面.

4. 求下列全微分的原函数:

(1) $yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$;

(2) $(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z$.

解 (1) 因为 $P=yz,\quad Q=xz,\quad R=xy,$

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=z-z=0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}=x-x=0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}=y-y=0$$

在全空间成立，所以 $yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$ 在全空间为某个函数 u 的全微分.

显然
$$\mathrm{d}(xyz)=yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z,$$
故
$$u(x,y,z)=xyz+C\ (C\ \text{为任意常数}).$$

(2) 因为 $P=x^2-2yz,\quad Q=y^2-2xz,\quad R=z^2-2xy,$
$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=-2z+2z=0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}=-2x+2x=0,$$
$$\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}=-2y+2y=0$$
在全空间成立，所以 $(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z$ 在全空间为某个函数 u 的全微分.

取 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$，则
$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z+C\\&=\int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^y y^2\mathrm{d}y+\int_0^z(z^2-2xy)\mathrm{d}z+C\\&=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C\ (C\ \text{为任意常数}).\end{aligned}$$

5. 验证下列线积分与路线无关，并计算其值：

(1) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y-z^3\mathrm{d}z$；

(2) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中，$(x_1,y_1,z_1)$，$(x_2,y_2,z_2)$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上.

解 (1) 因为 $P=x,\quad Q=y^2,\quad R=-z^3,$
$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0-0=0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}=0-0=0,$$
$$\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}=0-0=0$$
在全空间成立，所以线积分与路线无关，现在取路线从 $A(1,1,1)$ 到 $B(2,3,$

$-4)$的直线

$$AB: x=1+t,\quad y=1+2t,\quad z=1-5t,\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

则
$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y-z^3\mathrm{d}z=\int_0^1[(1+t)+2(1+2t)^2+5(1-5t)^3]\mathrm{d}t$$
$$=-53\frac{7}{12}.$$

(2) 因为
$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)$$
$$=\mathrm{d}\ \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

所以在任何不含原点的空间单连通区域上,线积分与路线无关. 现取不含原点但包含(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)的空间单连通区域Ω,由于线积分在Ω上与路线无关,所以

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$
$$=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=a-a=0.$$

6. 证明:由曲面S所包围的立体V的体积ΔV为

$$\Delta V=\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

其中,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为曲面$S$的外法线方向余弦.

证　不妨设S为分片光滑曲面,利用高斯公式,有

$$\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{3}\iiint_V 3\mathrm{d}V=\Delta V.$$

7. 证明:若S为封闭曲面,$\boldsymbol{l}$为任何固定方向,则

$$\oint\!\!\!\oint_S\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}S=0,$$

其中,$\boldsymbol{n}$为曲面S的外法线方向.

证　设$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,$\boldsymbol{l}=(p,q,m)$,利用高斯公式,有

$$\oint\!\!\!\oint_S\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}S=\frac{1}{|\boldsymbol{l}|}\oint\!\!\!\oint_S(p\cos\alpha+q\cos\beta+m\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{l}|}\oiint\limits_{S}p\mathrm{d}y\mathrm{d}z+q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+m\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{l}|}\iiint\limits_{V}0\mathrm{d}V=0.$$

8. 证明公式

$$\iiint\limits_{V}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}=\frac{1}{2}\oiint\limits_{S}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S,$$

其中,S 是包围V 的曲面,$\boldsymbol{n}$ 是S 的外法线方向,

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \boldsymbol{r}=(x,y,z).$$

证　设
$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

因为
$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{r}(x,y,z),$$

所以
$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\frac{x}{r}\cos\alpha+\frac{y}{r}\cos\beta+\frac{z}{r}\cos\gamma.$$

下面分三种情况加以证明.

(1) **当**$O(0,0,0)\notin V$ **时,利用高斯公式,有**

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\oiint\limits_{S}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S&=\frac{1}{2}\oiint\limits_{S}\left(\frac{x}{r}\cos\alpha+\frac{y}{r}\cos\beta+\frac{z}{r}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{2}\oiint\limits_{S}\frac{x}{r}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V}\left(\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r}+\frac{r-\frac{y^2}{r}}{r^2}+\frac{r-\frac{z^2}{r}}{r^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint\limits_{V}\frac{1}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

(2) **当**$O(0,0,0)\in\mathrm{int}V$ **时,由于**$P=\frac{x}{r},Q=\frac{y}{r},R=\frac{z}{r}$**在**$V$ **的内部即原点处不连续,所以不能直接用高斯公式. 取充分小的**$\varepsilon>0$,**作以**$(0,0,0)$**为中心,**ε **为半径的球面**S_ε,**使**$S_\varepsilon\subset V$,**取**S_ε **的内侧为正向,则在由**S **和**S_ε **所围的区域**V_ε **内可用高斯公式,由**(1)**有**

$$\frac{1}{2}\oiint_{S}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\oiint_{S+S_\varepsilon}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S-\frac{1}{2}\oiint_{S_\varepsilon}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S$$

$$=\iiint_{V_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}-\frac{1}{2}\oiint_{S_\varepsilon}\frac{x}{r}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又因为
$$\oiint_{S_\varepsilon}\frac{z}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2}\frac{2}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\varepsilon}r\sqrt{\varepsilon^2-r^2}\mathrm{d}r=-\frac{4}{3}\pi\varepsilon^2,$$

同理
$$\oiint_{S_\varepsilon}\frac{x}{r}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{S_\varepsilon}\frac{y}{r}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}\pi\varepsilon^2,$$

所以
$$\frac{1}{2}\oiint_{S}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\iiint_{V_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}+2\pi\varepsilon^2.$$

令 $\varepsilon\to0^+$，则

$$\frac{1}{2}\oiint_{S}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\iiint_{V}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}.$$

（3）当 $O(0,0,0)\in S$ 时，$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$ 在 $S-\{(0,0,0)\}$ 上有界，连续. 取充分小的 $\varepsilon>0$，以 $O(0,0,0)$ 为中心，ε 为半径作球面 S_ε，S 被 S_ε 分为球外部分 S_1 和球内部分 S_2，S_ε 被 S 分为 S 外部分 S_3 和 S 内部分 S_4，S_4 取外侧为正向，记 S_1 和 S_4 所围区域为 V_ε，由（1）有

$$\frac{1}{2}\left(\iint_{S_1}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S-\iint_{S_4}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S\right)=\iiint_{V_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}.$$

又因为
$$\left|\iint_{S_i}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S\right|\leqslant\iint_{S_i}|\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})|\mathrm{d}S\leqslant\Delta S_i,\quad i=2,4,$$

即
$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\iint_{S_i}|\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})|\mathrm{d}S=0,\quad i=2,4.$$

所以
$$\iiint_{V}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\iiint_{V_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2}\left[\iint_{S_1}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S-\iint_{S_4}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2}\left[\oiint_{S}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S-\iint_{S_2}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S-\iint_{S_4}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S\right]$$

$$=\frac{1}{2}\oiint_{S}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S.$$

综合(1)、(2)、(3)，有

$$\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}=\frac{1}{2}\oiint\limits_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S.$$

9. 若 L 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 上的闭曲线，它所包围区域的面积为 S，求

$$\oint_L \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中，L 依正向进行.

解 $$\oint_L \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=\oint_L (z\cos\beta-y\cos\gamma)\mathrm{d}x+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)\mathrm{d}y+(y\cos\alpha-x\cos\beta)\mathrm{d}z$$

$$\xlongequal{\text{斯托克斯公式}}\iint\limits_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\cos\beta-y\cos\gamma & x\cos\gamma-z\cos\alpha & y\cos\alpha-x\cos\beta \end{vmatrix}$$

$$=2\iint\limits_S \cos\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_S (\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\mathrm{d}S=2S.$$

这里，S 是以平面闭曲线 L 为边界的平面.

§4 场论初步

1. 若 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，计算 $\nabla r,\nabla r^2,\nabla\dfrac{1}{r},\nabla f(r),\nabla r^n(n\geqslant 3)$.

解 $$\nabla r=\left(\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right)=\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)=\frac{1}{r}(x,y,z)=\frac{1}{r}\boldsymbol{r},$$

$$\nabla r^2=2r\,\nabla r=2(x,y,z)=2\boldsymbol{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r},\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r},\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right)=\left(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}\right)$$

$$=-\frac{1}{r^3}(x,y,z)=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

$$\nabla f(r)=f'(r)\nabla r=\frac{1}{r}f'(r)\boldsymbol{r},$$

$$\nabla r^n=\frac{\mathrm{d}r^n}{\mathrm{d}r}\nabla r=nr^{n-2}\boldsymbol{r}.$$

2. 求 $u=x^2+2y^2+3z^2+2xy-4x+2y-4z$ **在点** $O(0,0,0)$，$A(1,1,1)$，$B(-1,-1,-1)$**处的梯度，并求梯度为零之点.**

解　**因为** $\mathrm{grad}\ u=\nabla u=(2x+2y-4,4y+2x+2,6z-4)$，

所以

$$\mathrm{grad}\ u|_{(0,0,0)}=(-4,2,-4),$$

$$\mathrm{grad}\ u|_A=\mathrm{grad}|_{(1,1,1)}=(0,8,2),$$

$$\mathrm{grad}\ u|_B=\mathrm{grad}|_{(-1,-1,-1)}=(-8,-4,-10).$$

令

$$\mathrm{grad}\ u=(2x+2y-4,4y+2x+2,6z-4)=0,$$

即

$$\begin{cases}2x+2y-4=0,\\2x+4y+2=0,\\6z-4=0,\end{cases}$$

解之，有

$$\begin{cases}x=5,\\y=-3,\\z=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

故在 $\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)$ **处** $\mathrm{grad}\ u=0$.

3. 证明本节第二段关于梯度的一些基本性质 1～5.

证　(1) **性质** 1：**若** u,v **是数量函数，则**

$$\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v.$$

性质 1 **的证明如下.**

因为

$$\nabla(u+v)=\left(\frac{\partial(u+v)}{\partial x},\frac{\partial(u+v)}{\partial y},\frac{\partial(u+v)}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\nabla u+\nabla v,$$

所以

$$\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v.$$

（2）**性质** 2：**若** u,v **是数量函数，则**

$$\nabla(uv)=u(\nabla v)+v(\nabla u).$$

性质 2 **的证明如下.**

因为
$$\begin{aligned}\nabla(uv)&=\left(\frac{\partial(uv)}{\partial x},\frac{\partial(uv)}{\partial y},\frac{\partial(uv)}{\partial z}\right)\\&=\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x},u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y},u\frac{\partial v}{\partial z}+v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&=u\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&=u\,\nabla v+v\,\nabla u,\end{aligned}$$

所以
$$\nabla(uv)=u\,\nabla v+v\,\nabla u.$$

（3）**性质** 3：**若** $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$\varphi=\varphi(x,y,z)$，**则**

$$\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi.$$

性质 3 **的证明如下.**

因为
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\\&=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi,\end{aligned}$$

所以
$$\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi.$$

（4）**性质** 4：**若** $f=f(u)$，$u=u(x,y,z)$，**则**

$$\nabla f=f'(u)\nabla u.$$

性质 4 **的证明如下.**

因为
$$\begin{aligned}\nabla f&=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(f'(u)\frac{\partial u}{\partial x},f'(u)\frac{\partial u}{\partial y},f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&=f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=f'(u)\nabla u,\end{aligned}$$

所以
$$\nabla f=f'(u)\nabla u.$$

（5）**性质** 5：**若** $f=f(u_1,u_2,\cdots,u_m)$，$u_i=u_i(x,y,z)$ $(i=1,2,\cdots,m)$，**则**

$$\nabla f=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_i}\nabla u_i.$$

性质 5 **的证明如下.**

因为
$$\begin{aligned}\nabla f&=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right),\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial y}\right),\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial z}\right)\right)\end{aligned}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x},\frac{\partial u_i}{\partial y},\frac{\partial u_i}{\partial z}\right)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_i}\nabla u_i,$$

所以
$$\nabla f=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_i}\nabla u_i.$$

4. 计算下列向量场 A 的散度与旋度：

（1）$\boldsymbol{A}=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)$；

（2）$\boldsymbol{A}=(x^2yz,xy^2z,xyz^2)$；

（3）$\boldsymbol{A}=\left(\frac{x}{yz},\frac{y}{zx},\frac{z}{xy}\right)$.

解　（1）**因为**
$$P=y^2+z^2,\quad Q=z^2+x^2,\quad R=x^2+y^2,$$

所以
$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,$$
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$
$$=2(y-z,z-x,x-y).$$

（2）**因为**
$$P=x^2yz,\quad Q=xy^2z,\quad R=xyz^2,$$

所以
$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2xyz+2xyz+2xyz=6xyz,$$
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$
$$=(xz^2-xy^2,x^2y-yz^2,y^2z-x^2z).$$

（3）**因为**
$$P=\frac{x}{yz},\quad Q=\frac{y}{zx},\quad R=\frac{z}{xy},$$

所以
$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy},$$
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{yz}&\frac{y}{zx}&\frac{z}{xy}\end{vmatrix}=\frac{1}{xyz}\left(\frac{y^2}{z}-\frac{z^2}{y},\frac{z^2}{x}-\frac{x^2}{z},\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right).$$

5. 证明本节第三段关于散度的一些基本性质 1～3.

证　（1）**性质** 1：**若** $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ **是向量函数，则**
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\nabla\cdot\boldsymbol{v}.$$

性质 1 **的证明如下.**

设 $\boldsymbol{u}=(P_1,Q_1,R_1)$，$\boldsymbol{v}=(P_2,Q_2,R_2)$，则

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})&=\nabla\cdot(P_1+P_2,Q_1+Q_2,R_1+R_2)\\&=\frac{\partial(P_1+P_2)}{\partial x}+\frac{\partial(Q_1+Q_2)}{\partial y}+\frac{\partial(R_1+R_2)}{\partial z}\\&=\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}+\frac{\partial R_2}{\partial z}\right)\\&=\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\nabla\cdot\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

（2）性质 2：若 φ 是数量函数，$\boldsymbol{F}$ 是向量函数，则

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{F})=\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}\cdot\nabla\varphi.$$

性质 2 的证明如下.

