经典教材辅导用书·数学系列丛书

数学分析习题详解(上)

高教版·《数学分析·上册》(第三版)
(华东师范大学数学系编)

林　益　邵　琨　编
罗德斌　俞小清

华中科技大学出版社

内 容 介 绍

本书是对华东师范大学数学系所编写的、高等教育出版社出版的《数学分析》(第三版)上册全部习题的详解. 为便于学生学习,在每章的习题解答之前,增加了知识要点部分,此部分不是对该章主要内容的罗列,而是帮助学生从更高的观点上来理解该章的主要内容,分析理论作用,指出各概念、各定理的相互关联等,并指导解题方法,提示注意事项等. 习题详解部分则周密、细致、规范,富有启发性,注意解题方法及技巧的运用,能给学生起到举一反三的作用. 本书可供学生学习数学分析课程参考.

前　　言

数学分析是数学系学生一门极其重要的基础课. 它集中反映了数学科学的学科特点,并对学生进行了最基本、最必要的基础训练,是学生今后学习数学、攀登数学高峰的重要落脚点. 它在本科数学学习中占有特殊的地位,因此加强数学分析课程的教学是必需的.

对于刚入学的数学系一年级学生而言,学习数学分析课程都有“难”的感觉. 这是由数学的学科特点所决定的. 因为数学的思想方法、理论体系与平常人的日常习惯是大相径庭的,一开始难以适应. 学习上最突出的矛盾反映在“解题”这个环节上. 众所周知,要学好数学就要动手解题(而且要有足够多的题量),但是要学会解题就必须在全面、正确地理解基本概念、基本理论和基本方法的基础上,运用辩证法来分析矛盾或转化矛盾,用逻辑推理来演化或推导等来解决问题. 同时数学又是一种语言,要求学生用精确的数学语言表达自己的思路与论证. 可见,提高解题能力绝非一日之功,而是需要长时间、坚持不懈地严格训练才能奏效的. 而平时学生在这些方面的努力与成果,是通过作业来反映的. 教师批改作业时的“√”与“×”还是不能充分反映学生学习的不足,也缺乏足够的视野空间. 因此同学们自然希望手头有一本能弥补自己不足的教学参考书,特别是习题解答,以启发自己的思维,寻找自己知识的不足,提高语言表达能力等.

毫无疑义,华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第三版)

是一本优秀的理科教材,目前正被各高等院校广泛地采用.我们应邀编写该教材(上、下册)全部的习题解答,仅供学习参考.

为了学生学习方便,本书完全按照原教材的章、节编写,题号及数学符号与原教材一致. 每章内容由两部分组成:一是知识要点,二是习题详解. 知识要点不是对该章主要内容的罗列,而是从更高的观点上来理解该章的主要内容,分析理论作用,指导解题方法,提示注意事项等. 习题详解则周密、细致、规范,富有启发性.

当然,习题解答是一把双刃剑,使用得当将受益,使用不当将受害.只有在独立完成习题的基础上对照阅读解答,或者经较长时间思考后仍不得要领时方可阅读解答,然后掩卷再独立完成,这样才能提高自身的数学素养,达到更好地学习数学分析课程的目的.

希望读者正确使用本书,并对本书的不足予以指正.

编　者

2005 年 7 月

目　　录

第一章　实数集与函数

知 识 要 点

1. 实数包括有理数和无理数. 本书利用实数的无限十进小数表示法来叙述实数理论.

2. 数学分析的理论推导中大量使用不等式,熟悉若干常见的不等式,如三角形不等式、平均值不等式,以及利用函数的单调性和有界性来放、缩不等式是必要的.

3. 区间与邻域是数学分析中最常见的实数集. 有界集与无界集是数集的关键概念. 掌握由有界集的定义导出其否定概念——无界集定义的正面叙述是理科学生的基本功. 否定概念的肯定叙述常用于反证法的证明中.

4. 确界是数学分析的基础严格化中的重要概念,涉及确界的有关问题中均应很好地使用确界的定义.

5. 确界原理给出了数集确界存在性的定理. 它是实数系完备性的几个等价定理之一,也是本书叙述实数理论和极限理论的基础.

6. 函数定义为数集到数集的映射,其定义方式优于初等数学中的函数定义. 数学分析中函数的表示形式更为丰富,而诸如取整函数$[x]$、符号函数$\operatorname{sgn}x$、狄利克雷函数$D(x)$、黎曼函数$R(x)$等则是数学分析中的标志函数,它们在分析理论的研究中起着重要的作用.

7. 初等函数是由5个基本初等函数经过有限多次四则运算或有限多次复合运算得到的函数,它体现了数学对复杂问题研究的思想方法,也启示我们除了掌握5个基本初等函数的微积分运算外还应掌握有关运算在四则运算、复合运算中的法则.

8. 函数的有界性是数学分析中常用的函数性质,应正确地给出或使用有界函数与无界函数定义的正面叙述.

习 题 详 解

§1 实　　数

1. 设 a 为有理数,x 为无理数. 证明:

(1) $a+x$ **为无理数;**

(2) **当** $a\neq 0$ **时,**ax **也是无理数.**

证 (1) **反证法:假设** a,$a+x$ **均为有理数,则** $a=\frac{p_1}{q_1}$,$a+x=\frac{p_2}{q_2}$(p_1,p_2,q_1,q_2 **为整数**,$q_1\cdot q_2\neq 0$)**,因此**

$$x=(a+x)-a=\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{q_1p_2-q_2p_1}{q_1q_2}.$$

由于 p_1,p_2,q_1,q_2 **均为整数,故** q_1p_2,q_2p_1,q_1q_2 **亦为整数,由此知** x **为有理数,与假设矛盾. 所以** $a+x$ **为无理数.**

(2) **反证法:假设** a,ax **均为有理数,则** $a=\frac{p_1}{q_1}$,$ax=\frac{p_2}{q_2}$(p_1,p_2,q_1,q_2 **为整数**,$q_1\cdot q_2\neq 0$)**,由此**

$$x=\frac{ax}{a}=\frac{p_2q_1}{p_1q_2}.$$

由于 p_1,p_2,q_1,q_2 **均为整数,故** p_2q_1,p_1q_2 **亦为整数,由此知** x **为有理数,与假设矛盾. 所以** ax **为无理数.**

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解:

(1) $x(x^2-1)>0$;

(2) $|x-1|<|x-3|$;

(3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$.

解 (1) **由** $x(x^2-1)>0$**,得**

$$\begin{cases} x>0, \\ x^2-1>0, \end{cases} \qquad ①$$

或

$$\begin{cases} x<0, \\ x^2-1<0. \end{cases} \qquad ②$$

解 $\begin{cases} x>0, \\ x^2-1>0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x>0, \\ x>1 \text{ 或 } x<-1, \end{cases}$ 故 $x>1$.

解 $\begin{cases} x<0, \\ x^2-1<0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x<0, \\ -1<x<1, \end{cases}$ 故 $-1<x<0$.

由不等式组①、②，得 $x(x^2-1)>0$ 的解为

$$x>1 \text{ 或 } -1<x<0, \quad \text{即} \quad \{-1<x<0\}\cup\{x>1\}.$$

原不等式的解在数轴上的表示如图 1-1 所示.

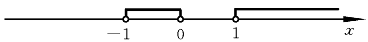

图 1-1

（2）由 $|x-1|<|x-3|$，得 $(x-1)^2<(x-3)^2$，即

$$x^2-2x+1<x^2-6x+9,$$

整理得

$$x<2.$$

原不等式的解在数轴上的表示如图 1-2 所示.

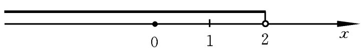

图 1-2

（3）由 $\sqrt{x-1}$，$\sqrt{2x-1}$，$\sqrt{3x-2}$，得

$$\begin{cases} x\geqslant 1, \\ x\geqslant \dfrac{1}{2}, \\ x\geqslant \dfrac{2}{3}, \end{cases} \quad \text{即} \quad x\geqslant 1.$$

而 $$\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+x-1}>\sqrt{x-1},\sqrt{3x-2}\geqslant 0.$$
故此题无解.

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$. 证明:若对任何正数 ε,有 $|a-b|<\varepsilon$,则 $a=b$.

证 反证法:假设 $a\neq b$,则
$$|a-b|=c>0.$$
取 $\varepsilon_0=\frac{c}{2}>0$,由题设知 $|a-b|<\frac{c}{2}$,即 $c<\frac{c}{2}\Rightarrow c<0$. 矛盾. 故 $a=b$.

4. 设 $x\neq 0$,证明 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2$,并说明其中等号何时成立.

证 由 $(|x|-1)^2\geqslant 0$,得
$$|x|^2+1\geqslant 2|x|.$$
而 $x\neq 0$,故
$$|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant 2,$$
即 $$\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2.$$
由 $\left|x+\frac{1}{x}\right|=2$ 知,当且仅当 $x=\pm 1$ 时等号成立.

5. 证明:对任何 $x\in\mathbf{R}$,有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$;

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

证 (1) $|x-1|+|x-2|\geqslant|(x-1)-(x-2)|=1$.

(2) $$\begin{aligned}|x-1|+|x-2|+|x-3|&\geqslant|(x-1)-(x-3)|+|x-2|\\&=2+|x-2|\geqslant 2.\end{aligned}$$

6. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,证明:
$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|.$$
你能说明此不等式的几何意义吗?

证 分析:欲证 $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$,即证
$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|^2\leqslant|b-c|^2,$$
整理得 $$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}\geqslant a^2+bc,$$

亦即证 $$(a^2+b^2)(a^2+c^2)\geqslant(a^2+bc)^2,$$

整理得 $$a^2b^2+a^2c^2\geqslant 2a^2bc,$$

即证 $$a^2(b-c)^2\geqslant 0.$$

故证明如下.

由 $(b-c)^2\geqslant 0$ 得 $a^2(b-c)^2\geqslant 0$,即

$$a^2b^2+a^2c^2\geqslant 2a^2bc,$$

从而 $$a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\geqslant a^4+2a^2bc+b^2c^2,$$

整理得 $$\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\geqslant(a^2+bc),$$

即 $$a^2-\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}\leqslant -bc,$$

$$2a^2-2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}\leqslant -2bc,$$

$$a^2+b^2-2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}+a^2+c^2$$
$$\leqslant b^2+c^2-2bc.$$

故 $$\left(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right)^2\leqslant(b-c)^2$$
$$\Rightarrow\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|.$$

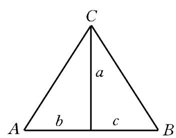

图 1-3

几何意义:如图 1-3 所示,三角形两边之差小于或等于其在第三边上投影之差.

7. 设 $x>0,b>0,a\neq b$,证明:$\dfrac{a+x}{b+x}$介于 1 与$\dfrac{a}{b}$之间.

证　由于 $x>0,b>0$,故当

① $a\leqslant b$ 时,有

$$\begin{cases}a+x\leqslant b+x,\\ ax\leqslant bx,\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}a+x\leqslant b+x,\\ ab+ax\leqslant bx+ab\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a+x}{b+x}\leqslant 1,\\ \dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{a+x}{b+x}.\end{cases}$$

② $a>b$ 时,有

$$\begin{cases}a+x>b+x,\\ ax>bx,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases} a+x>b+x, \\ ab+ax>bx+ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+x}{b+x}>1, \\ \dfrac{a}{b}>\dfrac{a+x}{b+x}. \end{cases}$$

综上,由①、②得,$\dfrac{a+x}{b+x}$介于$\dfrac{a}{b}$与 1 之间.

8. 设 p 为正整数,证明:若 p 不是完全平方数,则 $\sqrt{p}$ 为无理数.

证　反证法:假设 $\sqrt{p}=\dfrac{m}{n}$为有理数(m,n 为正整数,且 m/n 为既约分数),则
$$p=\frac{m^2}{n^2},\quad \text{即}\quad pn=\frac{m}{n}\cdot m.$$

由题设知$n\neq 1$,m/n 为既约分数,故$\dfrac{m}{n}\cdot m$ 必不为整数,而pn 为整数,矛盾. 因此 $\sqrt{p}$ 必为无理数.

9. 设 a,b 为给定实数,试用不等式符号(不用绝对值号)表示下列不等式的解.

(1) $|x-a|<|x-b|$;

(2) $|x-a|<x-b$;

(3) $|x^2-a|<b$.

解　(1) 由$|x-a|<|x-b|$有$(x-a)^2<(x-b)^2$,且 $a\neq b$,即
$$x^2-2ax+a^2<x^2-2bx+b^2,$$
整理得
$$(a-b)(a+b)<2(a-b)x.$$

由 $a\neq b$,有

$a>b$ 时,
$$x>\frac{a+b}{2}\Rightarrow\begin{cases} a>b, \\ x>\dfrac{a+b}{2}. \end{cases}$$

$a<b$ 时,
$$x<\frac{a+b}{2}\Rightarrow\begin{cases} a<b, \\ x<\dfrac{a+b}{2}. \end{cases}$$

(2) 由$|x-a|<x-b$ 知 $x\geqslant b$,且

$$b-x<(x-a)<x-b \Rightarrow \text{仅当 } a>b \text{ 时有解 } x>\frac{a+b}{2},$$

即
$$\begin{cases} a>b, \\ x>\dfrac{a+b}{2}. \end{cases}$$

(3) 由 $|x^2-a|<b$,得

$$\begin{cases} b>0, \\ -b<x^2-a<b, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} b>0, \\ a-b<x^2<a+b. \end{cases}$$

① 当 $a<b$ 时,

$$\begin{cases} x^2<a+b, \\ a+b>0, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} -\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}, \\ -b<a<b. \end{cases}$$

② 当 $a \geqslant b>0$ 时,

$$\begin{cases} a-b<x^2, \\ x^2<a+b, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} -\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}, \\ x<-\sqrt{a-b} \text{ 或 } x>\sqrt{a-b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b} \text{ 或 } \sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}.$$

§2　数集·确界原理

1. 用区间表示下列不等式的解:

(1) $|1-x|-x \geqslant 0$;

(2) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 6$;

(3) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$ (a,b,c 为常数,且 $a<b<c$);

(4) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

解 (1) 由 $|1-x|-x\geqslant 0$,得

$x\leqslant 0$ 时,不等式成立.

$x>0$ 时,$|1-x|\geqslant x$ 与 $|1-x|^2\geqslant x^2$ 同解. 解 $|1-x|^2\geqslant x^2$,得

$$1-2x+x^2\geqslant x^2,\quad 即\quad x\leqslant \frac{1}{2}.$$

故不等式解为 $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

(2) $x>0$ 时,$\left|x+\frac{1}{x}\right|\leqslant 6$ 化为 $x^2-6x+1\leqslant 0$,解之

$$3-\sqrt{8}\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{8},$$

$x<0$ 时,$\left|x+\frac{1}{x}\right|\leqslant 6$ 化为 $x^2+6x+1\leqslant 0$,解之

$$-3-\sqrt{8}\leqslant x\leqslant -3+\sqrt{8}.$$

故不等式解为 $x\in[-3-\sqrt{8},-3+\sqrt{8}]\cup[3-\sqrt{8},3+\sqrt{8}]$.

(3) $x\leqslant a$ 时,$(x-a)(x-b)(x-c)\leqslant 0$,不等式无解.

$a<x<b$ 时,$(x-a)(x-b)(x-c)>0$,不等式成立.

$b\leqslant x\leqslant c$ 时,$(x-a)(x-b)(x-c)\leqslant 0$,不等式无解.

$x>c$ 时,$(x-a)(x-b)(x-c)>0$,不等式成立.

综上,$x\in(a,b)\cup(c,+\infty)$即为不等式之解.

(4) 由 $\sin x$ 的周期性,仅讨论 $x\in[0,2\pi]$即可.

$x\in[0,2\pi]$时,仅当$\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}$时$\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,故$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$. 所以不等式解为

$$x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right],\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

2. 设 S 为非空数集,试对下列概念给出定义:

(1) S 无上界; (2) S 无界.

解 (1) 定义:设 S 为非空数集,若对于$\forall M>0,\exists x\in S$ 有 $x>M$,则称 S

无上界.

(2) 定义:设S为非空数集,若对于$\forall M>0,\exists x\in S$有$|x|>M$,则称$S$无界.

3. 试证明:$S=\{y\,|\,y=2-x^2,x\in\mathbf{R}\}$有上界而无下界.

证　由于$\forall x\in\mathbf{R}$有$x^2\geqslant 0$,故$\forall y\in S$有$y=2-x^2<3$,3即为S的一个上界.

而对$\forall M>0$,取$x=\sqrt{3+M}$,即有

$$|y|=|2-x^2|=|-1-M|=M+1>M,$$

故S无界$\Rightarrow S$无下界.

4. 求下列数集的上、下确界,并依定义加以验证:

(1) $S=\{x\,|\,x^2<2\}$;

(2) $S=\{x\,|\,x=n!,n\in\mathbf{N}_+\}$;

(3) $S=\{x\,|\,x$为$(0,1)$内无理数$\}$;

(4) $S=\{x\,|\,x=1-\frac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}_+\}$.

解　(1) 由$x^2<2\Rightarrow-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$,故$\sqrt{2}$是$S$的上界,$-\sqrt{2}$是$S$的下界.

i) $\sup S=\sqrt{2}$.

首先$\sqrt{2}$为S的上界;其次对$\forall\alpha<\sqrt{2}$,由实数的稠密性知,$\exists\gamma$满足$\alpha<\gamma<\sqrt{2}$,即$\gamma>\alpha$且$\gamma\in S$,由定义知$\sup S=\sqrt{2}$.

ii) $\inf S=-\sqrt{2}$.

首先$-\sqrt{2}$为S的下界;其次对$\forall\beta>-\sqrt{2}$,由实数的稠密性知,$\exists\gamma$满足$-\sqrt{2}<\gamma<\beta$,即$\gamma<\beta$且$\gamma\in S$,由定义知$\inf S=-\sqrt{2}$.

(2) i) $\sup S=+\infty$.

对$\forall M>0$,取$n=[M]+1\in\mathbf{N}_+$,而$x=n!\geqslant n>M$,故S无上界.

ii) $\inf S=1$.

首先$\forall n\in\mathbf{N}_+$有$x=n!\geqslant 1$,即1为S的下界;其次对$\forall\beta>1,\exists 1\in\mathbf{N}_+,x_0=1!=1\in S$,有$x_0<\beta$,由定义知$\inf S=1$.

(3) i) $\sup S=1$.

首先 1 为 S 的上界;其次对 $\forall \alpha<1$,由实数的稠密性知,$\exists \gamma$ 满足 $\alpha<\gamma<1$,即 $\gamma>\alpha$ 且 $\gamma\in S$,由定义知 $\sup S=1$.

ii) $\inf S=0$.

首先 0 为 S 的下界;其次对 $\forall \beta>0$,由实数的稠密性知,$\exists \gamma$ 满足 $0<\gamma<\beta$,即 $\gamma<\beta$ 且 $\gamma\in S$,由定义知 $\inf S=0$.

(4) i) $\sup S=1$.

首先 1 为 S 的一个上界;其次对 $\forall \alpha<1$,取 $N=\left[\dfrac{\lg\dfrac{1}{1-\alpha}}{\lg 2}\right]+1>\dfrac{\lg\dfrac{1}{1-\alpha}}{\lg 2}$,此时有 $2^N>\dfrac{1}{1-\alpha}$,即 $1-\alpha>\dfrac{1}{2^N}\Rightarrow \alpha<1-\dfrac{1}{2^N}$,故 $\exists x_0=1-\dfrac{1}{2^N}>\alpha$ 且 $x_0\in S$,由定义知 $\sup S=1$.

ii) $\inf S=\dfrac{1}{2}$.

$n=1$ 时,$x=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$;$n>1$ 时,$x=1-\dfrac{1}{2^n}>1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$,故 $\dfrac{1}{2}$ 是 S 的下界.

又对 $\forall \beta>\dfrac{1}{2}$,$\exists 1\in \mathbf{N}_+$,$x_1=\dfrac{1}{2}\in S$ 使 $x_1<\beta$,由定义知 $\inf S=\dfrac{1}{2}$.

5. 设 S 为非空有下界数集,证明:$\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow \xi=\min S$.

证　若 $\inf S=\xi\in S$,则由下确界定义知,$\forall x\in S$ 有 $x\geqslant\xi$,又 $\xi\in S$,故 $\min S=\xi$.

若 $\xi=\min S$,则由最小值定义知,$\forall x\in S$ 有 $x\geqslant \xi$,且对 $\forall \beta>\xi$,$\exists \xi\in S$,使 $\xi<\beta$,故 $\inf S=\xi$.

综上,
$$\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow \xi=\min S.$$

6. 设 S 为非空数集,定义 $S^-=\{x\mid -x\in S\}$,证明:

(1) $\inf S^-=-\sup S$;　　(2) $\sup S^-=-\inf S$.

证　(1) 设 $\xi=\sup S$,则 $\forall x\in S^-$ 有 $-x\in S$,故 $-x\leqslant\xi$,即 $x\geqslant -\xi\Rightarrow -\xi$ 是 S^- 一个下界,且 $\forall \beta>-\xi$,即 $-\beta<\xi$. 由 $\xi=\sup S$ 知,$\exists -x_0\in S$ 使得 $-x_0>-\beta\Rightarrow x_0<\beta$,且 $x_0\in S^-$. 故 $\inf S^-=-\xi=-\sup S$.

(2) 由定义知 $(S^-)^-=S$,故由(1)知

$$\inf(S^-)^- = -\sup S^-,\quad \text{即}\quad -\inf S = \sup S^-.$$

7. 设A,B皆为非空有界数集，定义数集$A+B=\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}$. 证明：

(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$；

(2) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

证 (1) 设$\sup A=\xi_1$，$\sup B=\xi_2$，由定义知$\forall x\in A,y\in B$，有$x\leqslant\xi_1,y\leqslant\xi_2$ $\Rightarrow x+y\leqslant\xi_1+\xi_2$，即$\xi_1+\xi_2$为$A+B$的上界.

又$\forall\alpha<\xi_1+\xi_2$，记$\varepsilon=\xi_1+\xi_2-\alpha>0$，取$\alpha_1=\xi_1-\dfrac{\varepsilon}{2}<\xi_1$，$\alpha_2=\xi_2-\dfrac{\varepsilon}{2}<\xi_2$，$\exists x_0\in A,y_0\in B$使$x_0>\alpha_1,y_0>\alpha_2$，即$\exists z_0=x_0+y_0\in A+B$，使$z_0>\alpha_1+\alpha_2=\alpha$. 故

$$\sup(A+B)=\xi_1+\xi_2=\sup A+\sup B.$$

(2) 设$\inf A=\eta_1$，$\inf B=\eta_2$，由定义知$\forall x\in A,y\in B$，有$\eta_1\leqslant x_1,\eta_2\leqslant x_2$，即$\eta_1+\eta_2\leqslant x_1+x_2$，$\eta_1+\eta_2$为$A+B$的下界.

又$\forall\varepsilon>0$，$\exists x_1\in A,y_1\in B$使得$x_1<\eta_1+\dfrac{\varepsilon}{2}$，$y_1<\eta_2+\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而$x_1+y_1<\eta_1+\eta_2+\varepsilon$. 故

$$\inf\{A+B\}=\inf A+\inf B.$$

8. 设$a>0,a\neq1$，x为有理数. 证明：

$$a^x=\begin{cases}\sup\{a^r\mid r\text{ 为有理数},r<x\}, & a>1,\\ \inf\{a^r\mid r\text{ 为有理数},r<x\}, & a<1.\end{cases}$$

证 i) $a>1$时，记$S=\{a^r\mid r$为有理数$,r<x\}$，对于$\forall a^r\in S$，由$r<x$有$a^r<a^x$，因此a^x为S的上界.

$\forall\alpha<a^x$，若$\alpha\leqslant0$，则$\forall a^r\in S$有$a^r>\alpha$；若$\alpha>0$，根据有理数的稠密性知，$\exists r_0$（r_0为有理数）使

$$\log_a\alpha<r_0<x\quad(\log_a\alpha<\log_a a^x=x),$$

即$a^{r_0}>\alpha$且$a^{r_0}\in S$，故$\sup S=a^x$.

ii) $0<a<1$时，记$S'=\{a^r\mid r$为有理数$,r<x\}$，对于$\forall a^r\in S'$，由$r<x$有$a^r>a^x$，因此a^x为S的下界.

$\forall \beta > a^x$,根据有理数的稠密性知,$\exists r'$(r'为有理数)使

$$\log_a \beta < r_1 < x \quad (\log_a \beta < \log_a a^x = x),$$

即 $a^{r'} < \beta$ 且 $a^{r'} \in S'$,故 $\inf S' = a^x$.

§3 函 数 概 念

1. 试作下列函数的图象:

(1) $y = x^2 + 1$;　　(2) $y = (x+1)^2$;

(3) $y = 1 - (x+1)^2$;　　(4) $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$;

(5) $y = \begin{cases} 3x, & |x| > 1, \\ x^3, & |x| < 1, \\ 3, & |x| = 1. \end{cases}$

解 函数(1)～(5)的图象如图 1-4 所示.

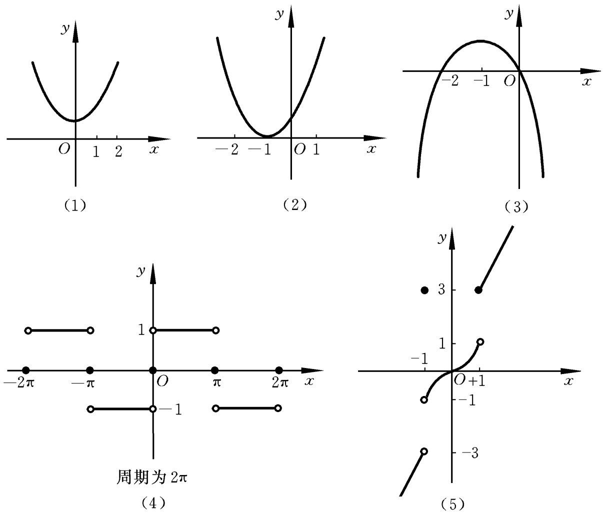

图 1-4

2. 试比较函数 $y=a^x$ **与** $y=\log_a x$ **分别当** $a=2$ **和** $a=\frac{1}{2}$ **时的图象.**

解　当 $a=2$ 和 $a=\frac{1}{2}$ 时,函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象如图 1-5 所示.

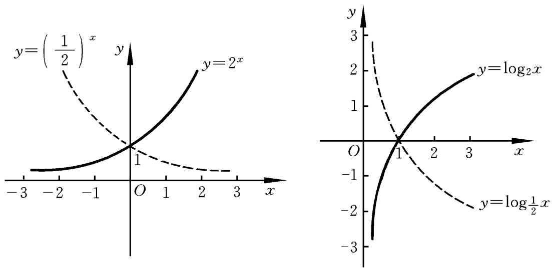

图 1-5

3. 根据图1-6 写出定义在[0,1]上的分段函数 $f_1(x)$ **和** $f_2(x)$ **的解析表达式.**

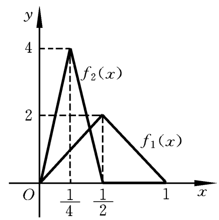

图 1-6

解　$$f_1(x)=\begin{cases}4x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2},\\ 4-4x, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}16x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{4},\\ 8-16x, & \frac{1}{4}<x\leqslant \frac{1}{2},\\ 0, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

4. 确定下列初等函数的存在域:

(1) $y=\sin(\sin x)$;　　(2) $y=\lg(\lg x)$;

(3) $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$;　　(4) $y=\lg\left(\arcsin\frac{x}{10}\right)$.

解　(1) $y=\sin x$ 的存在域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[-1,+1]$,故 $D=$

$(-\infty,+\infty)$.

(2) $y=\lg x$ 的存在域为 $(0,+\infty)$，故 $0<\lg x$，即 $x>1$，$D=(1,+\infty)$.

(3) $y=\arcsin x$ 的存在域为 $[-1,+1]$，故 $-1\leqslant\lg\frac{x}{10}\leqslant 1$，即

$$\frac{1}{10}\leqslant\frac{x}{10}\leqslant 10,D=[1,100].$$

(4) $y=\lg x$ 的存在域为 $(0,+\infty)$，故 $\arcsin\frac{x}{10}>0$，即

$$0<\frac{x}{10}\leqslant 1,D=(0,10].$$

5. 设函数 $$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$$

求：(1) $f(-3),f(0),f(1)$；

(2) $f(\Delta x)-f(0),f(-\Delta x)-f(0)\ (\Delta x>0)$.

解 (1) $f(-3)=2+(-3)=-1$,

$f(0)=2+0=2$,

$f(1)=2^1=2$.

(2) $f(\Delta x)-f(0)=2^{\Delta x}-2$,

$f(-\Delta x)-f(0)=2+(-\Delta x)-2=-\Delta x$.

6. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，**求** $f(2+x),f(2x),f(x^2),f(f(x)),f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

解
$$f(2+x)=\frac{1}{1+2+x}=\frac{1}{3+x},$$

$$f(2x)=\frac{1}{1+2x},$$

$$f(x^2)=\frac{1}{1+x^2},$$

$$f(f(x))=f\left(\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x},$$

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f(1+x)=\frac{1}{1+1+x}=\frac{1}{2+x}.$$

7. 试问下列函数是由哪些基本初等函数复合而成：

(1) $y=(1+x)^{20}$；　　(2) $y=(\arcsin x^2)^2$；

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$；　　(4) $y=2^{\sin^2 x}$.

解　(1) $y=(1+x)^{20}$**由** $y=r^{20}, r=s+t, s=1, t=x$ **复合而成**.

(2) $y=(\arcsin x^2)^2$ **由** $y=r^2, r=\arcsin s, s=x^2$ **复合而成**.

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$**由** $y=\lg r, r=s+t, s=1, t=u^{\frac{1}{2}}, u=s+w, w=x^2$ **复合而成**.

(4) $y=2^{\sin^2 x}$**由** $y=2^r, r=s^2, s=\sin x$ **复合而成**.

8. 在什么条件下，函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$**的反函数就是它本身？**

解　**由** $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$**中解出** x.

因
$$(cx+d)y=ax+b, (cy-a)x=b-dy,$$
故
$$x=\frac{-dy+b}{cy-a}.$$
比较 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$**和** $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$**知，当** $a+d=0$ **时，或当** $b=c=0$ **而** $a=d\neq 0$ **时，函数** $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$**的反函数就是它本身.**

9. 试作函数 $y=\arcsin(\sin x)$**的图象.**

解　$y=\arcsin(\sin x)$**为以** 2π **为周期的周期函数，故仅在** $[-\pi,\pi]$**内作出其图象即可（图** 1-7**）.**

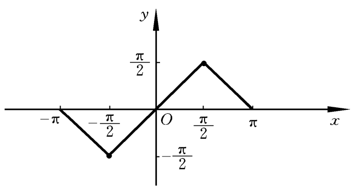

图 1-7

注意：由 $\arcsin[\sin(-x)]=-\arcsin(\sin x)$**知，**$y=\arcsin(\sin x)$**为奇函数，其图象关于原点对称.**

10. 试问下列等式是否成立?

(1) $\tan(\arctan x)=x, x\in\mathbf{R}$;

(2) $\arctan(\tan x)=x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

解　(1) $\tan(\arctan x)=x$ **在** $x\in\mathbf{R}$ **成立.**

(2) **由于** $y=\arctan x$ **的值域为** $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,**而** x **的取值范围** $D=\{x\mid x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$,**故** $y=\arctan(\tan x)\neq x$.

或令 $x=\frac{5}{4}\pi$,**则** $\arctan\left(\tan\frac{5}{4}\pi\right)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}\neq\frac{5}{4}\pi$,**故** $\arctan(\tan x)\neq x$.

11. 试问 $y=|x|$ **是初等函数吗?**

解　$y=|x|=\sqrt{x^2}$,**故** $y=|x|$ **是初等函数.**

12. 证明关于函数 $y=[x]$ **的如下等式:**

(1) **当** $x>0$ **时,** $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1$;

(2) **当** $x<0$ **时,** $1\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$.

证　(1) **由定义知,** $\forall\alpha\in\mathbf{R}_+$ **有** $[\alpha]\leqslant\alpha<[\alpha]+1$,**得**

$$\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]+1\Rightarrow\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x},$$

即

$$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1.$$

(2) **由定义知,** $\forall\beta\in\mathbf{R}_-$ **有** $\beta-1<[\beta]\leqslant\beta$,**得**

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}\Rightarrow 1-x>x\left[\frac{1}{x}\right]\geqslant 1.$$

§4　具有某种特性的函数

1. 证明: $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ **是 R 上的有界函数.**

证　**当** $x=0$ **时,**

$$f(0)=0,$$

当 $x\neq 0$ 时，
$$|f(x)|=\frac{|x|}{x^2+1}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2},$$
即 $\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}$. 故 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的有界函数.

2.（1）叙述无界函数的定义；

（2）证明：$f(x)=\frac{1}{x^2}$ 为 $(0,1)$ 上的无界函数；

（3）举出函数 f 的例子，使 f 为闭区间 $[0,1]$ 上的无界函数.

解　（1）定义：设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若对 $\forall M>0$，$\exists x\in D$，使 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 为数集 D 上的无界函数.

