数学分析（1）复习提纲

- 数列极限和函数极限的分析定义（$\varepsilon-N,\varepsilon-\delta$ ），会使用分析定义进行证明★
- 极限的性质、收敛数列（函数）的性质、极限的四则运算法则，两边夹原理及其应用，两个重要极限
- 了解单调有界原理、Cauchy 准则
- 利用 Heine 归结原则、子列性质、Cauchy 准则、单调有界原理说明数列的敛散性
- 无穷小、无穷大的概念及其关系，高阶无穷小和等价无穷小
- 函数连续性的概念（含左、右连续），会判别函数间断点的类型
- 连续函数的局部性质和初等函数的连续性
- 闭区间上连续函数的性质（有界性、最值定理、介值定理），并会应用这些性质
- 会应用洛必达法则、等价无穷小代换、泰勒公式（麦克劳林公式）等方法求一般的函数和数列极限★
- 导数（左、右导数）和微分的概念，可导与可微的关系，可导与连续之间的关系
- 导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，基本初等函数的导数公式，微分的四则运算法则和一阶微分的形式不变性
- 高阶导数和高阶微分的概念
- 会求函数的各阶导数和微分，会求分段函数的一阶、二阶导数
- 会求由参数方程所确定的函数的导数、会求反函数的导数
- 会证明罗尔中值定理，拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒中值定理，并熟练应用这些中值定理进行证明★
- 会判断函数的单调性和利用单调性证明不等式，会求函数的极值和最值
- 导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，会求曲线的单调区间、凸凹性区间和拐点
- 会求不定积分★

数学分析(1) 期末考试模拟试卷

一、计算题（共 8 题，每题 10 分）

1．求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}}$ ，其中 $b>a>0$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n^n+1}}\right)$

3．求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x^2}+\left(\cot x\right)^{\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right]$.

4．求极限 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{1}{x-1}+\left(\sin(x-1)\right)^{\frac{1}{1+\ln(x-1)}}-\dfrac{1}{\ln x}\right]$.

5. 求函数 $y=3x^5-5x^3$ 的单调区间、极值.

6．求曲线 $y=\dfrac{5}{9}x^2+(x-1)^{\frac{5}{3}}$ 的凹凸区间与拐点.

7. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

8. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{(x-2)(1-x)}}\,dx$.

二、证明题：（共 2 题，每题 10 分）

1. 证明：（1）若数列 $\{a_n\}$ 满足条件：

$|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+|a_2-a_1|\leqslant M\ \ (n=2,3,\cdots,M>0)$，则数列 $\{a_n\}$ 收敛；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$|a_n-a_{n-1}|\leqslant r|a_{n-1}-a_{n-2}|\ (n=3,4,\cdots,0<r<1)$，

则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

2．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $\forall x\in[0,1]$ 有 $|f(x)|\le 1$， $|f''(x)|\le 2$，

证明：$\forall x\in[0,1]$ 有 $|f'(x)|\le 3$.