设 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$，则

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{F})=\nabla\cdot(\varphi P,\varphi Q,\varphi R)&=\frac{\partial(\varphi P)}{\partial x}+\frac{\partial(\varphi Q)}{\partial y}+\frac{\partial(\varphi R)}{\partial z}\\&=\varphi\frac{\partial P}{\partial x}+P\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial Q}{\partial y}+Q\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varphi\frac{\partial R}{\partial z}+R\frac{\partial\varphi}{\partial z}\\&=\varphi\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+P\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Q\frac{\partial\varphi}{\partial y}+R\frac{\partial\varphi}{\partial z}\\&=\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}\cdot\nabla\varphi.\end{aligned}$$

（3）性质 3：若 $\varphi=\varphi(x,y,z)$ 是一数量函数，则

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

性质 3 的证明如下.

$$\nabla\cdot(\nabla\varphi)=\nabla\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi.$$

6. 证明本节第四段关于旋度的一些基本性质 1～3（可应用算符 ∇ 推演）.

证　（1）性质 1：若 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 是向量函数，则

① $$\nabla\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\nabla\times\boldsymbol{u}+\nabla\times\boldsymbol{v},$$

② $$\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},$$

③ $$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot\nabla\times\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v},$$

④ $$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}-(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}.$$

性质 1 的证明如下.

① 设$\boldsymbol{u}=(P_1,Q_1,R_1)$，$\boldsymbol{v}=(P_2,Q_2,R_2)$，则

$$\nabla\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P_1+P_2 & Q_1+Q_2 & R_1+R_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P_1 & Q_1 & R_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P_2 & Q_2 & R_2\end{vmatrix}$$

$$=\nabla\times\boldsymbol{u}+\nabla\times\boldsymbol{v}.$$

② 首先

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})&=\nabla(P_1P_2+Q_1Q_2+R_1R_2)=\nabla(P_1P_2)+\nabla(Q_1Q_2)+\nabla(R_1R_2)\\&=P_1\nabla P_2+P_2\nabla P_1+Q_1\nabla Q_2+Q_2\nabla Q_1+R_1\nabla R_2+R_2\nabla R_1\\&=(P_1\nabla P_2+Q_1\nabla Q_2+R_1\nabla R_2)+(P_2\nabla P_1+Q_2\nabla Q_1+R_2\nabla R_1)\\&=\nabla(\boldsymbol{u}_c\cdot\boldsymbol{v})+\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}_c),\end{aligned}$$

这里$\boldsymbol{u}_c=(P_1,Q_1,R_1)$，$\boldsymbol{v}_c=(P_2,Q_2,R_2)$看作常向量.

由三重向量积公式

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b},$$

有
$$\nabla(\boldsymbol{u}_c\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}_c\times(\nabla\times\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{v},$$

$$\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}_c)=\nabla(\boldsymbol{v}_c\cdot\boldsymbol{u})=\boldsymbol{v}_c\times(\nabla\times\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{v}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{u},$$

于是　$\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}_c\times(\nabla\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}_c\times(\nabla\times\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{u}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$，

去掉下标c，即有

$$\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}.$$

③ 由∇算子的微分性和乘积微分法得

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\nabla\cdot(\boldsymbol{u}_c\times\boldsymbol{v})+\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}_c)$$

同样，这里$\boldsymbol{u}_c=(P_1,Q_1,R_1)$，$\boldsymbol{v}_c=(P_2,Q_2,R_2)$看作常向量.

由于三向量的混合积具有轮换性：

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

故
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}_c\times\boldsymbol{v})=-\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}_c)=-\boldsymbol{u}_c\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v}),$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}_c)=\boldsymbol{v}_c\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u})=\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u}),$$

即
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v}).$$

④ 类似于③，有
$$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\nabla\times(\boldsymbol{u}_c\times\boldsymbol{v})+\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}_c),$$
再由三重向量积公式，有
$$\nabla\times(\boldsymbol{u}_c\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}_c(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{u}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},$$
$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}_c)&=-\nabla\times(\boldsymbol{v}_c\times\boldsymbol{u})=-[\boldsymbol{v}_c(\nabla\cdot\boldsymbol{u})-(\boldsymbol{v}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{u}]\\&=(\boldsymbol{v}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_c(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}(\nabla\cdot\boldsymbol{u}),\end{aligned}$$
即
$$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}(\nabla\cdot\boldsymbol{u}).$$

(2) 性质 2：若 φ 是数量函数，A 是向量函数，则
$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi(\nabla\times\boldsymbol{A})+\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}.$$

性质 2 的证明如下.

设 $\boldsymbol{A}=(P,Q,R)$，$\varphi\boldsymbol{A}=(\varphi R,\varphi Q,\varphi R)$，则
$$\begin{aligned}\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\\varphi R&\varphi Q&\varphi R\end{vmatrix}\\&=(\varphi R_y+\varphi_y R-\varphi Q_z-\varphi_z Q,\varphi P_z+\varphi_z P-\varphi R_x-\varphi_x R,\\&\quad\ \varphi Q_x+\varphi_x Q-\varphi P_y-\varphi_y P)\\&=\varphi(R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y)\\&\quad+(\varphi_y R-\varphi_z Q,\varphi_z P-\varphi_x R,\varphi_x Q-\varphi_y P)\\&=\varphi(\nabla\times\boldsymbol{A})+\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

(3) 性质 3：若 φ 是数量函数，A 是向量函数，则

① $$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0,$$

② $$\nabla\times\nabla\varphi=\boldsymbol{0},$$

③ $$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}.$$

性质 3 的证明如下.

① $$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})&=\nabla\cdot(R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y)\\&=R_{yx}-Q_{zx}+P_{zy}-R_{xy}+Q_{xz}-P_{yz}=0.\end{aligned}$$

② $$\nabla\times\nabla\varphi=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)$$

$$=(\varphi_{zy}-\varphi_{yz},\varphi_{xz}-\varphi_{zx},\varphi_{yx}-\varphi_{xy})=\mathbf{0}.$$

③ 由三重向量积公式,有

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}.$$

7. 证明:场 $\boldsymbol{A}=(yz(2x+y+z),xz(x+2y+z),xy(x+y+2z))$ 是有势场,并求其势函数.

证　因为

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\boldsymbol{A}&=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\\&=(x^2+2xy+2xz-x^2-2xy-2xz,\\&\quad 2xy+y^2+2yz-2xy-y^2-2yz,\\&\quad 2xz+2yz+z^2-2xz-2yz-z^2)=0,\end{aligned}$$

所以场 A 为有势场,且势函数为

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}yz(2x+y+z)\mathrm{d}x+xz(x+2y+z)\mathrm{d}y\\&\quad+xy(x+y+2z)\mathrm{d}z+C\\&=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y 0\mathrm{d}y+\int_0^z xy(x+y+2z)\mathrm{d}z\\&=xyz(x+y+z)+C\ (C\text{ 为任意常数}).\end{aligned}$$

8. 若流体流速 $\boldsymbol{A}=(x^2,y^2,z^2)$,求单位时间内穿过 $\frac{1}{8}$ 球面 $x^2+y^2+z^2=1,x>0,y>0,z>0$ 的流量.

解　流量

$$\begin{aligned}E&=\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=3\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r=\frac{3}{8}\pi.\end{aligned}$$

9. 设流速 $\boldsymbol{A}=(-y,x,c)$ (c 为常数),求环流量:

(1) 沿圆周 $x^2+y^2=1,z=0$;

(2) 沿圆周 $(x-2)^2+y^2=1,z=0$.

解　(1) 环流量

$$\Phi=\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{格林公式}}\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi.$$

(2) 环流量

$$\Phi=\oint_{L_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\oint_{L_1}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\mathrm{d}\sigma=2\pi.$$

§5　总 练 习 题

1. 设 $P=x^2+5\lambda y+3yz, Q=5x+3\lambda xz-2, R=(\lambda+2)xy-4z$.

（1）**计算** $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$，**其中**，$L$ **为螺旋线** $x=a\cos t, y=a\sin t, z=ct$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

（2）**设** $\boldsymbol{A}=(P,Q,R)$，**求** $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$；

（3）**问在什么条件下** A **为有势场？并求势函数.**

解　（1）

$$\begin{aligned}&\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}[(a^2\cos^2t+5\lambda a\sin t+3act\sin t)(-a\sin t)\\&\quad+(5a\cos t+3\lambda act\cos t-2)a\cos t\\&\quad+((\lambda+2)a^2\cos t\sin t-4ct)c]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\left(3\lambda a^2ct\cos^2t-3a^2ct\sin^2t-5\lambda a^2\sin t-4c^2t+\frac{5}{2}a^2\right)\mathrm{d}t\\&=\pi a^2(1-\lambda)(5-3c\pi)-8\pi^2c^2.\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\boldsymbol{A}&=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\\&=(1-\lambda)(2x,y,5-3z).\end{aligned}$$

（3）**当** $\lambda=1$ **时**，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，**故场** A **为有势场，且势函数为**

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2+5y+3yz)\mathrm{d}x+(5x+3xz-2)\mathrm{d}y+(3xy-4z)\mathrm{d}z+C\\&=\int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(5x-2)\mathrm{d}y+\int_0^z(3xy-4z)\mathrm{d}z+C\\&=\frac{1}{3}x^3+(5x-2)y+3xyz-2z^2+C\ (C\ \text{为任意常数}).\end{aligned}$$

2. 证明：若 $\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$，$S$ **为包围区域** V **的曲面的外侧，则**

（1）$\iiint_V\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$；

(2) $\displaystyle\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_V \nabla\cdot\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_V u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

其中,u 在区域 V 及其界面 S 上有二阶连续偏导数,$\dfrac{\partial u}{\partial n}$为沿曲面 S 外法线方向的方向导数.

证 (1) 利用高斯公式,有

$$\begin{aligned}\oiint_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S&=\oiint_S\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},y)+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(\boldsymbol{n},z)\right]\mathrm{d}S\\&=\oiint_S\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint_V\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

(2) 由高斯公式,有

$$\begin{aligned}\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S&=\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+u\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+u\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right.\\&\qquad\left.+u\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint_V\nabla\cdot\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_V u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

3. 设 S 为光滑闭曲面,V 为 S 所围的区域,函数 $u(x,y,z)$ 在 V 与 S 上具有二阶连续偏导数,函数 $w(x,y,z)$ 的偏导连续. 证明:

(1) $\displaystyle\iiint_V w\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S uw\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint_V u\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(2) $\displaystyle\iiint_V w\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S w\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_V\nabla u\cdot\nabla w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

证 (1) 由高斯公式,有

$$\oiint_S uw\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V\frac{\partial(uw)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

即
$$\iiint_V w\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S uw\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint_V u\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(2) 将(1)式中 u 换为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$,则

$$\iiint\limits_V w\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_S w\,\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint\limits_V \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \quad ①$$

将此式中关于 x 的偏导数换为关于 y 或 z 的偏导数,等式也成立,即有

$$\iiint\limits_V w\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_S w\,\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iiint\limits_V \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad ②$$

$$\iiint\limits_V w\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_S w\,\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iiint\limits_V \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad ③$$

三式相加(①+②+③),有

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V w\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &=\oiint\limits_S w\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)-\iiint\limits_V \nabla u\cdot\nabla w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &=\oiint\limits_S w\,\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint\limits_V \nabla u\cdot\nabla w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

4. 设 $\boldsymbol{A}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$,$S$ 为一封闭曲面,$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 证明当原点在曲面 S 的外、上、内时,分别有

$$\oiint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0、2\pi、4\pi.$$

证　因为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}=\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

所以,当 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 时

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{A} &=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\\ &=0.\end{aligned}$$

(1) $(0,0,0)$ 在 S 的外部时,由高斯公式,有

$$\oiint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0\ (V \text{ 为 } S \text{ 所围的区域}).$$

(2) $(0,0,0)$ 在 S 的内部时,取充分小 $\varepsilon>0$,使以 $(0,0,0)$ 为球心,ε 为半径的球面 S_ε 在 V 的内部,记 V_ε 为 S 和 S_ε 所围的区域,S_ε 取内侧,则

$$\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S+S_\varepsilon}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}-\iint_{S_\varepsilon}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_{V_\varepsilon}\mathrm{div}\boldsymbol{A}dV-\iint_{S_\varepsilon}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$
$$=-\iint_{S_\varepsilon}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_\varepsilon}|\boldsymbol{A}|dS=\iint_{S_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2}dS=4\pi.$$

(3) $(0,0,0)$在S上时,$\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$为无界函数的曲面积分,且

$$|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}|\leqslant\frac{1}{r^2}.$$

如果S在$(0,0,0)$是光滑的,由类似于无界函数的二重积分的讨论,可知反常积分$\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$收敛.

同样,取充分小的$\varepsilon>0$,记S_ε为以$(0,0,0)$为球心,ε为半径的球面,用S_1表示从S上被S_ε截下而不被S_ε所包围的部分曲面,S_2表示S_ε上含在V内的部分,则

$$\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\iint_{S_1}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S},\quad \iint_{S_1+S_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=0,$$

其中,S_2取内侧.因为S在点$(0,0,0)$是光滑的,在点$(0,0,0)$有切平面,所以S在点$(0,0,0)$的附近可用这个切平面近似代替,即S_2可看作S_ε的半个球面,故

$$\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\iint_{S_1}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\iint_{S_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\iint_{S_2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}dS$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\iint_{S_2}\frac{1}{\varepsilon^2}dS=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\varepsilon^2}2\pi\varepsilon^2=2\pi.$$

5. 计算$I=\iint_S xzdydz+yxdzdx+zydxdy$,其中$S$是柱面$x^2+y^2=1$在$-1\leqslant z\leqslant1$和$x\geqslant0$的部分.曲面侧的法向与$x$轴正向成锐角.