（2）对 $\forall M>0$，取 $x_0=\sqrt{\frac{1}{M+1}}\in(0,1)$，则有
$$|f(x_0)|=|M+1|=M+1>M,$$
故 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 为 $(0,1)$ 上的无界函数.

（3）例：
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x\in(0,1),\\ \frac{1}{2}, & x=0,x=1,\end{cases}$$
由（2）知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 为无界函数.

3. 证明下列函数在指定区间上的单调性：

（1）$y=3x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增；

（2）$y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格递增；

（3）$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格递减.

证　（1）对 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，当 $x_1<x_2$ 时，
$$f(x_2)-f(x_1)=(3x_2-1)-(3x_1-1)=3(x_2-x_1)>0,$$
故 $y=3x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增.

（2）对 $\forall x_1,x_2\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，当 $x_1<x_2$ 时，
$$\sin x_2-\sin x_1=2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2},$$

而 $0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\frac{x_2+x_1}{2}<\frac{\pi}{2}$，因此

$$\sin x_2-\sin x_1>0.$$

故 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格递增.

(3) 对 $\forall x_1,x_2\in[0,\pi]$，当 $x_1<x_2$ 时，

$$\cos x_2-\cos x_1=-2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\sin\frac{x_2+x_1}{2},$$

而 $0<\frac{x_2-x_1}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0<\frac{x_2+x_1}{2}<\pi$，因此

$$\cos x_2-\cos x_1<0.$$

故 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格递减.

4. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{1}{2}x^4+x^2-1$；　　(2) $f(x)=x+\sin x$；

(3) $f(x)=x^2e^{-x^2}$；　　(4) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

解　(1) $f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^4+(-x)^2-1=\frac{1}{2}x^4+x^2-1=f(x)$，

$f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(-x)=-x+\sin(-x)=-(x+\sin x)=-f(x)$，

$f(x)$ 为奇函数.

(3) $f(-x)=(-x)^2e^{-(-x)^2}=x^2e^{-x^2}=f(x)$，

$f(x)$ 为偶函数.

(4)
$$\begin{aligned}f(-x)&=\lg\left[\sqrt{1+(-x)^2}+(-x)\right]=\lg\left[\sqrt{1+x^2}-x\right]\\&=\lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})\\&=-f(x),\end{aligned}$$

$f(x)$ 为奇函数.

5. 求下列函数的周期：

(1) $\cos^2 x$；　　(2) $\tan 3x$；

(3) $\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{3}$.

解　(1)
$$f(x)=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x,$$
由 $\cos 2x$ 的周期为 π，知 $\cos^2 x$ 的周期为 π.

(2) $f(x)=\tan 3x$ 的周期为 $\frac{\pi}{3}$.

(3)
$$f(x)=\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{3},$$
由 $\cos\frac{x}{2}$ 的周期为 4π，$\sin\frac{x}{3}$ 的周期为 6π，知 $\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{3}$ 的周期为 12π.

6. 设函数 f 定义在 $[-a,+a]$ 上，证明：

(1) $F(x)=f(x)+f(-x)$，$x\in[-a,+a]$ 为偶函数；

(2) $G(x)=f(x)-f(-x)$，$x\in[-a,+a]$ 为奇函数；

(3) f 可表示为某个奇函数与某个偶函数之和.

证　(1) $F(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(x)+f(-x)=F(x)$，$\forall x\in[-a,+a]$. 故 $F(x)$ 为偶函数.

(2) $G(-x)=f(-x)-f[-(-x)]=-[f(x)-f(-x)]=-G(x)$，$\forall x\in[-a,+a]$. 故 $G(x)$ 为奇函数.

(3) $f=\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}G(x)$，$\forall x\in[-a,+a]$. 故 $\frac{1}{2}F(x)$ 与 $\frac{1}{2}G(x)$ 分别为偶函数与奇函数.

7. 设 f,g 为定义在 D 上的有界函数，满足
$$f(x)\leqslant g(x),\quad x\in D.$$
证明：(1) $\sup\limits_{x\in D} f(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D} g(x)$；

(2) $\inf\limits_{x\in D} f(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D} g(x)$.

证　(1) $\forall x\in D$ 有 $f(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D} f(x)$，$f(x)\leqslant g(x)$，$g(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D} g(x)$，故
$$f(x)\leqslant\sup_{x\in D} g(x),$$
即 $\sup\limits_{x\in D} g(x)$ 为 $f(x)$ 的一个上界，由上确界定义有
$$\sup_{x\in D} f(x)\leqslant\sup_{x\in D} g(x).$$
(2) $\forall x\in D$ 有 $\inf\limits_{x\in D} f(x)\leqslant f(x)$，$f(x)\leqslant g(x)$，故
$$\inf_{x\in D} f(x)\leqslant g(x),$$

即$\inf\limits_{x\in D} f(x)$为$g(x)$的一个下界,由下确界定义有

$$\inf_{x\in D} f(x)\leqslant \inf_{x\in D} g(x).$$

8. 设f为定义在D上的有界函数,证明:

(1) $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D} f(x)$;

(2) $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}$.

证 (1) 设$\inf\limits_{x\in D} f(x)=\xi$,由下确界定义知$\forall x\in D$有$f(x)\geqslant\xi$,即$-f(x)\leqslant-\xi\Rightarrow-\xi$为$-f(x)$的上界.

又$\forall\alpha<-\xi$,即$-\alpha>\xi$,则$\exists x_0\in D$,使得$f(x_0)<-\alpha$,即$-f(x_0)>\alpha\Rightarrow-\xi$为$-f(x)$的最小上界,故

$$\sup_{x\in D}\{-f(x)\}=-\xi=-\inf_{x\in D} f(x).$$

(2) 设$\sup\limits_{x\in D} f(x)=\eta$,由上确界定义知$\forall x\in D$有$f(x)\leqslant\eta$,即$-f(x)\geqslant-\eta$,即$-\eta$为$-f(x)$的一个下界.

又$\forall\beta>-\eta$,即$-\beta<\eta$,则$\exists x_1\in D$,使得$f(x_1)>-\beta$,即$-f(x_1)<\beta\Rightarrow-\eta$为$-f(x)$的最大下界,故

$$-\sup_{x\in D}\{f(x)\}=-\eta=\inf_{x\in D}\{-f(x)\}.$$

9. 证明:$\tan x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上无界,而在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内任一闭区间$[a,b]$上有界.

证 先证$\tan x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上无界.

对$\forall M>0$,取$x_0=\arctan(M+1)$,且$x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则有

$$|\tan x_0|=|\tan[\arctan(M+1)]|=|M+1|=M+1>M.$$

故$\tan x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上无界.

而对于$\forall[a,b]\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则由$\tan x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,知$\tan x$在$[a,b]$上单调递增,即$\forall x\in[a,b]$有

$$\tan a\leqslant\tan x\leqslant\tan b.$$

因此 $\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的任一闭区间 $[a,b]$ 上有界.

10. 讨论狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数}\end{cases}$ 的有界性、单调性与周期性.

解　(1) 有界性：$\forall x\in\mathbf{R}$，恒有 $0\leqslant D(x)\leqslant 1$，故 $D(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

(2) 单调性：对任给有理数 $r\in\mathbf{R}$，由实数的稠密性知，存在无理数 x_1,x_2，使

$$x_1<r<x_2,\quad \text{而 } D(x_1)<D(r),D(x_2)<D(r).$$

对任给无理数 $x\in\mathbf{R}$，由实数的稠密性知，存在有理数 r_1,r_2，使

$$r_1<x<r_2,\quad \text{而 } D(x)<D(r_1),D(x)<D(r_2).$$

因此 $D(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上无单调性.

(3) 由于有理数与有理数之和为有理数，有理数与无理数之和为无理数，故对任给有理数 r，都有

$$\forall x\in\mathbf{R},\quad D(x+r)=D(x).$$

即 $D(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，但没有最小正周期.

11. 证明：$f(x)=x+\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上严格递增.

证　由初等数学知，$0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，恒有

$$0<\sin x<x.$$

对于 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，若 $x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=x_2+\sin x_2-x_1-\sin x_1=x_2-x_1+2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}\\&\geqslant x_2-x_1-2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|=2\left[\frac{x_2-x_1}{2}-\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\right].\end{aligned}$$

i) 当 $\frac{x_2-x_1}{2}>1$ 时，

$$f(x_2)-f(x_1)\geqslant 2\left[\frac{x_2-x_1}{2}-\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\right]>2\left[\frac{x_2-x_1}{2}-1\right]>0.$$

ii) 当 $0<\frac{x_2-x_1}{2}\leqslant 1$ 时，$\sin\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{x_2-x_1}{2}$，即

$$f(x_2)-f(x_1)\geqslant 2\left[\frac{x_2-x_1}{2}-\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\right]>0.$$

即 $f(x_2)>f(x_1)$，故 $f(x)$ 在 **R** 上严格递增.

12. 设定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数 f 在任何闭区间 $[a,b]$ 上有界. 定义 $[a,+\infty)$ 上的函数：

$$m(x)=\inf_{a\leqslant y\leqslant x}f(y),\quad M(x)=\sup_{a\leqslant y\leqslant x}f(y).$$

试讨论 $m(x)$ 与 $M(x)$ 的图象，其中

(1) $f(x)=\cos x, x\in[0,+\infty)$；

(2) $f(x)=x^2, x\in[-1,+\infty)$.

解 (1) $$f(x)=\cos x,\quad x\in[0,+\infty).$$

由 $\cos x\leqslant 1,\cos 0=1$ 知

$$M(x)=\sup_{0\leqslant y\leqslant x}f(y)=f(0)=1.$$

由 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上为单调递减函数，及 $\cos\pi=-1,\cos x\geqslant -1$ 知

$$m(x)=\inf_{a\leqslant y\leqslant x}f(y)=\begin{cases}\cos x, & x\in[0,\pi],\\ -1, & x\in(\pi,+\infty).\end{cases}$$

$m(x)$ 与 $M(x)$ 的图象如图 1-8 所示.

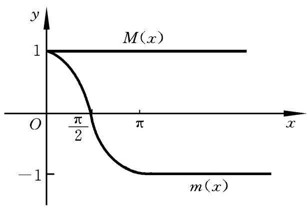

图 1-8

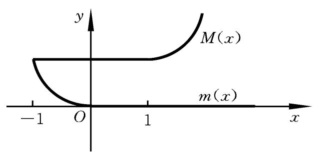

图 1-9

(2) $f(x)=x^2, x\in[-1,+\infty)$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant 1$，而 $f(-1)=1$；当 $x>1$ 时，$f(x)$ 为单调递增函数. 故

$$M(x)=\sup_{-1\leqslant y\leqslant x}f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,1],\\ x^2, & x\in(1,+\infty).\end{cases}$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 为单调递减函数；当 $0<x<+\infty$ 时，$f(x)$ 为单调递增函数且 $f(0)=0$. 故

$$m(x)=\inf_{-1\leqslant y\leqslant x}f(y)=\begin{cases}x^2, & x\in[-1,0],\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

$m(x)$ 与 $M(x)$ 的图象如图 1-9 所示.

§5　总 练 习 题

1. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，证明：

(1) $\max\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b+|a-b|)$；

(2) $\min\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

证　(1) 当 $a>b$ 时，$\max\{a,b\}=a$，而

$$\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)=\frac{1}{2}(a+b+a-b)=a,$$

当 $a\leqslant b$ 时，$\max\{a,b\}=b$，而

$$\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)=\frac{1}{2}(a+b+b-a)=b.$$

故
$$\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|),\quad a,b\in\mathbf{R}.$$

(2) 当 $a\geqslant b$ 时，$\min\{a,b\}=b$，而

$$\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)=\frac{1}{2}(a+b-a+b)=b,$$

当 $a<b$ 时，$\min\{a,b\}=a$，而

$$\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)=\frac{1}{2}(a+b-b+a)=a.$$

故
$$\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|),\quad a,b\in\mathbf{R}.$$

2. 设 f 和 g 都是 D 上的初等函数，定义

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad m(x)=\min\{f(x),g(x)\},x\in D.$$

试问 $M(x)$ 和 $m(x)$ 是否为初等函数？

解　$M(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$

$$=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)\}+\frac{1}{2}\{f^2(x)+g^2(x)-2f(x)g(x)\}^{1/2},$$

$$M(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}$$

$$=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{2}\{f^2(x)+g^2(x)-2f(x)g(x)\}^{1/2}.$$

由于 f,g 均为初等函数,故 $M(x),m(x)$均为 D 上初等函数.

3. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,求:

$$f(-x),f(x+1),f(x)+1,f\left(\frac{1}{x}\right),\frac{1}{f(x)},f(x^2),f(f(x)).$$

解　$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}.$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\frac{x}{x+2}.$$

$$f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{2}{1+x}.$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}.$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1+x}{1-x}.$$

$$f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$f(f(x))=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=x.$$

4. 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$,求 $f(x)$.

解　令 $\frac{1}{x}=u$,则 $x=\frac{1}{u}$,将其代入题给方程得

$$f(u)=\frac{1}{u}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}=\frac{1}{u}+\frac{1}{|u|}\sqrt{1+u^2},$$

即
$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{|x|}\sqrt{1+x^2}.$$

5. 利用函数 $y=[x]$ 求解：

（1）某系各班级推选学生代表，每5人推选1名代表，余额满3人可增选1名，写出可推选代表数 y 与班级学生数 x 之间的函数关系（假设每班学生数为30～50人）；

（2）正数 x 经四舍五入后得整数 y，写出 y 与 x 之间的函数关系.

解　（1）由题意知，若学生数不为5的整数倍，则满3人可增选1人，而 $\left[\frac{3+2}{5}\right]=1$，同时 $\left[\frac{1+2}{5}\right]=0$，$\left[\frac{2+2}{5}\right]=0$，$\left[\frac{4+2}{5}\right]=1$，故函数关系为

$$y=\left[\frac{x+2}{5}\right],\quad x=30,31,\cdots,49,50.$$

（2）由题意知，若 $0<t<0.5$，则 $[t+0.5]=0$；若 $0.5\leqslant t<1$，则 $[t+0.5]=1$. 故函数关系为

$$y=[x+0.5],\quad x>0.$$

6. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象，试作下列各函数的图象：

（1）$y=-f(x)$；　（2）$y=f(-x)$；　（3）$y=-f(-x)$；

（4）$y=|f(x)|$；　（5）$y=\mathrm{sgn}f(x)$；　（6）$y=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$；

（7）$y=\frac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$.

解　设 $y=f(x)$ 的图象如图1-10所示，则

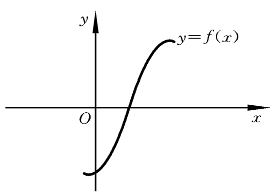

图1-10

(1) $y=-f(x)$,此图象(图 1-11)与 $y=f(x)$ 关于 x 轴对称.

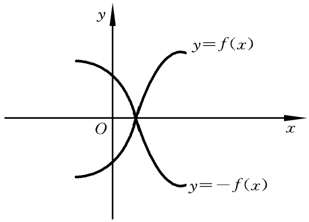

图 1-11

(2) $y=f(-x)$,此图象(图 1-12)与 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称.

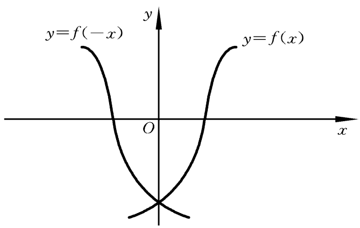

图 1-12

(3) $y=-f(-x)$,此图象(图 1-13)与 $y=f(x)$ 关于原点对称.

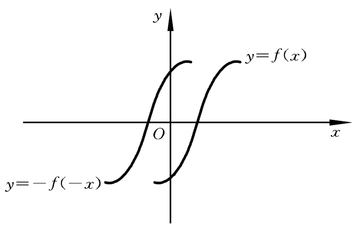

图 1-13

(4) $y=|f(x)|$,即

$$y=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x \text{ 满足 } f(x)\geqslant 0 \text{ 时,此时图象与 } f(x) \text{ 相同,} \\ -f(x), & \text{当 } x \text{ 满足 } f(x)<0 \text{ 时,此时图象与 } f(x) \text{ 关于 } x \text{ 轴对称.} \end{cases}$$

$y=|f(x)|$的图象如图 1-14 所示.

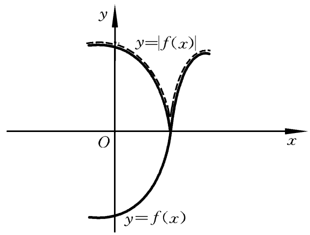

图 1-14

(5) $y=\operatorname{sgn}f(x)$,即

$$y=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 满足 } f(x)>0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 满足 } f(x)=0 \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } x \text{ 满足 } f(x)<0 \text{ 时.} \end{cases}$$

$y=\operatorname{sgn}f(x)$的图象如图 1-15 所示.

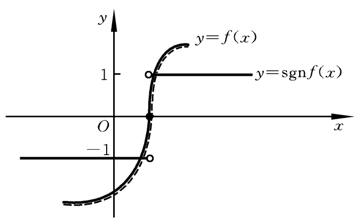

图 1-15

(6) $y=\dfrac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$,即

$$y=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x \text{ 满足 } f(x)>0 \text{ 时,此时图象与 } f(x) \text{ 相同,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 满足 } f(x)\leqslant 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

$y=\dfrac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$的图象如图 1-16 所示.

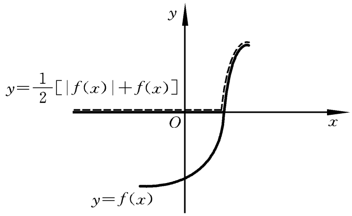

图 1-16

(7) $y=\dfrac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$,即

$$y=\begin{cases} 0, & \text{当 } x \text{ 满足 } f(x)\geqslant 0 \text{ 时;} \\ -f(x), & \text{当 } x \text{ 满足 } f(x)<0 \text{ 时,此时图象与 } y=f(x) \text{ 关于 } x \text{ 轴对称.} \end{cases}$$

$y=\dfrac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$的图象如图 1-17 所示.

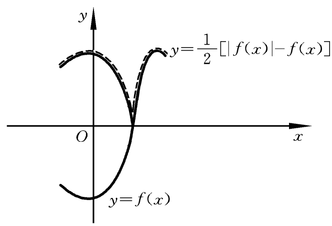

图 1-17

7. 已知函数 f 和 g 的图象,试作下列函数的图象:

(1) $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$;　　(2) $\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$.

解　(1) 此时$\varphi(x)$的图象(图 1-18)为$f(x)$与$g(x)$的图象交汇点之上方

图象(如图虚线部分).

(2) 此时$\psi(x)$的图象(图1-19)为$f(x)$与$g(x)$的图象的交汇点之下方图象(如图虚线部分).

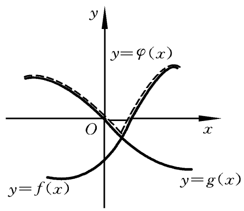

图1-18

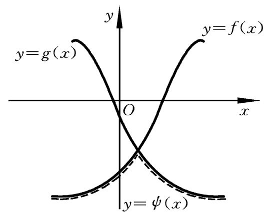

图1-19

8. 设f,g和h为增函数,满足$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x),x\in\mathbf{R}$. 证明:

$$f(f(x))\leqslant g(g(x))\leqslant h(h(x)).$$

证　由已知得　$f(f(x))\leqslant g(f(x))\leqslant g(g(x)),\quad \forall x\in\mathbf{R},$

$$g(g(x))\leqslant h(g(x))\leqslant h(h(x)),\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

故　$$f(f(x))\leqslant g(g(x))\leqslant h(h(x)).$$

9. 设f和g为区间(a,b)上的增函数,证明第7题中定义的$\varphi(x)$和$\psi(x)$也都是(a,b)上的增函数.

证　$\forall x_1,x_2\in(a,b)$,若$x_1<x_2$,则$f(x_1)\leqslant f(x_2),g(x_1)\leqslant g(x_2)$,故

$$\varphi(x_1)=\max\{f(x_1),g(x_1)\}\leqslant\max\{f(x_2),g(x_2)\}=\varphi(x_2),$$

$$\psi(x_1)=\min\{f(x_1),g(x_1)\}\leqslant\min\{f(x_2),g(x_2)\}=\psi(x_2).$$

故$\varphi(x),\psi(x)$均为(a,b)上的增函数.

10. 设f为$[-a,a]$上的奇(偶)函数,证明:若f在$[0,a]$上增,则f在$[-a,0]$上增(减).

证　$\forall x_1,x_2\in[-a,0]$,若$x_1<x_2$,则有$-x_1>-x_2$,且$-x_1,-x_2\in[0,a]$,由于$f(x)$在$[0,a]$上增,故有$f(-x_2)\leqslant f(-x_1)$.

i) 若$f(x)$是$[-a,+a]$上的奇函数,则

$$f(-x_2)=-f(x_2),\quad f(-x_1)=-f(x_1).$$

由 $f(-x_2)\leqslant f(-x_1)$,得 $-f(x_2)\leqslant -f(x_1)$,即 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$,故 f 为 $[-a,0]$ 上增函数.

ii) 若 $f(x)$ 是 $[-a,+a]$ 上的偶函数,则

$$f(-x_2)=f(x_2),\quad f(-x_1)=f(x_1).$$

由 $f(-x_2)\leqslant f(-x_1)$,得 $f(x_2)\leqslant f(x_1)$,即 f 为 $[-a,0]$ 上减函数.

11. 证明:(1) 两个奇函数之和为奇函数,其积为偶函数;

(2) 两个偶函数之和与积都为偶函数;

(3) 奇函数与偶函数之积为奇函数.

证 (1) 设 f,g 为定义在 D 上的两个奇函数,记 $F(x)=f(x)+g(x)$, $G(x)=f(x)g(x)$,则对于 $\forall x\in D$,有

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-[f(x)+g(x)]=-F(x),$$

$$G(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=[-f(x)][-g(x)]=f(x)\cdot g(x)=G(x).$$

故 $F(x)$ 为 D 上奇函数,$G(x)$ 为 D 上偶函数. 结论成立.

(2) 设 f,g 为定义在 D 上的两个偶函数,记 $F(x)=f(x)+g(x)$,$G(x)=f(x)g(x)$,则对于 $\forall x\in D$,有

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x),$$

$$G(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=G(x).$$

故 $F(x)$,$G(x)$ 都为 D 上偶函数. 结论成立.

(3) 设 f,g 分别为 D 上的奇,偶函数,记 $G(x)=f(x)\cdot g(x)$,则对于 $\forall x\in D$,有

$$G(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot g(x)=-G(x).$$

故 $G(x)$ 为 D 上奇函数. 结论成立.

12. 设 f,g 为 D 上的有界函数. 证明:

(1) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\inf\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$;

(2) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\geqslant\sup\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)$.

证 由第一章 §4 中习题 8 知

$$\sup_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf_{x\in D}f(x),\quad \inf_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup_{x\in D}f(x).$$

由第一章章 §4 中例 2(原教材)知

$$\inf_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\},$$

$$\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\sup_{x\in D} f(x)+\sup_{x\in D} g(x).$$

(1) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}=\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\inf\limits_{x\in D}\{-g(x)\}$

$$\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)-g(x)\}$$

$$=\inf_{x\in D}\{f(x)\},$$

故
$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\inf_{x\in D} f(x)+\sup_{x\in D} g(x).$$

(2) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf\limits_{x\in D} g(x)=\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\sup\limits_{x\in D}\{-g(x)\}$

$$\geqslant\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)+[-g(x)]\}$$

$$=\sup_{x\in D} f(x),$$

故
$$\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\geqslant\sup_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x).$$

13. 设 f,g 为 D 上非负有界函数. 证明：

(1) $\inf\limits_{x\in D} f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D} g(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\cdot g(x)\}$；

(2) $\sup\limits_{x\in D} f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D} g(x)\geqslant\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\cdot g(x)\}$.

证　(1) **由下确界定义知** $f(x)\geqslant\inf\limits_{x\in D} f(x)$，$g(x)\geqslant\inf\limits_{x\in D} g(x)$，**而** f,g **为** D **上非负有界函数，故**

$$f(x)\cdot g(x)\geqslant\inf_{x\in D} f(x)\cdot\inf_{x\in D} g(x),$$

即 $\inf\limits_{x\in D} f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D} g(x)$ **为** $f(x)\cdot g(x)$ **的一个下界，从而有**

$$\inf_{x\in D} f(x)\cdot\inf_{x\in D} g(x)\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)\cdot g(x)\}\quad(\textbf{下确界为最大下界}).$$

(2) **由上确界定义知** $f(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D} f(x)$，$g(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D} g(x)$，**而** f,g **为** D **上非负有界函数，故**

$$f(x)\cdot g(x)\leqslant\sup_{x\in D} f(x)\cdot\sup_{x\in D} g(x),$$

即 $\sup\limits_{x\in D} f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D} g(x)$ **为** $f(x)\cdot g(x)$ **的一个上界，从而有**

$$\sup_{x\in D}\{f(x)\cdot g(x)\}\leqslant\sup_{x\in D} f(x)\cdot\sup_{x\in D} g(x)\quad(\textbf{上确界为最小上界}).$$

14. 将定义在 $[0,+\infty)$ 的函数 f 延拓到 R 上，使延拓后的函数为 i) 奇函数；ii) 偶函数. 设

(1) $f(x)=\sin x+1$；

(2) $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2}, & 0<x\leqslant 1,\\ x^3, & x>1.\end{cases}$

解　设 $F(x)$、$G(x)$ 分别为延拓后的奇函数、偶函数,则

$$F(x)=\begin{cases}-f(-x), & -\infty<x<0,\\ 0, & x=0,\\ f(x), & 0<x<+\infty,\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}f(-x), & -\infty<x<0,\\ f(0), & x=0,\\ f(x), & 0<x<+\infty,\end{cases}$$

(1)
$$F(x)=\begin{cases}-[\sin(-x)+1], & -\infty<x<0,\\ 0, & x=0,\\ \sin x+1, & 0<x<+\infty\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sin x-1, & -\infty<x<0,\\ 0, & x=0,\\ \sin x+1, & 0<x<+\infty.\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}\sin(-x)+1, & -\infty<x<0,\\ \sin 0+1, & x=0,\\ \sin x+1, & 0<x<+\infty\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-\sin x, & -\infty<x<0,\\ 1, & x=0,\\ 1+\sin x, & 0<x<+\infty.\end{cases}$$

(2) 由
$$f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^3, & 1<x<+\infty,\end{cases}$$

得
$$f(-x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-(-x)^2}, & 0\leqslant -x\leqslant 1,\\ (-x)^3, & 1<-x<+\infty,\end{cases}$$

即
$$f(-x)=\begin{cases}-x^3, & -\infty<x<-1,\\ 1-\sqrt{1-x^2}, & 1\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

故有 $F(x)=\begin{cases}-f(-x), & -\infty<x<0,\\ 0, & x=0,\\ f(x), & 0<x<+\infty\end{cases}=\begin{cases}x^3, & -\infty<x<-1,\\ \sqrt{1-x^2}-1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1-\sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^3, & 1<x<+\infty.\end{cases}$

$$G(x)=\begin{cases}f(-x), & -\infty<x<0,\\ f(0), & x=0,\\ f(x), & 0<x<+\infty\end{cases}=\begin{cases}-x^3, & -\infty<x<-1,\\ 1-\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x^3, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

15. 设 f 为定义在 $\mathbf{R}$ 上以 h 为周期的函数，a 为实数. 证明：若 f 在 $[a,a+h]$ 上有界，则 f 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

证　由于 f 在 $[a,a+h]$ 上有界，故 $\exists M>0$，对于 $\forall x\in[a,a+h]$ 有 $|f(x)|<M$；对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，则 $\exists k\in\mathbf{N}$，有 k、$t\in[0,h]$ 使 $x-a=kh+t$，即 $x=kh+a+t$. 而 $a+t\in[a,a+h]$，

$$|f(x)|=|f(kh+a+t)|=|f(a+t)|\leqslant M,$$

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

16. 设 f 在区间 I 上有界，记 $M=\sup\limits_{x\in I}f(x)$，$m=\inf\limits_{x\in I}f(x)$. 证明：$\sup\limits_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m$.

证　对 $\forall x',x''\in I$，由确界定义，有

$$(M-f(x'))+(f(x'')-m)\geqslant 0,$$

即
$$f(x')-f(x'')\leqslant M-m,$$

$$(M-f(x''))+(f(x')-m)\geqslant 0,$$

即
$$f(x')-f(x'')\geqslant -(M-m).$$

故
$$|f(x')-f(x'')|\leqslant M-m,$$

即 $M-m$ 为 $|f(x')-f(x'')|$ 的上界.

对 $\forall\alpha<M-m$，若 $\alpha<0$，则

$$|f(x')-f(x'')|>\alpha,\quad \forall x',x''\in I.$$

若 $\alpha\geqslant 0$，则由确界定义知，$\exists x_1,x_2\in I$，使

$$f(x_1)>M-\frac{M-m-\alpha}{2},\quad f(x_2)<m+\frac{M-m-\alpha}{2},$$

即
$$-f(x_2)>-m-\frac{M-m-\alpha}{2}.$$

故
$$f(x_1)-f(x_2)>\alpha,\quad 即\quad |f(x_1)-f(x_2)|>\alpha.$$

由此，对$\forall\alpha<M-m$，有
$$|f(x_1)-f(x_2)|>\alpha.$$

故由确界定义知
$$\sup_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m.$$

［附］　设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为n个正实数，则
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

证　先证$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

用数学归纳法：当$k=1,2$时，不等式成立. 设当$k=n-1$时，不等式成立，则当$k=n$时，将$x_1x_2\cdots x_n$重新排列，使$x_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$，记$A=\frac{1}{n-1}(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})$，则有
$$x_n\geqslant A\geqslant\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}},$$

于是
$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n=\left[\frac{(n-1)A+x_n}{n}\right]^n=\left(A+\frac{x_n-A}{n}\right)^n$$
$$\geqslant A^n+nA^{n-1}\cdot\left(\frac{x_n-A}{n}\right)=A^{n-1}x_n\geqslant x_1x_2\cdots x_n,$$

即
$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

在此不等式中令$x_i=\frac{1}{y_i}$，得
$$\sqrt[n]{\frac{1}{y_1}\cdot\frac{1}{y_2}\cdots\frac{1}{y_n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}\right),$$

即
$$\frac{1}{\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}\right).$$

将 y_i 改写为 x_i，并整理得

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},$$

由此，得$\dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\quad\forall x_i>0.$

第二章　数列极限

知识要点

1. 极限概念是数学分析中的最基本概念，是研究分析学的基础. 要求理解并掌握数列极限的定义，会用适当放大法或条件放大法证明数列极限，会用极限的否定式定义证明极限不存在.

2. 存在有有限极限的数列称为收敛数列. 收敛数列是有界数列，且当 n 充分大（即 $\exists N, \forall n>N$）时，具有保号性、保不等式性以及迫敛性等性质.

3. 数列极限与其子列极限的关系是数列极限中的重要理论，经常用它来证明数列的敛散性.

4. 数列敛散性取决于数列自身（即通项）的性质. 在不能（也没必要）预知数列极限为何值的情形下，可以根据单调有界收敛定理、迫敛性法则、柯西收敛准则及它们的否定式来确定数列的收敛性.

习题详解

§1　数列极限概念

1. 设 $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$ $(n=1,2,\cdots;a=0)$.

（1）对下列 ε 分别求出极限定义中相应的 N：$\varepsilon_1=0.1, \varepsilon_2=0.01, \varepsilon_3=0.001$；

（2）对 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 可找到相应的 N，这是否证明了 a_n 趋于 0？应该怎样做才

对；

(3) 对给定的 ε 是否只能找到一个 N？

解　(1) 由于 $|a_n-a|=a_n\leqslant\frac{2}{n}$，要使 $\frac{2}{n}<\varepsilon_k(k=1,2,3)$，只要 $n>\frac{2}{\varepsilon_k}=2\cdot 10^k(k=1,2,3)$，故对于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，相应的 $N_1=20,N_2=200,N_3=2000$.

(2) 只对三个确定的 ε，寻找出相应的 N，还不足以证明 a_n 趋于 0. 例如，给定数列 $\left\{a_n=\frac{(-1)^n}{10000}\right\}$，对 $\varepsilon_1=0.1,\varepsilon_2=0.01,\varepsilon_3=0.001$，均有相应的 N，使 $n>N$，有 $|a_n-0|<\varepsilon_k(k=1,2,3)$，但 a_n 不趋于 0.

正确的做法是严格按照定义要求去证明. 即

$\forall\varepsilon>0$，欲使 $|a_n-a|=a_n\leqslant\frac{2}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\frac{2}{\varepsilon}$，故 $\exists N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$，从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

(3) 不是. 如(2)中也可取 $N_1=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，或 $N_2=2\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$. 实际上，只要能找到一个 N 满足要求，则所有比 N 大的任何自然数均可作新的 N.

2. 按 ε-N 定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2-1}=\frac{3}{2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0\ (a>1)$.

证　(1) 由于 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$，故对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

(2) 由于 $\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{2n+3}{4n^2-2}\right|\leqslant\frac{3n}{3n^2}=\frac{1}{n}(n\geqslant 3)$，故对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{3,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\right\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2-1}=\frac{3}{2}.$$

(3) 由于 $\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{n!}{n^n}\leqslant\frac{1}{n}$,故对 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,则当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

(4) 由于 $\left|\sin\frac{\pi}{n}-0\right|=\left|\sin\frac{\pi}{n}\right|<\frac{\pi}{n}\ (n\geqslant 3)$,故对 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\max\left\{3,\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]\right\}$,则当 $n>N$ 时,有

$$\left|\sin\frac{\pi}{n}-0\right|<\frac{\pi}{n}<\varepsilon,$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0.$$

(5) 由于 $a>1$,故可设 $a=1+r(r>0)$,则

$$a^n=(1+r)^n=1+nr+\frac{n(n-1)}{2}r^2+\cdots+r^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}r^2(n\geqslant 2).$$

由于
$$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|=\frac{n}{a^n}\leqslant\frac{2n}{n(n-1)r^2}=\frac{2}{(n-1)r^2},$$

故对 $\forall\varepsilon>0$,取
$$N=\left[\frac{2}{(a-1)^2\varepsilon}\right]+2,$$

则当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|<\frac{2}{(n-1)(a-1)^2}<\varepsilon,$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0.$$

3. 根据例 2、例 4 和例 5 的结果(见原教材)求出下列极限,并指出哪些是无穷小数列?

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2^n}}$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

解　(1) **这是例**2 **中** $\alpha=\dfrac{1}{2}$ **的情形．由例**2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0(\alpha>0)$，**知** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$，**且** $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ **为无穷小数列．**

(2) **这是例**5 **中** $a=3$ **的情形．由例**5 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=0(a>0)$，**知** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$.

(3) **这是例**2 **中** $\alpha=3$ **的情形．由此知** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}=0$，**且** $\left\{\dfrac{1}{n^3}\right\}$ **为无穷小数列．**

(4) **这是例** 4 **中** $q=\dfrac{1}{3}$ **的情形．由** $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$，**知** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$，**且** $\left\{\dfrac{1}{3^n}\right\}$ **为无穷小数列．**

(5) **这是例**4 **中** $q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **的情形．由此知** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=0$，**且** $\left\{\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right\}$ **为无穷小数列．**

(6) **这是例** 5 **中** $a=10$ **的情形．故** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}=1$.

(7) **这是例** 5 **中** $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **的情形．故** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}}=1$.

4．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，**则对任意正整数** k，**有** $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

证　**由** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，**知** $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，**当** $n>N$ **时，有** $|a_n-a|<\varepsilon$，**而** $n+k>n>N$，**故有**

$$|a_{n+k}-a|<\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+k}=a.$$

5．试用定义 $1'$（**见原教材，下同**）**证明：**

(1) 数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$不以1为极限;

(2) 数列$\{n^{(-1)^n}\}$发散.

证 (1) 取$\varepsilon_0=\frac{1}{3}$,则当$n>1$时,有$\left|\frac{1}{n}-1\right|\geqslant\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$,即数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$中有无穷多项落在$U\left(1,\frac{1}{3}\right)$之外,故数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$不以1为极限.

(2) 本题即证$\forall a\in\mathbf{R}$有$\lim\limits_{n\to\infty}n^{(-1)^n}\neq a$. 取$\varepsilon_0=1$,则存在正整数$N_0=|[a]|+1$,当$m>N_0$时,只要$n=2m$,$m\in\mathbf{N}_+$,有$n^{(-1)^n}=2m>2|[a]|+2>a+1$,即$|n^{(-1)^n}-a|>1$. 故数列$\{n^{(-1)^n}\}$中有无穷多项落在$U(a,1)$之外,因此$\lim\limits_{n\to\infty}n^{(-1)^n}\neq a$. 由$a$的任意性知数列$\{n^{(-1)^n}\}$发散.

6. 证明定理2.1,并应用它证明数列$\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$的极限为1.

证 定理2.1:数列$\{a_n\}$收敛于a的充要条件是,$\{a_n-a\}$为无穷小数列.

充分性:若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$,则对于$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,$|(a_n-a)-0|<\varepsilon$,即$|a_n-a|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

必要性:若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,$|a_n-a|<\varepsilon$,即$|(a_n-a)-0|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$.

记数列$\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$为$\{a_n\}$,$a_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$,$a=1$. 下证$\{a_n-a\}$即$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$为无穷小数列. 对$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,当$n>N$时,$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$,即$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$为无穷小数列. 由此,得$\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$的极限为1.

7. 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$;当且仅当$a$为何值时反之也成立?

证 由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$知,对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,$|a_n-a|<\varepsilon$. 而$||a_n|-|a||<|a_n-a|$,故$||a_n|-|a||<\varepsilon$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

当且仅当$a=0$时反之也成立. 证明如下.

由$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$知，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，$||a_n|-0|=|a_n|=|a_n-0|<\varepsilon$，故

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

若$a\neq0$，则显然数列$\{(-1)^n a\}$为发散数列，这与已知$\{|(-1)^n a|\}$为收敛数列矛盾，故此时反之不成立.

8. 按ε-N定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^3}=0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，其中 $a_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n} & (n\text{ 为偶数}),\\[2ex] \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n} & (n\text{ 为奇数}).\end{cases}$

证　(1) 由于　$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$，

故对于$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]+1$，则当$n>N$时，有$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|<\varepsilon$，因此

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$$

(2) 由于　$\left|\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^3}\right|=\dfrac{n(n+1)}{2n^3}=\dfrac{n+1}{2n^2}\leqslant\dfrac{2n}{2n^2}=\dfrac{1}{n}$，

故对于$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，有$\left|\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^3}-0\right|<\varepsilon$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}=0.$$

(3) $\forall\varepsilon>0$，欲使$|a_n-1|<\varepsilon$，须

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

及　$$\left|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|=\left|\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}\right|=\frac{n}{n(\sqrt{n^2+n}+n)}<\frac{1}{2n}<\varepsilon$$

同时成立，这只要$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$即可. 故对$\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，有

$|a_n-1|<\varepsilon$，因此

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1.$$

§2　收敛数列的性质

1．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+1}{4n^3+2n+3}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n}{n^2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{10}\right)$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+1}{4n^3+2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{4+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}=\dfrac{1}{4}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n}\right)=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{-2\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+3}=\dfrac{1}{3}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}+1}=\frac{1}{2}.$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{10}\right)=\sum\limits_{k=1}^{10}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=10$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{3^n}}$

$$=2\cdot\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}}=2.$$

2. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且$a<b$. 证明：存在正数$N$，使得当$n>N$时有$a_n<b_n$.

证　由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，得

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}a_n=b-a>0.$$

由极限的保号性知，存在正数N，使得当$n>N$时，有$b_n-a_n>0$，即$a_n<b_n$.

3. 设$\{a_n\}$为无穷小数列，$\{b_n\}$为有界数列. 证明$\{a_nb_n\}$为无穷小数列.

证　由于$\{b_n\}$为有界数列，故存在$M>0$，使得$\forall n\in\mathbf{N}_+$，有$|b_n|<M$.

而由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$知，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有

$$|a_n-0|=|a_n|<\frac{\varepsilon}{M+1},$$

故

$$|a_nb_n-0|=|a_n||b_n|<\frac{\varepsilon}{M+1}\cdot M<\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，因此$\{a_nb_n\}$为无穷小数列.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{\frac{1}{2}}=2.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}-\cdots-\frac{2n-3}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{2^2}-\frac{3}{2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{2n-3}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-2\cdot\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[3-\frac{4}{2^n}-2\cdot\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[3-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\frac{n}{2^n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}3-3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=3.$$

(4) 当 $n>2$ 时,有 $\frac{1}{2}<1-\frac{1}{n}<1$,从而有

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}<\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}<1\quad(n>2).$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$,故根据极限的迫敛性,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}=1$.

(5) 由于 $\frac{n+1}{(2n)^2}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{n+1}{n^2}$,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(2n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=0,$$

故根据极限的迫敛性,得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]=0.$$

(6) 因 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2}}=1$,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}1=1.$$

故根据极限的迫敛性,得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

5. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中一个是收敛数列,另一个是发散数列. 证明 $\{a_n+b_n\}$ 是发散数列. 又问 $\{a_nb_n\}$ 和 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}(b_n\neq 0)$ 是否必为发散数列?

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,数列 $\{b_n\}$ 发散.

反证法:若 $\{a_n+b_n\}$ 是收敛数列,即 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=c$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}a_n=c-a,$$

即 $\{b_n\}$ 为收敛数列. 这与已知矛盾,故 $\{a_n+b_n\}$ 为发散数列.

若取 $a_n=\frac{1}{n^2}$,$b_n=(-1)^n(n=1,2,\cdots)$,则 $\{a_n\}$ 为收敛数列,$\{b_n\}$ 为发散数列,但此时

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}=0.$$

故 $\{a_nb_n\}$ 与 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 不一定是发散数列.

若 $b_n\neq 0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq 0$,数列 $\{a_n\}$ 发散,则 $\{a_nb_n\}$ 与 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 必发散. 证明如下.

反证法:若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=A$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq 0$ 知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{b_n}=\frac{A}{b}.$$

这与已知矛盾. 类似地若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=B$,由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq0$知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\cdot b_n=Bb.$$

也与已知矛盾. 故此时$\{a_nb_n\}$、$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$均为发散数列.

6. 证明以下数列发散:

(1) $\left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\right\}$;　　(2) $\{n^{(-1)^n}\}$;　　(3) $\left\{\cos\frac{n\pi}{4}\right\}$.

证　(1) 由于$(-1)^n\frac{n}{n+1}=(-1)^n-\frac{(-1)^n}{n+1}$,而数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}$收敛,$\{(-1)^n\}$发散,故由上题结论知$\left\{(-1)^n+(-1)^n\frac{-1}{n+1}\right\}$发散,即$\left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\right\}$为发散数列.

(2) 取$\{n^{(-1)^n}\}$的子列:$\{(2k)^{(-1)^{2k}}\}$,由于$\lim\limits_{k\to\infty}(2k)^{(-1)^{2k}}=\lim\limits_{k\to\infty}2k$不存在,故由定理2.8知$\{n^{(-1)^n}\}$发散.

(3) 记$\cos\frac{n\pi}{4}=c_n$,取$\{c_n\}$之二不同子列$\{c_{8k}\}$,$\{c_{8k+4}\}$,则

$$\lim_{k\to\infty}c_{8k}=\lim_{k\to\infty}\cos\frac{8k}{4}\pi=\lim_{k\to\infty}\cos2k\pi=1,$$

$$\lim_{k\to\infty}c_{8k+4}=\lim_{k\to\infty}\cos\frac{8k+4}{4}\pi=\lim_{k\to\infty}\cos(2k\pi+\pi)=\lim_{k\to\infty}\cos\pi=-1,$$

因此$\lim\limits_{k\to\infty}c_{8k}\neq\lim\limits_{k\to\infty}c_{8k+4}$. 由定理2.8知$\{n^{(-1)^n}\}$为发散数列.

7. 判断以下结论是否成立(若成立,说明理由;若不成立,举出反例):

(1) 若$\{a_{2k-1}\}$和$\{a_{2k}\}$都收敛,则$\{a_n\}$收敛;

(2) 若$\{a_{3k-2}\}$,$\{a_{3k-1}\}$和$\{a_{3k}\}$都收敛,且有相同极限,则$\{a_n\}$收敛.

解　(1) 此结论不成立. 例如,数列$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$,因为$a_{2k}=1$,$a_{2k-1}=0$ $(k=1,2,\cdots)$,故$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=1$,$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=0$,即$\{a_{2k}\}$,$\{a_{2k-1}\}$均收敛,但$\{a_n\}$发散.

(2) 此结论成立. 证明如下.

设
$$\lim_{k\to\infty}a_{3k-2}=\lim_{k\to\infty}a_{3k-1}=\lim_{k\to\infty}a_{3k}=a,$$
对于$\forall\varepsilon>0$,$\exists N_1,N_2,N_3\in\mathbf{N}_+$,使得当$k>N_1$,$k>N_2$,$k>N_3$时,分别有
$$|a_{3k-2}-a|<\varepsilon,\quad |a_{3k-1}-a|<\varepsilon,\quad |a_{3k}-a|<\varepsilon.$$
取$N=N_1+N_2+N_3$,则当$n>N$时,上述三个不等式同时成立,故当$n>N$时,
$$|a_n-a|<\varepsilon,\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

8. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\ \dfrac{3}{4}\ \cdots\ \dfrac{2n-1}{2n}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}]\ (0<\alpha<1)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n})\ (|\alpha|<1)$.

解　(1) 利用几何平均值小于算术平均值性质(见本书第一章附)得
$$2=\frac{1+3}{2}>\sqrt{1\cdot 3},\quad 4>\frac{3+5}{2}>\sqrt{3\cdot 5},\quad \cdots,$$
$$2n=\frac{(2n-1)+(2n+1)}{2}>\sqrt{(2n-1)(2n+1)},$$
因此
$$\begin{aligned}0&<\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\\&<\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2n-1}{\sqrt{1\cdot 3}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\cdots\cdot\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}},\end{aligned}$$
且$\lim\limits_{n\to\infty}0=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$,于是由极限的迫敛性,得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}=0.$$

(2) 因
$$\begin{aligned}a_n&=\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}=\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&<1+\frac{1}{n}+\left[\frac{1}{n(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\right]\quad(n\geqslant 2),\end{aligned}$$

故 $$1\leqslant a_n<1+\frac{1}{n}+\frac{n-2}{n(n-1)}\ (n\geqslant 2).$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}+\frac{n-2}{n(n-1)}\right]=1$，故

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}=1.$$

(3) 由$1+\frac{1}{n}>1(0<\alpha<1)$知$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}<1+\frac{1}{n}$，又$n^{\alpha}>0$，则

$$n^{\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}<n^{\alpha}+n^{\alpha-1},$$

即 $$(1+n)^{\alpha}-n^{\alpha}<n^{\alpha-1}=\frac{1}{n^{1-\alpha}},$$

故有 $$0<(1+n)^{\alpha}-n^{\alpha}<\frac{1}{n^{1-\alpha}}\ (\alpha<1).$$

然而$\lim\limits_{n\to\infty}0=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}=0(\alpha<1)$，因此，由极限的迫敛性，得

$$\lim_{n\to\infty}[(1+n)^{\alpha}-n^{\alpha}]=0.$$

(4) $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha}\frac{1-\alpha^4}{1-\alpha^2}\cdots\frac{1-\alpha^{2^{n+1}}}{1-\alpha^{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\alpha^{2^{n+1}}}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

由$|\alpha|<1$，知$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{2^{n+1}}=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\alpha^{2^{n+1}}}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}.$$

9. 设$a_1,a_2,\cdots,a_m$为m个正数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

证　设$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}=A$则有

$$A\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{m}\,A.$$

因$\lim\limits_{n\to\infty}A=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}\,A=A$，故由极限的迫敛性，得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

10. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. **证明**：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{n}=a$；

(2) **若** $a>0, a_n>0$，**则** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

证　(1) **由**$[na_n]$**的定义知**，$\forall n\in\mathbf{N}_+$ **有** $na_n-1<[na_n]\leqslant na_n$，**即**

$$a_n-\frac{1}{n}<\frac{[na_n]}{n}\leqslant a_n.$$

因$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{1}{n}\right)=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，**故由极限的迫敛性，得**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[na_n]}{n}=a.$$

(2) **由于**$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，**故取** $\varepsilon=\dfrac{a}{3}$，**则**$\exists N\in\mathbf{N}_+$，**当** $n>N$ **时，有** $|a_n-a|<\varepsilon$，**即**

$$\frac{2}{3}a<a_n<\frac{4}{3}a.$$

构造新数列$\{b_n\}$，**使** $b_n=a_{n+N}$，**则**$\{b_n\}$**为收敛数列**$\{a_n\}$**的平凡子列，且与**$\{a_n\}$**同时收敛于相同的极限．由于**$\{b_n\}$**也满足**

$$\frac{2}{3}a<b_n<\frac{4}{3}a\ (n=1,2,\cdots),$$

于是

$$\sqrt[n]{\frac{2}{3}a}<\sqrt[n]{b_n}<\sqrt[n]{\frac{4}{3}a}.$$

又因$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2}{3}a}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{4}{3}a}=1$，**故**$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=1$，**从而**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$$

§3　数列极限存在的条件

1. 利用$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，**求下列极限**：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n$；　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

解　（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\dfrac{n-1}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\mathrm{e}$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\dfrac{n+1}{n+2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}=\mathrm{e}.$$

（4）因$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}=\mathrm{e}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=\mathrm{e},$$

即
$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right]^2=\mathrm{e},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\sqrt{\mathrm{e}}.$$

（5）
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},$$

而由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$，$a_n>0$，$a_n\to a$，$a>0$ 知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}=1.$$

2. 试问下面的解题方法是否正确：

求$\lim\limits_{n\to\infty}2^n$.

解　**设**$a_n=2^n$ **及**$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=a$. **由于**$a_n=2a_{n-1}$，**两边取极限**$(n\to\infty)$**得**$a=2a$，

所以 $a=0$.

解　以上解题方法错误. 此解法的关键在于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 的存在性，即只有在 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在的前提下，才能对 $a_n=2a_{n-1}$ 两边取极限. 而本题的 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n$ 恰好不存在，故之后的推导均无意义.

3. 证明下列数列极限存在，并求其值：

(1) $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$，$n=1,2,\cdots$；

(2) $a_1=\sqrt{c}\ (c>0)$，$a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$，$n=1,2,\cdots$；

(3) $a_n=\dfrac{c^n}{n!}\ (c>0)$，$n=1,2,\cdots$.

证　(1) 先证 $\{a_n\}$ 是有界数列. 事实上，对 $\forall n\in\mathbf{N}_+$ 有

$$1<a_n<2.$$

现用数学归纳法证明如下：当 $k=1$ 时，$a_1=\sqrt{2}$，$1<\sqrt{2}<2$ 成立. 设 $k=n$ 时结论成立，即 $1<a_n<2$，则当 $k=n+1$ 时，

$$1<\sqrt{2a_n}=a_{n+1}=\sqrt{2a_n}<\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2,$$

故

$$1<a_n<2,\ \forall n\in\mathbf{N}_+.$$

再证 $\{a_n\}$ 严格单调递增. 由于 $1<a_n<2$，故 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\sqrt{2a_n}}{a_n}=\sqrt{\dfrac{2}{a_n}}>1$，因此 $\{a_n\}$ 严格单调递增.

由单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则对 $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ 两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2a_n},\quad \text{即}\quad a=\sqrt{2a},$$

解之得 $a=2$ 或 $a=0$（不合题意，舍去），故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

(2) 先证 $\{a_n\}$ 为有界数列. 事实上，对 $\forall n\in\mathbf{N}_+$ 有

$$0<a_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4c}.$$

现用数学归纳法证明如下：当 $k=1$ 时，$a_1=\sqrt{c}>0$，且 $\sqrt{c}<\dfrac{1}{2}+$

$\frac{1}{2}\sqrt{1+4c}$. 设$k=n$时结论成立,即$0<a_n<\frac{1}{2}\sqrt{1+4c}$,则当$k=n+1$时,$a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}>0$,且

$$a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}<\sqrt{c+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4c}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4c}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4c},$$

故

$$0<a_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4c},\quad \forall n\in\mathbf{N}_+.$$

再证$\{a_n\}$严格单调递增:由于

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{c+a_n}-a_n=\frac{c+a_n-a_n^2}{\sqrt{c+a_n}+a_n}.$$

而$c+a_n-a_n^2>0$,当且仅当$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4c}<a_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4c}$时成立,故由前面结论知$a_{n+1}-a_n>0$,因此$\{a_n\}$严格单调递增.

由单调有界原理知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,对$a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$两边取极限得$a=\sqrt{c+a}$,解得

$$a=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4c}<0\ (\text{不合题意舍去}),$$

$$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4c},$$

即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4c}.$$

(3) 当$0<c\leqslant 1$时,因$0<\frac{c^n}{n!}<\frac{1}{n}$,且$\lim\limits_{n\to\infty}0=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,由极限的迫敛性知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0$.

当$1<c$时,记$[c]=k$,因

$$0<\frac{c^n}{n!}=\frac{c^k}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k}\cdot\frac{c}{k+1}\cdot\cdots\cdot\frac{c}{n-1}\cdot\frac{c}{n}<\frac{cM}{n}\left(M=\frac{c^k}{k!}\right)$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}0=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{cM}{n}=0$,故由极限的迫敛性知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0$.

综上
$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0.$$

4. 利用$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$为递增数列的结论，证明：$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n\right\}$为递增数列.

证　由$\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，**得**

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\cdot\frac{n+2}{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{n+1}{n},\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\&>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}\\&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

故$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n\right\}$**为递增数列.**

5. 应用柯西收敛准则，证明以下数列$\{a_n\}$收敛.

（1）$a_n=\dfrac{\sin1}{2}+\dfrac{\sin2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$；

（2）$a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$.

证　（1）**对**$\forall\varepsilon>0$，**取**$N=\left[\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，**则对**$\forall n\geqslant m>N$，**有**

$$\begin{aligned}|a_n-a_m|&=\left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}}+\frac{\sin(m+2)}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}\right|\\&\leqslant\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{m+1}}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{2^{n-m}}}{1-\dfrac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^{m-1}},\end{aligned}$$

而由$m>\log_2\frac{1}{\varepsilon}+1$得$2^{m-1}>\frac{1}{\varepsilon}$，即$\frac{1}{2^{m-1}}<\varepsilon$，故有$|a_n-a_m|<\varepsilon$. 由柯西收敛准则知数列$\{a_n\}$收敛.

(2) 对$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，则对$\forall n\geqslant m>N$，有

$$\begin{aligned}|a_n-a_m|&=\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\&\leqslant\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\&=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}<\frac{2}{m}.\end{aligned}$$

而由$m>\frac{2}{\varepsilon}$知$\frac{2}{m}<\varepsilon$，故$|a_n-a_m|<\varepsilon$. 由柯西收敛准则知数列$\{a_n\}$收敛.

6. 证明：若单调数列$\{a_n\}$含有一个收敛子列，则$\{a_n\}$收敛.

证　先假定数列$\{a_n\}$为单调增加数列，而$\{a_{n_k}\}$为其所含的一个收敛子列，且$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$，故对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}_+$，当$k>N_1$时，有$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$，即$a-\varepsilon<a_{n_k}<a+\varepsilon$. 取$N=n_{N_1+1}$，则当$m>N$时，有$a_m>a_{n_{N+1}}>a-\varepsilon$. 又由$\{a_n\}$为单调增加数列知，$a_m<a_{n_m}<a+\varepsilon$，即$a-\varepsilon<a_m<a+\varepsilon$，也就是$|a_m-a|<\varepsilon$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

若数列$\{a_n\}$为单调减少数列，令$b_n=-a_n$，则$\{b_n\}$为单调递增数列. 而$\{a_{n_k}\}$为其所含的一个收敛子列，且$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$，此时有$\lim\limits_{k\to\infty}b_{n_k}=-a$，于是由上述结论知$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-a$，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

7. 证明：若$a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证　由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$得：对$\varepsilon_0=\frac{l-1}{3}$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时$l-\varepsilon_0<\frac{a_n}{a_{n+1}}<l+\varepsilon_0$，即$1<\frac{2l+1}{3}<\frac{a_n}{a_{n+1}}$，从而数列$\{a_n\}$从第$N+1$项开始为单调减少数列，且有下界0，故$\{a_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a(a\geqslant0)$，对恒等式$a_n=a_{n+1}\frac{a_n}{a_{n+1}}$，两边取极限得$a=la$，即$(l-1)a=0$，因$l>1$，故$a=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

8. 证明：若$\{a_n\}$为递增(递减)有界数列，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sup\{a_n\}(\inf\{a_n\})$. 又问逆命题成立否?

证 若$\{a_n\}$为递增的有界数列. 设$\sup\{a_n\}=a$，由上确界定义知，对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists a_N\in\{a_n\}$，使得$a_N>a-\varepsilon$，亦有当$n>N$时，$a_n>a_N>a-\varepsilon$. 另一方面$a_n\leqslant a<a+\varepsilon$，故$|a_n-a|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a=\sup\{a_n\}.$$

若$\{a_n\}$为递减的有界数列. 设$\inf\{a_n\}=b$，由下确界定义知，对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists a_N\in\{a_n\}$，使得$a_N<b+\varepsilon$，亦有当$n>N$时，$a_n<a_N<b+\varepsilon$. 另一方面$b-\varepsilon<a\leqslant a_N$，故$|a_n-b|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=b=\inf\{a_n\}.$$

逆命题不成立，因为极限等于上(下)确界的数列未必是单调数列，例如，

(1) 0.49，0.48，0.499，0.498，0.4999，0.4998，…，它是非单调数列，但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sup\{a_n\}=0.5$.

(2) 0.5001，0.501，0.500001，0.50001，0.50000001，0.5000001，…，它是非单调数列，但$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\inf\{b_n\}=0.5$.

9. 利用不等式$b^{n+1}-a^{n+1}>a^n(b-a)(n+1)$，$b>a>0$，证明$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$为递减数列，并由此推出$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$为有界数列.

证 由$b^{n+1}-a^{n+1}>a^n(b-a)(n+1)$整理后得

$$b^{n+1}>a^n[(n+1)b-na].$$

令$a=1+\dfrac{1}{n+1}$，$b=1+\dfrac{1}{n}$，代入上式得

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}&>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\left[\frac{(n+1)^2}{n}-\frac{n(n+2)}{n+1}\right]\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\left[\frac{(n+1)^3-n^2(n+2)}{n(n+1)}\right]\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\frac{(n+1)^2(n^2+3n+1)}{(n+2)^2(n+1)n}\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}\end{aligned}$$

$$>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

这就证明了$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$为递减数列. 因

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1}=4,$$

故　$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<4,$$

于是$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$为有界数列.

10. 证明：$\left|e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right|<\frac{3}{n}$.

证　$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}&=1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^{2}}+\cdots\\&\quad+\frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^{n}}\\&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\\&\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{3}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n}}}{1-\frac{1}{2}}<3,\end{aligned}$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$,且$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$为递减数列,故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e=\inf\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\},$$

因此　$$\begin{aligned}\left|e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right|&=e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\\&=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\frac{3}{n}.\end{aligned}$$

11. 给定两正数a_1与$b_1(a_1>b_1)$,作出其等差中项$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$与等比中项$b_2=\sqrt{a_1b_1}$,一般地令

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},n=1,2,\cdots,$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 皆存在且相等.

证 由 $a_1>b_1>0$，显然有 $a_n>0,b_n>0$，因

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\geqslant\sqrt{a_nb_n}=b_{n+1},$$

故

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\leqslant\frac{a_n+a_n}{2}=a_n,$$

$$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\geqslant\sqrt{b_nb_n}=b_n,$$

即 $\{a_n\}$ 单调递减，$\{b_n\}$ 单调递增.

又 $b_n\leqslant a_n\leqslant a_1,a_n\geqslant b_n\geqslant b_1$，所以 $\{a_n\},\{b_n\}$ 有界，由单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 皆存在.

在 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ 中两边取极限得

$$a=\frac{a+b}{2},\quad \text{即}\quad a=b.$$

12. 设 $\{a_n\}$ 为有界数列，记

$$\overline{a}_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\},\quad \underline{a}_n=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}.$$

证明：(1) 对任何正整数 n，$\overline{a}_n\geqslant\underline{a}_n$；

(2) $\{\overline{a}_n\}$ 为递减有界数列，$\{\underline{a}_n\}$ 为递增有界数列，且对任何正整数 n,m 有 $\overline{a}_n\geqslant\underline{a}_m$；

(3) 设 $\overline{a}$ 和 $\underline{a}$ 分别是 $\{\overline{a}_n\}$ 和 $\{\underline{a}_n\}$ 的极限，则 $\overline{a}\geqslant\underline{a}$；

(4) $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 $\overline{a}=\underline{a}$.

证 (1) 对任给正整数 $k\geqslant n$，有 $\overline{a}_n\geqslant a_k$ 及 $a_k\geqslant\underline{a}_n$，故对 $\forall n\in\mathbf{N}_+$ 有 $\overline{a}_n\geqslant\underline{a}_n$.

(2) 由定义知

$$\overline{a}_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\},\quad \overline{a}_{n+1}=\sup\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\},$$

而

$$\underline{a}_n=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\},\quad \underline{a}_{n+1}=\inf\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\},$$

因

$$\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}\subset\{a_n,a_{n+1},\cdots\}.$$

故对于 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，有 $\overline{a}_n\geqslant\overline{a}_{n+1}$ 及 $\underline{a}_n\leqslant\underline{a}_{n+1}$，即 $\{\overline{a}_n\}$ 为递减数列，$\{\underline{a}_n\}$ 为递增数列，

又由(1)知$\forall n\in\mathbf{N}_+$,有$\bar{a}_n\geqslant\underline{a}_n$,故有

$$\underline{a}_1<\underline{a}_2<\cdots<\underline{a}_{n-1}<\underline{a}_n<\bar{a}_n<\bar{a}_{n-1}<\cdots<\bar{a}_2<\bar{a}_1,$$

即$\forall\bar{a}_k\in\{\bar{a}_n\}$,$\underline{a}_k\in\{\underline{a}_n\}$都介于$\underline{a}_1$,$\bar{a}_1$之间.因此$\{\bar{a}_n\}$为单调减少有界数列,$\{\underline{a}_n\}$为单调增加有界数列.对于$\forall m,n\in\mathbf{N}_+$,当$n>m$时$\bar{a}_n\geqslant\underline{a}_n\geqslant\underline{a}_m$,当$n\leqslant m$时$\bar{a}_n\geqslant\bar{a}_m\geqslant\underline{a}_m$.故无论$n$,$m$有何关系,都有$\bar{a}_n\geqslant\underline{a}_m$.

(3) 由$\bar{a}_n\geqslant\underline{a}_n(\forall n\in\mathbf{N}_+)$,根据极限保不等式性有

$$\bar{a}=\lim_{n\to\infty}\bar{a}_n\geqslant\lim_{n\to\infty}\underline{a}_n=\underline{a}.$$

(4) 若$\bar{a}=\underline{a}$,由$\underline{a}_n\leqslant a_n\leqslant\bar{a}_n(\forall n\in\mathbf{N}_+)$,因$\lim\limits_{n\to\infty}\underline{a}_n=\underline{a}=\bar{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\bar{a}_n$,故由极限迫敛性有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\bar{a}=\underline{a}.$$

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则对于$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,当$n>N$时有$|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,即$a-\dfrac{\varepsilon}{2}<a_n<a+\dfrac{\varepsilon}{2}$,亦即$a-\dfrac{\varepsilon}{2}$为$\{a_n,a_{n+1},\cdots\}$的下界,$a+\dfrac{\varepsilon}{2}$为$\{a_n,a_{n+1},\cdots\}$的上界.由$\underline{a}_n$,$\bar{a}_n$的定义知,当$n>N$时$a-\dfrac{\varepsilon}{2}\leqslant\underline{a}_n\leqslant a_n\leqslant\bar{a}_n\leqslant a+\dfrac{\varepsilon}{2}$,即

$$a-\varepsilon<\underline{a}_n<a+\varepsilon,\quad a-\varepsilon<\bar{a}_n<a+\varepsilon,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\bar{a}_n=a,\quad\lim_{n\to\infty}\underline{a}_n=a,\quad\text{即}\quad\bar{a}=\underline{a}.$$

§4　总练习题

1. 求下列数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5}{e^n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

解　(1)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\sqrt[n]{1+\frac{n^3}{3^n}},$$

因

$$1<\sqrt[n]{1+\frac{n^3}{3^n}}<\sqrt[n]{2},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{3}{3^n}}=1,$$
于是
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}=3.$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(\sqrt[5]{e})^n}\right]^5,$$
而 $\sqrt[5]{e}>1$，故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{e^n}=0.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$
$$=\lim_{n\to\infty}[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right].$$
而
$$0<\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}},\quad 0<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}},$$
由迫敛性知
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0,$$
故
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=0.$$

2. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2q^n=0$ $(|q|<1)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n^\alpha}=0$ $(\alpha\geqslant 1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

证　(1) 当 $q=0$ 时，
$$\lim_{n\to\infty}n^2q^n=0.$$
当 $q\neq 0$ 时，
$$|q|^{-\frac{1}{2}}>1,$$
$$\lim_{n\to\infty}|n^2q^n|=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot|q|^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{|q|^{-\frac{n}{2}}}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(|q|^{-\frac{1}{2}})^n}\right]^2=0.$$
由本章§1习题7知
$$\lim_{n\to\infty}n^2q^n=0.$$

(2)
$$0\leqslant\frac{\lg n}{n^{\alpha}}<\frac{\lg n}{n}=\frac{\lg n}{10^{\lg n}}<\frac{[\lg n]+1}{10^{[\lg n]}}.$$

而$\left\{\frac{[\lg n]+1}{10^{[\lg n]}}\right\}$为$\left\{\frac{n+1}{10^{n}}\right\}$的子数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{10^{n}}=0$,故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\lg n]+1}{10^{[\lg n]}}=0.$$

由极限的迫敛性得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n^{\alpha}}=0.$$

(3) $n!\ =1\cdot 2\cdot\cdots\cdot\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\cdot\cdots\cdot n$
$$\geqslant\begin{cases}\left(\frac{n}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为偶数},\\ \left(\frac{n}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\geqslant\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

因此有$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\sqrt{\frac{2}{n}}$,而$\lim\limits_{n\to\infty}0=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}}=0$,由极限的迫敛性得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

3. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;

(2) 若$a_n>0(n=1,2,\cdots)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

证　(1) 由极限定义知,$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbf{N}_+$,当$n>N_1$时有$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$,故当$n>N_1$时有
$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|&=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-na}{n}\right|\\&\leqslant\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}\\&\quad+\frac{|a_{N_1+1}-a|+|a_{N_1+2}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\&\leqslant\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

记 $|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|=c$ 为一常数,因此有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n}=0.$$

故 $\exists N_2\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N_2$ 时有

$$\frac{c}{n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\leqslant\frac{c}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即证得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

(2) 使用第一章附的不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n),$$

由(1)的结果知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=a.$$

而当 $a\neq0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right]}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right]}=a.$$

由极限的迫敛性得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$

若 $a=0$,则由 $0<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$,得

$$\lim_{n\to\infty}0=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0.$$

由极限的迫敛性,得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0=a,$$

故有
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

注意：① 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty$. 请读者自行证明此结论.