解 对于积分$\iint_S xzdydz$,由于$P(x,y,z)=xz$关于z为奇函数,又由曲面的对称性,知

$$\iint_S xzdydz=0,$$

对于积分$\iint\limits_S zy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由于曲面垂直于$xy$平面，故

$$\iint\limits_S zy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

所以
$$I=\iint\limits_S yx\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{D_{xz}} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint\limits_{D_{xz}}(-x\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$=2\iint\limits_{D_{xz}} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

6. 证明公式：

$$\iint\limits_D f(m\sin\varphi\cos\theta+n\sin\varphi\sin\theta+p\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$=2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2})\mathrm{d}u,$$

这里$D=\{(\theta,\varphi)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$，$m^2+n^2+p^2>0$，$f(t)$在$|t|<\sqrt{m^2+n^2+p^2}$时为连续函数.

证　证明此公式的主要思想是先把公式左端的二重积分化为单位球面上的曲面积分，然后通过适当的变换将此曲面积分化为定积分.

作单位球面$S: x^2+y^2+z^2=1$的球面坐标变换

$$\begin{cases} x=\sin\varphi\cos\theta, \\ y=\sin\varphi\sin\theta, \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ z=\cos\varphi, \end{cases}$$

易知
$$E=x_\varphi^2+y_\varphi^2+z_\varphi^2=1,$$
$$G=x_\theta^2+y_\theta^2+z_\theta^2=\sin^2\varphi,$$
$$F=x_\theta x_\varphi+y_\theta y_\varphi+z_\theta z_\varphi=0,$$
$$\sqrt{EG-F^2}=\sin\varphi,$$

则
$$\oiint\limits_S f(mx+ny+pz)\mathrm{d}S=\iint\limits_D f(m\sin\varphi\cos\theta+n\sin\varphi\sin\theta+p\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

下面将坐标系$Oxyz$作旋转后得一新坐标系$Ouvw$. 新坐标系$Ouvw$建立如下：因为$m^2+n^2+p^2>0$，所以沿方向(m,n,p)建立w轴，然后在平面$\pi: mx+ny+pz=0$上以O为原点建立平面直角坐标系Ouv，使$Ouvw$构成右手系.

点$M(x,y,z)$在$Ouvw$坐标系下的w坐标为$\pm d(d=d(M,\pi))$，且当M在平面π的法向(m,n,p)所指方向一侧时取“$+$”，否则取“$-$”，故

$$w=\frac{mx+ny+pz}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

即
$$mx+ny+pz=w\sqrt{m^2+n^2+p^2}.$$

由于是旋转变换，所以球面$S:x^2+y^2+z^2=1$在新坐标系$Ouvw$下为$u^2+v^2+w^2=1$. 引入参量方程：

$$\begin{cases}u=\sqrt{1-t^2}\cos\theta,\\ v=\sqrt{1-t^2}\sin\theta,\\ w=t,\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad -1\leqslant t\leqslant 1.$$

因为
$$u_\theta=-\sqrt{1-t^2}\sin\theta,\quad v_\theta=\sqrt{1-t^2}\cos\theta,\quad w_\theta=0,$$

$$u_t=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\cos\theta,\quad v_t=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin\theta,\quad w_t=1,$$

$$E_1=u_\theta^2+v_\theta^2+w_\theta^2=1-t^2,$$

$$G_1=u_t^2+v_t^2+w_t^2=\frac{1}{1-t^2},$$

$$F_1=u_\theta u_t+v_\theta v_t+w_\theta w_t=0,$$

$$\sqrt{E_1G_1-F_1^2}=1,$$

所以
$$\begin{aligned}&\iint\limits_D f(m\sin\varphi\cos\theta+n\sin\varphi\sin\theta+p\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\ =&\oiint\limits_S f(mx+ny+pz)\mathrm{d}S\\ =&\iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ -1\leqslant t\leqslant 1}} f(t\sqrt{m^2+n^2+p^2})\sqrt{E_1G_1-F_1^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t\\ =&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-1}^{1}f(t\sqrt{m^2+n^2+p^2})\mathrm{d}t\\ =&2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2})\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

第二十三章　流形上微积分学初阶

知 识 要 点

1. 向量函数是流形上微积分学讨论的对象，它是n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$到m维欧氏空间$\mathbf{R}^m$的映射，其分量为n元函数. 向量函数的极限与连续等价于每个分量的多元函数的极限与连续.

2. 若向量函数$\boldsymbol{f}$在点$\boldsymbol{x}_0$可微（或可导），则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

称为$\boldsymbol{f}$在点$\boldsymbol{x}_0$的微分，$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$称为$\boldsymbol{f}$在点$\boldsymbol{x}_0$的导数：

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}.$$

3. 向量函数的可微性与其坐标函数的可微性等价. 在可微的前提下向量函数的导数也有外形与一元函数相似的四则运算法则和复合函数导数的链式法则. 但一元函数的微分中值定理不能推广到向量函数，对于在凸开集上可微的向量函数只成立微分中值不等式.

4. 多元函数f的导数，即为f的梯度$\mathrm{grad}\ f$，这是向量函数；而f的二阶导数，$\boldsymbol{f}''=(\mathrm{grad}\ f)'$，即

$$\boldsymbol{f}''=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}\quad (f\text{ 的黑赛矩阵}).$$

f 在稳定点 x_0 的黑赛矩阵 $f''(x_0)$ 为正定(负定)时,f 在 x_0 取严格极小(极大)值,当 $f''(x_0)$ 为不定时,f 在 x_0 不取极值.

5. 向量函数存在反函数定理和隐函数定理. 以向量函数形式来证明推广了第十八章中的有关内容,无论在形式上或表达式上都更加统一、简洁.

6. 在 $\mathbf{R}^3$ 中自变量的微分 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$,通过外积运算定义了基本一次、二次和三次微分形式,并以向量空间的数乘形式给出了零次、一次、二次和三次微分形式,再通过外微分使牛顿-莱布尼兹公式、格林公式、高斯公式和斯托克斯公式统一为一般的斯托克斯公式:

$$\int_S \mathrm{d}\overset{k}{\omega}=\int_{\partial S}\overset{k}{\omega},$$

其中,S 是 n 维空间中的 $k+1$ 维区域(k 是小于 n 的非负整数),∂S 是 S 的边界,是 n 维空间中 k 维区域.

7. 对不定向的重积分、第一型曲线积分、第一型曲面积分作变量变换时变量代换公式均可将面积元素 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$、体积元素 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,弧长元素

$$\mathrm{d}s\left(\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}\text{,或 }\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}\right),$$

曲面元素

$$\mathrm{d}S\left(\mathrm{d}S=\sqrt{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}z\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2}\right)$$

中的微分运算理解为相应微分及微分的外积的绝对值而得到. 而定向的第二型 曲线、曲面积分的变量变换公式可由 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的相应微分及微分的外积表出. 由此便可得到用参数表示的曲面 S 上的曲面积分计算公式.

习 题 详 解

§1　n 维欧氏空间与向量函数

1. 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$,证明

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=2(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2).$$

证　$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$

$$=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

$$=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$
$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
$$=2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})=2(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2).$$

2. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，点 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 到集合 E 的距离定义为

$$\rho(\boldsymbol{x},E)=\inf_{\boldsymbol{y}\in E}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

证明：(1) 若 E 是闭集，$\boldsymbol{x}\overline{\in}E$，则 $\rho(\boldsymbol{x},E)>0$；

(2) 若 $\overline{E}$ 是 E 连同其全体聚点所组成的集合（称为 E 的闭包），则

$$\overline{E}=\{\boldsymbol{x}\mid\rho(\boldsymbol{x},E)=0\}.$$

证　(1) 因为 E 为闭集，所以 E 的余集 $\complement E$ 为开集，由于 $\boldsymbol{x}\overline{\in}E$，因而 $\boldsymbol{x}\in\complement E$，故 $\exists\delta>0$，使 $U(\boldsymbol{x};\delta)\subset\complement E$. 现对 $\forall\boldsymbol{y}\in E$，有

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})>\delta,$$

即
$$\rho(\boldsymbol{x},E)=\inf_{\boldsymbol{y}\in E}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant\delta>0.$$

(2) 一方面，对 $\forall\boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{x}\mid\rho(\boldsymbol{x},E)=0\}$，由于 $\rho(\boldsymbol{x},E)=0$，因而 $\boldsymbol{x}\in E$ 或 $\boldsymbol{x}\overline{\in}E$. 若 $\boldsymbol{x}\overline{\in}E$，则由于 $\rho(\boldsymbol{x},E)=0$，故存在点列 $\{\boldsymbol{y}_n\}\subset E$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_n)=0$，即表示 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{y}_n=\boldsymbol{x}$，这说明 $\boldsymbol{x}$ 为 E 的聚点，所以不论 $\boldsymbol{x}\in E$ 或 $\boldsymbol{x}\overline{\in}E$，都有 $\boldsymbol{x}\in\overline{E}$，即

$$\{\boldsymbol{x}\mid\rho(\boldsymbol{x},E)=0\}\subset\overline{E}.$$

另一方面，对 $\forall\boldsymbol{x}\in\overline{E}$，若 $\boldsymbol{x}\in E$，则 $\rho(\boldsymbol{x},E)=0$，故

$$x\in\{\boldsymbol{x}\mid\rho(\boldsymbol{x},E)=0\};$$

若 $\boldsymbol{x}\overline{\in}E$，但 $\boldsymbol{x}\in\overline{E}$，即 $\boldsymbol{x}$ 为 E 的聚点，因而 $\exists\boldsymbol{y}_n\in E$，使

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_n)\to0\quad(n\to\infty),$$

又
$$0\leqslant\rho(\boldsymbol{x},E)\leqslant\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_n)\to0\quad(n\to\infty),$$

即
$$\rho(\boldsymbol{x},E)=0,$$

这表明
$$\boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{x}\mid\rho(\boldsymbol{x},E)=0\},$$

即
$$\overline{E}\subset\{\boldsymbol{x}\mid\rho(\boldsymbol{x},E)=0\}.$$

综合两方面，有

$$\overline{E}=\{\boldsymbol{x}\mid\rho(\boldsymbol{x},E)=0\}.$$

3. 设 $X\subset\mathbf{R}^n$，$Y\subset\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{f}:X\to Y$；A,B 是 X 的任意子集. 证明：

(1) $\boldsymbol{f}(A\cup B)=\boldsymbol{f}(A)\cup\boldsymbol{f}(B)$；

(2) $\boldsymbol{f}(A\cap B)\subset\boldsymbol{f}(A)\cap\boldsymbol{f}(B)$；

(3) 若 f 是一一映射,则 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

证　(1) 一方面,对 $\forall y\in f(A)\cup f(B)$,则 $y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)$. 若 $y\in f(A)$,则 $\exists x\in A$,使 $y=f(x)$,若 $y\in f(B)$,则 $\exists x\in B$,使 $y=f(x)$,所以对 $\forall y\in f(A)\cup f(B)$,总 $\exists x\in A\cup B$,使 $y=f(x)$,即 $y\in f(A\cup B)$,这表明

$$f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B).$$

另一方面,对 $\forall y\in f(A\cup B)$,则 $\exists x\in A\cup B$,使 $y=f(x)$. 因为 $x\in A\cup B$,所以 $x\in A$ 或 $x\in B$,即 $y=f(x)\in f(A)$ 或 $y=f(x)\in f(B)$,从而 $y\in f(A)\cup f(B)$,这表明

$$f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B).$$

综合两方面,有

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B).$$

(2) 对 $\forall y\in f(A\cap B)$,则 $\exists x\in A\cap B$,使 $y=f(x)$. 因为 $x\in A\cap B$,所以 $x\in A$ 且 $x\in B$,则 $y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)$,即 $y\in f(A)\cap f(B)$,故

$$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B).$$

(3) 一方面,由(2)有

$$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B).$$

另一方面,对 $\forall y\in f(A)\cap f(B)$,则 $y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)$,即 $\exists x_1\in A$ 使 $y=f(x_1)$,$\exists x_2\in B$ 使 $y=f(x_2)$. 又因为 f 是一一映射,所以 $x=x_1=x_2\in A\cap B$ 使 $y=f(x)$,即 $y\in f(A\cap B)$,这表明

$$f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B).$$

综合两方面,有

$$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B).$$

4. 设 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$,$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^m$,$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}$,$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}$,证明:

(1) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|=\|\boldsymbol{b}\|$,且当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时可逆;

(2) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}$.

证　(1) 因为 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}$ 等价于

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\to 0}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}\|=0,$$

所以对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta$ 时,有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}\|<\varepsilon.$$

利用本节习题6(3)的不等式,有

$$\left|\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|-\|\boldsymbol{b}\|\right|\leqslant\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}\|<\varepsilon,$$

故
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|=\|\boldsymbol{b}\|.$$

若 $\|\boldsymbol{b}\|=0$,则

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|=0,$$

这表明
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}.$$

(2) 因为
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b},\quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c},$$

所以对$\forall 1>\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta$ 时,有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}\|<\frac{\varepsilon}{2(1+\|\boldsymbol{c}\|)},$$

$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{c}\|<\frac{\varepsilon}{2(1+\|\boldsymbol{b}\|)},$$

则
$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}\|\\
=&\|\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{c}+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}\|\\
\leqslant&\|\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\|\ \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{c}\|+\|\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\|\ \|\boldsymbol{c}\|\\
=&\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\|\ \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{c}\|+\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}\|\ \|\boldsymbol{c}\|\\
\leqslant&\|\boldsymbol{b}\|\ \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}\|\ \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{c}\|+\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}\|\ \|\boldsymbol{c}\|\\
<&\|\boldsymbol{b}\|\cdot 1\cdot\frac{\varepsilon}{2(1+\|\boldsymbol{b}\|)}+\frac{\varepsilon}{2(1+\|\boldsymbol{c}\|)}\cdot\|\boldsymbol{c}\|\\
\leqslant&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

故
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}[\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}.$$

5. 设 $D\subset\mathbf{R}^n,\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$. 若存在正实数 k,r 对任何点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$ 满足

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|\leqslant k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^r,$$

试证明 f 是 D 上的一致连续函数.