② 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$，不能推出$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

例如，$a_n=(-1)^{n-1}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

4. 应用上题的结论证明下列各题：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{N}=1$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$；

(7) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=a\ (b_n>0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=a$；

(8) 若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$.

证　(1) 设$a_n=\dfrac{1}{n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$. 由上题(1)得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0.$$

(2) 设$a_1=a$，$a_n=1$，$n=2,3,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. 由上题(2)得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=1,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

（3）**设** $a_1=1,a_n=\dfrac{n}{n-1},n=2,3,\cdots$，**则** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1}=1$. **由上题**(2)**得**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n}{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}a_n=1.$$

（4）**设** $a_n=\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots$，**则** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. **由上题**(2)**得**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

（5）**设** $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n,n=1,2,\cdots$，**则**

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

而
$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{(n+1)^n}{n^n},$$

故
$$a_1a_2\cdots a_n=\frac{2}{1}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\cdots\cdot\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n}$$
$$=\frac{(n+1)^n}{n!}=\frac{n^n}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

即
$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$\Rightarrow\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

由上题(2)**知**
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=\mathrm{e}.$$

且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=1.$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\mathrm{e}.$$

（6）**设**
$$a_n=\sqrt[n]{n},n=1,2,\cdots,$$

则
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$
由上题(1)知
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

(7) 设$a_1=b_1,a_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}},n=2,3,\cdots$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=a$. 由上题(2)得
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$

(8) 设$a_0=0,b_n=a_n-a_{n-1},n=1,2,\cdots$,则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d$. 由上题(1)得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_n-a_{n-1})}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d.$$

5. 证明:若$\{a_n\}$为递增数列,$\{b_n\}$为递减数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$都存在且相等.

证　由$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$,取$\varepsilon_0=1$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,当$n>N$时,有$-1<a_n-b_n<+1$,由此得
$$a_n<1+b_n<1+b_1,\quad b_n>a_n-1>a_1-1.$$
记
$$A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_N,1+b_1\},$$
$$B=\min\{b_1,b_2,\cdots,b_N,a_1-1\},$$
则对于$\forall n\in\mathbf{N}_+$,有
$$a_1\leqslant a_n<A,\quad B<b_n\leqslant b_1,$$
即$\{a_n\},\{b_n\}$均为单调有界数列. 由单调有界原理知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$及$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$均存在. 又由$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$,得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$,即
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

6. 设数列$\{a_n\}$满足:存在正数M,对一切n有
$$A_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|\leqslant M.$$
证明:数列$\{a_n\}$与$\{A_n\}$都收敛.

证　由$|A_n|\leqslant M$,且$A_{n+1}-A_n=|a_{n+1}-a_n|\geqslant 0$,知$\{A_n\}$为单调有界数列.由单调有界原理知$\{A_n\}$收敛.

由柯西收敛准则知,对$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当$n\geqslant m>N$时有

$$|A_n-A_m|<\varepsilon.$$

而

$$\begin{aligned}|a_n-a_m|&=|(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_{m+1}-a_m)|\\&\leqslant|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+|a_{m+1}-a_m|\\&=|A_n-A_m|<\varepsilon.\end{aligned}$$

则由柯西收敛准则知$\{a_n\}$收敛,故$\{a_n\}$与$\{A_n\}$都收敛.

7. 设$a>0,\sigma>0,a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{\sigma}{a}\right),\cdots,a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\sigma}{a_n}\right),n=1,2,\cdots$.证明:数列$\{a_n\}$收敛,且其极限为$\sqrt{\sigma}$.

证　由

$$a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{\sigma}{a}\right)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a\cdot\frac{\sigma}{a}}=\sqrt{\sigma},$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\sigma}{a_n}\right)\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{a_n\cdot\frac{\sigma}{a_n}}=\sqrt{\sigma},n=1,2,\cdots,$$

得

$$a_n\geqslant\sqrt{\sigma},\quad n=1,2,\cdots.$$

又

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sigma}{a_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(1+1)=1,$$

故$\{a_n\}$为单调递减数列,且

$$\sqrt{\sigma}\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{2}\left(a+\frac{\sigma}{a}\right).$$

由单调有界原理知$\{a_n\}$收敛,记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 对$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\sigma}{a_n}\right)$两边取极限得

$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{\sigma}{A}\right),$$

解得$A=\sqrt{\sigma}$(舍去负根).

8. 设$a_1>b_1>0$,记

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}},\quad n=2,3,\cdots$$

证明:数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的极限都存在且等于$\sqrt{a_1b_1}$.

证 由$a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$,$b_n=\dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}$得

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{4a_{n-1}b_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})^2}=\frac{4a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+2a_{n-1}b_{n-1}}\leqslant 1,$$

即$b_n\leqslant a_n$,$n=1,2,\cdots$,且

$$b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}\geqslant\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{2a_{n-1}}=b_{n-1},$$

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\leqslant\frac{a_{n-1}+a_{n-1}}{2}=a_{n-1}.$$

由此知$\{a_n\}$为递减数列,$\{b_n\}$为递增数列.

又由$b_n\leqslant a_n$得

$$b_1\leqslant a_n\leqslant a_1,\quad b_1\leqslant b_n\leqslant a_1,$$

即$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为单调有界数列.

由单调有界原理知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$均存在. 不妨设

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=B,$$

则对$a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$两边取极限得

$$A=\frac{A+B}{2},\quad \text{即}\quad A=B.$$

又因为
$$a_nb_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\cdot\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}=a_{n-1}b_{n-1},$$

故有
$$a_nb_n=a_{n-1}b_{n-1}=\cdots=a_2b_2=\frac{a_1+b_1}{2}\cdot\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}=a_1b_1.$$

对此式两边取极限,且由$A=B$,得

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=AB=A^2=B^2=a_1b_1,$$

即
$$A=B=\sqrt{a_1b_1}.$$

9. 按柯西收敛准则叙述数列$\{a_n\}$发散的充要条件,并用它证明下列数列$\{a_n\}$是发散的.

(1) $a_n=(-1)^n n$;

(2) $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$;

(3) $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

证　数列$\{a_n\}$发散的充要条件是:存在正数ε_0,对于$\forall N\in\mathbf{N}_+$,总可找到正整数$n,m>N$,使$|a_n-a_m|>\varepsilon_0$.

(1) 取$\varepsilon_0=1$,对$\forall N\in\mathbf{N}_+$,只要$n=m+1,m>N$就有

$$|a_n-a_m|=|(-1)^{m+1}(m+1)-(-1)^m m|=2m+1>\varepsilon_0.$$

因此$\{a_n\}$为发散数列.

(2) 取$\varepsilon_0=1$,对$\forall N\in\mathbf{N}_+$,取$n=4N+3,m=4N+1$,则有$n,m>N$,且

$$|a_n-a_m|=\left|\sin\frac{4N+3}{2}\pi-\sin\frac{4N+1}{2}\pi\right|=2>\varepsilon_0.$$

因此$\{a_n\}$为发散数列.

(3) 取$\varepsilon_0=\frac{1}{3}$,对$\forall N\in\mathbf{N}_+$,取$n=2N+2,m=N+1$,则有$n,m>N$,且

$$|a_n-a_m|=\left|\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}+\cdots+\frac{1}{2N+2}\right|\geqslant\frac{N+1}{2N+2}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此$\{a_n\}$为发散数列.

10. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.记

$$S_n=\max\{a_n,b_n\},T_n=\min\{a_n,b_n\},n=1,2,\cdots.$$

证明:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\max\{a,b\}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\min\{a,b\}$.

证　由
$$\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|),$$
$$\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|),$$
有
$$S_n=\max\{a_n,b_n\}=\frac{1}{2}(a_n+b_n+|a_n-b_n|),$$
$$T_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n-|a_n-b_n|).$$
又由$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b$知

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=|a-b|,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a_n+b_n+|a_n-b_n|)=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$$

$$=\begin{cases}a, & a\geqslant b\text{ 时}\\ b, & a<b\text{ 时}\end{cases}=\max\{a,b\},$$

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a_n+b_n-|a_n-b_n|)=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$$

$$=\begin{cases}b, & a>b\text{ 时}\\ a, & a\leqslant b\text{ 时}\end{cases}=\min\{a,b\}.$$

第三章　函数极限

知识要点

1. 函数极限中的自变量是连续地变化. 当 x 趋于 ∞ 时可用"ε-M"语言叙述,当 x 趋于有限数 x_0 时可用"ε-δ"语言叙述. 虽然函数极限种类很多,但它们的差别仅在于使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立的条件不同:或是 ∞ 的邻域(左邻域、右邻域),或是 x_0 的去心邻域(左邻域、右邻域). 数列极限显然是函数极限的特殊形式(其自变量取自然数,而离散地变化).

2. 归结原则给出了函数极限与数列极限的关系,故不难理解函数极限所具有的局部保号性、局部有界性、局部保不等式性及局部迫敛性,并有相应的函数极限的单调有界收敛定理、函数极限的柯西收敛准则.

3. 极限的四则运算与复合运算的法则. 极限复合运算为极限的换元法提供了理论根据:若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,$\varphi(x)\neq a(x\in U^\circ(x_0;\delta))$,$\lim\limits_{t\to a}f(t)=A$,则

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))\xlongequal{t=\varphi(x)}\lim_{t\to a}f(t)=A.$$

通过换元可直接利用许多已知的极限.

4. 无穷小量具有以下重要性质:

(1) 极限与无穷小的关系:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+o(1)(x\to x_0)$.

(2) 无穷小量与有界量之积为无穷小量.

(3) 舍弃高阶无穷小:若 $\alpha=o(1)(x\to x_0)$,则 $\alpha+o(\alpha)\sim\alpha(x\to x_0)$.

(4) 等价无穷小代换:若 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'(x\to x_0)$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}=A\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}=A$；$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha'\gamma=A\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\alpha\gamma=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha'\gamma=A$.

(5) **无穷小量与无穷大量的关系：若** $\alpha=o(1)(x\to x_0)$，**且** $\alpha\neq0$，**则** $\dfrac{1}{\alpha}$ **为无穷大量，反之亦然.**

5. 曲线的水平渐近线、垂直渐近线体现了极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$、$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ **的几何意义，而曲线的斜渐近线则可用** $y=kx+b$ **表出，其中** $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

6. 两个重要极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ **或** $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

7. 函数极限与单侧极限的关系常用于计算分段函数在分段点处的极限.

习题详解

§1　函数极限概念

1. 按定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+5}{x}=6$；　　(2) $\lim\limits_{x\to2}(x^2-6x+10)=2$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=1$；　　(4) $\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{4-x^2}=0$；

(5) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

证　(1) **欲使** $\left|\dfrac{6x+5}{x}-6\right|=\left|\dfrac{5}{x}\right|<\varepsilon$，**只要** $|x|>\dfrac{5}{\varepsilon}$，**故对** $\forall\varepsilon>0$，**取** $M=\dfrac{5}{\varepsilon}>0$，**则当** $x>M$ **时**

$$\left|\frac{6x+5}{x}-6\right|=\frac{5}{x}<\frac{5}{M}=\varepsilon,$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{x}=6.$$

（2）因 $x\to2$，不妨设 $|x-2|<1$，即 $1<x<3$．欲使

$$|x^2-6x+10-2|=|x-2||x-4|<3|x-2|<\varepsilon,$$

只要 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$，故取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ 且 $\delta<1$．对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{3}\right\}$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时

$$|(x^2-6x+10)-2|<\varepsilon,$$

故
$$\lim_{x\to2}(x^2-6x+10)=2.$$

（3）因 $x\to\infty$，不妨设 $|x|>1$. 欲使

$$\left|\frac{x^2-5}{x^2-1}-1\right|=\frac{4}{|x^2-1|}=\frac{4}{|x|^2-1}<\varepsilon,$$

只要 $|x|^2-1>\frac{4}{\varepsilon}$，即 $|x|>\sqrt{1+\frac{4}{\varepsilon}}$．对 $\forall\varepsilon>0$，取 $M=\sqrt{1+\frac{4}{\varepsilon}}$，当 $|x|>M$ 时，就有

$$\left|\frac{x^2-5}{x^2-1}-1\right|<\frac{4}{|x|^2-1}<\varepsilon,$$

故
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5}{x^2-1}=1.$$

（4）因 $x\to2^-$，不妨设 $0<x<2$. 欲使 $\sqrt{4-x^2}<\varepsilon$，则 $4-x^2<\varepsilon^2$，即

$$(2-x)(2+x)<\varepsilon^2,$$

因 $2+x<4$，故对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon^2}{4}$，当 $0<2-x<\delta$ 时，有

$$|\sqrt{4-x^2}-0|<\sqrt{4(2-x)}<\varepsilon,$$

故
$$\lim_{x\to2^-}\sqrt{4-x^2}=0.$$

（5）欲使 $|\cos x-\cos x_0|=\left|2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant|x-x_0|<\varepsilon$，只须取 $\delta=\varepsilon$．对于 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\cos x-\cos x_0|\leqslant|x-x_0|<\varepsilon,$$

故
$$\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0.$$

2. 根据定义 2,叙述$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$.

解 定义:若存在 $\varepsilon_0>0$,对于$\forall\delta>0$,都存在$\bar{x}\in U^\circ(x_0;\delta)$,使$|f(\bar{x})-A|>\varepsilon_0$,则有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$.

3. 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,证明$\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=A$.

证 因为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,由定义知,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 而当 $0<|h|<\delta$ 时,有 $0<|x_0+h-x_0|=|h|<\delta$,则
$$|f(x_0+h)-A|<\varepsilon.$$
因此有
$$\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=A.$$

4. 证明:若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$. 当且仅当$A$ 为何值时反之也成立?

证 由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 知,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 因
$$||f(x)|-|A||\leqslant|f(x)-A|,$$
故有
$$||f(x)|-|A||<\varepsilon,$$
即
$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|A|.$$

当 $A=0$ 时,若$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有$||f(x)||<\varepsilon$,此即$|f(x)-0|<\varepsilon$. 故$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0=A$,即 $A=0$ 时,
$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=A\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

当 $A\neq 0$ 时,考虑函数
$$f(x)=\begin{cases}A, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -A, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$
即
$$|f(x)|=|A|,\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$
显然$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=|A|$,但$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-A$,$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=A$,由定理 3.1 知$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

综上,当且仅当 $A=0$ 时反之亦成立.

5. 证明定理 3.1.

证　定理3.1: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$. 证明过程如下.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则由定义知,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$,即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 此亦即 $x_0-\delta<x<0$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 及 $0<x<x_0+\delta$时 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 均成立. 故

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\quad\text{及}\quad\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,由定义知,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_1,\delta_2>0$,使得当 $x_0-\delta_1<x<x_0$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$,当 $x_0<x<x_0+\delta_2$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 故取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,于是当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,上述两不等式均成立,故

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

由此
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

6. 讨论下列函数在 $x\to0$ 时的极限或左、右极限:

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$;　　(2) $f(x)=[x]$;

(3) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 1+x^2, & x<0.\end{cases}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}-1=-1$,

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1.$$

(2)
$$f(x)=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ 0, & 0<x<1,\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}-1=-1$,　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}0=0$(此时设 $0<x<1$).

(3)　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(1+x^2)$,　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}2^x$.

下证:i)
$$\lim_{x\to0^-}(1+x^2)=1.$$

$\forall \varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,当 $-\delta<x<0$ 时

$$|f(x)-1|=|x^2|<\delta^2=\varepsilon,$$

故
$$\lim_{x\to 0^-}(1+x^2)=1.$$

ii)
$$\lim_{x\to 0^+}2^x=1.$$

$\forall \varepsilon>0$,取 $\delta=\log_2(1+\varepsilon)$,当 $0<x<\delta$ 时

$$|f(x)-1|=|2^x-1|<|2^{\log_2(1+\varepsilon)}-1|=\varepsilon,$$

故
$$\lim_{x\to 0^+}2^x=1.$$

即 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$,从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$(定理 3.1).

7. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=A$.

证 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,依极限定义知,对 $\forall \varepsilon>0$,$\exists M>0$,当 $x>M$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

故取 $\delta=\dfrac{1}{M+1}>0$,当 $0<x<\delta$ 时有 $\dfrac{1}{x}>M+1>M$. 所以 $\left|f\left(\dfrac{1}{x}\right)-A\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=A$.

8. 证明:对黎曼函数 $R(x)$ 有 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$,$x_0\in[0,1]$(当 $x_0=0$ 或 1 时考虑单侧极限).

证 对于 $\forall x_0\in[0,1]$,任取 $\varepsilon>0$,则满足不等式 $n<\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的自然数 n 至多只有有限个,即在 $[0,1]$ 中至多只有有限个有理数 $\dfrac{m}{n}$,使得 $R\left(\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\geqslant\varepsilon$. 并记这些点构成的集合为 E,设 x_0 与 E 的最短距离为 d,即 $d=\min\limits_{x\in E}|x-x_0|$.

取 $\delta=\dfrac{d}{2}$,则 $E_0=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$ 中无前述之点,即

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|R(x)|<\varepsilon$,若 $x_0\in(0,1)$;

当 $0<x<\delta$ 时 $|R(x)|<\varepsilon$,若 $x_0=0$;

当 $1-\delta<x<1$ 时 $|R(x)|<\varepsilon$,若 $x_0=1$.

由此 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$,且

$$\lim_{x\to 0^+} R(x)=0,\quad \lim_{x\to 1^-} R(x)=0.$$

即
$$\lim_{x\to x_0} R(x)=0,\quad \forall x_0\in[0,1].$$

§2　函数极限的性质

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2(\sin x-\cos x-x^2)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^3+(1-3x)}{x^2+2x^3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}(m,n\in\mathbf{N}_+)$；　(6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}(a>0)$；　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$.

解　(1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2(\sin x-\cos x-x^2)&=2\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}x\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}x\right)\\&=2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\\&=2-\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

(2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-x-1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}x-1}{2\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}x-1}=1.$$

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^3+(1-3x)}{x^2+2x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2+3x-1+1-3x}{x^2+2x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{2x+1}=-3.\end{aligned}$$

(5)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}=\frac{n}{m}.$$

(6) $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\dfrac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{\sqrt{1+2x}+3}}{\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2}}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=2\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}.$$

(7) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{a^2+x}-a)(\sqrt{a^2+x}+a)}{x(\sqrt{a^2+x}+a)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^2+x-a^2}{x(\sqrt{a^2+x}+a)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a^2+x}+a}=\frac{1}{2a}.$$

(8) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{70}\cdot 8^{20}\left(1+\dfrac{6}{3x}\right)^{70}\left(1-\dfrac{5}{8x}\right)^{20}\cdot x^{90}}{5^{90}\left(1-\dfrac{1}{5x}\right)^{90}\cdot x^{90}}$$

$$=\frac{3^{70}\cdot 8^{20}}{5^{90}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{70}\left(1-\dfrac{5}{8x}\right)^{20}}{\left(1-\dfrac{1}{5x}\right)^{90}}$$

$$=\frac{3^{70}\cdot 8^{20}}{5^{90}}\frac{\left(1+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}\right)^{70}\left(1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{8x}\right)^{20}}{\left(1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{5x}\right)^{90}}$$

$$=\frac{3^{70}\cdot 8^{20}}{5^{90}}.$$

2. 利用迫敛性求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\cos x}{x}$；　　　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2-4}$.

解　(1) **因**$x\to-\infty$，**故可设**$U(-\infty)=\{x\,|\,x<-1\}$. **由**$-1\leqslant\cos x\leqslant 1$ **知** $\forall x\in U(-\infty)$**有**

$$\frac{1}{x}\leqslant\frac{\cos x}{x}\leqslant-\frac{1}{x},$$

即有
$$1+\frac{1}{x}\leqslant1-\frac{\cos x}{x}\leqslant1-\frac{1}{x}.$$

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$，依函数极限的迫敛性得

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\cos x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)=1.$$

(2) 因 $x\to+\infty$，设 $U(+\infty)=\{x\mid x>5\}$，由 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$ 知 $\forall x\in U(+\infty)$ 有

$$-\frac{x}{x^2-4}\leqslant\frac{x\sin x}{x^2-4}\leqslant\frac{x}{x^2-4}.$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=0$，依函数极限的迫敛性得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-4}=0.$$

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$. 证明：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=AB$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$（当 $B\neq0$ 时）.

证　(1) 由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，据定义知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有 $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$；又 $\exists\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|f(x)\pm g(x)-(A\pm B)|&=|(f(x)-A)\pm(g(x)-B)|\\&\leqslant|f(x)-A|+|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

故
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B.$$

(2) 由 $f(x)g(x)-AB=f(x)g(x)-f(x)B+f(x)B-AB$ 得

$$|f(x)g(x)-AB|\leqslant|f(x)||g(x)-B|+|f(x)-A||B|.$$

又由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,据极限的局部有界性,知存在$U(x_0)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta_1\}$使$\forall x\in U(x_0)$有

$$|f(x)|<|A|+1=C.$$

故$\forall\varepsilon>0$,由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$得$\exists\delta_2>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,有$|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{|B|+|C|+1}$;又$\exists\delta_3>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_3$时,有$|g(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{|B|+|C|+1}$. 取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$,则当$0<|x-x_0|<\delta$时

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB|&\leqslant|f(x)||g(x)-B|+|B||f(x)-A|\\&<\frac{|C|\varepsilon}{|B|+|C|+1}+\frac{|B|\varepsilon}{|B|+|C|+1}<\varepsilon,\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=AB.$$

(3) 由(2)知,只须证:$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{B}$.

由$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\neq0$,依极限的局部保号性,知存在$U(x_0)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta_1\}$,使$\forall x\in U(x_0)$有

$$|g(x)|\geqslant\frac{|B|}{2},$$

故$\forall\varepsilon>0$,由$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$得$\exists\delta_2>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_2$时

$$|g(x)-B|<\frac{|B|^2}{2}\varepsilon.$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当$0<|x-x_0|<\delta$时

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|g(x)-B|}{|B||g(x)|}\leqslant\frac{2|g(x)-B|}{|B|^2}<\frac{2\cdot\dfrac{|B|^2}{2}}{|B|^2}\varepsilon=\varepsilon.$$

故有$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{B}$,进而

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)/g(x)]=\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]=\frac{A}{B}.$$

4. 设

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n},a_0\neq 0,b_0\neq 0,m\leqslant n.$$

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^{m-n}+a_1x^{m-n-1}+\cdots+a_{m-1}x^{1-n}+a_mx^{-n}}{b_0+b_1x^{-1}+\cdots+b_{n-1}x^{1-n}+b_nx^{-n}}$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m=n \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } m<n \text{ 时}.\end{cases}$$

5. 设 $f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$，其中 $n\geqslant 2$ 为正整数.

证　因为 $f(x)>0$，由保不等式性知 $A\geqslant 0$.

i）若 $A=0$.

对 $\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A=0$ 知 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)|<\varepsilon^n$，即

$$\left|\sqrt[n]{f(x)}\right|<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=0.$$

ii）若 $A>0$.

对 $\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 知 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\sqrt[n]{A^{n-1}}\varepsilon$，即

$$\left|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}\right|$$
$$=\frac{|f(x)-A|}{\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^{n-2}A+\cdots+\sqrt[n]{f(x)}\cdot A^{n-2}+\left(\sqrt[n]{A}\right)^{n-1}}$$
$$<\frac{|f(x)-A|}{\sqrt[n]{A^{n-1}}}<\varepsilon.$$

由 i）、ii）知

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}.$$

6. 证明：$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1\ (0<a<1)$.

证 已知 $a>1$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$. 现记 $a=\dfrac{1}{b}$, $b>1$, 故

$$\lim_{x\to 0}a^x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{b^x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}b^x}=1.$$

7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.

(1) 若在某 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)<g(x)$, 问是否必有 $A<B$? 为什么?

(2) 证明: 若 $A>B$, 则在某 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)>g(x)$.

解 (1) 不一定. 考察以下两例.

i) $f(x)=1+x^2$, $g(x)=1+2x^2$, 在 $U^\circ(x_0)$ 内恒有 $f(x)<g(x)$, 而

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1,\ \lim_{x\to 0}g(x)=1.\qquad \text{即}\quad A=B.$$

ii) $f(x)=2+2x^2$, $g(x)=3+2x^2$, 在 $U^\circ(x_0)$ 内恒有 $f(x)<g(x)$, 此时

$$\lim_{x\to 0}f(x)=2,\ \lim_{x\to 0}g(x)=3,\ \text{有}\ A<B.$$

实际上, 若 $f(x)<g(x)$, 而 $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)-f(x)]=0$, 则必有 $A=B$.

若 $f(x)<g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)-f(x)]=C>0$, 则成立 $A<B$.

(2) 用反证法. 若在某 $U^\circ(x_0)$ 内 $f(x)\leqslant g(x)$, 则由保不等式性知

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\leqslant\lim_{x\to x_0}g(x),$$

即 $A\leqslant B$, 与已知矛盾, 故在 $U^\circ(x_0)$ 内 $f(x)>g(x)$.

8. 求下列极限(其中 n 皆为正整数):

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x(1+x^n)}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x(1+x^n)}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x(1+x^n)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x(1+x^n)}=-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+x^n}$

$$=-\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x^n)}=-1.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x(1+x^n)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x(1+x^n)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+x^n}=1.$

(3) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots\\&\quad+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)]\\&=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{x[(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1]}\\&=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}$：对$\forall x\in\mathbf{R}$，恒有 $x-1<[x]\leqslant x$，故当 $x>0$ 时，有

$$1-\frac{1}{x}<\frac{[x]}{x}\leqslant 1;$$

当 $x<0$ 时，有

$$1\leqslant\frac{[x]}{x}<1-\frac{1}{x}.$$

而$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1=1$，故有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{[x]}{x}=1.$$

进而
$$\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1.$$

9. (1) 证明：若$\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$存在，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$.

(2) 若$\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$存在，试问是否成立$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$？

解　(1) 设$\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)=A$，即$f(x^3)$在某$U^\circ(0)$有定义，由此知$f(x)$亦在某$U^\circ(0)$有定义. 对$\forall\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)=A$ 知，$\exists\delta_1>0$，当 $0<|x|<\delta_1$ 时有

$$|f(x^3)-A|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\delta_1^3$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，有 $0<|x^{\frac{1}{3}}|<\delta^{\frac{1}{3}}=\delta_1$，故有

$$|f[(x^{\frac{1}{3}})^3]-A|<\varepsilon,$$

即
$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$
因此
$$\lim_{x\to 0}f(x)=A=\lim_{x\to 0}f(x^3).$$

（2）不一定. 考察以下两例.

i）例 1：若 $f(x)=x^2$，则 $f(x^2)=x^4$，而 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=\lim\limits_{x\to 0}x^4=0$，故
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}f(x^2).$$

ii）例 2：若 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 0),\\ -1 & (x<0),\end{cases}$ 则 $f(x^2)=1$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)=1$，而
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=1,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=-1,$$
故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，因此
$$\lim_{x\to 0}f(x)\neq\lim_{x\to 0}f(x^2).$$

§ 3　函数极限存在的条件

1. 叙述函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 的归结原则，并应用它证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在.

解　归结原则：设 $f(x)$ 在 $U(+\infty)$ 内有定义，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在的充要条件是：对任何含于 $U(+\infty)$ 内的数列 $\{x_n\}$，只要 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在且相等.

考察 $\cos x$，取 $x_n=2n\pi$，$x_n'=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$n\in\mathbf{N}_+$，则有 $n\to\infty$ 时 $x_n\to+\infty$，$x_n'\to+\infty$，而
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\cos 2n\pi=\lim_{n\to\infty}1=1,$$
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=\lim_{n\to\infty}\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}0=0.$$
由归结原则，知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在.

2. 设 f 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的增（减）函数. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在的充要条件是 f 在 $[a,+\infty)$ 上有上（下）界.

证　先假定 f 为增函数.

$\Rightarrow$：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，记 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. 由定义，取 $\varepsilon_0=1$，则 $\exists M>\max\{0,a\}$，当 $x>M$ 时有

$|f(x)-A|<\varepsilon_0=1$，　即　$A-1<f(x)<A+1$，　$\forall x\in(M,+\infty)$.

若 $x\in[a,M]$，由于 f 为 $[a,+\infty)$ 上增函数，故

$$f(x)\leqslant f(M)\leqslant f(M+1)<A+1,\quad \forall x\in[a,M].$$

由此 $\forall x\in[a,+\infty)$ 有 $f(x)<A+1$，即 f 在 $[a,+\infty)$ 上有上界.

$\Leftarrow$：若 f 在 $[a,+\infty)$ 上有上界，由确界存在原理知，f 在 $[a,+\infty)$ 上有上确界.

记 $\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}=M$，则由上确界定义知：$f(x)\leqslant M,\forall x\in[a,+\infty)$，且对 $\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in[a,+\infty)$ 使

$$f(x_0)>M-\varepsilon,$$

即当 $x>x_0$ 时，有 $M-\varepsilon<f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant M<M+\varepsilon$，也就有

$$|f(x)-M|<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=M.$$

若 f 为 $[a,+\infty)$ 上减函数，则记 $F=-f$，易知 F 为 $[a,+\infty)$ 上增函数，故有 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在的充要条件为 $F(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有上界，此等价于，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有下界.

3. (1) 叙述极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 的柯西准则；

(2) 根据柯西准则叙述 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在的充要条件，并应用它证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ 不存在.

解　(1) 柯西准则：设函数 $f(x)$ 在 $U(-\infty)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在的充要条件是，对 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$，当 $\forall x',x''\in U(-\infty)$ 且 $x'<-M,x''<-M$ 时有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $U(-\infty)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在的充要条件是，存在某个 $\varepsilon_0>0$，对于 $\forall M>0$，总可找到 $x',x''\in U(-\infty)$，使得 $x'<-M,x''<-M$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|>\varepsilon_0.$$

下证 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ **不存在.**

取 $\varepsilon_0=1$,**对于** $\forall M>0$,**取**

$$x'=2([-M]-1)\pi-\frac{\pi}{2},$$

$$x''=2([-M]-2)\pi+\frac{\pi}{2},$$

则有 $x'<-M, x''<-M$,**且**

$$|\sin x'-\sin x''|=2>1=\varepsilon_0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ **不存在.**

4. 设 f **在** $U^\circ(x_0)$ **内有定义. 证明:若对任何数列** $\{x_n\}\subset U^\circ(x_0)$ **且** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,**极限** $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ **都存在,则所有这些极限都相等.**

证　任取两数列 $\{x_n\},\{y_n\}\subset U^\circ(x_0)$,**且** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$,**由已知得**

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A,\quad \lim_{n\to\infty}f(y_n)=B.$$

构造新数列 $\{z_n\}$,**其中** $z_{2n-1}=x_n, z_{2n}=y_n$,**即** $\{z_n\}$ **为** $x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots$,**显然** $\{z_n\}\subset U^\circ(x_0)$,**且**

$$\lim_{n\to\infty}z_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,$$

$$\lim_{n\to\infty}z_{2n}=\lim_{n\to\infty}y_n=x_0,$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=x_0$. **由假设知** $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$ **存在. 记** $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=C$,**则**

$$\lim_{n\to\infty}f(z_{2n})=\lim_{n\to\infty}f(z_{2n-1})=C,$$

即

$$A=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(z_{2n-1})=C,$$

$$B=\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}f(z_{2n})=C.$$

从而 $A=B$. **由** $\{x_n\},\{y_n\}$ **选取的任意性,得结论成立.**

5. 设 f **为** $U^\circ(x_0)$ **上的递增函数,证明:** $f(x_0-0)$ **和** $f(x_0+0)$ **都存在,且**

$$f(x_0-0)=\sup_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x),\quad f(x_0+0)=\inf_{x\in U_+^\circ(x_0)}f(x).$$

证　任取 $x_1\in U_-^\circ(x_0), x_2\in U_+^\circ(x_0)$,**由于** f **为** $U^\circ(x_0)$ **上递增函数,故对** $\forall x\in U_-^\circ(x_0)$,**由** $x<x_2$ **得** $f(x)\leqslant f(x_2)$;

对$\forall x\in U_+^\circ(x_0)$，由$x_1<x$得$f(x_1)\leqslant f(x)$.