证　因为对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\left(\dfrac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{1}{r}}>0$,对$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$,当

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$$

时,就有
$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|\leqslant k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^r<\varepsilon,$$

所以 $f(x)$在 D 上一致连续.

6. 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$,证明下列各式:

（1） $\sum_{i=1}^{n}|x_i|\leqslant\sqrt{n}\ \|\boldsymbol{x}\|$；

（2） $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$；

（3） $|\ \|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|\ |\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$.

并讨论各不等式中等号成立的条件和解释 $n=2$ **时的几何意义.**

证　（1）**此不等式的证明要用到第六章**§3 **中例**3,**即所谓詹森不等式**：**若** f **为** $[a,b]$ **上凸函数,则对任意** $x_i\in[a,b]$, $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,**有**

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

现取 $f(t)=t^2$, $t\in\mathbf{R}$,**则** $f(t)=t^2$ **为** $\mathbf{R}$ **上的凸函数,令** $t_i=|x_i|$, $\lambda_i=\frac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$,**则由詹森不等式,有**

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|}{n}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(|x_i|),$$

即

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2}{n^2}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2.$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\leqslant\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n}\ \|x\|.$$

等式成立的充要条件为 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.　**当** $n=2$ **时不等式为**

$$|x|+|y|\leqslant\sqrt{2}\ \sqrt{x^2+y^2}\quad(x=x_1,y=x_2).$$

此不等式的几何意义为（**见图** 23-1）：**在任意一直角三角形中,以斜边所作正方形的对角线的长大于或等于两直角边长之和.**

（2）**利用本节习题** 1 **有**

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\leqslant\frac{1}{2}[\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2]$$

$$=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2.$$

因为此处利用了不等式

$$0\leqslant(a-b)^2=a^2+b^2-2ab,$$

即

$$2|a|\,|b|\leqslant a^2+b^2,$$

所以 $$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2.$$

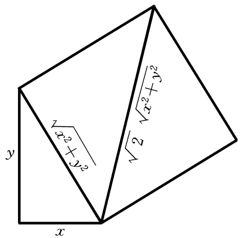

图 23-1

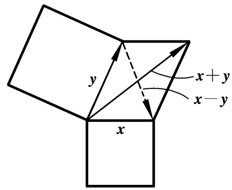

图 23-2

等号成立的充要条件为
$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,$$
或 $$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$
也就是 $$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$
即 $$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0,$$
故等号成立的充要条件为 x 与 y 正交. 当 $n=2$ 时不等式的几何意义为(见图 23-2):以向量 x,y 为邻边的平行四边形的两对角线的乘积小于或等于以向量 x,y 为边的两正方形面积之和.

(3) 由三角不等式有
$$\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|,$$
即 $$\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,$$
又 $$\begin{aligned}\|\boldsymbol{y}\|&=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\|\\&\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{x}\|,\end{aligned}$$
即 $$\|\boldsymbol{y}\|-\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,$$
所以 $$\big|\,\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|\,\big|\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|.$$
等号成立的充要条件为 $\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{x}$($k$ 为实数),当 $n=2$ 时不等式的几何意义为:任一三角形中一边大于或等于另外两边之差.

7. (1) 证明定理 23.6;

(2) 设 $D\subset\mathbf{R}^n$,试问向量函数 $\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 在 D 上一致连续,是否等价于 $\boldsymbol{f}$ 的

所有坐标函数 $f_i, i=1,2,\cdots,m$ **都在** D **上一致连续？为什么？**

证　(1) **定理**23.6：**若** $D\subset\mathbf{R}^n$ **是有界闭集，**$\boldsymbol{f}$ **是** D **上的连续函数，则** $\boldsymbol{f}$ **在** D **上一致连续.**

证明过程如下：

因为 $\boldsymbol{f}$ **在** D **上连续，所以对于**$\forall\varepsilon>0,\forall\boldsymbol{x}\in D,\exists\delta_{\boldsymbol{x}}>0$，**当** $\boldsymbol{x}'\in U(\boldsymbol{x};\delta_{\boldsymbol{x}})$**时，有**

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|<\varepsilon/2.$$

作开集集合
$$H=\left\{U\left(\boldsymbol{x};\frac{\delta_{\boldsymbol{x}}}{2}\right)\ \middle|\ \boldsymbol{x}\in D\right\},$$

则H **为有界闭集**D **的一个开覆盖，由有限覆盖定理知，存在**H **的一个有限子集**

$$H^*=\left\{U\left(\boldsymbol{x}_i;\frac{\delta_i}{2}\right)\ \middle|\ i=1,2,\cdots,k\right\}\quad(\delta_i=\delta_{\boldsymbol{x}_i})$$

覆盖 D，**记**

$$\delta=\min_{1\leqslant i\leqslant k}\left\{\frac{\delta_i}{2}\right\}>0.$$

现在，对$\forall\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D$，**当** $\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\|<\delta$ **时，**$\boldsymbol{x}'$**必属于** H^* **中某个开集** $U\left(\boldsymbol{x}_i;\frac{\delta_i}{2}\right)$，**则** $\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_i\|<\frac{\delta_i}{2}$，**且有**

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}_i\|&=\|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'-(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}')\|\leqslant\|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'\|+\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}'\|\\&<\delta+\frac{\delta_i}{2}\leqslant\frac{\delta_i}{2}+\frac{\delta_i}{2}=\delta_i.\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|&\leqslant\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)\|+\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)\|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$**在** D **上一致连续.**

(2) **结论正确.**

设 $\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ **在** D **上一致连续，则对**$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，**对**$\forall\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D$，**当** $\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\|<\delta$ **时，有**

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|<\varepsilon.$$

从而
$$|f_i(\boldsymbol{x}')-f_i(\boldsymbol{x}'')|\leqslant\left[\sum_{i=1}^{m}(f_i(\boldsymbol{x}')-f_i(\boldsymbol{x}''))^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|<\varepsilon,\quad i=1,2,\cdots,m$$

这表明$f_i(i=1,2,\cdots,m)$在D上一致连续.

反之,若坐标函数$f_i(i=1,2,\cdots,m)$在D上一致连续,则对$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta_i>0$,对$\forall\ \boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D$,当$\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\|<\delta_i$时,有

$$|f_i(\boldsymbol{x}')-f_i(\boldsymbol{x}'')|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},\quad i=1,2,\cdots,m.$$

取$\delta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{\delta_i\}>0$,则对$\forall\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D$,当$\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\|<\delta$时,有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|&=\left[\sum_{i=1}^{m}(f_i(\boldsymbol{x}')-f_i(\boldsymbol{x}''))^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&<\left(m\cdot\frac{\varepsilon^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这表明$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$D$上一致连续.

8. 设$\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$为连续函数,$A\subset\mathbf{R}^n$为任意开集,$B\subset\mathbf{R}^n$为任意闭集. 试问$\boldsymbol{f}(A)$是否必为开集? $\boldsymbol{f}(B)$是否必为闭集?

解　不一定. 反例

(1) 对于连续函数$f(x)=|x|$,$x\in A=(-1,1)$为开集,但$f(A)=[0,1)$不是开集.

(2) 对于连续函数$f(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0,\end{cases}$ $B=[0,+\infty)$为闭集,但$f(B)=(0,1]$不是闭集.

§2　向量函数的微分

1. 证明定理23.12.

证　定理23.12　设$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:D\to\mathbf{R}^m$是两个在$\boldsymbol{x}_0\in D$可微的函数,$c$是任意实数. 则$c\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$在$\boldsymbol{x}_0$也可微,且有

$$(c\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}_0)=c\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0),\quad (\boldsymbol{f}\pm\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\pm\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0).$$

证明过程如下.

(1) 因为$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处可微,故根据可微的定义,有

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}=0,$$

所以
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{c\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-c\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-c\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}=0,$$
即
$$(c\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}_0)=c\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0).$$

(2) 又 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微,故同样有
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}=0,$$
所以
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{(\boldsymbol{f}\pm\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{f}\pm\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}_0)-(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\pm\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}$$
$$=\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\pm\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}$$
$$=0,$$
即
$$(\boldsymbol{f}\pm\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\pm\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0).$$

2. 求下列函数的导数:

(1) $\boldsymbol{f}(x_1,x_2)=(x_1\sin x_2,(x_1-x_2)^2,2x_2^2)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{f}'(x_1,x_2)$ 和 $\boldsymbol{f}'\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(2) $\boldsymbol{f}(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+x_2,x_2\mathrm{e}^{x_1+x_3})^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{f}'(x_1,x_2,x_3)$ 和 $\boldsymbol{f}'(1,0,1)$.

解 (1)
$$\boldsymbol{f}'(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\\[2mm] \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin x_2 & x_1\cos x_2\\ 2(x_1-x_2) & -2(x_1-x_2)\\ 0 & 4x_2\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{f}'\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{bmatrix}\sin\dfrac{\pi}{2} & 0\\[2mm] -2\cdot\dfrac{\pi}{2} & 2\cdot\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] 0 & 4\cdot\dfrac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\pi & \pi\\ 0 & 2\pi\end{bmatrix}.$$

(2)
$$\boldsymbol{f}'(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2x_1 & 1 & 0\\ x_2\mathrm{e}^{x_1+x_3} & \mathrm{e}^{x_1+x_3} & x_2\mathrm{e}^{x_1+x_3}\end{bmatrix},$$

$$f'(1,0,1)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^2 & 0\end{bmatrix}.$$

3. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集，$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:D\to\mathbf{R}^m$ 均为可微函数. 证明：$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}$ 也是可微函数，而且

$$(\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}'+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'.$$

证　对 $\forall \boldsymbol{x}_0\in D$，因为 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，所以

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}=0,$$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}=0.$$

又由 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，知 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，从而 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近有界，即 $\exists M>0$，使

$$\|\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\|\leqslant M,\quad \boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0).$$

所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\left[(\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}_0)-(\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}'+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}')(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\right]\\
=&\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\left[\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\right.\\
&\left.-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\right]\\
=&\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\left[\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))+(\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\right.\\
&\left.-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(x_0)f'(x_0)(x-x_0)\right]\\
=&\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\left[\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))\right.\\
&-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\\
&\left.-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\right]\\
=&\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\\
&+\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0)\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\\
&+\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}[\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0)]\frac{\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\\
=&0.
\end{aligned}$$

这表明，$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，且 $(\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0)=(\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}'+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}')(\boldsymbol{x}_0)$. 由 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性，

知 $f^{\mathrm{T}}g$ 在 D 上可微,且

$$(\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}'+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'.$$

4. 设函数 $f,\boldsymbol{g},\boldsymbol{h},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}$ 的定义如下:

$$f(x_1,x_2)=x_1-x_2,$$

$$\boldsymbol{g}(x)=(\sin x,\cos x)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{h}(x_1,x_2)=(x_1x_2,x_2-x_1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{s}(x_1,x_2)=(x_1^2,2x_2,x_2+4)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{t}(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2x_3,x_1+x_2+x_3)^{\mathrm{T}}.$$

试用链式法则求下列复合函数的导数:

(1) $(f\circ\boldsymbol{g})'$;　　(2) $(\boldsymbol{g}\circ f)'$;　　(3) $(\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{h})'$;

(4) $(\boldsymbol{s}\circ\boldsymbol{h})'$;　　(5) $(\boldsymbol{t}\circ\boldsymbol{s})'$;　　(6) $(\boldsymbol{s}\circ\boldsymbol{t})'$.

解　(1) 令 $x_1=\sin x,x_2=\cos x$,则

$$(f\circ\boldsymbol{g})'(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x}\end{bmatrix}=(1,-1)\begin{bmatrix}\cos x\\-\sin x\end{bmatrix}=\cos x+\sin x.$$

(2) 令 $x=x_1-x_2$,则

$$(\boldsymbol{g}\circ f)'(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_1}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_2}{\partial x}\end{bmatrix}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1},\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)=\begin{bmatrix}\cos x\\-\sin x\end{bmatrix}(1,-1)$$

$$=\begin{bmatrix}\cos x & -\cos x\\-\sin x & \sin x\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(x_1-x_2) & -\cos(x_1-x_2)\\-\sin(x_1-x_2) & \sin(x_1-x_2)\end{bmatrix}.$$

(3) 令

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})=(y_1y_2,y_2-y_1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(x_1,x_2)=(x_1x_2,x_2-x_1)^{\mathrm{T}},$$

则 $$(\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{h})'(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_2}\\[2ex]\dfrac{\partial u_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\\[2ex]\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_2 & y_1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2 & x_1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_2y_2-y_1 & x_1y_2+y_1 \\ -x_2-1 & -x_1+1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_2(x_2-x_1)-x_1x_2 & x_1(x_2-x_1)+x_1x_2 \\ -x_2-1 & -x_1+1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_2^2-2x_1x_2 & 2x_1x_2-x_1^2 \\ -x_2-1 & -x_1+1 \end{bmatrix}.$$

（4）**令**
$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{y})=(y_1^2,2y_2,y_2+4)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(x_1,x_2)=(x_1x_2,x_2-x_1)^{\mathrm{T}},$$

则
$$(\boldsymbol{s}\circ\boldsymbol{h})'(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial y_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2y_1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2x_2y_1 & 2x_1y_1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x_2(x_1x_2) & 2x_1(x_1x_2) \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2x_1x_2^2 & 2x_1^2x_2 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

（5）**令**
$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{y})=(y_1y_2y_3,y_1+y_2+y_3)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{s}(x_1,x_2)=(x_1^2,2x_2,x_2+4)^{\mathrm{T}},$$

则
$$(\boldsymbol{t}\circ\boldsymbol{s})'(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} y_2y_3 & y_1y_3 & y_1y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2x_1y_2y_3 & 2y_1y_3+y_1y_2\\ 2x_1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2x_1 2x_2(x_2+4) & 2x_1^2(x_2+4)+x_1^2(2x_2)\\ 2x_1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4x_1x_2^2+16x_1x_2 & 8x_1^2+4x_1^2x_2\\ 2x_1 & 3\end{bmatrix}.$$

(6) **令** $$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{y})=(y_1^2,2y_2,y_2+4)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{t}(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2x_3,x_1+x_2+x_3)^{\mathrm{T}},$$

则 $$(\boldsymbol{s}\circ\boldsymbol{t})'(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial y_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2y_1 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2x_2x_3y_1 & 2x_1x_3y_1 & 2x_1x_2y_1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2x_1x_2^2x_3^2 & 2x_1^2x_2x_3^2 & 2x_1^2x_2^2x_3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

5. 设 $u=f(x,y),v=g(x,y,u),w=h(x,u,v)$**,应用链式法则计算** $w'(x,y)$.