因此，由确界存在原理得，$\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)} f(x)$与$\inf\limits_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x)$均存在，分别记为$A$与$B$. 下面分两步证明.

(1) $f(x_0-0)=\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)} f(x)=A$.

$\forall \varepsilon>0$，由上确界定义知$\exists \bar{x}\in U_-^\circ(x_0)$，使得$f(\bar{x})>A-\varepsilon$，故取$\delta=x_0-\bar{x}$，当$x_0-\delta<x<x_0$时，由$x>x_0-\delta=\bar{x}$且$f(x)$为增函数有

$$A-\varepsilon<f(\bar{x})\leqslant f(x)\leqslant A<A+\varepsilon,$$

即
$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

故
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0-0)=A.$$

(2) $f(x_0+0)=\inf\limits_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x)=B$.

$\forall \varepsilon>0$，由下确界定义知$\exists \underline{x}\in U_+^\circ(x_0)$，使得$f(\underline{x})<B+\varepsilon$，故取$\delta=\underline{x}-x_0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，由$x<x_0+\delta=\underline{x}$且$f(x)$为增函数有

$$B-\varepsilon<B\leqslant f(x)\leqslant f(\underline{x})<B+\varepsilon,\quad \text{即}\quad |f(x)-B|<\varepsilon,$$

故
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0+0)=B.$$

综上，结论得证.

6. 设$D(x)$为狄利克雷函数，$x_0\in\mathbf{R}$. 证明：$\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$不存在.

证　取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，对任何$\delta>0$，在$U^\circ(x_0;\delta)$内总存在有理数$x'$和无理数$x''$，使得

$$|D(x')-D(x'')|=1>\varepsilon_0.$$

故$D(x)$在x_0不满足柯西准则，所以$\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$不存在.

7. 证明：若f为周期函数，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则$f(x)\equiv 0$.

证　设T为f的一个周期，则$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x+nT)=f(x),\quad n\in\mathbf{N}_+.$$

反证法：若$f(x)\not\equiv 0$，则$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使$f(x_0)\neq 0$，而$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，故取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}|f(x_0)|>0$，则$\exists M>0$，当$x>M$时，有

$$|f(x)|<\frac{1}{2}|f(x_0)|.$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}(x_0+nT)=+\infty$,故$\exists N_0\in\mathbf{N}_+$,使$x_0+N_0T>M$,即

$$|f(x_0+N_0T)|<\frac{1}{2}|f(x_0)|.$$

也就有
$$|f(x_0)|=|f(x_0+N_0T)|<\frac{1}{2}|f(x_0)|,$$

即$|f(x_0)|<0$,且$|f(x_0)|\neq 0$,矛盾. 故对$\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)\equiv 0$.

8. 证明定理 3.9.

证　定理 3.9:设函数 f 在点 x_0 的某空心右邻域$U_+^\circ(x_0;\delta')$有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$的充要条件是,对任何以$x_0$为极限的递减数列$\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0;\delta')$,有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$. 证明过程如下.

设函数f在$U_+^\circ(x_0;\delta')$内有定义.

必要性:设$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,则对$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0(\delta\leqslant\delta')$,使得当$x_0<x<x_0+\delta$时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

若数列$\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0;\delta')$为以$x_0$为极限的递增数列,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,则对上述的$\delta>0$,存在$N>0$,当$n>N$时有$x_0<x_n<x_0+\delta$,从而有

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

充分性:用反证法. 若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq A$,则$\exists\varepsilon_0>0$,对$\forall\delta>0$,总存在一点$x$,有$x_0<x<x+\delta$,但

$$|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

现取$\delta_1=\delta'$,则$\exists x_1$满足$x_0<x_1<x_0+\delta'$,但$|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

$\delta_2=\min\left\{\dfrac{\delta'}{2},x_1-x_0\right\}$,则$\exists x_2$满足$x_0<x_2<x_0+\delta_2$,且$|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

$\vdots$

$\delta_n=\min\left\{\dfrac{\delta'}{n},x_{n-1}-x_0\right\}$,则$\exists x_n$满足$x_0<x_n<x_0+\delta_n$,且$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

显然数列$\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0;\delta')$，且$\{x_n\}$为递减数列，并有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，但当$n\to\infty$时，$f(x_n)$不趋于$A$，与假设矛盾．故必有$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$．

§4　两个重要极限

1．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{(\sin x)^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2x-\sin^2a}{x-a}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$；　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)=2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=0$.

(2) $$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{(\sin x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x^3}{x^3}\cdot\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\cdot x\right]$$
$$=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}\cdot\lim\limits_{x^3\to 0}\dfrac{\sin x^3}{x^3}=0.$$

(3) $$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}\xlongequal[x=\frac{\pi}{2}+t]{x-\frac{\pi}{2}=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)}{t}=-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=-1.$$

(4) $$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1.$$

(5) $$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}\right)$$
$$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\tan x}{x}\cdot\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}\xlongequal[x=\tan t]{\arctan x=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\tan t}=\dfrac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t}{t}}=1.$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin t}{t}=1.$

(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2x-\sin^2a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left[(\sin x+\sin a)\cdot\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}\right]$

$$=\lim_{x\to a}\left[(\sin x+\sin a)\cdot\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to a}(\sin x+\sin a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}$$

$$=2\sin a\lim_{x\to a}\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}$$

$$\xlongequal[u=\frac{x+a}{2}]{t=\frac{x-a}{2}}2\sin a\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\lim_{u\to a}\cos u=2\sin a\cos a$$

$$=\sin 2a.$$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin 4x}{x}\cdot(\sqrt{x+1}+1)\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4(\sqrt{x+1}+1)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\lim_{x\to 0}4(\sqrt{x+1}+1)=8.$$

$$(10)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}\xlongequal{\text{限定}|x|<\frac{\pi}{4}}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x^2}{2}}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{4}}{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\sqrt{2}\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\right]$$

$$=\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\frac{x}{2}\Big/\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}(\alpha\in\mathbf{R})$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}(\alpha,\beta\in\mathbf{R})$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(-\frac{x}{2}\right)}\right]^{-\frac{x}{2}\cdot 2}$

$$\xlongequal{-\frac{x}{2}=t}\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2=\mathrm{e}^2.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}\xlongequal{\alpha=0}\lim\limits_{x\to 0}1=1$,

$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}\xlongequal{\alpha\neq 0}\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}\cdot\alpha}\xlongequal{\alpha x=t}\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha},$$

故
$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\alpha}\quad(\alpha\in\mathbf{R}).$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}\xlongequal{\tan x=t}\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right]^{-1}}=\dfrac{\mathrm{e}}{\dfrac{1}{\mathrm{e}}}=\mathrm{e}^2$.

(5) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right]^2\cdot\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right]^2\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{\frac{3x-1}{3}}\right]^{\frac{3}{3x-1}}\right\}^2\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+\frac{2}{x}}{3-\frac{1}{x}}\right)^{-\frac{1}{3}}$$
$$=\mathrm{e}^2.$$

(6) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}\xlongequal{\alpha=0}\lim_{x\to+\infty}1=1\quad(\alpha,\beta\in\mathbf{R}),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}\xlongequal{\alpha\neq0}\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\alpha}}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right]^{\alpha\beta}=\mathrm{e}^{\alpha\beta},$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\mathrm{e}^{\alpha\beta}\quad(\alpha,\beta\in\mathbf{R}).$$

注意:① **实际上,若** $x\to a$ **时,** $f(x)\to 0$**,则有**
$$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1.$$

② **若** $x\to a$ **时,** $f(x)\to\infty$**,则有**
$$\lim_{x\to a}\left[1+\frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}=\mathrm{e},$$

或若 $x\to b$ **时,** $f(x)\to 0$**,则有**
$$\lim_{x\to b}\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}.$$

3. 证明: $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right]\right\}=1$.

证　设 $f(x)=\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$**,则**
$$f(x)\cdot\sin\frac{x}{2^n}=\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2x,$$

即
$$f(x)=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}.$$

由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，依归结原则有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=1\ \left(\frac{x}{2^n}\to 0，\text{当 }n\to\infty\right)，$$

故
$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\cos x\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right]\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1.$$

4. 利用归结原则计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\frac{\pi}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x^2}}{\frac{\pi}{x^2}}\cdot\frac{\pi}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x^2}}{\frac{\pi}{x^2}}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\pi=0.$

记$x_n=\sqrt{n}$，由归结原则得
$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n}\cdot\sin\frac{\pi}{(\sqrt{n})^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n}=0.$$

(2)
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}+\frac{n}{n+1}}$$
$$=\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\cdot\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$
$$<\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\cdot\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right).$$

记$x_n=\frac{n^2}{n+1}$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\infty$，而
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

由归结原则有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=\lim_{x_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=\mathrm{e}.$$

故有
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\mathrm{e}.$$

由极限的迫敛性得
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\mathrm{e}.$$

§5 无穷小量与无穷大量

1. 证明下列各式:

(1) $2x-x^2=O(x)\ (x\to 0)$;

(2) $x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}})\ (x\to 0^+)$;

(3) $\sqrt{1+x}-1=o(1)\ (x\to 0)$;

(4) $(1+x)^n=1+nx+o(x)\ (x\to 0)$($n$ 为正整数);

(5) $2x^3+x^2=O(x^3)\ (x\to\infty)$;

(6) $o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x))\ (x\to x_0)$;

(7) $o(g_1(x))\cdot o(g_2(x))=o(g_1(x)\cdot g_2(x))\ (x\to x_0)$.

证 (1) 因为 $\left|\frac{2x-x^2}{x}\right|=|2-x|$,故当 $x\in U^\circ(0)=\{x\,|\,0<|x|<1\}$ 时 $\left|\frac{2x-x^2}{x}\right|<3$,即有

$$2x-x^2=O(x)\ (x\to 0).$$

(2) 取 $U_+^\circ(0)=\{x\,|\,0<x<1\}$,则 $\forall x\in U_+^\circ(0)$,有

$$\left|\frac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}\right|=\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right|<1,$$

故
$$x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}})\ (x\to 0^+).$$

（3）由
$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-1)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}$$
$$=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=0,$$
故
$$\sqrt{1+x}-1=o(1)\ (x\to 0).$$

（4）由
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1-nx}{x}=\lim_{x\to 0}\sum_{k=2}^{n}C_n^k x^{k-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}x\sum_{k=2}^{n}C_n^k x^{k-2}=0,$$
故
$$(1+x)^n-1-nx=o(x)\ (x\to 0),$$
即
$$(1+x)^n=1+nx+o(x)\ (x\to 0).$$

（5）取$U^\circ(\infty)=\{x\mid |x|>1\}$，则$\forall x\in U^\circ(\infty)$，有
$$\left|\frac{2x^3+x^2}{x^3}\right|=\left|2+\frac{1}{x}\right|<3,$$
故
$$2x^3+x^2=O(x^3)\ (x\to\infty).$$

（6）由$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{o(g(x))}{g(x)}=0$，知
$$\lim_{x\to x_0}\frac{o(g(x))\pm o(g(x))}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{o(g(x))}{g(x)}\pm\lim_{x\to x_0}\frac{o(g(x))}{g(x)}=0,$$
故有
$$o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x))\ (x\to x_0).$$

注意：$o(g(x))=o(g(x))$不一定成立．例如，当$x\to 0$时$x^2=o(x)$，$x^3=o(x)$，而$x^2\neq x^3$．

（7）由于
$$\lim_{x\to x_0}\frac{o(g_1(x))\cdot o(g_2(x))}{g_1(x)g_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{o(g_1(x))}{g_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{o(g_2(x))}{g_2(x)}=0,$$
故
$$o(g_1(x))\cdot o(g_2(x))=o(g_1(x)\cdot g_2(x))\ (x\to x_0).$$

2．应用定理 3.12 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x}}{x-\cos x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$．

解　（1）由　$\dfrac{1}{x-1}\leqslant\dfrac{1}{x-\cos x}\leqslant\dfrac{1}{x+1}$，$x\in U^\circ(\infty)=\{x\mid |x|>1\}$，

及
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0.$$
依迫敛性得
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\cos x}=0,$$
又 $\arctan\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}\ (x\to\infty)$,**故**
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\arctan\frac{1}{x}}{x-\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\frac{1}{x}}{x-\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\cos x}=0.$$
(2)**由**
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{2},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$
得
$$\sqrt{1+x^2}-1\sim\frac{1}{2}x^2(x\to0),$$
$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2(x\to0),$$
故
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=1.$$

3. 证明定理 3.13.

定理 3.13:i)**设** f **在** $U^\circ(x_0)$ **内有定义且不为** 0. **若** f **为** $x\to x_0$ **时的无穷小量,则** $\frac{1}{f}$ **为** $x\to x_0$ **时的无穷大量.**

ii)**若** g **为** $x\to x_0$ **时的无穷大量,则** $\frac{1}{g}$ **为** $x\to x_0$ **时的无穷小量.**

证 i)**设** $f(x)\neq0,\forall x\in U^\circ(x_0)$,**且** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,**则** $\frac{1}{f(x)}$ **在** $U^\circ(x_0)$ **内有定义,且对于** $\forall G>0,\varepsilon_0=\frac{1}{G}>0$,**由** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ **知**,$\exists\delta_1>0$,**当** $0<|x-x_0|<$

δ_1 时有 $|f(x)|<\frac{1}{G}$，故取 $\delta=\delta_1$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|>G$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

ii）对于 $\forall\varepsilon>0$，这时取 $G=\frac{1}{\varepsilon}$，由 g 为 $x\to x_0$ 时无穷大量知，$\exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时有 $|g(x)|>G=\frac{1}{\varepsilon}$，故取 $\delta=\delta_1$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $\left|\frac{1}{g(x)}\right|<\frac{1}{G}=\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=0$.

4. 求下列函数所表示曲线的渐近线：

（1）$y=\frac{1}{x}$；　　　　（2）$y=\arctan x$；

（3）$y=\frac{3x^3+4}{x^2-2x}$.

解　（1）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0,$$

及

$$\lim_{x\to\infty}(y-0\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$

故 $k=b=0$，因此曲线有渐近线 $y=0$（此渐近线称为水平渐近线）.

注意：水平渐近线求法．设 $y=f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=y_0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=y_0$，则 $y=y_0$ 为 $f(x)$ 一条水平渐近线．例如，$y=\frac{x^2}{x^2+1}$，因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$，故 $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ 有水平渐近线 $y=1$.

（2）

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

故 $y=\arctan x$ 有水平渐近线 $y=\frac{\pi}{2}$ 及 $y=-\frac{\pi}{2}$.

（3）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4}{x^3-2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x^3}}{1-\frac{2}{x}}=3,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-3x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+4}{x^2-2x}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+4}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=6,$$

及
$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{3x^3+4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^3+4}{x-2}\cdot\frac{1}{x}=\infty,$$
$$\lim_{x\to 2} y=\lim_{x\to 2}\frac{3x^3+4}{x}\cdot\frac{1}{x-2}=\infty,$$
故 $y=\dfrac{3x^3+4}{x^2-2x}$ 有三条渐近线:斜渐近线 $y=3x+6$,垂直渐近线 $x=0$ 和 $x=2$.

5. 试确定 α 的值,使下列函数与 x^α 当 $x\to 0$ 时为同阶无穷小量:

(1) $\sin 2x-2\sin x$;　　(2) $\dfrac{1}{1+x}-(1-x)$;

(3) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$;　　(4) $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$.

解 (1) 由
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2(\cos x-1)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left(-\frac{4\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)=-1\neq 0,$$
知 $\alpha=3$,且
$$\sin 2x-2\sin x\sim -x^3\ (x\to 0).$$

(2) 由 $\left[\dfrac{1}{1+x}-(1-x)\right]=\dfrac{x^2}{1+x}$ 知
$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{1+x}-(1-x)\right]\Big/x^2=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1,$$
故 $\alpha=2$,且
$$\frac{1}{1+x}-(1-x)\sim x^2\ (x\to 0).$$

(3)
$$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}=\frac{\tan x+\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}},$$
故
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\sin x}{\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}\right)x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}=1,$$
得 $\alpha=1$,且
$$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}\sim x\ (x\to 0).$$

(4)
$$\sqrt[5]{3x^2-4x^3}=x^{\frac{2}{5}}\sqrt[5]{3-4x},$$
故
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{3x^2-4x^3}}{x^{\frac{2}{5}}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[5]{3-4x}=\sqrt[5]{3}\neq 0,$$

由此 $\alpha=\dfrac{2}{5}$，且

$$\sqrt[5]{3x^2-4x^3}\sim\sqrt[5]{3}\cdot x^{\frac{2}{5}}\ (x\to 0).$$

6. 试确定 α 的值，当 $x\to\infty$ 时使下列函数与 x^α 为同阶无穷大量.

(1) $\sqrt{x^2+x^5}$；

(2) $x+x^2(2+\sin x)$；

(3) $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$.

解　(1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x^5}}{x^{\frac{5}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\cdot x^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+x^{-3}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}=1,$$

故 $\alpha=\dfrac{5}{2}$，即 $\sqrt{x^2+x^5}$ 与 $x^{\frac{5}{2}}$ 在 $x\to+\infty$ 时为同阶无穷大量.

(2) 设 $x\in U^\circ(\infty)=\{x\,|\,|x|>2\}$，则

$$\frac{1}{2}<\left|\frac{x+x^2(2+\sin x)}{x^2}\right|=\left|\frac{1}{x}+2+\sin x\right|<4,$$

故 $\alpha=2$，即 $x+x^2(2+\sin x)$ 与 x^2 在 $x\to\infty$ 时为同阶无穷大量.

(3) $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$

$$=x^{1+2+\cdots+n}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\right]$$

$$=x^{\frac{n(n+1)}{2}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\right],$$

而

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^k}\right)=1,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

故

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)=1,$$

因此 $\alpha=\dfrac{n(n+1)}{2}$，即当 $x\to\infty$ 时 $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$ 与 $x^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 为同阶无穷大量.

7. 证明:若 S 为无上界数集,则存在一递增数列 $\{x_n\}\subset S$,使得 $x_n\to\infty(n\to\infty)$.

证 因 S 为无上界数集,故 $\exists x_1\in S$ 使 $x_1>1$,$\exists x_2\in S-\{x\mid x\leqslant x_1,x\in S\}$ 使 $x_2>2$,…. 一般地,$\exists x_n\in S-\{x\in S\mid x\leqslant x_{n-1}\}$ 使 $x_n>n$. 如此继续下去,得一数列 $\{x_n\}\subset S$ 且满足:

i) $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n<\cdots$

ii) 由于 $x_n>n$,故对 $\forall M>0$,取 $N=[M]+1>0$,当 $n>N$ 时 $x_n>n>M$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

8. 证明:若 f 为 $x\to r$ 时的无穷大量,而函数 g 在某 $U^\circ(r)$ 上满足 $g(x)\geqslant K>0$,则 fg 为 $x\to r$ 时的无穷大量.

证 对于 $\forall G>0$,由 $\lim\limits_{x\to r}f(x)=\infty$ 知,$\exists\delta_1>0$,当 $x\in U^\circ(r;\delta_1)$ 时,有

$$|f(x)|>\frac{G}{K}.$$

记 $U^\circ(r)=U^\circ(r;\delta_2)$,则取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,当 $x\in U^\circ(r;\delta)$ 时,有

$$|f(x)g(x)|>\frac{G}{K}\cdot K=G,$$

故当 $x\to r$ 时 fg 为无穷大量.

9. 设 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$,证明:$f(x)-g(x)=o(f(x))$ 或 $f(x)-g(x)=o(g(x))(x\to x_0)$.

证 由 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$ 得 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$,故

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)=0,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)=0,$$

即

$$f(x)-g(x)=o(f(x)),$$

$$f(x)-g(x)=o(g(x)).$$

§6 总练习题

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 3^-}(x-[x])$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1^+}([x]+1)^{-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}\right]$；

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$，$m,n\in\mathbf{N}_+$.

解　(1) **由** $x\to 3^-$，**设** $2<x<3$，**则**

$$\lim_{x\to 3^-}(x-[x])=\lim_{x\to 3^-}(x-2)=1.$$

(2) **由** $x\to 1^+$，**设** $1<x<2$，**则**

$$\lim_{x\to 1^+}([x]+1)^{-1}=\lim_{x\to 1^+}2^{-1}=\frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}\right]$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{(a+x)(b+x)-(a-x)(b-x)}{\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(b-x)}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{2(a+b)x}{|x|\left[\sqrt{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\left(1+\dfrac{b}{x}\right)}+\sqrt{\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\left(1-\dfrac{b}{x}\right)}\right]},$$

故

$$\lim_{x\to +\infty}\left[\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}\right]=a+b.$$

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{x}\right)^2}}=1.$

(5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{x}\right)^2}}\right)=-1.$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\left[\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right]}{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x})\left[\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right]\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{2x(\sqrt{(x+1)}+\sqrt{1-x})}=\frac{3}{2}.$$

(7) 当 $m=n$ 时，此极限显然为 0.

当 $m\neq n$ 时，不失一般性，假设 $m<n$，且 $m+l=n$，并由 $x\to 1$ 时

$$1-x^m\sim m(1-x),\quad 1-x^n\sim n(1-x),$$

得

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{m(1-x^n)-n(1-x^m)}{(1-x^m)(1-x^n)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{m(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})-n(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})}{mn(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-l-lx-\cdots-lx^{m-1}+mx^m+mx^{m+1}+\cdots+mx^{m+l-1}}{mn(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(mx^{m+l-1}-m)+\cdots+(mx^m-m)-(lx^{m-1}-l)-(lx^{m-2}-l)-\cdots-(lx-l)-(l-l)}{mn(1-x)}$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{mx^{m+l-2}+2mx^{m+l-3}+\cdots+lmx^{m-1}+l(m-1)x^{m-2}+l(m-2)x^{m-3}+\cdots+l}{mn}$$

$$=-\frac{(1+2+\cdots+l)m+l(1+2+\cdots+m-1)}{mn}$$

$$=-\frac{\frac{1}{2}(l+1)lm+\frac{1}{2}m(m-1)l}{mn}=-\frac{l^2+l+ml-l}{2n}$$

$$=-\frac{l(m+l)}{2n}=-\frac{l}{2}=\frac{m-n}{2}.$$

由 $m=n$ 时 $\dfrac{m-n}{2}=0$，知无论 m,n 为何关系，总有

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}.$$

2. 分别求出满足下述条件的常数 a 与 b：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$.

解　(1) **由** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-(ax+b)(x+1)}{x+1}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+(1-b)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a)x-(a+b)+\dfrac{1-b}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=0,$$

得
$$\begin{cases}1-a=0,\\ a+b=0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}a=1,\\ b=-1.\end{cases}$$

(2) **由**
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-ax-b\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[(-x)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a\right)-b\right]=0,$$

得
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a\right)=0,$$

即 $a+1=0\Rightarrow a=-1$. **将** $a=-1$ **代入原式得**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-b\right)=0,$$

即
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-b\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}-x}-b\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}-b\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}-b$$

$$=\frac{1}{2}-b=0\Rightarrow b=\frac{1}{2},$$

故
$$\begin{cases}a=-1,\\ b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

（3）由
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a\right)-b\right]=0,$$

得
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a\right)=\lim_{x\to+\infty}(1-a)=0,$$

即 $a=1$. 将 $a=1$ 代入原式得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x-b\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}-b\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}-b\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}-b\right)=0,$$

即 $b=-\dfrac{1}{2}$，故

$$\begin{cases}a=1,\\ b=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

3. 试分别举出满足下列要求的函数 f：

（1）$\lim\limits_{x\to 2}f(x)\neq f(2)$；

（2）$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$不存在.

解　（1）
$$f(x)=\begin{cases}x-2 & (x>2),\\ 2 & (x=2),\\ 2-x & (x<2),\end{cases}$$

则
$$\lim_{x\to 2}f(x)=0\neq f(2).$$

（2）
$$f(x)=\begin{cases} x^3 & (x>2), \\ 6 & (x=2), \\ x^2 & (x<2), \end{cases}$$

则
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^3=8,\quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^2=4,$$

故$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$不存在.

4．试给出函数 f 的例子，使 $f(x)>0$ 恒成立，而在某一点 x_0 处有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，这同极限的局部保号性有矛盾吗？

解
$$f(x)=\begin{cases} x & (x>0), \\ 1 & (x=0), \\ -x & (x<0), \end{cases}$$

则对$\forall x\in \mathbf{R}$ 有 $f(x)>0$，而
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0.$$

这与极限的局部保号性不矛盾．局部保号性是指：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$（或 $A<0$），则 $f(x)$在某去心邻域$U^\circ(x_0)$内有 $f(x)>r>0$（或 $f(x)<-r<0$）．与本题条件、结论之间关系正好相反．本题则进一步说明若 $f(x)>0$，则不能推出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$，应视为对局部保号性的补充和说明．

5．设$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{u\to A} g(u)=B$．在何种条件下能由此推出$\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=B$．

解　若 $g(u)$在$U^\circ(A;\delta)$上有定义，则一定存在 $\delta_1>0$，当 $x\in U^\circ(a;\delta_1)$时，就有 $f(x)\subset U^\circ(A;\delta)$，则在此条件下本题的结论成立．证明如下．

对于$\forall \varepsilon>0$，由于$\lim\limits_{u\to A} g(u)=B$，故$\exists \delta_1>0$，当 $u\in U^\circ(A;\delta_1)$时 $|g(u)-A|<\varepsilon$，而由$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 知，$\exists \delta>0$，当 $x\in U^\circ(a;\delta)$时，$f(x)\in U^\circ(A;\delta_1)$，即有 $|g(f(x))-A|<\varepsilon$，从而
$$\lim_{x\to a} g(f(x))=A.$$

显然，若对于$\forall \delta>0$，当 $x\in U^\circ(a;\delta)$时，$f(x)$有值在 $U^\circ(A;\delta)$之外，则无法保证$|g(f(x))-B|<\varepsilon$．实际上，由于 $f(x)$在$U^\circ(A;\delta)$之外的点的随意性，我们总可以定义其值，使$|g(f(x))-B|>\varepsilon_0$（$\varepsilon_0$ 为某固定值）．故$|g(f(x))-$

$B|<\varepsilon$ 总不能成立. 因此,我们前述的条件是必须满足的.

6. 设 $f(x)=x\cos x$. 试作数列

(1) $\{x_n\}$使得 $x_n\to\infty(n\to\infty)$, $f(x_n)\to 0(n\to\infty)$;

(2) $\{y_n\}$使得 $y_n\to\infty(n\to\infty)$, $f(y_n)\to+\infty(n\to\infty)$;

(3) $\{z_n\}$使得 $z_n\to\infty(n\to\infty)$, $f(z_n)\to-\infty(n\to\infty)$.

解　(1) $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n=1,2,\cdots)$,此时

$$f(x_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0(n=1,2,\cdots),$$

故有
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n)=0.$$

(2) $y_n=2n\pi(n=1,2,\cdots)$,此时

$$f(y_n)=2n\pi\cos 2n\pi=2n\pi(n=1,2,\cdots),$$

故有
$$\lim_{n\to\infty}y_n=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}f(y_n)=+\infty.$$

(3) $z_n=2n\pi+\pi(n=1,2,\cdots)$,此时

$$f(z_n)=(2n\pi+\pi)\cos(2n\pi+\pi)=-(2n\pi+\pi)(n=1,2,\cdots),$$

故有
$$\lim_{n\to\infty}z_n=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}f(z_n)=-\infty.$$

7. 证明:若数列$\{a_n\}$满足下列条件之一,则$\{a_n\}$是无穷大数列:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r>1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=s>1\ (a_n\neq 0,n=1,2,\cdots)$.

证　(1) 由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r>1$ 得,对于 $\varepsilon_0=\dfrac{r-1}{2}>0$, $\exists N_1\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N_1$ 时有

$$\left|\sqrt[n]{|a_n|}-r\right|<\frac{r-1}{2},$$

即
$$r-\frac{r-1}{2}<\sqrt[n]{|a_n|}<r+\frac{r-1}{2}\Rightarrow\sqrt[n]{|a_n|}>\frac{r+1}{2}=a>1,$$

即当 $n>N_1$ 时有

$$|a_n|>a^n,\text{且}\lim_{n\to\infty}a^n=+\infty,$$

因此,对于$\forall M>0$, $\exists N_2>0$,当 $n>N_2$ 时有

$$a^n > M.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，$|a_n|>a^n>M$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

（2）由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=s>1$ 得，对于 $\varepsilon_0=\dfrac{s-1}{2}$，$\exists N_1\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N_1$ 时，有

$$\left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}-s\right|<\varepsilon_0=\frac{s-1}{2},$$

即
$$s-\frac{s-1}{2}<\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<s+\frac{s-1}{2}\Rightarrow\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>\frac{s+1}{2}=b>1.$$

从而由 $\left|\dfrac{a_{N_1+2}}{a_{N_1+1}}\right|>b$，$\left|\dfrac{a_{N_1+3}}{a_{N_1+2}}\right|>b$，…，$\left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right|>b$，推出

$$\left|\frac{a_n}{a_{N_1+1}}\right|>b^{n-N_1},$$

即
$$|a_n|>|a_{N_1+1}|b^{n-N_1}=\frac{|a_{N_1+1}|}{b^{N_1}}b^n,$$

记 $\dfrac{|a_{N_1+1}|}{b^{N_1}}=c>0$，则有

$$|a_n|>cb^n\quad(n>N_1).$$

对于 $\forall M>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}cb^n=+\infty$ 知，$\exists N_2\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N_2$ 时

$$cb^n>M.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，$|a_n|>cb^n>M$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

8. 利用上题(1)的结论求极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

解　（1）设 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}>1.$$

由上题(1)得
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=+\infty.$$

（2）设 $b_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\mathrm{e}>1.$$

由上题（1）得
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n^2}=+\infty,$$

从而
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n^2}}=0.$$

9．设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=+\infty$；

（2）若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty$.

证　（1）对于$\forall M>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$知，$\exists N_1>0$，当 $n>N_1$ 时
$$a_n>3M.$$

记 $a_1+a_2+\cdots+a_n=A_n$，则此时有
$$\frac{A_n}{n}=\frac{A_{N_1}}{n}+\frac{A_n-A_{N_1}}{n-N_1}\left(1-\frac{N_1}{n}\right)>\frac{A_{N_1}}{n}+3M\left(1-\frac{N_1}{n}\right),$$

而由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_{N_1}}{n}=0$ 知，$\exists N_2>0$，当 $n>N_2$ 时
$$\frac{|A_{N_1}|}{n}<\frac{M}{2}.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{N_1}{n}\right)=1$ 知，$\exists N_3>0$，当 $n>N_3$ 时
$$1-\frac{N_1}{n}>\frac{1}{2},$$

即当$n>N=\max\{N_2,N_3\}$时，$\frac{|A_{N_1}|}{n}<\frac{M}{2}$与$1-\frac{N_1}{n}>\frac{1}{2}$同时成立．因此当$n>N$ 时
$$\frac{A_n}{n}>\frac{A_{N_1}}{n}+3M\left(1-\frac{N_1}{n}\right)>-\frac{M}{2}+\frac{3}{2}M=M,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty.$$

（2）对$\forall M>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，有 $N_1\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N_1$ 时有 $a_n>M+1$，从

而

$$a_{N_1+1}\cdots a_n>(M+1)^{n-N_1},$$

记 $c=a_1a_2\cdots a_{N_1}$，则

$$a_1a_2\cdots a_n>c(M+1)^{n-N_1},$$

而由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{c}{(M+1)^{N_1}}}=1$ 知，对 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{M+1}$，$\exists N_2\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N_2$ 时，就有

$$\left|\sqrt[n]{\frac{c}{(M+1)^{N_1}}}-1\right|<\varepsilon_0,$$

即
$$\frac{M}{M+1}=1-\varepsilon_0<\sqrt[n]{\frac{c}{(M+1)^{N_1}}}<1+\varepsilon_0.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时有

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}>\sqrt[n]{c\cdot(M+1)^{n-N_1}}>\frac{M}{M+1}\cdot M+1=M,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty.$$

注意：(2)可由(1)推出：首先，若 $a_n\to+\infty$，则

$$b_n=\ln a_n\to+\infty\quad(n\to\infty),$$

故有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=+\infty\quad(9\text{ 题(1)}),$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty.$$

10. 利用上题结果求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$；　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n!)}{n}$.