解　把 w **看作以下三个变换的复合**

$$(x,y)^{\mathrm{T}}\mapsto(x,y,u)^{\mathrm{T}}\mapsto(x,y,u,v)^{\mathrm{T}}\mapsto w,$$

即 $$\begin{bmatrix}x\\ y\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ f(x,y)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x\\ y\\ u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ f(x,y)\\ g(x,y,u)\end{bmatrix},\quad w=h(x,u,v),$$

则 $w'(x,y)=\left(\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial w}{\partial y},\dfrac{\partial w}{\partial u},\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial y} & \dfrac{\partial x}{\partial u}\\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial u}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial u}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial y}\\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix}$

$$=\left(\frac{\partial h}{\partial x},0,\frac{\partial h}{\partial u},\frac{\partial h}{\partial v}\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial u}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u}\right),\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right).$$

6. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开域，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 为可微函数. 利用定理 23.14 证明：

(1) 若在 D 上 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 恒为 $\mathbf{0}$ 矩阵（零矩阵），则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为常向量函数；

(2) 若在 D 上 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{c}$（常数阵），则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}\in D$，$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$.

证　(1) 任取 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in D$，因为 D 为开域，所以存在 D 中的有限折线段 L 将 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 连接起来. 对 L 上任一点 $\boldsymbol{x}$，因为 $\boldsymbol{x}\in D$，所以 $\exists\delta_{\boldsymbol{x}}>0$，使 $U(\boldsymbol{x};\delta_{\boldsymbol{x}})\subset D$，所有这些邻域覆盖了 L. 故存在 L 上从点 $\boldsymbol{x}_1$ 到点 $\boldsymbol{x}_2$ 的 r 个点 $\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\cdots,\boldsymbol{t}_r$ 使

$$L\subset\bigcup_{i=1}^{r}U(\boldsymbol{t}_i;\delta_{t_i}),\quad \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{t}_r,$$

且
$$U(\boldsymbol{t}_i;\delta_{t_i})\cap U(\boldsymbol{t}_{i+1};\delta_{t_{i+1}})\neq\varnothing,\quad i=1,2,\cdots,r-1.$$

现取
$$\boldsymbol{y}_1\in U(\boldsymbol{t}_1;\delta_{t_1})\cap U(\boldsymbol{t}_2;\delta_{t_2}).$$

因为
$$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{t}_1\in U(\boldsymbol{t}_1;\delta_{t_1}),$$

故根据定理 23.14 知，

$$\exists\ \boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{t}_1+\theta_1(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{t}_1),\quad 0<\theta_1<1,$$

使
$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_1)\|\leqslant\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi}_1)\|\ \|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{t}_1\|.$$

因 $\boldsymbol{\xi}_1\in D$，故由已知条件 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi}_1)=\mathbf{0}$ 知，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_1).$$

类似有
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_2),$$

于是
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_2).$$
用同样的方法可得
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_2)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_3)=\cdots=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_r),$$
即
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2).$$
由 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的任意性知 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为常向量函数.

（2）由定义可知 $(\boldsymbol{c}\boldsymbol{x})'=\boldsymbol{c}$，故
$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{c}\boldsymbol{x})'=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{c}\equiv\boldsymbol{0}.$$
则由（1）知，$\exists\ \boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$，使
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},$$
即
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}.$$

7. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为可微函数，试求分别满足以下条件的函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$：

（1）$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{I}$（单位阵）；

（2）$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\operatorname{diag}(\varphi_i(x_i))$，即以 $\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2),\cdots,\varphi_n(x_n)$ 为主对角线元的对角阵，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

解　（1）因为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{I}$，所以由本节习题 6(2) 有
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}.$$

（2）令　$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\left(\int\varphi_1(x_1)\mathrm{d}x_1,\int\varphi_2(x_2)\mathrm{d}x_2,\cdots,\int\varphi_n(x_n)\mathrm{d}x_n\right)^{\mathrm{T}}$，

因为
$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})&=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\varphi_1(x_1)&0&\cdots&0\\0&\varphi_2(x_2)&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\varphi_n(x_n)\end{bmatrix}\\&=\operatorname{diag}(\varphi_i(x_i))-\operatorname{diag}(\varphi_i(x_i))=\boldsymbol{0},\end{aligned}$$
故由本节习题 6(1) 知
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}\quad\text{（常向量）},$$

即
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\left(\int\varphi_1(x_1)\mathrm{d}x_1,\int\varphi_2(x_2)\mathrm{d}x_2,\cdots,\int\varphi_n(x_n)\mathrm{d}x_n\right)^{\mathrm{T}}.$$

8. 求下列函数 f 的黑赛矩阵,并根据例 4 的结果判断该函数的极值点:

(1) $f(\boldsymbol{x})=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+x_3^2-x_2x_3+x_1+3x_2-x_3$;

(2) $f(\boldsymbol{x})=-x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2+4x_3^2-6x_2x_3+6x_1x_3$.

解　(1) 因为
$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$
其中,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&4&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{b}=(1,3,-1)$,　$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$.

故由例 4 的结果知 f 的黑赛矩阵
$$f''(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&4&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}.$$
f 的稳定点
$$\boldsymbol{x}_0=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\frac{7}{2}&2&1\\2&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{17}{6}\\-\frac{7}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$
又
$$A_{11}=2>0,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2&-2\\-2&4\end{vmatrix}=4>0,$$
$$A_{33}=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&-2&0\\-2&4&-1\\0&-1&2\end{vmatrix}=6>0,$$
所以黑赛矩阵 A 是正定的,故 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的极小值点.

(2) 因为
$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$
其中,
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&4&6\\4&-4&-6\\6&-6&8\end{bmatrix}.$$
由例 4 的结果知 f 的黑赛矩阵

$$f''(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 6\\ 4 & -4 & -6\\ 6 & -6 & 8\end{bmatrix}.$$

f 的稳定点 $x_0=-A^{-1}b=-\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{13}{34} & -\frac{3}{34}\\ 0 & -\frac{3}{34} & \frac{1}{17}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$

又 $$A_{11}=-2<0,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 4 & -4\end{vmatrix}=-8<0,$$

所以黑赛矩阵为不定的,故 x_0 不是极值点.

9. 设 $f,\boldsymbol{g},\boldsymbol{h},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}$ 为第 4 题中的五个函数.

(1) 试问:除第 4 题 6 个小题中的两个函数的复合外,还有哪些两个函数可以进行复合,并求这些复合函数的导数;

(2) 求下列复合函数的导数:

i) $(\boldsymbol{g}\circ f\circ\boldsymbol{h})'$;　　ii) $(\boldsymbol{s}\circ\boldsymbol{t}\circ\boldsymbol{s})'$.

解 (1) 因为

$$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R},\ \boldsymbol{g}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2,\ \boldsymbol{h}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3,\ \boldsymbol{s}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3,\ \boldsymbol{t}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2,$$

所以两个函数可以进行复合的共有 11 个,除去第 4 题中 6 个复合函数外,还有下列 5 个复合函数:

$$(\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{g}),\quad(\boldsymbol{s}\circ\boldsymbol{g}),\quad(f\circ\boldsymbol{h}),\quad(\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{t}),\quad(f\circ\boldsymbol{t}).$$

令 $$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})=(y_1y_2,y_2-y_1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(\sin x,\cos x)^{\mathrm{T}},$$

则 $$(\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{g})'(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2}{\partial y_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_2 & y_1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}y_2\cos x-y_1\sin x\\ -\cos x-\sin x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2x-\sin^2x\\ -(\cos x+\sin x)\end{bmatrix}.$$

令 $$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{y})=(y_1^2,2y_2,y_2+4)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(\sin x,\cos x)^{\mathrm{T}},$$

则
$$(\boldsymbol{s}\circ\boldsymbol{g})'(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial y_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y_1 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2\sin x\cos x\\ -2\sin x\\ -\sin x\end{bmatrix}.$$

令
$$\boldsymbol{u}=f(\boldsymbol{y})=y_1-y_2,$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(x_1,x_2)=(x_1x_2,x_2-x_1)^{\mathrm{T}},$$

则
$$(f\circ\boldsymbol{h})'(x_1x_2)=\left(\frac{\partial u}{\partial y_1},\frac{\partial u}{\partial y_2}\right)\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=(1,-1)\begin{bmatrix}x_2 & x_1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$
$$=(x_2+1,x_1-1).$$

令
$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})=(y_1y_2,y_2-y_1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{t}(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2x_3,x_1+x_2+x_3)^{\mathrm{T}},$$

则 $(\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{t})'(x_1,x_2,x_3)$
$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_2 & y_1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2x_1x_2x_3+x_2^2x_3+x_2x_3^2 & 2x_1x_2x_3+x_1^2x_3+x_1x_3^2 & 2x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_1x_2^2\\ 1-x_2x_3 & 1-x_1x_3 & 1-x_1x_2\end{bmatrix}.$$

令
$$\boldsymbol{u}=f(\boldsymbol{y})=y_1-y_2,$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{t}(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2x_3,x_1+x_2+x_3)^{\mathrm{T}},$$

则
$$(f\circ\boldsymbol{t})'(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{\partial u}{\partial y_1},\frac{\partial u}{\partial y_2}\right)\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$
$$=(1,-1)\begin{bmatrix}x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=(x_2x_3-1,x_1x_3-1,x_1x_2-1).$$

(2) i) 令
$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})=(\sin v,\cos v)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{v}=f(\boldsymbol{y})=y_1-y_2,$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(x_1,x_2)=(x_1x_2,x_2-x_1)^{\mathrm{T}},$$

则
$$(\boldsymbol{g}\circ f\circ\boldsymbol{h})'(x_1,x_2)$$
$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}v}\\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}v}\end{bmatrix}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1},\frac{\partial v}{\partial y_2}\right)\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}&\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}&\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos v\\ -\sin v\end{bmatrix}(1,-1)\begin{bmatrix}x_2&x_1\\ -1&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}(x_2+1)\cos v&(x_1-1)\cos v\\ -(x_2+1)\sin v&-(x_1-1)\sin v\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}(x_2+1)\cos(x_1x_2-(x_2-x_1))&(x_1-1)\cos(x_1x_2-(x_2-x_1))\\ -(x_2+1)\sin(x_1x_2-(x_2-x_1))&-(x_1-1)\sin(x_1x_2-(x_2-x_1))\end{bmatrix}.$$

ii) 令
$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{v})=(v_1^2,2v_2,v_2+4)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{y})=(y_1y_2y_3,y_1+y_2+y_3)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{s}(x_1,x_2)=(x_1^2,2x_2,x_2+4)^{\mathrm{T}},$$

则
$$(\boldsymbol{s}\circ\boldsymbol{t}\circ\boldsymbol{s})'(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial v_1}&\dfrac{\partial u_1}{\partial v_2}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial v_1}&\dfrac{\partial u_2}{\partial v_2}\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial v_1}&\dfrac{\partial u_3}{\partial v_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial v_1}{\partial y_1}&\dfrac{\partial v_1}{\partial y_2}&\dfrac{\partial v_1}{\partial y_3}\\ \dfrac{\partial v_2}{\partial y_1}&\dfrac{\partial v_2}{\partial y_2}&\dfrac{\partial v_2}{\partial y_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}&\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}&\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1}&\dfrac{\partial y_3}{\partial x_2}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2v_1&0\\0&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_2y_3&y_1y_3&y_1y_2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x_1&0\\0&2\\0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2v_1&0\\0&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x_1y_2y_3&2y_1y_3+y_1y_2\\2x_1&3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4x_1y_2y_3v_1&(4y_1y_3+2y_1y_2)v_1\\4x_1&6\\2x_1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4x_1y_2y_3(y_1y_2y_3) & (4y_1y_3+2y_1y_2)(y_1y_2y_3)\\ 4x_1 & 6\\ 2x_1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}16x_1^3x_2^2(x_2+4)^2 & 16x_1^4x_2(x_2+2)(x_2+4)\\ 4x_1 & 6\\ 2x_1 & 3\end{bmatrix}.$$

10. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集，$f:D\to\mathbf{R}^m$ 在 $x_0\in D$ 可微. 试证明：

(1) 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0;\delta)$ 时，有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|\leqslant(\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\|+\varepsilon)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|;$$

(2) 存在 $\delta>0$，$K>0$，当 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0;\delta)$ 时，有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|\leqslant K\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|.$$

(这称为在可微点邻域内满足局部利普希兹条件.)

证　(1) 因为 f 在 $x_0\in D$ 处可微，依定义，$\exists\ \eta:D\to\mathbf{R}^m$，使

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|,$$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\|=0.$$

由于 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\|=0$，所以对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0;\delta)$ 时，有

$$\|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\|<\varepsilon.$$

故当 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0;\delta)$ 时，有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|&\leqslant\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\|\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|+\|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\|\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\\&<(\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\|+\varepsilon)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|.\end{aligned}$$

(2) 在(1)中取 $\varepsilon=1$，则

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|\leqslant K\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|,\quad \boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0;\delta),$$

其中，
$$K=1+\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\|.$$

11. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是凸开集，$g:D\to\mathbf{R}^n$ 是可微函数，且满足：对任何 $x\in D$ 和任何非零的 $h\in\mathbf{R}^n$，恒有

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}>0.$$

试证明 g 在 D 上是一一映射.

证　反证法：假设 $\exists\ \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in D$，且 $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$ 使 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2)$. 作辅助向量函数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1).$$

由于 D 是凸开集,g 是可微函数,所以 f 也为可微函数,并由本节习题 3,有

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}),$$

则根据中值定理知,$\exists\ \xi\in D$,使得

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{f}'(\xi)(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1).$$

于是有 $\quad 0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{f}'(\xi)(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)=(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}'(\xi)(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)>0$,

产生矛盾,故假设不对,即 g 在 D 上是一一映射.

12. 设 $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 二阶可导,且有稳定点;$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,且 $f(\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})$,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$.

(1) 试求 f 的所有稳定点;

(2) 证明 f 的所有稳定点都是退化的,即在这些稳定点处,$f''(\boldsymbol{x})$ 是退化矩阵(即在稳定点处 $\det f''(\boldsymbol{x})=0$).

证 (1) 因为

$$f'(\boldsymbol{x})=(\varphi(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}))'=\varphi'(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})'=\varphi'(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}.$$

令
$$f'(\boldsymbol{x})=\mathbf{0},$$
则
$$\varphi'(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})=0.$$

设 φ 的稳定点的全体为 D,所以 f 的所有稳定点的全体为

$$\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}\in D\}.$$

(2) 设 $n\geqslant 2$,$\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的一个稳定点,因为

$$f''(\boldsymbol{x})=(\varphi'(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})'=(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\varphi'(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}))'=\boldsymbol{a}\varphi''(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}=\varphi''(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}.$$

所以 $\quad \det f''(\boldsymbol{x}_0)=\det(\varphi''(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})=\varphi''(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0)\det(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})=0.$

即 $f''(\boldsymbol{x}_0)$ 为退化矩阵($n=1$ 时结论不一定成立).

§3 反函数定理和隐函数定理

1. 设方程组

$$\begin{cases}3x+y-z+u^2=0,\\ x-y+2z+u=0,\\ 2x+2y-3z+2u=0.\end{cases}$$

证明:除了不能把 x,y,z 用 u 惟一表出外,其他任何三个变量都能用第四个

变量惟一表出.

证　令
$$F=\begin{bmatrix}3x+y-z+u^2\\ x-y+2z+u\\ 2x+2y-3z+2u\end{bmatrix},$$

则 F 在 $\mathbf{R}^4$ 上可微，且 F' 连续．方程 $F=\mathbf{0}$ 中任何三个变量能否用第四个变量惟一表出，主要是看是否满足定理23.18中的条件(iii).

(1) 记 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$，因为
$$F'_{\boldsymbol{v}}=\begin{bmatrix}3&1&-1\\ 1&-1&2\\ 2&2&-3\end{bmatrix},\quad \det F'_{\boldsymbol{v}}=\begin{vmatrix}3&1&-1\\ 1&-1&2\\ 2&2&-3\end{vmatrix}=0.$$

所以 x,y,z 不能用 u 惟一表出.

(2) 记 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ u\end{bmatrix}$，因为
$$F'_{\boldsymbol{v}}=\begin{bmatrix}3&1&2u\\ 1&-1&1\\ 2&2&2\end{bmatrix},\quad \det F'_{\boldsymbol{v}}=\begin{vmatrix}3&1&2u\\ 1&-1&1\\ 2&2&2\end{vmatrix}=12-8u.$$

所以当 $u\neq\dfrac{3}{2}$ 时，$\det F'_{\boldsymbol{v}}\neq 0$，故 x,y,u 能用 z 惟一表出.

(3) 记 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\ z\\ u\end{bmatrix}$，因为
$$F'_{\boldsymbol{v}}=\begin{bmatrix}3&-1&2u\\ 1&2&1\\ 2&-3&2\end{bmatrix},\quad \det F'_{\boldsymbol{v}}=\begin{vmatrix}3&-1&2u\\ 1&2&1\\ 2&-3&2\end{vmatrix}=21-14u.$$

所以当 $u\neq\dfrac{3}{2}$ 时，$\det F'_{\boldsymbol{v}}\neq 0$，故 x,z,u 能用 y 惟一表出.

(4) 记 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}y\\ z\\ u\end{bmatrix}$，因为

$$\boldsymbol{F}'_v=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2u\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 2\end{bmatrix},\quad \det\boldsymbol{F}'_v=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2u\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 2\end{vmatrix}=3-2u.$$

所以当$u\neq\frac{3}{2}$时,$\det\boldsymbol{F}'_v\neq 0$,故$y,z,u$能用$x$惟一表出.

2. 应用隐函数求导公式(18)(见原教材,$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=-[\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]^{-1}\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in W$),求由方程组

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=v$$

所确定的隐函数(其中之一)$z=z(x,y)$的所有二阶偏导数.

解　令
$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}x-u\cos v\\ y-u\sin v\\ z-v\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}u\\ v\\ y\end{bmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{0}$$

确定隐函数$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. 由公式(18),有

$$\boldsymbol{w}'_x=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=-[\boldsymbol{F}'_w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})]^{-1}\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})=-\begin{bmatrix}-\cos v & u\sin v & 0\\ -\sin v & -u\cos v & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{u}\begin{bmatrix}-u\cos v & -u\sin v & 0\\ \sin v & -\cos v & 0\\ \sin v & -\cos v & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos v & \sin v\\ -\frac{1}{u}\sin v & \frac{1}{u}\cos v\\ -\frac{1}{u}\sin v & \frac{1}{u}\cos v\end{bmatrix}.$$

又因为
$$\boldsymbol{w}'_x=\begin{bmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\\ z_x & z_y\end{bmatrix},$$

所以
$$\boldsymbol{z}'_x=\begin{bmatrix}z_x\\ z_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{u}\sin v\\ \frac{1}{u}\cos v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{y}{x^2+y^2}\\ \frac{x}{x^2+y^2}\end{bmatrix},$$

故
$$\boldsymbol{z}''_x=\begin{bmatrix}z_{xx} & z_{xy}\\ z_{yx} & z_{yy}\end{bmatrix}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{bmatrix}2xy & y^2-x^2\\ y^2-x^2 & -2xy\end{bmatrix}.$$

3. 设方程组

$$\begin{cases} u=f(x-uv,y-uv,z-uv), \\ g(x,y,z)=0, \end{cases}$$

试问:(1) 在什么条件下,能确定以 x,y,v 为自变量,u,z 为因变量的隐函数组?

(2) 能否确定以 x,y,z 为自变量,u,v 为因变量的隐函数组?

(3) 计算 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial v}$.

解 (1) 令 $\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} u-f \\ g \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ v \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix}$,

则
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{0}.$$

因为
$$\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{w}}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+vf'_1+vf'_2+vf'_3 & -f'_3 \\ 0 & g'_3 \end{bmatrix},$$

$$\det\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{w}}=g'_3[1+v(f'_1+f'_2+f'_3)].$$

所以根据定理23.18知,当 f,g 可微,偏导数连续,且

$$g'_3[1+v(f'_1+f'_2+f'_3)]\neq 0$$

时能确定以 x,y,v 为自变量,u,z 为因变量的隐函数组.

(2) 令
$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{0}.$$

因为
$$\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{w}}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+v(f'_1+f'_2+f'_3) & u(f'_1+f'_2+f'_3) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{w}}=0.$$

所以方程组 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{0}$ 不能确定以 x,y,z 为自变量,u,v 为因变量的隐函数组.

(3) 由(1)知当 f,g 具有一阶连续偏导数,且

$$\Delta=g'_3[1+v(f'_1+f'_2+f'_3)]\neq 0$$

时能确定u,z为x,y,v的隐函数组,并由公式(18)有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w_x}&=\begin{bmatrix}u_x & u_y & u_v\\ z_x & z_y & z_v\end{bmatrix}=-[\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})]^{-1}\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\\ &=-\begin{bmatrix}1+v(f'_1+f'_2+f'_3) & -f'_3\\ 0 & g'_3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-f'_1 & -f'_2 & u(f'_1+f'_2+f'_3)\\ g'_1 & g'_2 & 0\end{bmatrix}\\ &=-\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}g'_3 & f'_3\\ 0 & 1+v(f'_1+f'_2+f'_3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-f'_1 & -f'_2 & u(f'_1+f'_2+f'_3)\\ g'_1 & g'_2 & 0\end{bmatrix}\\ &=-\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}-f'_1g'_3+f'_3g'_1 & -f'_2g'_3+f'_3g'_2 & g'_3u(f'_1+f'_2+f'_3)\\ g'_1[1+v(f'_1+f'_2+f'_3)] & g'_2[1+v(f'_1+f'_2+f'_3)] & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

故有
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\Delta}(f'_1g'_3-f'_3g'_1),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\Delta}(f'_2g'_3-f'_3g'_2),$$
$$\frac{\partial u}{\partial v}=-\frac{1}{\Delta}g'_3u(f'_1+f'_2+f'_3).$$

4. 设
$$\boldsymbol{f}(x,y)=[\mathrm{e}^x\cos y,\mathrm{e}^x\sin y]^{\mathrm{T}}.$$

(1) 证明:当$(x,y)\in\mathbf{R}^2$时,$\det\boldsymbol{f}'(x,y)\neq0$,但在$\mathbf{R}^2$上$\boldsymbol{f}$不是一一映射.

(2) 证明:$\boldsymbol{f}$在$D=\{(x,y)\mid 0<y<2\pi\}$上是一一映射,并求$(\boldsymbol{f}^{-1})'(0,\mathrm{e})$.

证 (1) 因为
$$\boldsymbol{f}'(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^x\cos y & -\mathrm{e}^x\sin y\\ \mathrm{e}^x\sin y & \mathrm{e}^x\cos y\end{bmatrix},$$

所以
$$\det\boldsymbol{f}'(x,y)=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^x\cos y & -\mathrm{e}^x\sin y\\ \mathrm{e}^x\sin y & \mathrm{e}^x\cos y\end{vmatrix}=\mathrm{e}^{2x}\neq0.$$

由于$\boldsymbol{f}(0,0)=(0,2\pi)=(1,0)^{\mathrm{T}}$,故在$\mathbf{R}^2$上$\boldsymbol{f}$不是一一映射.

(2) 对于$(x_1,y_1)^{\mathrm{T}},(x_2,y_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2$,$\boldsymbol{f}(x_1,y_1)=\boldsymbol{f}(x_2,y_2)$,当且仅当
$$\mathrm{e}^{x_1}\cos y_1=\mathrm{e}^{x_2}\cos y_2,\quad \mathrm{e}^{x_1}\sin y_1=\mathrm{e}^{x_2}\sin y_2,$$
即$x_1=x_2$且
$$\cos y_1=\cos y_2,\quad \sin y_1=\sin y_2.$$
故$\boldsymbol{f}(x_1,y_1)=\boldsymbol{f}(x_2,y_2)$,当且仅当$x_1=x_2$,且
$$y_1-y_2=2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$
因此$\boldsymbol{f}$在D上是一一映射.

由
$$\begin{cases}e^x\cos y=0,\\ e^x\sin y=e,\end{cases}$$
有 $(x_0,y_0)=\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以根据定理 23.17 有
$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(0,e)=\left(\boldsymbol{f}'\left(1,\frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -e\\ e & 0\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{e}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

5. 利用反函数的导数公式，计算下列函数反函数的偏导数：$\dfrac{\partial x}{\partial u},\dfrac{\partial x}{\partial v},\dfrac{\partial y}{\partial u},\dfrac{\partial y}{\partial v}$.

(1) $(u,v)^{\mathrm{T}}=\left(x\cos\dfrac{y}{x},x\sin\dfrac{y}{x}\right)^{\mathrm{T}}$；

(2) $(u,v)^{\mathrm{T}}=(e^x+x\sin y,e^x-x\cos y)^{\mathrm{T}}$.

解　(1) 记
$$\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\dfrac{y}{x}\\[2mm] x\sin\dfrac{y}{x}\end{bmatrix},$$
因为
$$\boldsymbol{f}'(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\sin\dfrac{y}{x} & -\sin\dfrac{y}{x}\\[2mm] \sin\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x} & \cos\dfrac{y}{x}\end{bmatrix},$$
所以，根据定理 23.17，有
$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(u,v)=[\boldsymbol{f}'(x,y)]^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\sin\dfrac{y}{x} & -\sin\dfrac{y}{x}\\[2mm] \sin\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x} & \cos\dfrac{y}{x}\end{bmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{y}{x} & \sin\dfrac{y}{x}\\[2mm] -\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x} & \cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\sin\dfrac{y}{x}\end{bmatrix}.$$
由 $u^2+v^2=x^2$ 得
$$x=\sqrt{u^2+v^2},\quad \cos\frac{y}{x}=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \sin\frac{y}{x}=\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \frac{y}{x}=\arctan\frac{u}{v};$$

又
$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(u,v)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix},$$

故
$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{f}'(x,y))^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}\dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\\ \dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\arctan\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} & \dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}+\dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\arctan\dfrac{v}{u}\end{bmatrix}.$$

(2) 记　$\boldsymbol{f}(x,y)=(u,v)^{\mathrm{T}}=(\mathrm{e}^x+x\sin y,\mathrm{e}^x-x\cos y)^{\mathrm{T}}.$

因为
$$\boldsymbol{f}'(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^x+\sin y & x\cos y\\ \mathrm{e}^x-\cos y & x\sin y\end{bmatrix},$$

所以
$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(u,v)=[\boldsymbol{f}'(x,y)]^{-1}$$
$$=\frac{1}{x\mathrm{e}^x(\sin y-\cos y)+x}\begin{bmatrix}x\sin y & -x\cos y\\ \cos y-\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x+\sin y\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}.$$

6. 设 $n>2$,$D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集,$\varphi,\psi:D\to\mathbf{R}$,$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^2$ 且
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=[\varphi(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{x}\in D.$$
证明:在满足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$ 的点 $\boldsymbol{x}_0$ 处,$\mathrm{rank}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)<2$. 但是由方程 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ 仍可能在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域内确定隐函数 $\boldsymbol{g}:E\to\mathbf{R}^2$,$E\subset\mathbf{R}^{n-2}$.