解　(1) 设 $a_n=n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，由上题(2)得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty.$$

(2) 设 $a_n=\ln n$，则对于 $\forall M>0$，取 $N=[\mathrm{e}^M]+1$，当 $n>N$ 时有

$$\ln n>\ln N>\ln\mathrm{e}^M=M,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty.$$

再由上题(1)有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=+\infty.$$

11. 设 f 为 $U_-^\circ(x_0)$ 内的递增函数,证明:若存在数列 $\{x_n\}\subset U_-^\circ(x_0)$ 且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$,则有

$$f(x_0-0)=\sup_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)=A.$$

证　对于 $\forall\varepsilon>0$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 知,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时有

$$A-\varepsilon<f(x_n)<A+\varepsilon,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $f(x)$ 为单调递增函数,因此取 $\delta=x_0-x_{N+1}$,则当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,$\exists N_1\in\mathbf{N}_+$,使得 $x<x_{N_1}<x_0$,从而有

$$A-\varepsilon<f(x_{N_1+1})\leqslant f(x)\leqslant f(x_{N_1})<A+\varepsilon,$$

即 $\forall x\in U_-^\circ(x_0)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0\}$ 有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$,由此得 $f(x)$ 在 $U_-^\circ(x_0)$ 内有上界. 由确界原理知 $f(x)$ 在 $U_-^\circ(x_0)$ 内有上确界. 记

$$\sup_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)=B,$$

则
$$A-\varepsilon<B<A+\varepsilon,\quad 即\quad |A-B|<\varepsilon,$$

由 ε 的任意性知 $A=B$. 从而得

$$\sup_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)=A.$$

由本章§3中习题5知　$f(x_0-0)=\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)=A.$

12. 设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(2x)=f(x)$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)=A$,证明:$f(x)\equiv A$,$x\in(0,+\infty)$.

证　对 $\forall x_0\in(0,+\infty)$,构造数列 $\{x_n\}$,$x_n=2^{n-1}x_0(n=1,2,\cdots)$,则

$$\lim_{n\to+\infty}2^{n-1}x_0=+\infty,$$

且由 $f(2x)=f(x)$,得

$$f(x_n)=f(2^{n-1}x_0)=f(2^{n-2}x_0)=\cdots=f(2x_0)=f(x_0),$$

即 $\forall n\in\mathbf{N}_+$,$f(x_n)=f(x_0)$,因此

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}f(x_0)=f(x_0),$$

而由 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=A$，据归结原则有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$，推出

$$f(x_0)=A.$$

由 x_0 的任意性，得

$$f(x)\equiv A,\quad x\in(0,+\infty).$$

13. 设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(x^2)=f(x)$，且

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(1),$$

证明：

$$f(x)\equiv f(1),\quad x\in(0,+\infty).$$

证　i）若 $\forall x_0\in(0,1)$，记 $x_n=x_0^{2^{n-1}}(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\lim_{n\to+\infty} x_0^{2^{n-1}}=0,$$

且由 $f(x^2)=f(x)$，得

$$f(x_n)=f(x_0^{2^{n-1}})=f(x_0^{2^{n-2}})=\cdots=f(x_0^2)=f(x_0),$$

即 $\forall n\in\mathbf{N}_+$ 有 $f(x_n)=f(x_0)$，因此

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty} f(x_0)=f(x_0),$$

而由 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(1)$，据归结原则有 $\lim\limits_{x_n\to0} f(x_n)=f(1)$，推出

$$f(x_0)=f(1),$$

即

$$f(x)=f(1),\quad x\in(0,1).$$

ii）若 $\forall x_0\in(1,+\infty)$，记 $y_n=x_0^{2^{n-1}}(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty} x_0^{2^{n-1}}=+\infty,$$

且由 $f(x^2)=f(x)$，得

$$f(x_n)=f(x_0^{2^{n-1}})=f(x_0^{2^{n-2}})=\cdots=f(x_0^2)=f(x_0),$$

即 $\forall n\in\mathbf{N}_+$ 有

$$f(x_n)=f(x_0),$$

故

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty} f(x_0)=f(x_0),$$

而由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(1)$，据归结原则有 $\lim\limits_{x_n\to+\infty} f(x_n)=f(1)$，推出

$$f(x_0)=f(1),$$

即

$$f(x)=f(1),\quad x\in(1,+\infty).$$

由 i）、ii）得

$$f(x)\equiv f(1),\quad x\in(0,+\infty).$$

14. 设函数 f 定义在 $(a,+\infty)$ 上, f 在每一个有限区间 (a,b) 内有界,并满足

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A,$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$$

证 对于 $\forall\varepsilon>0$,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$,必存在 $M_0>a$,当 $x>M_0$ 时,有

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

设 $x>M_0+1$,则 $\exists n\in\mathbf{N}_+$ 满足 $n\leqslant x-M_0\leqslant n+1$(其中 n 与 x 有关),记 $t=x-M_0-n$,则有 $0\leqslant t<1$, $x=M_0+t+n$. 因此

$$\frac{f(x)}{x}-A=\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(M_0+t)}{n}-A\right]+\frac{f(M_0+t)}{x}-\frac{(M_0+t)A}{x},$$

而

$$\begin{aligned}&\left|\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(M_0+t)}{n}-A\right]\right|\\&\leqslant\left|\frac{f(M_0+t+n)-f(M_0+t)}{n}-A\right|\\&=\frac{1}{n}|f(M_0+t+n)-f(M_0+t)-nA|\\&=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}[f(M_0+t+k)-f(M_0+t+k-1)-A]\right|\\&\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(M_0+t+k)-f(M_0+t+k-1)|\\&<\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

由假定 $f(x)$ 在 $M_0<x<M_0+1$ 上有界,故存在函数 M_2,当 $x>M_2$ 时有

$$\left|\frac{f(M_0+\tau)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(0<\tau<1),$$

记 $M_0+1=M_1$,则 M_1A 为常数,且

$$\left|\frac{(M_0+t)A}{x}\right|<\frac{M_1A}{x}.$$

显然存在 $M_3>0$,当 $x>M_3$ 时有 $\left|\dfrac{M_1A}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$,即

$$\left|\frac{(M_0+t)A}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $M=\max\{M_1,M_2,M_3\}$，则当 $x>M$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$$

第四章　函数的连续性

知 识 要 点

1. 连续函数是数学分析的主要研究对象. 连续函数的定义是逐点给出的:

$$f \text{ 在点 } x_0 \text{ 连续} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

并由极限与左、右极限关系给出了:

$$f \text{ 在点 } x_0 \text{ 连续} \Leftrightarrow f \text{ 在点 } x_0 \text{ 左、右连续}$$

它常用于讨论分段函数在分段点的连续性.

2. 若 f 在某个 $U^{\circ}(x_0)$ 内有定义,则可用 f 在 x_0 的左、右极限 $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ 来判定 x_0 是否为间断点,并当 x_0 为间断点时判定该间断点的类型.

3. 由于连续是由极限定义的,故它保留了极限的局部有界性,局部保号性. 并由极限的运算法则得知连续函数经四则运算及复合运算后函数的连续性.

4. 有界闭区间上的连续函数的整体性质在微积分理论分析中具有重要的作用,它由"有界性定理和最大、最小值定理","介值定理和根存在定理","反函数的连续性定理"和"一致连续性定理"构成.

5. 初等函数在其定义区间上连续.

6. 连续在极限计算中的作用:若 f 在点 x_0 连续,则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x).$$

习题详解

§1 连续性概念

1. 按定义证明下列函数在其定义域内连续：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$；　　(2) $f(x)=|x|$.

证　(1) 对$\forall x_0\in D, D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，由于

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}=f(x_0),$$

故 $f(x)$在 $x=x_0$ 连续，即 $f(x)$在 D 内连续.

(2) 对$\forall x_0\in D, D=\mathbf{R}$，由于

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\sqrt{x^2}=\sqrt{x_0^2}=|x_0|=f(x_0),$$

故 $f(x)$在 $x=x_0$ 连续，即 $f(x)$在 D 内连续.

2. 指出下列函数的间断点并说明其类型：

(1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$；

(3) $f(x)=[\,|\cos x|\,]$；　　(4) $f(x)=\operatorname{sgn}|x|$；

(5) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$；　　(6) $f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\ -x, & x\text{ 为无理数};\end{cases}$

(7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+7}, & -\infty<x<-7,\\ x, & -7\leqslant x\leqslant 1,\\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty.\end{cases}$

解　(1) $x=0$ 时，$f(x)$无定义，且

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\infty,$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$的第二类间断点.

(2) $x=0$ 时,$f(x)$无定义,且

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\left[-\frac{\sin x}{x}\right]=-1,$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$的第一类跳跃间断点.

(3) 当 $x=n\pi$ 时,　　$f(x)=[|\cos n\pi|]=1.$

当 $x\neq n\pi$ 时,由于 $|\cos nx|<1$,故

$$f(x)=[|\cos x|]=0,$$

且　$$\lim_{x\to n\pi}f(x)=\lim_{x\to n\pi}[|\cos x|]=\lim_{x\to n\pi}0=0\neq f(n\pi),$$

故 $x=n\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$,为 $f(x)$的第一类可去间断点.

(4) 当 $x=0$ 时,　　$f(x)=\operatorname{sgn}|x|=0.$

当 $x\neq 0$ 时,　　$f(x)=\operatorname{sgn}|x|=1,$

且　$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}|x|=\lim_{x\to 0}1=1\neq f(0),$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$的第一类可去间断点.

(5) 当 $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时,

$$f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)=0.$$

当 $2n\pi-\frac{\pi}{2}<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时,

$$f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)=1.$$

当 $2n\pi+\frac{\pi}{2}<x<2n\pi+\frac{3\pi}{2}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时,

$$f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)=-1.$$

且当 $x_0=2n\pi-\frac{\pi}{2}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时,

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}\operatorname{sgn}(\cos x)=1,\quad \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}\operatorname{sgn}(\cos x)=-1.$$

当 $x_0=2n\pi+\frac{\pi}{2}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时,

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}\operatorname{sgn}(\cos x)=-1,\quad \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}\operatorname{sgn}(\cos x)=1.$$

故 $x_0=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是函数 f 的第一类跳跃间断点.

(6) 当 $x=0$ 时，
$$\lim_{x\to0}f(x)=0.$$
当 $x\neq0$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$均不存在，故$\forall x_0\in\mathbf{R}-\{0\}$均为 f 的第二类间断点.

(7)
$$\lim_{x\to7^-}f(x)=\lim_{x\to7^-}\frac{1}{x+7}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x=1=f(1),$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}=0.$$
故 $x=-7$ 为 f 的第二类间断点，$x=1$ 为 f 的第一类跳跃间断点.

3. 延拓下列函数，使其在 R 上连续：

(1) $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$；　(2) $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$；　(3) $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$.

解　(1) $x=2$ 为 $f(x)$的间断点，但
$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)=12.$$
故 $x=2$ 为 $f(x)$的可去间断点．定义
$$F(x)=\begin{cases}f(x) & (x\neq2),\\ 12 & (x=2),\end{cases}$$
则 F 在 R 上连续.

(2) $x=0$ 为 $f(x)$的间断点，但
$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2},$$
故 $x=0$ 为 $f(x)$的可去间断点．定义
$$F(x)=\begin{cases}f(x) & (x\neq0),\\ \frac{1}{2} & (x=0),\end{cases}$$
则 F 在 R 上连续.

(3) $x=0$ 为 $f(x)$的间断点,但

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0.$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$的可去间断点,定义

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0),\end{cases}$$

则 F 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

4. 证明:若 f 在点 x_0 连续,则 $|f|$ 与 f^2 也在点 x_0 连续. 又问若 $|f|$ 或 f^2 在 I 上连续,那么 f 在 I 上是否必连续.

证 由 $f(x)$在 $x=x_0$ 连续,得 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,从而

$$\lim_{x\to x_0}f^2(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)=f^2(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\lim_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{f^2(x_0)}=|f(x_0)|.$$

即 $|f|$ 与 f^2 也在 $x=x_0$ 连续.

构造函数
$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x\geqslant 0),\\ -1 & (x<0),\end{cases}$$

则有
$$|f(x)|=1,\ f^2(x)=1,\ \forall x\in\mathbf{R},$$

即 $|f(x)|$、$f^2(x)$在$\mathbf{R}$ 上连续,但$f(x)$在$x=0$ 不连续. 因此,由 $|f|$ 或f^2 在I 上连续不能断定f 在I 上必连续. 当然 $|f|$ 或f^2 在I 上连续,f 亦有可能是在I 上连续的,这只要将 f 取为连续函数即可.

5. 设当$x\neq 0$ 时 $f(x)\equiv g(x)$,而$f(0)\neq g(0)$. 证明:f 与g 两者中至多有一个在 $x=0$ 连续.

证 反证法:设 f 与 g 均在 $x=0$ 连续,则有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0),\quad \lim_{x\to 0}g(x)=0,$$

而
$$\lim_{x\to 0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to 0}0=0,$$

因此
$$\lim_{x\to 0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to 0}f(x)-\lim_{x\to 0}g(x)=f(0)-g(0)=0,$$

即 $f(0)=g(0)$与题设矛盾. 故 f 与 g 不可能同时在 $x=0$ 连续.

6. 设 f 为区间I 上的单调函数. 证明:若 $x_0\in I$ 为 f 的间断点,则 x_0 必是

f 的第一类间断点.

证　若 f 为区间 I 上单调增函数，取 $U^\circ(x_0)\subset I$，且满足 $\forall x\in U^\circ(x_0)$，$\exists x_1,x_2\in I$，使 $x_1<x<x_2$，则 f 在 $U^\circ(x_0)$ 上为有界函数. 由第三章§3中习题5知

$$f(x_0+0)=\inf_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x),\quad f(x_0-0)=\sup_{x\in U_-^\circ(x_0)} f(x),$$

即 f 在 x_0 左、右极限均存在，因此 x_0 若为 f 的间断点，则 x_0 必为 f 的第一类间断点. 若 f 为区间 I 上单调减函数，则令 $F(x)=-f(x)$，则 $F(x)$ 为 I 上单调增函数，从而

$$f(x_0+0)=-F(x_0+0)=-\inf_{x\in U_+^\circ(x_0)}\{-f(x)\}=\sup_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x),$$

$$f(x_0-0)=-F(x_0-0)=-\sup_{x\in U_-^\circ(x_0)}\{-f(x)\}=\inf_{x\in U_-^\circ(x_0)} f(x).$$

因此，结论同样成立.

7. 设函数 f 只有可去间断点，定义 $g(x)=\lim\limits_{y\to x}f(y)$. 证明 g 为连续函数.

证　任取 $x_0\in D(f)$.

对于 $\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=g(x_0)$ 得 $\exists\delta>0$，当 $x\in U(x_0;\delta)$ 时有

$$|f(x)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

而由 $\lim\limits_{y\to x}f(y)=g(x)$ 得 $\exists\delta_1>0$，使 $U(x;\delta_1)\subset U(x_0;\delta)$ 且 $\exists\delta_2>0$，当 $y\in U(x;\delta_2)$ 时，有

$$|f(y)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta'=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $y\in U(x;\delta')\subset U(x_0;\delta)$ 时，有

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

故有　$$|g(x)-g(x_0)|=|g(x)-f(y)+f(y)-g(x_0)|$$

$$\leqslant|f(y)-g(x_0)|+|f(y)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$，由 x_0 的任意性知 g 为连续函数.

8. 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的单调函数，定义 $g(x)=f(x+0)$. 证明 g 在 $\mathbf{R}$ 上的每一点

都右连续.

证 假设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数. 任取 $x_0\in\mathbf{R}$. 对于 $\forall\varepsilon>0$,由 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在,知 $\exists\delta>0$,当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时有

$$|f(x)-f(x_0+0)|<\varepsilon.$$

由 f 为 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数,知 $f(x)\leqslant f(x+0)$,$\forall x\in\mathbf{R}$ 且对于满足条件 $x_0<x<x'<x_0+\delta$ 的 x' 有

$$f(x)\leqslant f(x+0)\leqslant f(x'),$$

即有
$$f(x_0)\leqslant f(x_0+0)\leqslant f(x)\leqslant f(x+0)\leqslant f(x'),$$

从而
$$|g(x)-g(x_0)|=|f(x+0)-f(x_0+0)|\leqslant|f(x')-f(x_0+0)|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=g(x_0)$,由 x_0 的任意性,得 g 为 $\mathbf{R}$ 上的右连续函数.

若 f 为 $\mathbf{R}$ 上的单调减函数,取 $F=-f$,则 F 为 $\mathbf{R}$ 上单调增函数,且为 $\mathbf{R}$ 上右连续函数,故易知 f 为 $\mathbf{R}$ 上右连续函数.

9. 举出定义在 $[0,1]$ 上分别符合下述要求的函数:

(1) 只在 $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 三个点不连续的函数;

(2) 只在 $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 三点连续的函数;

(3) 只在 $\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$ 上间断的函数;

(4) 只在 $x=0$ 处右连续,而在其它点都不连续的函数.

解 (1) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)} & \left(x\neq\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right),\\ 1 & \left(x=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right),\end{cases}$$
$\forall x\in[0,1]$.

(2) $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)D(x)$,$\forall x\in[0,1]$.

(3) $$f(x)=\begin{cases}x\left[\dfrac{1}{x}\right] & (x\neq0,1),\\ 1 & (x=0),\\ 0 & (x=1),\end{cases}\quad x\in[0,1].$$

(4) $f(x)=xD(x)$,$x\in[0,1]$.

§2　连续函数的性质

1. 讨论复合函数 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 的连续性,设

(1) $f(x)=\operatorname{sgn}x, g(x)=1+x^2$;

(2) $f(x)=\operatorname{sgn}x, g(x)=(1-x^2)x$.

解　(1) $f\circ g(x)=f[g(x)]=\operatorname{sgn}(1+x^2)\equiv 1$.

$f\circ g$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

$$g\circ f(x)=g[f(x)]=1+[\operatorname{sgn}x]^2=\begin{cases}2 & (x\neq 0),\\ 1 & (x=0),\end{cases}$$

$g\circ f$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上连续. $x=0$ 为其第一类可去间断点.

(2) $g\circ f(x)=g[f(x)]=[1-(\operatorname{sgn}x)^2]\cdot\operatorname{sgn}x\equiv 0$.

$g\circ f$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

$$f\circ g(x)=f[g(x)]=\operatorname{sgn}[x(1-x^2)]=\begin{cases}1 & (x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)),\\ 0 & (x=0,x=\pm 1),\\ -1 & (x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)),\end{cases}$$

$f\circ g$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续. $x=0,x=\pm 1$ 为其第一类跳跃间断点.

2. 设 f,g 在点 x_0 连续,证明:

(1) 若 $f(x_0)>g(x_0)$,则存在 $U(x_0;\delta)$,使在其内有 $f(x)>g(x)$;

(2) 若在某 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)>g(x)$,则 $f(x_0)\geqslant g(x_0)$.

证　(1) 设 $F(x)=f(x)-g(x)$,由连续函数性质知,$F(x)$ 在 x_0 连续,而

$$F(x_0)=f(x_0)-g(x_0)>0.$$

由连续函数的局部保号性得 $\exists U(x_0;\delta)$,使得

$$\forall x\in U(x_0;\delta), F(x)>0,$$

即
$$f(x)>g(x).$$

(2) 由于 f,g 在点 x_0 连续,故

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0),$$

由题设条件,据函数极限保不等式性得

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\geqslant\lim_{x\to x_0} g(x),\text{即 } f(x_0)\geqslant g(x_0).$$

3. 设 f,g 在区间 I 上连续,记

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad G(x)=\min\{f(x),g(x)\}.$$

证明:F 和 G 也都在 I 上连续.

证　由第一章总练习题1. 知

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

$$G(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

由本章§1习题4知,f 在点 x_0 连续,则 $|f|$ 亦在点 x_0 连续. 而 $f(x),g(x)$ 均在区间 I 上连续,因此 $f(x)-g(x)$ 在 I 上连续,故 $|f(x)-g(x)|$ 在 I 上连续. 由连续函数性质知,F,G 都在 I 上连续.

4. 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上连续函数,常数 $c>0$. 记

$$F(x)=\begin{cases}-c, & f(x)<-c,\\ f(x), & |f(x)|\leqslant c,\\ c, & |f(x)|>c,\end{cases}$$

证明:$F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

证　$F(x)=\dfrac{1}{2}[|c+f(x)|-|c-f(x)|]$

由于 $f(x)$、常量函数 c 均在 $\mathbf{R}$ 上连续,故 $|c\pm f(x)|$ 亦在 $\mathbf{R}$ 上连续,进而 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

5. 设 $f(x)=\sin x,g(x)=\begin{cases}x-\pi, & x\leqslant 0\\ x+\pi, & x>0\end{cases}$

证明:复合函数 $f\circ g$ 在 $x=0$ 连续,但 g 在 $x=0$ 不连续.

证　$f\circ g(x)=f[g(x)]=\begin{cases}\sin(x-\pi), & x\leqslant 0\\ \sin(x+\pi), & x>0\end{cases}$

$$=\begin{cases}-\sin x, & x\leqslant 0\\ -\sin x, & x>0\end{cases}=\sin x,x\in\mathbf{R}.$$

由于 $\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,$f\circ g$ 在 $x=0$ 连续,而

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}(x+\pi)=\pi,\quad \lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}(x-\pi)=-\pi,$$

故 g 在 $x=0$ 不连续.

6. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 证明：f 在 $[a,+\infty)$ 上有界. 又问 f 在 $[a,+\infty)$ 上必有最大值或最小值吗？

证 记 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则对于 $\varepsilon_0=1$，$\exists M>\max\{a,0\}$，当 $x>M$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon_0=1$$

即
$$|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1$$

又 $f(x)$ 在 $[a,M]$ 上连续，由闭区间连续函数性质知，$\exists B>0$，使 $f(x)$ 在 $[a,M]$ 上有

$$|f(x)|<B,$$

故有
$$\forall x\in[a,+\infty),|f(x)|<\max\{|A|+1,B\}.$$

从而 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

考察 $f(x)=\arctan x$，$g(x)=-\arctan x$，$x\in[0,+\infty)$，均满足本题条件. 但前者无最大值，后者无最小值. 故 f 在 $[a,+\infty)$ 上不一定有最大值，也不一定有最小值. 但 f 在 $[a,+\infty)$ 上至少有最大值、最小值之一.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（$A$ 为有限值），我们分类讨论.

i）存在 $x_0\in[a,+\infty)$，使 $f(x_0)>A$.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{f(x_0)-A}{2}$，则 $\exists M_1>0$，当 $x>M_1$ 且 $x>x_0$ 时有

$$A-\frac{f(x_0)-A}{2}<f(x)<A+\frac{f(x_0)-A}{2},$$

即
$$f(x)>\frac{3A-f(x_0)}{2}\quad 且\quad f(x)<\frac{f(x_0)+A}{2}<f(x_0).$$

而在 $[a,M_1]$ 上 $f(x)$ 有最大值 M，

$$\forall x\in(M_1,+\infty),\quad f(x)<f(x_0)\leqslant M.$$

故 $\forall x\in[a,+\infty)$，$f(x)<M$，M 为 $f(x)$ 的最大值.

ii）存在 $x_0\in[a,+\infty)$，使 $f(x_0)<A$.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{A-f(x_0)}{2}$，则 $\exists M_2>0$，当 $x>M_2$ 且 $x>x_0$ 时有

$$A-\frac{A-f(x_0)}{2}<f(x)<A+\frac{A-f(x_0)}{2},$$

即
$$\frac{A+f(x_0)}{2}<f(x)<\frac{3A-f(x_0)}{2},$$

故$\forall x\in(M_2,+\infty)$有

$$f(x_0)<f(x).$$

而$f(x)$在$[a,M_2]$上取到最小值m,对于$\forall x\in(M_2,+\infty)$有

$$f(x)>f(x_0)\geqslant m.$$

故对$\forall x\in[a,+\infty)$,$f(x)\geqslant m$,m 为 $f(x)$在$[a,+\infty)$上最小值.

iii) $f(x)\equiv A$,$\forall x\in[a,+\infty)$.

此时,A 即为 $f(x)$的最大值又为 $f(x)$的最小值.

7. 若对任何充分小的 $\varepsilon>0$,f 在$[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$上连续,能否由此推出 f 在(a,b)内连续?

解　对于$\forall x_0\in(a,b)$,取 $\varepsilon_0=\min\left\{\frac{x_0-a}{2},\frac{b-x_0}{2}\right\}$,则 $\varepsilon_0>0$ 且 $x_0\in[a+\varepsilon_0,b-\varepsilon_0]$. 由已知,$f(x)$在$x=x_0$ 处连续,由x_0 的任意性得$f(x)$在(a,b)内连续.

8. 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\pi-x)\tan x$;　　(2) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x\sqrt{1+2x}-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\pi-x)\tan x=\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi.$

(2) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x\sqrt{1+2x}-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\frac{1\times\sqrt{1+2\times1}-\sqrt{1^2-1}}{1+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

9. 证明:若f 在$[a,b]$上连续,且对任何$x\in[a,b]$,$f(x)\neq0$,则f 在$[a,b]$上恒正或恒负.

证　反证法:若$\exists x_1,x_2\in[a,b]$使得$f(x_1)<0$,$f(x_2)>0$,则由f 在$[a,b]$上连续得,f 在$[\min\{x_1,x_2\},\max\{x_1,x_2\}]$上连续. 由根的存在定理知

$$\exists\xi\in(\min\{x_1,x_2\},\max\{x_1,x_2\})\subset[a,b],$$

使得$f(\xi)=0$,与题设矛盾. 故f 在$[a,b]$上恒正或恒负.

10. 证明：任一实系数奇次方程至少有一实根.

证　设 $f(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_1x+a_0, a_i\in\mathbf{R}, a_{2n+1}\neq 0$，则 $f(x)=0$，即

$$F(x)=x^{2n+1}+b_{2n}x^{2n}+\cdots+b_1x+b_0=0,\quad b_i=\frac{a_i}{a_{2n+1}}\in\mathbf{R}.$$

令 $M=\max\{|b_{2n}|,|b_{2n-1}|,\cdots,|b_1|,|b_0|\}$，则

当 $x>1$ 时

$$\begin{aligned}F(x)&\geqslant x^{2n+1}-Mx^{2n}-Mx^{2n-1}-\cdots-Mx-M>x^{2n+1}-(2n+1)Mx^{2n}\\&=x^{2n}[x-(2n+1)M],\end{aligned}$$

故取 $x_1=(2n+1)M+1$，有

$$F(x_1)>x_1^{2n}>0.$$

当 $x<-1$ 时

$$\begin{aligned}F(x)&\leqslant x^{2n+1}+M|x|^{2n}+M|x|^{2n-1}+\cdots+M|x|+M<x^{2n+1}+(2n+1)Mx^{2n}\\&=x^{2n}[x+(2n+1)M],\end{aligned}$$

故取 $x_2=-(2n+1)M-1$ 时，有

$$F(x_2)<-x_2^{2n}<0.$$

而 $F(x)$ 在 $[x_2,x_1]$ 连续，且 $F(x_1)\cdot F(x_2)<0$. 由根的存在定理知 $\exists\xi\in(x_2,x_1)$ 使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=0$，故 $f(x)=0$ 至少有一实根.

注意：实际上，当 x 的绝对值充分大时，任一多项式的符号全视最高次幂的项的符号而定.

11. 试用一致连续的定义证明：若 f,g 都在区间 I 上一致连续，则 $f+g$ 也在 I 上一致连续.

证　对于 $\forall\varepsilon>0$，由于 f,g 都在区间 I 上一致连续，故

$\exists\delta_1>0$，当 $x',x''\in I$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，

$\exists\delta_2>0$，当 $x',x''\in I$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则对于 $\forall x',x''\in I$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时

$$|f(x')+g(x')-[f(x'')+g(x'')]|\leqslant|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故 $f+g$ 在 I 上一致连续.

12. 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

解　对于 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta_1=2\varepsilon$，则当 $x',x''\in[1,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|=|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\left|\frac{x'-x''}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\right|<\frac{1}{2}|x'-x''|<\varepsilon.$$

而 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,2]$ 上一致连续. 则 $\exists\delta_2>0$，当 $x',x''\in[0,2]$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\left\{\delta_1,\delta_2,\frac{1}{4}\right\}$，则对 $\forall x',x''\in[0,+\infty)$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时，x',x'' 或落在 $[0,2]$ 内，或落在 $[1,+\infty)$ 内. 因此，无论何种情况，均有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

即 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

13. 证明：$f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，但在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

证　先证 $f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

对于 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2(|a|+|b|+1)}$，则当 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&=|(x'+x'')(x'-x'')|\leqslant[|x'|+|x''|]\cdot\delta\\&<\frac{\varepsilon}{2(|a|+|b|+1)}\cdot 2(|a|+|b|)<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

但 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

取 $\varepsilon_0=1$，无论 $\delta>0$ 取得多小，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 知，只要 n 充分大总可以使 $x'=n+\frac{1}{n}$，$x''=n$ 的距离 $|x'-x''|=\frac{1}{n}<\delta$，但

$$|f(x')-f(x'')|=\left(n+\frac{1}{n}\right)^2-n^2=2+\left(\frac{1}{n}\right)^2>1=\varepsilon_0.$$

故 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上非一致连续.

14. 设函数 f 在区间 I 上满足利普希茨条件,即存在常数 $L>0$,使得对 I 上的任意两点 x',x''都有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|.$$

证明:f 在 I 上一致连续.

证　对于$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}>0$,则对于$\forall x',x''\in I$ 且 $|x'-x''|<\delta$,有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|<\varepsilon.$$

故 f 在 I 上一致连续.

15. 证明$\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证　对于$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$|\sin x|\leqslant|x|.$$

对于$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则对于$\forall x',x''\in\mathbf{R}$,且 $|x'-x''|<\delta$ 时,有

$$|\sin x'-\sin x''|=2\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\cos\frac{x'+x''}{2}\right|\leqslant 2\cdot\frac{|x'-x''|}{2}<\varepsilon.$$

因此,$\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

16. 设函数 f 满足第 6 题的条件,证明 f 在$[a,+\infty)$上一致连续.

证　对于$\forall\varepsilon>0$,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 知,$\exists M>0$,当 $x>M$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon/2.$$

故对于任意的 $x',x''\in[a,+\infty)$,当 $x',x''>M$ 时,有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

而 f 在$[a,M+1]$上连续,因此,f 在$[a,M+1]$上一致连续,即$\exists\delta'>0$,当 $|x''-x'|<\delta'$,且 $x',x''\in[a,M+1]$时,有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\left\{\delta',\dfrac{1}{4}\right\}$,则对于$\forall x',x''\in[a,+\infty)$,当 $|x'-x''|<\delta$ 时,或者 $x',x''\in[a,M+1]$或者 $x',x''\in[M,+\infty)$,因此无论何种情况,均有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

故 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

17. 设函数 f 在 $[0,2a]$ 上连续,且 $f(0)=f(2a)$. 证明:$\exists x_0\in[0,a]$,使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

证 构造函数 $F(x)=f(x+a)-f(x)$,则由 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续知,$f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上连续,进而 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续,且

$$F(0)=f(a)-f(0),\quad F(a)=f(2a)-f(a)=f(0)-f(a),$$

即

$$F(0)\cdot F(a)=-[f(a)-f(0)]^2.$$

若 $f(a)=f(0)$,则 $f(a)=f(0)=f(2a)=f(a+a)$,即 $\exists x_0=a\in[0,a]$,使得

$$f(x_0)=f(x_0+a).$$

若 $f(a)\neq f(0)$,则 $F(0)\cdot F(a)<0$,由 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续及根的存在定理知,$\exists x_0\in[0,a]$,使得 $F(x_0)=0$,即

$$f(x_0)=f(x_0+a).$$

综上所述,知 $\exists x_0\in[0,a]$ 使得

$$f(x_0)=f(x_0+a).$$

18. 设 f 为 $[a,b]$ 上的增函数,其值域为 $[f(a),f(b)]$. 证明 f 在 $[a,b]$ 上连续.

证 $\forall x_0\in[a,b]$,由 f 为 $[a,b]$ 上的增函数及第三章§3 习题 5 得知,$f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 均存在,且此时有

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0),\forall x_0\in(a,b).$$

或

$$f(b-0)\leqslant f(b),\quad \text{或}\quad f(a)\leqslant f(a+0).$$

若以上各式不等号有一个成立,不失一般性,设 $f(x_0)<f(x_0+0)$,则对于 $\forall\mu\in[f(x_0),f(x_0+0)]\subset[f(a),f(b)]$,将不存在 $x'\in[a,b]$,使得

$$f(x')=\mu.$$

事实上,若 $\exists x'\in[a,b]$,使 $f(x')=\mu$,则 x' 必为以下二种情形之一:

i) $x'<x_0$,此时有 $f(x')\leqslant f(x_0)$.

ii) $x'>x_0$,此时有 $f(x')\geqslant f(x_0+0)$.

故与 $[f(a),f(b)]$ 为 f 的值域矛盾,因此,有

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0),f(b-0)=f(b),f(a)=f(a+0).$$

由 x_0 的任意性知，f 在$[a,b]$上连续.

19. 设 f 在$[a,b]$上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$. 证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

证　设 $f(x_i)=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$，$f(x_j)=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$不失一般性，不妨设 $x_i<x_j$.

i）若 $f(x_i)=f(x_j)$，则 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)$，此时有

$$f(x_k)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]\ k=1,2,\cdots,n.$$

取 $\xi=x_k$ 即可.

ii）若 $f(x_i)\neq f(x_j)$，则

$$f(x_j)<\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]<f(x_i).$$

由连续函数介值性定理知，$\exists\xi\in[x_i,x_j]\subset[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

由此本题得证.

20. 证明 $f(x)=\cos\sqrt{x}$ 在$[0,+\infty)$上一致连续.

证　由本节习题 12 知，$f(x)=\sqrt{x}$ 在$[0,+\infty)$上一致连续，故对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对于$\forall x',x''\in[0,+\infty)$且$|x'-x''|<\delta$，则有

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon,$$

即
$$\begin{aligned}|\cos\sqrt{x'}-\cos\sqrt{x''}|&=2\left|\sin\frac{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}}{2}\sin\frac{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}{2}\right|\\&\leqslant2\left|\sin\frac{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}}{2}\right|\leqslant|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，$f(x)=\cos\sqrt{x}$ 在$[0,+\infty)$上一致连续.

§3　初等函数的连续性

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\cos x+5}{1+x^2+\ln(1-x)}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\cot x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\cos x+5}{1+x^2+\ln(1-x)}=\dfrac{e^0\cos0+5}{1+0^2+\ln(1-0)}=6$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(3) **令** $t=\dfrac{1}{x}$**,则当** $x\to0^+$ **时**,$t\to+\infty$**,故**

$$\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}-\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}\right)$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\sqrt{t+\sqrt{t}}}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}+\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{t}+\frac{1}{t\sqrt{t}}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{t}+\frac{1}{t\sqrt{t}}}}}=1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}{1+\frac{1}{x}}}=1.$

(5) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to0}\exp(\cot x\ln(1+\sin x))$

$$=\exp\left(\lim_{x\to0}\cos x\cdot\ln(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)$$

$$=\exp(1\cdot\ln e)=e.$$

2. **设**$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. **证明**$\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{b_n}=a^b$.

证　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\exp(b_n\ln a_n)=\exp\left(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\ln a_n\right)=e^{b\ln a}=a^b$.

§4　总 练 习 题

1. **设函数** f **在**(a,b)**上连续，且** $f(a+0)$**与** $f(b-0)$**为有限值. 证明：**

(1) f **在**(a,b)**有界；**

(2) **若**$\exists\xi\in(a,b)$，**使得** $f(\xi)\geqslant\max\{f(a+0),f(b-0)\}$，**则** f **在**(a,b)**内能取到最大值.**

证　(1) **记** $f(a+0)=A$，$f(b-0)=B$，**则对于** $\varepsilon_0=1$，$\exists\delta_1>0$，**当** $a<x<a+\delta_1$ **时，有**

$$|f(x)-A|<\varepsilon_0=1,\quad\text{即}\quad A-1<f(x)<A+1.$$

取 $\max\{|A-1|,|A+1|\}=M_1$，**则有**

$$|f(x)|<M_1,\quad x\in(a,a+\delta_1),$$

$\exists\delta_2>0$,当 $b-\delta_2<x<b$ 时,有

$$|f(x)-B|<\varepsilon_0=1 \quad \text{即} \quad B-1<f(x)<B+1.$$

取 $\max\{|B-1|,|B+1|\}=M_2$,则有

$$|f(x)|<M_2,\quad x\in(b-\delta_2,b).$$

由 f 在 (a,b) 上连续,得 f 在 $[a+\delta_1,b-\delta_2]$ 上连续,故 $\exists M_3>0$,使得

$$|f(x)|<M_3, x\in[a_1+\delta_1,b-\delta_2].$$

综上所述,记 $M=\max\{M_1,M_2,M_3\}$,得 $\forall x\in(a,b)$ 有 $|f(x)|<M$,即 $f(x)$ 在 (a,b) 有界.

(2) 构造辅助函数 $F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a, \\ f(x), & a<x<b, \\ f(b-0), & x=b, \end{cases}$

则

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a+0)=F(a),$$

$$\lim_{x\to b^-}F(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=f(b-0)=F(b),$$

且 $F(x)$ 在 (a,b) 上连续,得 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定取得最大值 M,即 $\exists\zeta\in[a,b]$,有 $F(\zeta)=M$,且 $\forall x\in[a,b]$ 均有 $F(x)\leqslant F(\zeta)$,注意到 $\xi\in(a,b)$,故

$$F(\zeta)\geqslant F(\xi)=f(\xi)\geqslant\max\{f(a+0),f(b-0)\}.$$

若 $F(\zeta)=F(\xi)=f(\xi)$,则 $f(\xi)$ 为 f 在 (a,b) 内的最大值,$\zeta\in(a,b)$.

若 $F(\zeta)>F(\xi)=f(\xi)\geqslant\max\{f(a+0),f(b-0)\}$,则 $\zeta\in(a,b)$,即 $f(\zeta)$ 为 f 在 (a,b) 内的最大值.

综上所述,知 f 在 (a,b) 内取到最大值.

2. 设函数 f 在 (a,b) 内连续,且 $f(a+0)=f(b-0)=+\infty$. 证明:f 在 (a,b) 内能取到最小值.

证　取 $M=\left|f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right|\geqslant 0$,由

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty \text{ 及 } \lim_{x\to b^-}f(x)=+\infty.$$

知 $\exists\delta>0$,且 $\delta<\dfrac{1}{3}(b-a)$. 当 $x\in(a,a+\delta)$ 时,有

$$f(x)>M.$$

当 $x\in(b-\delta,b)$时，有

$$f(x)>M.$$

即$\forall x\in(a,a+\delta)\cup(b-\delta,b)$有

$$f(x)>M>f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

而 $f(x)$在$[a+\delta,b-\delta]$上连续，故$\exists\xi\in[a+\delta,b-\delta]$使$\forall x\in[a+\delta,b-\delta]$有

$$f(\xi)\leqslant f(x).$$

而$\frac{a+b}{2}\in[a+\delta,b-\delta]$，则有

$$f(\xi)\leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)<M<f(x),\quad \forall x\in(a,a+\delta)\cup(b-\delta,b).$$

综上所述，$\forall x\in(a,b)$，有 $f(\xi)\leqslant f(x)$，即 f 在 $x=\xi$ 取到最小值，$\xi\in[a+\delta,b-\delta]\subset(a,b)$.

3. 设函数 f 在区间 I 上连续，证明：

(1) 若对任何有理数 $r\in I$，有 $f(r)=0$，则在 I 上 $f(x)\equiv 0$；

(2) 若对任意两个有理数 $r_1,r_2,r_1<r_2$，有 $f(r_1)<f(r_2)$，则 f 在 I 上严格增.

证　(1) 对于$\forall x_0\in I$，若 x_0 为有理数，则

$$f(x_0)=0.$$

若x_0 为无理数，则存在有理数列$\{r_n\}$，使$r_n\in I$，$\forall n\in\mathbf{N}_+$，且$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x_0$，由$f$ 在I 上连续，知

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

由归结原则，知

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=f(x_0),$$

而

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}0=0,$$

因此

$$f(x_0)=0.$$

由此，对于$\forall x_0\in I$，有 $f(x_0)=0$，即在 I 上 $f(x)\equiv 0$.

(2) 对于$\forall x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，存在有理数列$\{r_n'\}$，使

$$r_n'<x_1+\frac{x_2-x_1}{2},\quad 且\quad \lim_{n\to\infty}r_n'=x_1.$$

存在有理数列$\{r_n''\}$,使

$$\lim_{n\to\infty}r_n''=x_2,\quad 且\quad x_1+\frac{x_2-x_1}{2}<r_n''.$$

由于f在I上连续,故

$$\lim_{x\to x_1}f(x)=f(x_1),\quad \lim_{x\to x_2}f(x)=f(x_2).$$

由归结原则,知

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n')=f(x_1),\quad \lim_{n\to\infty}f(r_n'')=f(x_2).$$

而

$$r_n'<x_1+\frac{x_2-x_1}{2},\quad r_n''>x_1+\frac{x_2-x_1}{2}.$$

故$\exists r_0$,使$r_n'<r_0<r_n''$,由题意得

$$f(x_1)<f(r_0)<f(x_2)\Rightarrow f$$

在I上严格增.

4. 设a_1,a_2,a_3为正数,$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 证明:方程

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$$

在区间(λ_1,λ_2)与(λ_2,λ_3)内各有一根.

证　只需证方程

$$a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)=0$$

在(λ_1,λ_2)与(λ_2,λ_3)内各有一根即可. 设

$$F(x)=a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2),$$

则$F(x)=0$为一元二次方程. 由代数基本定理,知$F(x)$至多有二个实根,而

$$F(\lambda_1)=a_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)>0,$$

$$F(\lambda_2)=a_2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)<0,$$

$$F(\lambda_3)=a_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)>0.$$

由根的存在定理知,$F(x)=0$在(λ_1,λ_2)与(λ_2,λ_3)内至少各有一根. 故原方程在(λ_1,λ_2)与(λ_2,λ_3)内各有一根.

5. 设f在$[a,b]$上连续,且对任何$x\in[a,b]$,存在$y\in[a,b]$,使得

$$|f(y)|<\frac{1}{2}|f(x)|.$$

证明:存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=0$.

证　由于 f 在 $[a,b]$ 上连续,故 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上连续. 由最值定理知,$|f|$ 在 $[a,b]$ 上一定取得最小值 m,即 $\exists\xi\in[a,b]$,使得 $|f(\xi)|=m$,且有

$$\forall x\in[a,b],\ |f(x)|\geqslant|f(\xi)|=m.$$

下证 $m=0$.

反证法:若 $m\neq0$,即 $m>0$,则 $|f(\xi)|=m>0$,由 $\xi\in[a,b]$,知 $\exists y\in[a,b]$,使得

$$|f(y)|<\frac{1}{2}|f(\xi)|<|f(\xi)|=m$$

与 m 为最小值矛盾,故 $m=0$. 由此得

$$|f(\xi)|=0,\text{即 } f(\xi)=0,\xi\in[a,b].$$

结论得证.

6. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续,$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$,另有一组正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. 证明:存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n).$$

证　设

$$f(x_i)=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\},$$
$$f(x_j)=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}.$$

不失一般性,设 $x_i<x_j$.

i) 若 $f(x_i)=f(x_j)$,则 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)$,此时有

$$f(x_k)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n),k=1,2,\cdots,n.$$

取 $\xi=x_k$ 即可.

ii) 若 $f(x_i)\neq f(x_j)$,则 $f(x_i)>f(x_j)$,故有

$$f(x_j)<\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)<f(x_i).$$

由连续函数介值性定理,知 $\exists\xi\in[x_i,x_j]\subset[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n).$$

由此本题得证.

7. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续,满足 $0\leqslant f(x)\leqslant x,x\in[0,+\infty)$. 设 $a_1\geqslant0$,

$a_{n+1}=f(a_n), n=1,2,\cdots$. 证明：

(1) $\{a_n\}$为收敛数列；

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$，则有 $f(t)=t$；

(3) 若条件改为 $0\leqslant f(x)<x, x\in(0,+\infty)$，则$t=0$.

证　(1) 由 $0\leqslant f(x)\leqslant x$，得

$$a_{n+1}=f(a_n)\leqslant a_n, \forall n\in\mathbf{N}_+,$$

且

$$0\leqslant f(a_n)\leqslant a_n\leqslant a_1.$$

故$\{a_n\}$为单调递增且有界的数列．由单调有界原理，知$\{a_n\}$为收敛数列.

(2) 由于 $a_{n+1}=f(a_n)$，且 $f(x)$为连续函数，故有

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(a_n),$$

因此得

$$t=f(t).$$

(3) 若 $0\leqslant f(x)<x, \forall x\in(0,+\infty)$，则(1)、(2)结论仍然成立，且$t\in[0,+\infty)$. 若$t\neq 0$，则由 $f(t)<t$，且 $f(t)=t$，得到矛盾．故$t=0$.

8. 设 f 在$[0,1]$上连续，$f(0)=f(1)$. 证明：对任何正整数n，存在$\xi\in[0,1]$，使得

$$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi).$$

证　若$n=1$，则由 $f(0)=f(1)=f\left(\frac{1}{n}+0\right)$知，取$\xi=0$ 即可.

若$n\neq 1$，构造辅助函数

$$F(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x), \forall x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right],$$

则有

$$F(0)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0),$$

$$F\left(\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\quad(k=1,2,\cdots,n-2),$$

$$F\left(\frac{n-1}{n}\right)=F\left(1-\frac{1}{n}\right)=f(1)-f\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

由此

$$F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right]+\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right]+\cdots+\left[f(1)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=f(1)-f(0)=0.$$

由于 f 在$[0,1]$上连续，故 F 在$\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$上连续. 由本章 §2 习题 19 知，$\exists\xi\in[0,1]$，使

$$F(\xi)=\frac{1}{n}\left[F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]=0,$$

即
$$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi).$$

综上所述，对于$\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\exists\xi\in[0,1]$，使得

$$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi).$$

9. 设 f 在 $x=0$ 连续，且对任何 $x,y\in\mathbf{R}$，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明：

(1) f 在 $\mathbf{R}$ 上连续；

(2) $f(x)=f(1)x$.

证　(1) 由已知$\forall x,y\in\mathbf{R}$，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，故

$$f(x+0)=f(x)=f(x)+f(0),$$

即 $f(0)=0$，且 f 在 $x=0$ 连续，得

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0.$$

对于$\forall x_0\in\mathbf{R}$，有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x-x_0)+f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}f(x-x_0)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)$$
$$=f(0)+f(x_0)=f(x_0).$$

得 f 在 $x=x_0$ 连续. 由此，f 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

(2) 先证对任何有理数 r，必有

$$f(rx)=rf(x),\forall x\in\mathbf{R}.$$

事实上，当 $r=\frac{m}{n}$ 时，$m,n\in\mathbf{N}_+$，有

$$f(mx)=f(x+(m-1)x)=f(x)+f[(m-1)x]=\cdots=mf(x).$$

$$f(x)=f\left(\frac{1}{n}x\right)+f\left(\frac{n-1}{n}x\right)=\cdots=nf\left(\frac{1}{n}x\right).$$

即
$$f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x).$$

从而
$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=mf\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{m}{n}f(x).$$

又由 $f(0)=0$，得
$$f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)=0.$$

即 $f(-x)=-f(x)$，于是
$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-f\left(\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x).$$

故有对任给有理数 r，成立
$$f(rx)=rf(x),x\in(-\infty,+\infty).$$

其次，我们利用 $f(x)$ 的连续性证明对任何无理数 c，有
$$f(cx)=cf(x).$$

设 c 为无理数，取一有理数列 $\{c_n\}$，使 $c_n\to c(n\to\infty)$，则
$$f(c_nx)=c_nf(x)\ (n=1,2,\cdots).$$

令 $n\to\infty$，由 f 在 $\mathbf{R}$ 上连续及归结原则，有
$$f(cx)=cf(x).$$

由此得 $\forall c\in\mathbf{R}$，有　$f(cx)=cf(x),x\in\mathbf{R}$，

即
$$f(x)=f(x\cdot 1)=f(1)x,\forall x\in\mathbf{R}.$$

10. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $0,1$ 两点连续，且对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x^2)=f(x)$. 证明 $f(x)$ 为常量函数.

证　对于 $\forall x\in(0,+\infty)$，由 $f(x^2)=f(x)$ 得
$$f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{4}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})=\cdots.$$

记 $x_n=x^{\frac{1}{2^n}}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，由 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续及归结原则，得
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(1),$$

而 $f(x)=f(x_n)$，故有
$$f(x)\equiv f(1),\quad \forall x\in(0,+\infty).$$

对$\forall x\in(-\infty,0)$，由$f(x)=f(x^2)$，得

$$f(x)=f(x^2)=f[(-x)^2]=f(-x)=f(1),$$

从而$\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$有

$$f(x)=f(1).$$

由f在$x=0$连续，得

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}f(1)=f(1).$$

由此，$\forall x\in\mathbf{R}$有$f(x)\equiv f(1)$，即f为常量函数.

第五章　导数和微分

知 识 要 点

1. 导数是用来考察函数变化的重要概念，其定义也是逐点给出的，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

并由极限与左右极限关系给出：

$$f'(x_0)\text{存在}\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

它常用于讨论分段函数在分段点的导数.

2. 微分的概念来自于函数的近似计算. f 在点 x_0 的微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$ 是函数 f 在点 x_0 处的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 的近似值，其误差

$$\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0).$$

3. 在一元函数中可导与可微是一回事：

$$f(x)\text{在点 }x_0\text{ 可微}\Leftrightarrow f(x)\text{在点 }x_0\text{ 可导}.$$

4. 导数的几何意义是曲线在该点处切线的斜率，微分的几何意义是曲线在该点处切线的增量. 微积分的重要思想"以直代曲"正是以切线（直线）的增量来代替函数（曲线）的增量.

5. 可导必连续，但导函数未必连续. 关于导函数有以下定理：

（1）费马定理：若 f 在点 x_0 可导，且点 x_0 为 f 的极值点，则 $f'(x_0)=0$.

（2）导函数介值定理：若 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$，k 为介于 $f'_+(a)$，$f'_-(a)$ 之间的任一实数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=k$.

（3）导数极限定理：若 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内连续，在 $U^\circ(x_0)$ 内可

导，且$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在，则 f 在点 x_0 可导，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.（见第六章.）

6. 除按导数定义求导数外，大部分导数的计算是先求得导函数 $f'(x)$，再将x_0 代入求得$f'(x_0)$. 而求导函数主要依赖"基本初等函数导数公式"及导数的四则运算法则、复合运算法则(即链式法则)和参数方程求导法. 有时将导数视作微商也会给计算带来方便.

7. 一阶微分形式的不变性是复合函数求导公式的另一种形式，不但给微分的计算带来方便，也在微积分理论中起重要作用.

8. 高阶导数在泰勒公式中将起重要作用，要熟悉幂函数 $y=x^n$(n 为正整数)，三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$，指数函数 $y=e^x$ 等的高阶导数公式以及莱布尼兹求导法.

习 题 详 解

§1　导数的概念

1. 已知直线运动方程为 $s=10t+5t^2$，分别令 $\Delta t=1, 0.1, 0.01$，求从 $t=4$ 至 $t=4+\Delta t$ 这一段时间内运动的平均速度及 $t=4$ 时的瞬时速度.

解　因 $\bar{v}(t)=\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$，故

$$\begin{aligned}\bar{v}(4)&=\frac{s(4+\Delta t)-s(4)}{\Delta t}\\&=\frac{10(4+\Delta t)+5(4+\Delta t)^2-10\times4-5\times4^2}{\Delta t}\\&=50+5\Delta t,\end{aligned}$$

则 $\Delta t=1$ 时　$\bar{v}_1=50+5\times1=55$；

$\Delta t=0.1$ 时　$\bar{v}_2=50+5\times0.1=50.5$；

$\Delta t=0.01$ 时　$\bar{v}_3=50+5\times0.01=50.05$；

且
$$v(4)=\lim_{\Delta t\to0}\frac{s(4+\Delta t)-s(4)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}(50+5\times\Delta t)=50.$$

2. 等速旋转的角速度等于旋转角与对应时间的比，试由此给出变速旋

转的角速度的定义.

解　定义:设一质点绕某定点旋转.以此定点为坐标原点,θ 为质点在 t 时刻的矢径与 x 轴正方向的夹角,其运动规律为 $\theta=\theta(t)$.若 $t=t_0$ 为某一确定时刻,t 为 t_0 的邻近时刻,则当极限

$$\omega=\lim_{t\to t_0}\frac{\theta(t)-\theta(t_0)}{t-t_0}$$

存在时,称其为质点在时刻 t_0 时的瞬时角速度,若记 $\Delta t=t-t_0$,则有

$$\omega=\lim_{t\to t_0}\frac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}.$$

3. 设 $f(x_0)=0$,$f'(x_0)=4$,试求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$.

解　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)=4.$

4. 设
$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3,\\ ax+b, & x<3,\end{cases}$$
试确定 a,b 之值,使 f 在 $x=3$ 处可导.

解　$f(x)$ 在 $x=3$ 处可导,则 $f(x)$ 在 $x=3$ 连续,即

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}x^2=9=\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(ax+b)=3a+b,$$

$$3a+b=9,\quad 且\quad f(3)=9.$$

而
$$\begin{aligned}f'_+(3)&=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(3+\Delta x)^2-3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}(6+\Delta x)\\&=6=f'_-(3)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{a(3+\Delta x)+b-3a-b}{\Delta x}=a,\end{aligned}$$

故有
$$\begin{cases}a=6,\\ 3a+b=9,\end{cases}$$

解之得
$$\begin{cases}a=6,\\ b=-9.\end{cases}$$

5. 试确定曲线 $y=\ln x$ 上哪些点的切线平行于下列直线?

(1) $y=x-1$;

（2）$y=2x-3$.

解　（1）由 $y'=\frac{1}{x}$ 及 $y=x-1$ 的斜率为 1，得 $\frac{1}{x}=1$，即

$$x=1,\quad y=\ln 1=0,$$

由此，$y=\ln x$ 在 $(1,0)$ 的切线与 $y=x-1$ 平行.

（2）由 $y'=\frac{1}{x}$ 及 $y=2x-3$ 的斜率为 2，得 $\frac{1}{x}=2$，即

$$x=\frac{1}{2},\quad y=\ln\frac{1}{2},$$

由此，$y=\ln x$ 在 $\left(\frac{1}{2},\ln\frac{1}{2}\right)$ 的切线与 $y=2x-3$ 平行.

6. 试求下列曲线在指定点 P 的切线方程和法线方程：

（1）$y=\frac{x^2}{4}$，$P(2,1)$；

（2）$y=\cos x$，$P(0,1)$.

解　（1）因 $y'|_{x=2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{4}(2+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{1}{4}\Delta x\right)=1$，

故切线方程
$$y-1=x-2,$$
法线方程
$$y-1=-(x-2).$$

（2）因
$$y'|_{x=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\right)$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)\right]=0,$$

故切线方程
$$y-1=0,$$
法线方程
$$x=0.$$

7. 求下列函数的导函数：

（1）$f(x)=|x|^3$；

（2）$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0.\end{cases}$

解　(1)
$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -x^3, & x<0, \end{cases}$$

则
$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x)^3-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}(\Delta x)^2=0,$$
$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(-\Delta x)^3-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}-(\Delta x)^2=0,$$

即 $f'(0)=0$，**故有**
$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -3x^2, & x<0. \end{cases}$$

(2)
$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x+1)-1}{\Delta x}=1,$$
$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1-1}{\Delta x}=0.$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$，**故** $f(x)$ **在** $x=0$ **处不可导**，
$$f'(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

8. **设函数** $f(x)=\begin{cases} x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$（$m$ **为正整数**），**试问**：

(1) m **等于何值时**，f **在** $x=0$ **连续**；

(2) m **等于何值时**，f **在** $x=0$ **可导**；

(3) m **等于何值时**，f' **在** $x=0$ **连续**.

解　(1) **由** $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^m\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，**知对** $\forall m\in\mathbf{N}_+$，f **在** $x=0$ **连续**.

(2) **由** $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{m-1}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$，**知若此极限存在**，**则必有** $m-1>0$，**即** $m>1$. **又由于** m **为正整数**，**故当** $m\geqslant 2$ **时**，f **在** $x=0$ **可导**，**且** $f'(0)=0$.

(3) 由(2)知当 $m\geqslant 2$ 时，f 在 $x\neq 0$ 可导，且

$$f'(0)=0.$$

当 $x\neq 0$ 时，有

$$f'(x)=mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos\frac{1}{x}.$$

要使 f' 在 $x=0$ 连续，即

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left[mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos\frac{1}{x}\right]=f'(0)=0,$$

必须有 $m-2>0$，即 $m\geqslant 3$.

注意：此导数的计算是采用导数的运算法则得出的，不建议使用定义来求此类导数. 实践证明，那是没有意义的工作.

9. 求下列函数的稳定点：

(1) $f(x)=\sin x-\cos x$；

(2) $f(x)=x-\ln x$.

解　(1) 因
$$f'(x)=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$
故欲使 $f'(x)=0$，则

$$x=k\pi-\frac{\pi}{4},k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,$$

此即 f 的稳定点.

(2) 因
$$f'(x)=1-\frac{1}{x},$$
故欲使 $f'(x)=0$，则

$$x=1,$$

即 $x=1$ 为 f 的惟一稳定点.

注意：此处导数的求法是采用导数的运算法则得出的.

10. 设函数 f 在点 x_0 存在左右导数，试证 f 在点 x_0 连续.

证　由
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0^+}[f(x)-f(x_0)]&=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\\&=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0^+}(x-x_0)=0,\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to x_0^-}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$$

$$=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0^-}(x-x_0)=0,$$

得
$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x).$$

故 f 在 $x=x_0$ 连续.

11. 设 $g(0)=g'(0)=0, f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ **求** $f'(0)$.

解　$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(\Delta x)}{\Delta x}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}\sin\frac{1}{\Delta x}=0.$$

12. 设 f **是定义在 R 上的函数,且对任何** $x_1, x_2\in\mathbf{R}$**,都有**

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2).$$

若 $f'(0)=1$**,证明对任何** $x\in\mathbf{R}$**,都有** $f'(x)=f(x)$.

证　$\forall x\in\mathbf{R}$,有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=f(x)f'(0)=f(x).$$

13. 证明:若 $f'(x_0)$**存在,则**

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=2f'(x_0).$$

证　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0).$$

14. 证明:若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)=f(b)=K$,$f'_+(a)f'_-(b)>0$,则在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=K$.

证　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-K,x\in[a,b],$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 也连续,且有

$$F(a)=F(b)=0,\quad F'_+(a)=f'_+(a),\quad F'_-(b)=f'_-(b),$$

即 $F'_+(a)F'_-(b)>0$. 此题即证 $\exists\xi\in(a,b)$,使 $F(\xi)=0$.

反证法:如果 $\forall x\in(a,b)$,$F(x)\neq0$. 不妨设 $F(x)>0$,则

$$F'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)}{x-a}\geqslant0,$$

$$F'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{F(x)}{x-b}\leqslant0,$$

由此推得 $F'_+(a)F'_-(b)\leqslant0$,这与题设矛盾. 故 $\exists\xi\in(a,b)$,使 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=K$.

注意:若设 $F(x)<0$,则可得 $F'_+(a)\leqslant0$,$F'_-(b)\geqslant0$,同样推出 $F'_+(a)F'_-(b)\leqslant0$.

15. 设一吊桥,其铁链成抛物线形,两端系于相距 100 m 高度相同的支柱上,铁链之最低点在悬点下 10 m 处,求铁链与支柱所成之角.

解　建立平面直角坐标系,如图 5-1 所示. 并设链与支柱夹角为 β. 抛物线在 $(50,10)$ 处切线与 x 轴正向的夹角为 α,则显然有 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$. 设抛物线方程为 $y=kx^2$,将 $(50,10)$ 代入得

$$10=2500k,\quad k=\frac{1}{250},$$

即
$$y=\frac{1}{250}x^2.$$

由导数的几何意义,有

$$\tan\alpha=y'\big|_{x=50}=\frac{2x}{250}\bigg|_{x=50}=\frac{100}{250}=\frac{2}{5},$$

得
$$\alpha=\arctan\frac{2}{5}.$$

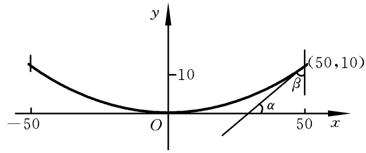

图 5-1

因此,铁链与支柱所成之角

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{2}{5}.$$

16. 在曲线 $y=x^3$ 上取一点 P,过 P 的切线与该曲线交于 Q,证明:曲线在 Q 处的切线斜率正好是在 P 处切线斜率的 4 倍.

证　设 P 点为 $P(x_0,y_0)$,则有

$$y_0=x_0^3,$$

又 $y=x^3$,则

$$y'=3x^2\Rightarrow y'|_{x=x_0}=3x_0^2.$$

因此,过 $P(x_0,y_0)$的切线方程为

$$y-y_0=y'|_{x=x_0}(x-x_0),$$

即

$$y=3x_0^2x-2x_0^3.$$

由

$$\begin{cases}y=3x_0^2x-2x_0^3,\\ y=x^3,\end{cases}$$

得

$$(x-x_0)^2(x+2x_0)=0,$$

即

$$\begin{cases}x=x_0,\\ y=x_0^3\end{cases}\quad 及\quad \begin{cases}x=-2x_0,\\ y=-8x_0^3.\end{cases}$$

显然,Q 点为 $Q(-2x_0,-8x_0^3)$,而曲线 $y=x^3$ 在 Q 点切线的斜率为

$$y'|_{x=-2x_0}=3x^2|_{x=-2x_0}=12x_0^2=4\cdot 3x_0^2.$$

即曲线在 Q 处切线斜率正好是在 P 处切线斜线的 4 倍.

§2　求导法则

1. 求下列函数在指定点的导数:

(1) 设 $f(x)=3x^4+2x^3+5$,求 $f'(0),f'(1)$;

(2) 设 $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$,求 $f'(0),f'(\pi)$;

(3) 设 $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$,求 $f'(0),f'(1),f'(4)$.

解　(1)
$$f'(x)=12x^3+6x^2.$$
$$f'(0)=0,\quad f'(1)=18.$$

(2)
$$f'(x)=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}.$$
$$f'(0)=1,\quad f'(\pi)=-1.$$

(3)
$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+\sqrt{x})'\\&=\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}.\end{aligned}$$
$$f'(1)=\frac{1}{4\sqrt{2}},\quad f'(4)=\frac{1}{8\sqrt{3}},$$

而 $f'(0)$ 不存在.

2. 求下列函数的导数:

(1) $y=3x^2+2$;　(2) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x+x^2}$;

(3) $y=x^n+nx$;　(4) $y=\dfrac{x}{m}+\dfrac{m}{x}+2\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

(5) $y=x^3\log_3 x$;　(6) $y=e^x\cos x$;

(7) $y=(x^2+1)(3x-1)(1-x^3)$;　(8) $y=\dfrac{\tan x}{x}$;

(9) $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$;　(10) $y=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$;

(11) $y=(\sqrt{x}+1)\arctan x$;　(12) $y=\dfrac{1+x^2}{\sin x+\cos x}$.

解　(1) $y'=6x$.

(2) $y'=\dfrac{(1+x+x^2)(1-x^2)'-(1-x^2)(1+x+x^2)'}{(1+x+x^2)^2}=-\dfrac{x^2+4x+1}{(1+x+x^2)^2}$.

(3) $y' = nx^{n-1} + n$.

(4) $y' = \dfrac{1}{m} - \dfrac{m}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

(5) $y' = 3x^2\log_3 x + x^2\log_3 \mathrm{e}$.

(6) $y' = \mathrm{e}^x\cos x - \mathrm{e}^x\sin x$.

(7) $y = (x^2+1)(3x-1)(1-x^3) = -3x^6 + x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x - 1$,

$y' = -18x^5 + 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 2x + 3$.

(8) $y' = \dfrac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$.

(9) $y' = \dfrac{1 - \cos x - x\sin x}{(1-\cos x)^2}$.

(10) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x}(1-\ln x) + \dfrac{1}{x}(1+\ln x)}{(1-\ln x)^2} = \dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$.

(11) $y' = \dfrac{\sqrt{x}+1}{1+x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\arctan x$.

(12) $y' = \dfrac{2x(\sin x + \cos x) - (1+x^2)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$.

3. 求下列函数的导函数:

(1) $y = x\sqrt{1-x^2}$;

(2) $y = (x^2-1)^3$;

(3) $y = \left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)^3$;

(4) $y = \ln(\ln x)$;

(5) $y = \ln(\sin x)$;

(6) $y = \lg(x^2+x+1)$;

(7) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

(8) $y = \ln\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$;

(9) $y = (\sin x + \cos x)^3$;

(10) $y = \cos^3 4x$;

(11) $y = \sin\sqrt{1+x^2}$;

(12) $y = (\sin x^2)^3$;

(13) $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$;

(14) $y = (\arctan x^3)^2$;

(15) $y = \operatorname{arccot}\dfrac{1+x}{1-x}$;

(16) $y = \arcsin(\sin^2 x)$;

(17) $y = \mathrm{e}^{x+1}$;

(18) $y = 2^{\sin x}$;

(19) $y=x^{\sin x}$;　　(20) $y=x^{x^x}$;

(21) $y=\mathrm{e}^{-x}\sin 2x$;　　(22) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(23) $y=\sin(\sin(\sin x))$;　　(24) $y=\sin\left(\dfrac{x}{\sin\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)}\right)$;

(25) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

(26) $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{a\sin x+b}{a+b\sin x}$.

解　(1) $y'=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$

$$=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(2) $y'=3(x^2-1)^2\cdot 2x=6x(x^2-1)^2$.

(3) $\ln y=3\ln(1+x^2)-3\ln(1-x)$,

$$\frac{y'}{y}=\frac{6x}{1+x^2}+\frac{3}{1-x}=\frac{3(1+2x-x^2)}{(1+x^2)(1-x)},$$

$$y'=\frac{3(1+x^2)^2(1+2x-x^2)}{(1-x)^4}.$$

(4) $y'=\dfrac{1}{\ln x}(\ln x)'=\dfrac{1}{x\ln x}$.

(5) $y'=\dfrac{1}{\sin x}(\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

(6) $y'=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\lg\mathrm{e}$.