证　因为
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=[\varphi(\boldsymbol{x}_0),\varphi(\boldsymbol{x}_0)\psi(\boldsymbol{x}_0)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0},$$
所以
$$\varphi(\boldsymbol{x}_0)=0.$$
又
$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix}\varphi'_1 & \varphi'_2 & \cdots & \varphi'_n\\ \varphi'_1\psi+\varphi\psi'_1 & \varphi'_2\psi+\varphi\psi'_2 & \cdots & \varphi'_n\psi+\varphi\psi'_n\end{bmatrix}\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$$

$$=\begin{bmatrix}\varphi'_1 & \varphi'_2 & \cdots & \varphi'_n\\ \varphi'_1\psi & \varphi'_2\psi & \cdots & \varphi'_n\psi\end{bmatrix}\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0},$$

故
$$\operatorname{rank}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\leqslant 1<2.$$

由于$\psi(\boldsymbol{x}_0)$可能为零也可能不为零，故若$\psi(\boldsymbol{x}_0)=0$，则方程$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$可改写为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=[\varphi(\boldsymbol{x}),\psi(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}.$$

又因为D为开集，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$，如果$\varphi(\boldsymbol{x})$，$\psi(\boldsymbol{x})$可微，且有连续的偏导数，则记

$$\boldsymbol{u}=[x_i,x_j]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{y}=[x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_u]^{\mathrm{T}},$$

有
$$\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{u}}=\begin{bmatrix}\varphi'_i(\boldsymbol{x}_0) & \varphi'_j(\boldsymbol{x}_0)\\ \psi'_i(\boldsymbol{x}_0) & \psi'_j(\boldsymbol{x}_0)\end{bmatrix},$$

使
$$\det\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0)\neq 0,$$

故由定理23.18知，这时由$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=[\varphi(\boldsymbol{x}),\psi(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}=0$在$x_0$附近存在隐函数$\boldsymbol{g}$：$E\to\mathbf{R}^2$，$E\subset\mathbf{R}^{n-2}$.

7. 设$D\subset\mathbf{R}^n$是开集，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^n$，而且适合

i）$\boldsymbol{f}$在D上可微，且$\boldsymbol{f}'$连续；

ii）当$\boldsymbol{x}\in D$时，$\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\neq 0$，

则$\boldsymbol{f}(D)$是开集.

证　任取$\boldsymbol{y}_0\in\boldsymbol{f}(D)$，则$\exists\ \boldsymbol{x}_0\in D$使$\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$. 因为$D\subset\mathbf{R}^n$是开集，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^n$且满足$\boldsymbol{f}$在$D$上可微，$\boldsymbol{f}'$连续，对于$\boldsymbol{x}_0\in D$时，$\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\neq 0$，则由定理23.17知，$\exists\ U=U(\boldsymbol{x}_0)\subset D$，使开集$V=\boldsymbol{f}(U)$. 由于$\boldsymbol{y}_0\in V$，所以$\boldsymbol{y}_0$为内点，故$\boldsymbol{f}(D)$为开集.

8. 设$D,E\subset\mathbf{R}^n$都是开集，$\boldsymbol{f}:D\to E$与$\boldsymbol{f}^{-1}:E\to D$互为反函数. 证明：若$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}\in D$可微，$\boldsymbol{f}^{-1}$在$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in E$可微，则$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$与$(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{y})$为互逆矩阵.

证　因为$\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{f}^{-1}$互为反函数，所以满足

$$(\boldsymbol{f}^{-1}\circ\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}.$$

由复合函数的求导公式(15)(见原教材)，有

$$(\boldsymbol{f}^{-1}\circ\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{y})\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x})'=I,$$

故$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$与$(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{y})$为互逆矩阵.

9. 对n次多项式进行因式分解

$$P_n(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n).$$

从某种意义上说，这也是一个反函数问题. 因为多项式的每个系数都是它的n个根的已知函数，即

$$a_i=a_i(r_1,r_2,\cdots,r_n),\quad i=0,1,\cdots,n-1. \tag{①}$$

而我们感兴趣的是要求得到用系数表示的根，即

$$r_j=r_j(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}),\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{②}$$

试对$n=2$与$n=3$两种情况，证明：当方程$P_n(x)=0$无重根时，函数组①存在反函数组②.

证　(1) 当$n=2$时，由韦达定理(根与系数的关系)有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(r_1,r_2)=\begin{bmatrix} r_1r_2 \\ -r_1-r_2 \end{bmatrix},$$

因为$P_2(x)=0$无重根，

$$\det\boldsymbol{a}'(r_1,r_2)=\begin{vmatrix} r_2 & r_1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=r_1-r_2\neq 0,$$

所以由定理23.17知函数组①存在反函数组②.

(2) 当$n=3$时，由于

$$\begin{aligned} P_3(x)&=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) \\ &=x^3-(r_1+r_2+r_3)x^2+(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)x-r_1r_2r_3, \end{aligned}$$

所以
$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(r_1,r_2,r_3)=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -r_1r_2r_3 \\ r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3 \\ -(r_1+r_2+r_3) \end{bmatrix},$$

又
$$\begin{aligned} \det\boldsymbol{a}'(r_1,r_2,r_3)&=\begin{vmatrix} -r_2r_3 & -r_1r_3 & -r_1r_2 \\ r_2+r_3 & r_1+r_3 & r_2+r_1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &=(r_1-r_2)(r_2-r_3)(r_3-r_1)\neq 0, \end{aligned}$$

所以由定理23.17知函数组①存在反函数组②.

§4　外积、微分形式与一般斯托克斯公式

1. 设

$$w_1=P_1\mathrm{d}x+Q_1\mathrm{d}y+R_1\mathrm{d}z,$$
$$w_2=P_2\mathrm{d}x+Q_2\mathrm{d}y+R_2\mathrm{d}z,$$

试求 $w_1\wedge w_2$.

解　由外积的定义,有

$$\begin{aligned}w_1\wedge w_2&=(P_1\mathrm{d}x+Q_1\mathrm{d}y+R_1\mathrm{d}z)\wedge(P_2\mathrm{d}x+Q_2\mathrm{d}y+R_2\mathrm{d}z)\\&=(P_1\mathrm{d}x)\wedge(P_2\mathrm{d}x)+(P_1\mathrm{d}x)\wedge(Q_2\mathrm{d}y)+(P_1\mathrm{d}x)\wedge(R_2\mathrm{d}z)\\&\quad+(Q_1\mathrm{d}y)\wedge(P_2\mathrm{d}x)+(Q_1\mathrm{d}y)\wedge(Q_2\mathrm{d}y)+(Q_1\mathrm{d}y)\wedge(R_2\mathrm{d}z)\\&\quad+(R_1\mathrm{d}z)\wedge(P_2\mathrm{d}x)+(R_1\mathrm{d}z)\wedge(Q_2\mathrm{d}y)+(R_1\mathrm{d}z)\wedge(R_2\mathrm{d}z)\\&=(P_1P_2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x+(Q_1Q_2)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y+(R_1R_2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z\\&\quad+(P_1Q_2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-(P_1R_2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-(Q_1P_2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&\quad+(Q_1R_2)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(R_1P_2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-(R_1Q_2)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\&=(P_1Q_2-Q_1P_2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(Q_1R_2-P_1Q_2)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\&\quad+(P_1R_2-R_1P_2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

2. 设

$$w_1=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$
$$w_2=A\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+B\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+C\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

试求 $w_1\wedge w_2$.

解　由外积的定义,有

$$\begin{aligned}w_1\wedge w_2&=(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z)\wedge(A\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+B\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+C\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\&=PA\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+PB\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+PC\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&\quad+QA\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+QB\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+QC\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&\quad+RA\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+RB\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+RC\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=PA\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+QB\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+RC\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=PA\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-QB\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y-RC\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\\&=(PA+QB+RC)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

3. 设 λ,μ,υ 是三个微分形式,证明

i) $\lambda\wedge(\mu\wedge\upsilon)=(\lambda\wedge\mu)\wedge\upsilon$;

ii) 当 μ 和 υ 是次数相同的微分形式时,证明

$$\lambda\wedge(\mu+\upsilon)=\lambda\wedge\mu+\lambda\wedge\upsilon.$$

证　i) 设 λ,μ,υ 分别为 n 维空间中 p、q、r 次微分形式,即

$$\lambda=\overset{p}{w}=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p},$$

$$\mu=\overset{q}{w}=\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_q} b_{j_1\cdots j_q}\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q},$$

$$\upsilon=\overset{r}{w}=\sum_{k_1<k_2<\cdots<k_r} c_{k_1\cdots k_r}\mathrm{d}x_{k_1}\wedge\mathrm{d}x_{k_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{k_r}.$$

因为
$$\begin{aligned}\lambda\wedge(\mu\wedge\upsilon)=&\Big(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\Big)\\&\wedge\Big[\Big(\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_q} b_{j_1\cdots j_q}\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\Big)\\&\wedge\Big(\sum_{k_1<k_2<\cdots<k_r} c_{k_1\cdots k_r}\mathrm{d}x_{k_1}\wedge\mathrm{d}x_{k_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{k_r}\Big)\Big]\\=&\Big(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\Big)\\&\wedge\Big(\sum_{\substack{j_1<j_2<\cdots<j_q\\k_1<k_2<\cdots<k_r}} b_{j_1\cdots j_q}c_{k_1\cdots k_r}\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\\&\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\wedge\mathrm{d}x_{k_1}\wedge\mathrm{d}x_{k_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{k_r}\Big)\\=&\sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_p\\j_1<j_2<\cdots<j_q\\k_1<k_2<\cdots<k_r}} a_{i_1\cdots i_p}b_{j_1\cdots j_q}c_{k_1\cdots k_r}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\\&\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\wedge\mathrm{d}x_{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{k_r}.\end{aligned}$$

同理
$$\begin{aligned}(\lambda\wedge\mu)\wedge\upsilon=&\sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_p\\j_1<j_2<\cdots<j_q\\k_1<k_2<\cdots<k_r}} a_{i_1\cdots i_p}b_{j_1\cdots j_q}c_{k_1\cdots k_r}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\\&\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\wedge\mathrm{d}x_{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{k_r}.\end{aligned}$$

所以
$$\lambda\wedge(\mu\wedge\upsilon)=(\lambda\wedge\mu)\wedge\upsilon.$$

ii）**设**
$$\lambda=\overset{p}{w}=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p},$$

$$\mu=\overset{q}{w}_1=\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_q} b_{j_1\cdots j_q}\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q},$$

$$\upsilon=\overset{q}{w}_2=\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_q} c_{j_1\cdots j_q}\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}.$$

因为
$$\mu+\upsilon=\overset{q}{w}_1+\overset{q}{w}_2=\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_q}(b_{j_1\cdots j_q}+c_{j_1\cdots j_q})\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q},$$

$$\lambda\wedge(\mu+\upsilon)=\Big(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\Big)$$
$$\wedge\Big(\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_q}(b_{j_1\cdots j_q}+c_{j_1\cdots j_q})\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\Big)$$
$$=\sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_p\\ j_1<j_2<\cdots<j_q}}a_{i_1\cdots i_p}(b_{j_1\cdots j_q}+c_{j_1\cdots j_q})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$$
$$=\sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_p\\ j_1<j_2<\cdots<j_q}}a_{i_1\cdots i_p}b_{j_1\cdots j_q}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$$
$$+\sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_p\\ j_1<j_2<\cdots<j_q}}a_{i_1\cdots i_p}c_{j_1\cdots j_q}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$$
$$=\lambda\wedge\mu+\lambda\wedge\upsilon.$$

所以
$$\lambda\wedge(\mu+\upsilon)=\lambda\wedge\mu+\lambda\wedge\upsilon.$$

4. 在 $\mathbf{R}^3$ 中，设 λ 是 p 次微分形式，μ 是 q 次微分形式，证明

i）$\lambda\wedge\mu=(-1)^{pq}\mu\wedge\lambda$；

ii）当 $p+q>3$ 时，便有 $\lambda\wedge\mu=0$.

证　i）不妨在 $\mathbf{R}^n$ 中进行证明．由线性性质知，只需对单项式

$$\lambda=\overset{p}{w}_1=\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p},\quad \mu=\overset{q}{w}_2=\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$$

加以证明即可.

因为

$$\lambda\wedge\mu=(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p})\wedge(\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q})$$
$$=(-1)^p\mathrm{d}x_{j_1}\wedge(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p})\wedge(\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\mathrm{d}x_{j_3}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q})$$
$$\vdots$$
$$=(-1)^{pq}(\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q})\wedge(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p})$$
$$=(-1)^{pq}\mu\wedge\lambda.$$

所以 $n=3$ 时，结论也成立.

ii）因为 $p+q>3$，所以 $\lambda\wedge\mu$ 中每一个外积都是三个以上基本一次微分的连乘积，故均为零．即当 $p+q>3$ 时，$\lambda\wedge\mu=0$.

5. 设曲面 S 由一般参量方程给出：

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \quad (u,v)\in D, \\ z=z(u,v), \end{cases}$$

那么,第一型曲面积分计算公式为

$$\iint_S \Phi(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D \Phi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中, $$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

试以外积为工具证明上述公式.

证 因为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\mathrm{d}S,\quad \mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\mathrm{d}S,\quad \mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\mathrm{d}S,$

其中,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 切平面的法向量的方向余弦,所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= \sqrt{(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}z\mathrm{d}x)^2} \\ &= \sqrt{(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x)^2} \\ &=\sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\right)^2+\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\right)^2} \\ &= \sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

故 $$\iint_S \Phi(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D \Phi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

6. (庞加莱引理)设 w 是三维空间中任一微分形式,其系数有二阶连续偏导数,则

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}w)=0.$$

证 设 $w=\sum\limits_{i_1,i_2,\cdots,i_p} a_{i_1i_2\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\quad (p=0,1,2,3),$

由于 $a_{i_1i_2\cdots i_p}$ 具有二阶连续偏导数,故

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}w)&=\mathrm{d}\Big(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}\mathrm{d}a_{i_1i_2\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\Big) \\ &=\mathrm{d}\left[\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial a_{i_1i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right] \\ &=\mathrm{d}\left[\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial a_{i_1i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 a_{i_1i_2\cdots i_p}}{\partial x_j\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\\
&=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}\sum_{1\leqslant k<j<3}\frac{\partial^2 a_{i_1i_2\cdots i_p}}{\partial x_j\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\\
&\quad+\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant 3}\frac{\partial^2 a_{i_1i_2\cdots i_p}}{\partial x_j\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\\
&=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 3}\frac{\partial^2 a_{i_1i_2\cdots i_p}}{\partial x_j\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\\
&\quad+\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 3}\frac{\partial^2 a_{i_1i_2\cdots i_p}}{\partial x_k\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\\
&=0.
\end{aligned}
$$

§5　总 练 习 题

1. 证明：若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为任何闭集，$f:D\to D$，且存在正实数 $q\in(0,1)$，使得对任何 $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D$，满足

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|\leqslant q\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\|,$$

则在 D 中存在 f 的惟一不动点 $\boldsymbol{x}^*$，即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{x}^*$.

证　(1) 不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 的存在性.

对$\forall\ \boldsymbol{x}_0\in D$，因为 $f:D\to D$，所以必有

$$\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n-1})\in D,\quad n=1,2,\cdots.$$

下面验证$\{\boldsymbol{x}_n\}$满足柯西条件. 首先，有

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\|&=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|\leqslant q\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|,\\
\|\boldsymbol{x}_{n+1}-\boldsymbol{x}_n\|&=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n-1})\|\leqslant q\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_{n-1}\|\\
&\leqslant\cdots\leqslant q^n\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|,\quad n=1,2,\cdots,
\end{aligned}
$$

于是对任意的正整数 n,p，有

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}_{n+p}-\boldsymbol{x}_n\|&\leqslant\|\boldsymbol{x}_{n+p}-\boldsymbol{x}_{n+p-1}\|+\cdots+\|\boldsymbol{x}_{n+1}-\boldsymbol{x}_n\|\\
&\leqslant(q^{n+p-1}+\cdots+q^n)\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|\\
&<\frac{q^n}{1-q}\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|\to 0\quad(n\to\infty,0<q<1),
\end{aligned}
$$

即对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当 $n>N$ 时，对任给正整数 p，有

$$\| \boldsymbol{x}_{n+p}-\boldsymbol{x}_n \| <\varepsilon.$$

故由定理16.1知点列$\{\boldsymbol{x}_n\}$收敛，设

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}^*,$$

又因为D为闭集，所以$\boldsymbol{x}^*\in D$.

由于对$\forall\ \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}\in D$，有

$$\| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \| \leqslant q \| \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0 \| \to 0 \quad (\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0),$$

所以f在D上任何点$\boldsymbol{x}_0$处连续，从而

$$\boldsymbol{x}^*=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)=\boldsymbol{f}(\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*).$$

故$\boldsymbol{x}^*\in \boldsymbol{D}$为$f$的不动点.

（2）不动点$\boldsymbol{x}^*$的惟一性.

若$\boldsymbol{x}^{**}\in D$为f的另外一个不动点，则

$$\| \boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}^{**} \| = \| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{**}) \| \leqslant q \| \boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}^{**} \| \quad (0<q<1),$$

即

$$\| \boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}^{**} \| =0,$$

也就是

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^{**}.$$

所以f在D上存在惟一的不动点.

2. 设$B=\{\boldsymbol{x}\,|\,\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\leqslant r\}\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}:B\to\mathbf{R}^n$，且存在正实数$q\in(0,1)$，对一切$\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in B$满足

$$\| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'') \| \leqslant q \| \boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'' \|$$

与

$$\| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0 \| \leqslant(1-q)r.$$

利用不动点定理证明：f在B中有惟一的不动点.

证　因为对$\forall\ \boldsymbol{x}\in B$，有

$$\begin{aligned}\| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}_0 \| &\leqslant \| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \| + \| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0 \| \\ &\leqslant q \| \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0 \| +(1-q)r\leqslant qr+(1-q)r=r,\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in B$，即$\boldsymbol{f}:B\to B\subset\mathbf{R}^n$. 故由上述总练习题1知$\boldsymbol{f}$在$B$中有惟一的不动点.

3. 应用定理23.11证明：设$D\subset\mathbf{R}^n$，$f,g:D\to\mathbf{R}$，若f在$\boldsymbol{x}_0\in D$可微，$f(\boldsymbol{x}_0)=0$，g在$\boldsymbol{x}_0$连续，则$f\cdot g$在$\boldsymbol{x}_0$可微.

证　因为f在$\boldsymbol{x}_0$可微，故由定理23.11知，存在$1\times n$矩阵函数$\boldsymbol{F}:D\to\mathbf{R}^n$，它在$\boldsymbol{x}_0$连续，且

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),\quad \boldsymbol{x}\in D,$$

由于 $f(\boldsymbol{x}_0)=0$，所以

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(\boldsymbol{x})-(f\cdot g)(\boldsymbol{x}_0)&=f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)g(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\\&=g(\boldsymbol{x})(f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0))=g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0).\end{aligned}$$

因为 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，所以 $g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，再由定理 23.11 知 $f\cdot g$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微.

4. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是开集，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^n$ 为可微函数，且对任何 $\boldsymbol{x}\in D$，$\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\neq 0$. 试证：若 $\boldsymbol{y}\overline{\in}\boldsymbol{f}(D)$，$\varphi(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|^2$，则对一切 $\boldsymbol{x}\in D$，$\varphi'(\boldsymbol{x})\neq 0$.

证　因为

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|^2=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})),$$

由本章 § 2 习题 3，有

$$\begin{aligned}\varphi'(\boldsymbol{x})&=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))'+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))'\\&=-2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

由条件 $\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\neq 0$，知 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 可逆，又 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{0}$，于是有 $\varphi(\boldsymbol{x})\neq 0$.

5. 证明：若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是凸开集，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 是 D 上的可微函数，则对任意两点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in D$，以及每一常向量 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^m$，必存在 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\in D$，$0<\theta<1$，满足

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

证　考虑实值多元函数

$$F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

则 $F:D\to\mathbf{R}$. 因为 f 在 D 上可微，所以 $F(\boldsymbol{x})$ 在 D 上也可微. 由于 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是凸开集，故根据多元函数的微分中值定理，对 $\forall\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in D$，$\exists\ 0<\theta<1$，使 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\in D$，有

$$F(\boldsymbol{b})-F(\boldsymbol{a})=F'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

又 $F'(\boldsymbol{c})=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})$，故有

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

6. 利用上题结果导出微分中值不等式

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|\leqslant\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\|\cdot\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|,$$

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\quad 0<\theta<1.$$

证　由上述总练习题 5，取 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})] &= \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|^2=[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\\ &=|[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})|\\ &\leqslant \|[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]^{\mathrm{T}}\|\cdot\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\|\cdot\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|\\ &=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|\cdot\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\|\cdot\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|,\end{aligned}$$

即
$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|\leqslant\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\|\cdot\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|.$$

7. 设 $\boldsymbol{f}(t)=[\cos t,\sin t]^{\mathrm{T}}$，$a=0$，$b=2\pi$.

(1) 是否存在 $c\in(0,2\pi)$ 满足
$$\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)=\boldsymbol{f}'(c)(b-a).$$

(2) 按总练习题 5 所示的中值定理，对每一 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^2$，应该存在 $c\in(0,2\pi)$，使得
$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)]=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'(c)(b-a),$$
试求用 $\boldsymbol{\beta}$ 表示这里的中值点 c.

解　(1) 因为
$$\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)=[\cos b,\sin b]^{\mathrm{T}}-[\cos a,\sin a]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\cos 2\pi-\cos 0\\ \sin 2\pi-\sin 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{f}'(c)=\begin{bmatrix}-\sin c\\ \cos c\end{bmatrix},\quad b-a=2\pi,$$
若有
$$\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)=\boldsymbol{f}'(c)(b-a),$$
则 c 应满足
$$\sin c=0,\quad \cos c=0,$$
但在 $(0,2\pi)$ 内上述方程组无解. 所以这样的 $c\in(0,2\pi)$ 不存在.

(2) 设 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}$，则根据总练习题 5，有
$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)]=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'(c)(b-a),$$
即
$$(\beta_1,\beta_2)\begin{bmatrix}-\sin c\\ \cos c\end{bmatrix}\cdot 2\pi=2\pi(\beta_2\cos c-\beta_1\sin c)=(\beta_1,\beta_2)\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=0,$$
或
$$\beta_2\cos c-\beta_1\sin c=0.$$
所以，当
$$\beta_1\neq 0\text{ 时}，c=\arctan\frac{\beta_2}{\beta_1}\in(0,2\pi);$$
当
$$\beta_2\neq 0\text{ 时}，c=\operatorname{arccot}\frac{\beta_1}{\beta_2}\in(0,2\pi);$$

当 $\beta_1=\beta_2=0$ 时，c 可以取 $(0,2\pi)$ 中任何值.

8. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 可微，且 $\boldsymbol{f}'$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续. 若存在常数 $c>0$，使对一切 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2\in\mathbf{R}^n$，均有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|\geqslant c\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|.$$

试证明：

(1) $\boldsymbol{f}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一一映射；

(2) 对一切 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\|\neq 0$.

证　(1) 任取 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$，因为

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|\geqslant c\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|>0,$$

所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)\neq\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$，即 $\boldsymbol{f}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一一映射.

(2) $\forall\ \boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$，因为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，即

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}=0,$$

所以 $\exists\ \boldsymbol{x}_1\in\mathbf{R}^n$，使

$$\left\|\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|}\right\|<\frac{c}{2},$$

则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\|&=\frac{\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\|\ \|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|}{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|}=\frac{\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|}\\&\geqslant\frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|-\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|}\\&=\frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|}-\frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|}\\&\geqslant c\,\frac{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|}{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|}-\frac{c}{2}=\frac{c}{2}>0.\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 的任意性知，对 $\forall\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\|\neq 0$.

9. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集，$\boldsymbol{f}:A\to A$，如果 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in A$，$\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$，都满足

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|<\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|,$$

则 A 中有且仅有一点 $\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$.

证　令

$$g(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|,\quad \boldsymbol{x}\in A.$$

对 $\forall\ \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in A$，因为

$$\begin{aligned}|g(\boldsymbol{x}_1)-g(\boldsymbol{x}_2)|&=|\,\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)\|-\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|\,|\\&\leqslant\|[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)]-(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)\|\end{aligned}$$

$$\leqslant \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|+\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|$$
$$\leqslant 2\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|,$$

由此不等式知 $g(\boldsymbol{x})$ 为有界闭集 A 上的连续函数,因此存在 $\boldsymbol{x}^* \in A$,使

$$g(\boldsymbol{x}^*)=\min_{\boldsymbol{x}\in A} g(\boldsymbol{x}).$$

如果 $g(\boldsymbol{x}^*)\neq 0$,则由条件有

$$g(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*))=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*))\|<\|\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\|=g(\boldsymbol{x}^*).$$

这与 $g(\boldsymbol{x}^*)$ 的最小性相矛盾,故 $g(\boldsymbol{x}^*)=0$,即

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{x}^*.$$

若有另外一个 $\boldsymbol{x}^{**}$ 使

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{**})=\boldsymbol{x}^{**}\in A,$$

则 $$\|\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}^{**}\|=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{**})\|<\|\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}^{**}\|$$

矛盾,故不动点惟一.

10. 设 λ 是三维空间中 p 次微分形式($p\geqslant 1$),其系数具有一阶连续偏导数,且 $\mathrm{d}\lambda=0$. 证明存在一个 $p-1$ 次微分形式 w 使得

$$\lambda=\mathrm{d}w.$$

证 (1) 设 λ 为一次微分形式,即

$$\lambda=\overset{1}{w}=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

因为
$$\begin{aligned}0=\mathrm{d}\lambda=\mathrm{d}\overset{1}{w}&=\mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}z\\
&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}y\\
&\quad+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}z\\
&=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

所以 $$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

这正是曲线积分与路线无关的条件,故令

$$\overset{0}{w}=F=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\quad(\text{零次微分形式}),$$

则 $$\mathrm{d}\overset{0}{w}=\mathrm{d}F=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\lambda.$$

(2) 设 λ 为二次微分形式,即

$$\lambda=\overset{2}{w}=P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

因为
$$0=\mathrm{d}\lambda=\mathrm{d}\,\overset{2}{w}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,$$

所以
$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

取
$$P^*=C(C\ \text{为任意常数}),\quad Q^*=\int_0^x R(t,y,z)\mathrm{d}t,$$
$$R^*=-\int_0^x Q(t,y,z)\mathrm{d}t+\int_0^y P(0,t,z)\mathrm{d}t,$$

则 $P_y^*=P_z^*=0,\quad Q_x^*=R,\quad R_x^*=-Q,\quad Q_x^*-P_y^*=R,\quad P_z^*-R_x^*=Q,$

$$\begin{aligned}R_y^*-Q_z^*&=-\int_0^x Q_y(t,y,z)\mathrm{d}t+P(0,y,z)-\int_0^x R_z(t,y,z)\mathrm{d}t\\&=-\int_0^x[Q_y(t,y,z)+R_z(t,y,z)]\mathrm{d}t+P(0,y,z)\\&=\int_0^x P_x(t,y,z)\mathrm{d}t+P(0,y,z)=P(x,y,z).\end{aligned}$$

令 $\overset{1}{w}=Q^*\mathrm{d}y+R^*\mathrm{d}z$**,则**

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,\overset{1}{w}&=(R_y^*-Q_z^*)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(P_z^*-R_x^*)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(Q_x^*-P_y^*)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\lambda.\end{aligned}$$

(3) **设** $\lambda=F\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$**,则**

$$\mathrm{d}\lambda=0,$$

取
$$F^*=\int_0^y F(x,t,z)\mathrm{d}t,$$

则
$$F_y^*=F(x,y,z).$$

令 $\overset{2}{w}=F^*\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$**,则**

$$\mathrm{d}\,\overset{2}{w}=F_y^*\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=F\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\lambda.$$