(7) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(8) $y=\ln\dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{2x}=2\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})-\ln(2x)$.

$$y'=\frac{2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})'-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{2x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}=\frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

(9) $y'=3(\sin x+\cos x)^2(\sin x+\cos x)'=3(\sin x+\cos x)^2(\cos x-\sin x)$

$=3(\sin x+\cos x)\cos 2x.$

(10) $y'=3\cos^2 4x\cdot(\cos 4x)'=-12\sin 4x\cos^2 4x=-6\sin 8x\cos 4x.$

(11) $y'=\cos\sqrt{1+x^2}\cdot(\sqrt{1+x^2})'=\dfrac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$

(12) $y'=3(\sin x^2)^2\cdot(\sin x^2)'=3(\sin x^2)^2\cdot\cos x^2\cdot 2x=3x\sin 2x^2\sin x^2.$

(13) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$

(14) $y'=2\arctan x^3\cdot(\arctan x^3)'=\dfrac{6x^2\arctan x^3}{1+x^6}.$

(15) $y'=-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=-\dfrac{(1-x)^2}{2(1+x^2)}\cdot\dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$

$=-\dfrac{1}{1+x^2}.$

(16) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}(\sin^2 x)'=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}.$

(17) $y'=e^{x+1}.$

(18) $y'=2^{\sin x}\ln 2\cdot(\sin x)'=\ln 2\cdot\cos x\cdot 2^{\sin x}.$

(19) $\ln y=\sin x\ln x,\ \dfrac{y'}{y}=\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x},$

$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right).$

(20) $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=x^x(1+\ln x),\ln y=x^x\ln x,$

$\dfrac{y'}{y}=x^x(1+\ln x)\ln x+\dfrac{1}{x}x^x,$

$$y'=x^{x^x}\cdot x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right).$$

(21) $y'=-\mathrm{e}^{-x}\sin 2x+2\mathrm{e}^{-x}\cos 2x=\mathrm{e}^{-x}(2\cos 2x-\sin 2x)$.

(22) $y=(x+(x+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$,

$$y'=\frac{1}{2}(x+(x+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}(x+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}x\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

(23) $y'=\cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x$.

(24) $$y'=\cos\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\cdot\left(\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\right)'$$

$$=\cos\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\cdot\frac{\sin\frac{x}{\sin x}-x\cos\frac{x}{\sin x}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)'}{\sin^2\left(\frac{x}{\sin x}\right)}$$

$$=\cos\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)-x\cos\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}}{\sin^2\left(\frac{x}{\sin x}\right)}$$

$$=\cos\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\cdot\frac{\sin^2 x\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)-x\cos\left(\frac{x}{\sin x}\right)(\sin x-x\cos x)}{\sin^2 x\sin^2\left(\frac{x}{\sin x}\right)}.$$

(25) $\ln y=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\ln(x-a_k)$,

$$y'=y\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{x-a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{x-a_k}\cdot\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)^{\alpha_k}.$$

(26) $$y'=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)^2}}$$

$$\cdot \frac{(a+b\sin x)\cdot a\cos x-b\cos x(a\sin x+b)}{(a+b\sin x)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{(a+b\sin x)^2}{(a^2-b^2)\cos^2 x}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{(a^2-b^2)\cos x}{(a+b\sin x)^2}$$

$$=\frac{\cos x}{|a+b\sin x|\,|\cos x|}.$$

4. 对下列各函数计算 $f'(x),f'(x+1),f'(x-1)$.

(1) $f(x)=x^3$;　　(2) $f(x+1)=x^3$;　　(3) $f(x-1)=x^3$.

解　(1) $f'(x)=3x^2$，$f'(x+1)=3(x+1)^2$，$f'(x-1)=3(x-1)^2$.

(2) $f(x)=(x-1)^3$，　$f'(x)=3(x-1)^2$，

　　$f'(x+1)=3x^2$，　$f'(x-1)=3(x-2)^2$.

(3) $f(x)=(x+1)^3$，　$f'(x)=3(x+1)^2$，

　　$f'(x+1)=3(x+2)^2$，$f'(x-1)=3x^2$.

5. 已知 g **是可导函数**，a **为实数，试求下列函数** f **的导数：**

(1) $f(x)=g(x+g(a))$;　　(2) $f(x)=g(x+g(x))$;

(3) $f(x)=g(xg(a))$;　　(4) $f(x)=g(xg(x))$.

解　(1) $f'(x)=g(x+g(a))$.

(2) $f'(x)=g'(x+g(x))[1+g'(x)]$.

(3) $f'(x)=g(a)g'(xg(a))$.

(4) $f'(x)=[g(x)+xg'(x)]\cdot g'(xg(x))$.

6. 设 f **为可导函数，证明：若** $x=1$ **时，有**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x),$$

则必有 $f'(1)=0$ **或** $f(1)=1$.

证　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)=2xf'(x^2)$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x)=2f'(x)f(x)$.

由题设，有

$$2f'(1)=2f'(1)f(1),$$

即
$$f'(1)[f(1)-1]=0$$

由此推出
$$f'(1)=0\quad \text{或}\quad f(1)=1.$$

7. 定义双曲函数如下：

双曲正弦函数 $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；　**双曲余弦函数** $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

双曲正切函数 $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$；　**双曲余切函数** $\mathrm{coth}x=\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$.

证明：(1) $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$；　(2) $(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$；

(3) $(\mathrm{th}x)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$；　(4) $(\mathrm{coth}x)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}$.

证　(1) $(\mathrm{sh}x)'=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\mathrm{ch}x$.

(2) $(\mathrm{ch}x)'=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\mathrm{sh}x$.

(3) $$(\mathrm{th}x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'=\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$
$$=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}.$$

(4) $$(\mathrm{coth}x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)^2=\frac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}$$
$$=-\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2}=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2x}.$$

8. 求下列函数的导数：

(1) $y=\mathrm{sh}^3x$；　(2) $y=\mathrm{ch}(\mathrm{sh}x)$；

(3) $y=\ln(\mathrm{ch}x)$；　(4) $y=\arctan(\mathrm{th}x)$.

解　(1) $y'=3\mathrm{ch}x\mathrm{sh}^2x$.

(2) $y'=\mathrm{ch}x\mathrm{sh}(\mathrm{sh}x)$.

(3) $y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}x}(\mathrm{ch}x)'=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\mathrm{th}x$.

(4) $y'=\dfrac{1}{1+\mathrm{th}^2x}(\mathrm{th}x)'=\dfrac{1}{1+\mathrm{th}^2x}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}=\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x+\mathrm{ch}^2x}$.

9. 以 $\mathrm{sh}^{-1}x,\mathrm{ch}^{-1}x,\mathrm{th}^{-1}x,\mathrm{coth}^{-1}x$ **分别表示各双曲函数的反函数，试求下列函数的导数：**

(1) $y=\mathrm{sh}^{-1}x$；　(2) $y=\mathrm{ch}^{-1}x$；

(3) $y=\mathrm{th}^{-1}x$；　(4) $y=\mathrm{coth}^{-1}x$；

(5) $y=\text{th}^{-1}x-\text{coth}^{-1}\dfrac{1}{x}$;　　(6) $y=\text{sh}^{-1}(\tan x)$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{\text{ch}y}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\text{sh}^2y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(2) $y'=\dfrac{1}{\text{sh}y}=\dfrac{1}{\sqrt{\text{ch}^2y-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

(3) $y'=\text{ch}^2y$,而

$$\text{th}^2y=\frac{\text{sh}^2y}{\text{ch}^2y}=\frac{\text{ch}^2y-1}{\text{ch}^2y},\quad \text{ch}^2y=\frac{1}{1-\text{th}^2y},$$

故

$$y'=\frac{1}{1-\text{th}^2y}=\frac{1}{1-x^2}\ (|x|<1).$$

(4) $y'=-\text{sh}^2y=\dfrac{1}{1-\text{coth}^2y}=\dfrac{1}{1-x^2}\ (|x|>1)$.

(5) $y'=\dfrac{1}{1-x^2}-\dfrac{-x^{-2}}{1-x^{-2}}=0\ (|x|<1)$.

(6) $y'=\dfrac{\sec^2x}{\sqrt{1+\tan^2x}}=|\sec x|$.

§3　参变量函数的导数

1. 求下列由参量方程所确定的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $\begin{cases}x=\cos^4t,\\ y=\sin^4t\end{cases}$ 在 $t=0,\dfrac{\pi}{2}$ 处;

(2) $\begin{cases}x=\dfrac{t}{1+t},\\ y=\dfrac{1-t}{1+t}\end{cases}$ 在 $t>0$ 处.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{4\sin^3t\cos t}{-4\cos^3t\sin t}=-(\tan t)^2$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\infty.$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\left(\dfrac{2}{1+t}-1\right)'}{\left(1-\dfrac{1}{1+t}\right)'}=\dfrac{-\dfrac{2}{(1+t)^2}}{\dfrac{1}{(1+t)^2}}=-2$.

2. 设 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$ **求** $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}, \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\pi}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1,\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\pi}=0.$$

3. 设曲线方程 $x=1-t^2, y=t-t^2$，**求它在下列点处的切线方程与法线方程**：

(1) $t=1$；　　(2) $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解 (1)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{1-2t}{-2t}.$$

$k=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\dfrac{1}{2}$. **过曲线上的点** $(0,0)$，

切线方程

$$y=\frac{1}{2}x,$$

法线方程

$$y=-2x.$$

(2) $k=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$. **过曲线上的点** $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$，

切线方程

$$y-\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

法线方程

$$y-\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

4. 证明曲线 $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ **在任一点的法线到原点的距离等于** $a(a>0)$.

证

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\tan t.$$

任一点的法线方程

$$y-a(\cos t+t\sin t)=-\frac{1}{\tan t}[x-a(\cos t+t\sin t)],$$

即

$$x\cos t+y\sin t=a.$$

原点$(0,0)$到法线$x\cos t+y\sin t-a=0$的距离

$$d=|0\cdot\cos t+0\cdot\sin t-a|=a.$$

5. 证明:圆$r=2a\sin\theta(a>0)$上任一点的切线与向径的夹角等于向径的极角.

证　设$r=2a\sin\theta$在(r,θ)点的切线与向径的夹角为φ,则有

$$\tan\varphi=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)},$$

其中,$r(\theta)=2a\sin\theta$,θ为向径的极角,故

$$\tan\varphi=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}=\frac{2a\sin\theta}{2a\cos\theta}=\tan\theta,$$

由此,得

$$\varphi=\theta.$$

6. 求心形线$r=a(1+\cos\theta)$的切线与切点向径之间的夹角.

解　设切线与切点向径之间夹角为φ,则有

$$\tan\varphi=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}=-\frac{a(\cos\theta+1)}{a\sin\theta}=-\cot\frac{\theta}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right),$$

由此,得$\varphi=\frac{1}{2}(\pi+\theta)$,$\theta$为极角.

§4　高阶导数

1. 求下列函数在指定点的高阶导数:

(1) $f(x)=3x^3+4x^2-5x-9$,求$f''(1)$,$f'''(1)$,$f^{(4)}(1)$;

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求$f''(0)$,$f''(1)$,$f''(-1)$.

解　(1) 因　$f'(x)=9x^2+8x-5$,　$f''(x)=18x+8$,

$$f'''(x)=18,\quad f^{(4)}(x)=0,$$

故有

$$f''(1)=26,\quad f'''(1)=18,\quad f^{(4)}(1)=0.$$

(2) $$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f''(x)=-\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}=-3x/(1+x^2)^{\frac{5}{2}},$$

则　$f''(0)=0,\quad f''(1)=-\frac{3\sqrt{2}}{8},\quad f''(-1)=\frac{3}{8}\sqrt{2}.$

2. **设函数** f **在点** $x=1$ **处二阶可导，证明：若** $f'(1)=0$，$f''(1)=0$，**则在** $x=1$ **处有** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f^2(x)$.

证
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)=2xf'(x^2),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)\bigg|_{x=1}=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x)=2f'(x)f(x),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x)\bigg|_{x=1}=0,$$
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f^2(x)\bigg|_{x=1}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2f'(1+\Delta x)f(1+\Delta x)-2f'(1)f(1)}{1+\Delta x-1}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2f'(1+\Delta x)f(1+\Delta x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2f(1+\Delta x)[f'(1+\Delta x)-f'(1)]}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}2f(1+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(1+\Delta x)-f'(1)}{\Delta x}\\&=2f(1)f''(1)=0.\end{aligned}$$

故有
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)\bigg|_{x=1}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f^2(x)\bigg|_{x=1}.$$

注意：由此题所给条件可得，f **在** $x=1$ **处连续，且** f' **在** $x=1$ **处亦连续，但** f''**在**$x=1$ **处不一定连续，故求**$f(x^2)$**在**$x=1$ **的二阶导数时应用定义而不能先求二阶导数直接代值.**

3. **求以下函数的高阶导数：**

(1) $f(x)=x\ln x$，**求** $f''(x)$；　(2) $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，**求** $f'''(x)$；

(3) $f(x)=\ln(1+x)$，**求** $f^{(5)}(x)$；　(4) $f(x)=x^3\mathrm{e}^x$，**求** $f^{(10)}(x)$.

解　(1) $f'(x)=1+\ln x$，
$$f''(x)=\frac{1}{x}.$$

(2) $f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$，
$$f''(x)=-2\mathrm{e}^{-x^2}+4x^2\mathrm{e}^{-x^2}=(4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2},$$
$$f'''(x)=8x\mathrm{e}^{-x^2}-2x(4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}=(12x-8x^3)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

(3) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$,

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}=\frac{24}{(1+x)^5},$$

依此类推,可得

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

(4) 用莱布尼兹公式. 记 $u(x)=\mathrm{e}^x$, $v(x)=x^3$,则

$$f^{(10)}(x)=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k u^{(10-k)}(x)v^{(k)}(x)=\mathrm{e}^x(x^3+30x^2+270x+720).$$

4. 设 f 为二阶可导函数,求下列各函数的二阶导数:

(1) $y=f(\ln x)$;　(2) $y=f(x^n)$, $n\in\mathbf{N}_+$;　(3) $y=f(f(x))$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{x}f'(\ln x)$,

$$y''=-\frac{1}{x^2}f'(\ln x)+\frac{1}{x^2}f''(\ln x).$$

(2) $y'=nx^{n-1}f'(x^n)$,

$$y''=n(n-1)x^{n-2}f'(x^n)+n^2x^{2n-2}f''(x^n).$$

(3) $y'=f'(x)f'(f(x))$,

$$y''=f''(x)f'(f(x))+[f'(x)]^2f''(f(x)).$$

5. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y=\ln x$;　(2) $y=a^x(a>0,a\neq 1)$;

(3) $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$;　(4) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

(5) $f(x)=\dfrac{x^n}{1-x}$;　(6) $y=\mathrm{e}^{ax}\sin bx$ (a, b 均为实数).

解 (1) $y'=\dfrac{1}{x}$, $y''=-\dfrac{1}{x^2}$, …, $y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\ x^{-n}$.

(2) $y'=a^x\ln a$, $y''=a^x(\ln a)^2$, …, $y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$.

（3）$y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$,

$$y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2},$$

$$y''=\frac{2}{x^3}-\frac{2}{(x-1)^3},\cdots,$$

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$$

$$=(-1)^n n!\left[\frac{1}{x^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

（4）$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\ln x\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}\ln x+n\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}$

$$+C_n^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-2)}+\cdots$$

$$+C_n^k\left(\frac{1}{x}\right)^{(k-1)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)}+\cdots+\frac{1}{x}(\ln x)^{(n)},$$

而
$$\left(\frac{1}{x}\right)^n\ln x=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}\ln x,$$

$$\frac{1}{x}(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^{n+1}}=(-1)^{n-1}\frac{n!}{x^{n+1}}\cdot\frac{1}{n},$$

$$C_n^k\left(\frac{1}{x}\right)^{(k-1)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)}=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}\cdot(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}\cdot(-1)^{n-k}\frac{(n-k)!}{x^{n-k+1}}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{k}\cdot\frac{n!}{x^{n+1}},k=1,2,\cdots,n-1,$$

则
$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}\left(\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

（5）$f(x)=\frac{x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}-(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$,

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

（6）$y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$

$$=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin bx+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos bx\right).$$

令
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi,$$

则
$$y'=\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+\varphi),$$
从而
$$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+n\varphi).$$

6. 求由下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$:

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3t,\\ y=a\sin^3t;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\cos t,\\ y=\mathrm{e}^t\sin t.\end{cases}$

解 (1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{3a\sin^2t\cos t}{3a\cos^2t(-\sin t)}=-\tan t,$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-\sec^2t}{-3a\sin t\cos^2t}=\frac{1}{3a\sin t\cos^4t}.$$

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t}{\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t}=\frac{1+\tan t}{1-\tan t}=\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right),$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\sec^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-t}\sec^3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

7. 研究函数 $f(x)=|x^3|$ 在 $x=0$ 处的各阶导数.

解
$$f(x)=\begin{cases}x^3, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x^3, & x<0,\end{cases}$$
则
$$f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x>0,\\ -3x^2, & x<0,\end{cases}$$
$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=0,\quad \lim_{x\to0^-}f'(x)=0,$$
得
$$f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -3x^2, & x<0,\end{cases}$$
又
$$f''(x)=\begin{cases}6x, & x>0,\\ -6x, & x<0,\end{cases}$$
$$\lim_{x\to0^+}f''(x)=0,\quad \lim_{x\to0^-}f''(x)=0,$$
得
$$f''(x)=\begin{cases}6x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -6x, & x<0,\end{cases}$$

而
$$f'''(x)=\begin{cases}6, & x>0,\\ -6, & x<0,\end{cases}$$
$$\lim_{x\to0^+}f'''(x)=6,\quad \lim_{x\to0^-}f'''(x)=-6.$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 存在二阶连续导数，但三阶及三阶以上导数在 $x=0$ 不存在.

8. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x 三阶可导，且 $f'(x)\neq0$. 若 $f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，试用 $f'(x)$，$f''(x)$ 及 $f'''(x)$ 表示 $(f^{-1})'''(y)$.

解　$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)},$$
$$(f^{-1})''(y)=\left[\frac{1}{f'(x)}\right]'\cdot(f^{-1})'(y)=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3},$$
$$\begin{aligned}(f^{-1})'''(y)&=\left[-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right]'\cdot(f^{-1})'(y)\\&=\frac{3[f'(x)]^2[f''(x)]^2-[f'(x)]^3\cdot f'''(x)}{[f'(x)]^6}\cdot\frac{1}{f'(x)}\\&=\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}.\end{aligned}$$

9. 设 $y=\arctan x$.

(1) 证明它满足方程 $(1+x^2)y''+2xy'=0$；

(2) 求 $y^{(n)}|_{x=0}$.

解　(1) 将 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$，$y''=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ 代入方程 $(1+x^2)y''+2xy'=0$ 左边得
$$(1+x^2)\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+2x\cdot\frac{1}{1+x^2}=0,$$
即
$$(1+x^2)(\arctan x)''+2x(\arctan x)'=0.$$

(2) 由 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ 得 $(1+x^2)y'=1$，两边求 n 阶导数得
$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0.$$
将 $x=0$ 代入上式，得
$$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0),$$
而 $y(0)=0$，$y'(0)=1$，故有

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^k(2k)!, & n=2k+1,\end{cases}\quad k=0,1,2,\cdots.$$

10. 设 $y=\arcsin x$.

(1) 证明它满足方程 $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0\ (n\geqslant 0)$;

(2) 求 $y^{(n)}|_{x=0}$.

解　(1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,即 $\sqrt{1-x^2}\,y'=1$,两边求导,得

$$y''\sqrt{1-x^2}-y'\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=1,$$

整理,得

$$(1-x^2)y''=xy'.$$

两边求 n 阶导数,得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}+ny^{(n+1)}\cdot(-2x)+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n)}\cdot(-2)=xy^{(n+1)}+ny^{(n)},$$

整理得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0.$$

即证.

(2) 在(1)中令 $x=0$,得

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0),$$

而 $y(0)=0,y'(0)=1$,则

$$y^{(2k)}(0)=0.$$

$$y'''(0)=1,$$

$$y^{(5)}(0)=3^2y'''(0)=3^2,$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}y^{(2k+1)}(0)&=(2k-1)^2y^{(2k-1)}(0)=\cdots=(2k-1)^2(2k-3)^2\cdots3^2\cdot1^2\\&=[(2k-1)!!]^2,\end{aligned}$$

即

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ [(2k-1)!!]^2, & n=2k+1,\end{cases}\quad k=0,1,2,\cdots.$$

11. 证明:函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处 n 阶可导且 $f^{(n)}(0)=0$,其

中 n 为任意正整数.

证　当 $x\neq 0$ 时

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x^2},$$

$$f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2},$$

而
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{\mathrm{e}^{y^2}}=0,$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{2y^4}{\mathrm{e}^{y^2}}=0.$$

一般地，
$$f^{(n)}(x)=p_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=p_n(y)\mathrm{e}^{-y^2},$$

这里 $y=\dfrac{1}{x}$，$p_n(y)$为 y 的 $3n$ 次多项式，且

$$\lim_{y\to\infty}\frac{y^k}{\mathrm{e}^{y^2}}=0,\quad k\in\mathbf{N}_+.$$

故假设 $f^{(n)}(0)=0$，则

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{yp_n(y)}{\mathrm{e}^{y^2}}=0.$$

由数学归纳法知，$f(x)$在 $x=0$ 处存在任意阶导数，且 $f^{(n)}(0)=0,\forall n\in\mathbf{N}_+$.

注意：① 由 $f'(x)$，$f''(x)$可知，$p_1(y)$，$p_2(y)$是 3 次，6 次多项式. 设

$$f^{(n-1)}(x)=p_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2},$$

其中 $p_{n-1}(y)$为 y 的 $3(n-1)$次多项式，则

$$f^{(n)}(x)=\left[2\left(\frac{1}{x}\right)^3p_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)^2p'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{e}^{-1/x^2},$$

故 $p_n(y)=2y^3p_{n-1}(y)-y^2p'_{n-1}(y)$为 y 的 $3n$ 次多项式.

② 对于$\forall k\in\mathbf{N}_+$，记$[|y|]=n$，则当 $y\to\infty$时 $n\to\infty$，且

$$0<\frac{|y|^k}{\mathrm{e}^{y^2}}<\frac{(n+1)^k}{\mathrm{e}^{n^2}}<\frac{(n+1)^k}{2^n}=\frac{(n+1)^k}{(1+1)^n}$$

$$=\frac{(n+1)^k}{1+n+\cdots+\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}+\cdots+1}<\frac{(n+1)^k}{\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}}$$

$$<\frac{(n+1)^k}{n^{k+1}}\cdot\frac{(k+1)!}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right)}=I_n,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$，故有

$$\lim_{y\to\infty}\frac{|y|^k}{e^{y^2}}=0,$$

即有

$$\lim_{y\to\infty}\frac{y^k}{e^{y^2}}=0.$$

§5　微　　分

1. 若 $x=1$，而 $\Delta x=0.1,0.01$. 问对于 $y=x^2$，Δy 与 dy 之差分别是多少？

解　因

$$f'(x)=2x,dy=2x\Delta x;$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

因此

$$\Delta y-dy=(\Delta x)^2,$$

当 $\Delta x=0.1$ 时

$$\Delta y-dy=0.01,$$

当 $\Delta x=0.01$ 时

$$\Delta y-dy=0.0001.$$

2. 求下列函数微分：

(1) $y=x+2x^2-\frac{1}{3}x^3+x^4$；　(2) $y=x\ln x-x$；

(3) $y=x^2\cos 2x$；　(4) $y=\frac{x}{1-x^2}$；

(5) $y=e^{ax}\sin bx$；　(6) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

解　(1)

$$y'=1+4x-x^2+4x^3,$$

$$dy=y'dx=(4x^3-x^2+4x+1)dx.$$

(2)

$$y'=1+\ln x-1=\ln x,$$

$$dy=y'dx=\ln x dx.$$

(3) $y'=2x\cos 2x-2x^2\sin 2x$,

$$dy=y'dx=(2x\cos 2x-2x^2\sin 2x)dx.$$

(4) $y'=\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$,

$$dy=y'dx=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}dx.$$

（5）$y'=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$，

$$dy=y'dx=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)dx.$$

（6）$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x^4}}$，

$$dy=\frac{-x}{\sqrt{x^2-x^4}}dx.$$

3. 求下列函数的高阶微分：

（1）**设** $u(x)=\ln x, v(x)=e^x$，**求** $d^3(uv), d^3\left(\dfrac{u}{v}\right)$；

（2）**设** $u(x)=e^{\frac{x}{2}}, v(x)=\cos 2x$，**求** $d^3(uv), d^3\left(\dfrac{u}{v}\right)$.

解　（1）$d^3(uv)=(uv)^{(3)}dx^3=\sum\limits_{k=0}^{3}C_3^k(\ln x)^{(k)}(e^x)^{(3-k)}dx^3$

$$=\left(e^x\ln x+\frac{3e^x}{x}-\frac{3e^x}{x^2}+\frac{2e^x}{x^3}\right)dx,$$

$$d^3\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)^{(3)}dx^3=\sum_{k=0}^{3}C_3^k(\ln x)^{(k)}(e^{-x})^{(3-k)}dx^3$$

$$=\left(-e^x\ln x+\frac{3}{x}e^{-x}+3\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-x}\cdot(-1)+\frac{2}{x^3}e^{-x}\right)dx^3$$

$$=e^{-x}\left(-\ln x+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)dx^3.$$

（2）$d^3(uv)=(uv)^{(3)}dx^3=\sum\limits_{k=0}^{3}C_3^k(\cos 2x)^{(k)}(e^{\frac{x}{2}})^{(3-k)}dx^3$

$$=\left(\frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}\cos 2x-6\sin 2x\cdot\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\right.$$

$$\left.-12\cos 2x\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+8\sin 2x\cdot e^{\frac{x}{2}}\right)dx^3$$

$$=\frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}(52\sin 2x-47\cos 2x),$$

$$d^3\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)^{(3)}dx^3=\sum_{k=0}^{3}C_3^k(e^{\frac{x}{2}})^{(k)}(\sec 2x)^{(3-k)}dx^3$$

$$=\frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}\sec 2x+\frac{3}{4}e^{\frac{x}{2}}\cdot\sec 2x\tan 2x+\frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}\cdot 4\sec 2x$$

$$\cdot(1+2\tan^2 2x)+e^{\frac{x}{2}}\cdot 8\sec 2x\cdot\tan 2x(5+6\tan^2 2x)$$

$$=\frac{1}{8}e^{2x}\sec 2x(384\tan^3 2x+96\tan^2 2x+332\tan 2x+49).$$

4. 利用微分求近似值：

（1）$\sqrt[3]{1.02}$；　（2）$\lg 11$；　（3）$\tan 45°15'$；　（4）$\sqrt{26}$.

解　（1）**令** $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，**取** $x_0=1,\Delta x=0.02$，**则**

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\quad f'(1)=\frac{1}{3}.$$

由 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$，**得**

$$\sqrt[3]{1.02}\approx\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3}\cdot 0.02\approx 1.00667.$$

（2）**令** $f(x)=\lg x$，**则**

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln 10}.$$

取 $x_0=10,\Delta x=1$，**由** $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$，**得**

$$\lg 11\approx\lg 10+\frac{1}{10\ln 10}\cdot 1\approx 1.0434.$$

（3）**令** $f(x)=\tan x$，**则**

$$f'(x)=\sec^2 x.$$

取 $x_0=\frac{\pi}{4},\Delta x=0.0044$，**由** $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$，**得**

$$\tan 45°15'=\tan\left(\frac{\pi}{4}+0.0044\right)\approx\tan\frac{\pi}{4}+\sec^2\frac{\pi}{4}\cdot 0.0044=1.0088.$$

（4）**令** $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，**则**

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

取 $x_0=25,\Delta x=1$，**由** $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$，**得**

$$\sqrt{26}\approx\sqrt{25}+\frac{1}{2\sqrt{25}}\cdot 1=5.1.$$

5. 为了使计算出的球的体积准确到 1%，问度量半径 r 时允许发生的相对误差至多应是多少？

解　由球体体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，得

$$V'=4\pi r^2.$$

而
$$\left|\frac{\delta_V}{V_0}\right|=\left|\frac{V'(r_0)}{V(r_0)}\right|\delta_r=r_0\cdot\left|\frac{V'(r_0)}{V(r_0)}\right|\cdot\frac{\delta_r}{r_0},$$

则
$$\frac{\delta_r}{|r_0|}\leqslant\frac{\delta_V}{|V_0|}\cdot\frac{|V(r_0)|}{|V'(r_0)|\cdot r_0}=0.01\times\frac{\frac{4}{3}\pi r_0^3}{r_0\cdot 4\pi r_0^2}\approx 0.33\%,$$

即度量半径 r 时允许发生的相对误差至多应为 0.33%.

6. 检验一个半径为 2 m，中心角为 $55°$ 的工件面积（图 5-2）. 现可直接测量其中心角或此角所对的弦长. 设量角最大误差为 $0.5°$，量弦长最大误差为 3 mm，试问哪一种方法检验的结果较为精确？

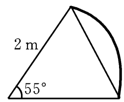

图 5-2

解　设弦长为 x(m)，则 $x=2\times 2\sin\frac{55°}{2}\approx 1.8470.$

设中心角为 φ，则 φ 与 x 的关系为

$$x=2\times 2\sin\frac{\varphi}{2},$$

即
$$\varphi=2\arcsin\frac{x}{4},$$

由此
$$\delta_x\approx|\varphi'|\delta_x=\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}}\delta_x=\frac{2}{\sqrt{16-x^2}}\delta_x.$$

当 $\delta_x=0.003$，$x=1.8470$ 时

$$\delta_\varphi\approx\frac{2}{\sqrt{16-1.8740^2}}\times 0.003\approx 0.0017,$$

即约为
$$0.0969°<0.5°.$$

故用测量弦长产生的结果较为精确.

§6 总练习题

1. 设 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，**证明：**

（1）$y'=\dfrac{1}{(cx+d)^2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$；

（2）$y^{(n)}=(-1)^{n+1}\dfrac{n!\ c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

证　（1）$y'=\dfrac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\dfrac{1}{(cx+d)^2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

（2）
$$
\begin{aligned}
y^{(n)}&=(y')^{(n-1)}=((cx+d)^{-2})^{(n-1)}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\\
&=(-1)^{n-1}\frac{n!\ c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\frac{n!\ c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

2. 证明下列函数在 $x=0$ **处不可导：**

（1）$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$；　　　　（2）$f(x)=|\ln|x-1||$.

证　（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}$ **不存在，故** $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ **在** $x=0$ **处不可导.**

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\ln|x-1||-|\ln|0-1||}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\ln(1-x)|}{x}$，

而
$$
\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\ln(1-x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\ln[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}}=1,
$$
$$
\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x)}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\ln[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}}=-1,
$$

即
$$
f'_+(0)\neq f'_-(0),
$$

故 $f(x)=|\ln|x-1||$ **在** $x=0$ **处不可导.**

3.（1）**举出一个连续函数，它仅在已知点** $a_1,a_2,\cdots,a_n$ **不可导；**

（2）**举出一个函数，它仅在点** $a_1,a_2,\cdots,a_n$ **可导.**

解　(1) $f(x)=(x-a_1)^{\frac{2}{3}}(x-a_2)^{\frac{2}{3}}\cdots(x-a_n)^{\frac{2}{3}},x\in\mathbf{R}$，
$f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上连续函数，且仅在 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$不可导.

(2) $f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2D(x),x\in\mathbf{R}$，
$f(x)$仅在$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 上可导，且$f'(a_i)=0\ (i=1,2,\cdots,n)$在$x\neq a_i$ 时$f(x)$不连续，故不可导.

4. 证明：

(1) 可导的偶函数，其导函数为奇函数；

(2) 可导的奇函数，其导函数为偶函数；

(3) 可导的周期函数，其导函数为周期函数.

证　(1) 设 $f(x)$为可导的偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，对其两边求导得 $-f'(-x)=f'(x)$. 故 $f'(x)$为奇函数.

(2) 设 $f(x)$为可导的奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，对其两边求导得 $-f'(-x)=-f'(x)$，即 $f'(x)=f'(-x)$. 故 $f'(x)$为偶函数.

(3) 设 $f(x)$为可导的周期函数，且周期为T，则 $f(x+T)=f(x)$，对其两边求导得 $f'(x+T)=f'(x)$. 故 $f'(x)$仍为周期函数，且周期不变.

5. 对下列命题，若认为是正确的，请给予证明；若认为是错误的，请举一反例予以否定：

(1) 设 $f=\varphi+\psi$，若 f 在点 x_0 可导，则 φ,ψ 在点 x_0 可导；

(2) 设$f=\varphi+\psi$，若φ在点x_0 可导，ψ 在点x_0 不可导，则f 在点x_0 一定不可导；

(3) 设 $f=\varphi\cdot\psi$，若 f 在点 x_0 可导，则 φ,ψ 在点 x_0 可导；

(4) 设$f=\varphi\cdot\psi$，若φ在点x_0 可导，ψ 在点x_0 不可导，则f 在点x_0 一定不可导.

解　(1) 结论错误. 例如：

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -1, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为无理数},\\ -1, & x\text{ 为有理数},\end{cases}$$

则 φ,ψ 在任何点均不连续，故在任何点不可导，但 $f=\varphi+\psi\equiv 0,\forall\ x\in\mathbf{R}$．当然 f 在任何点可导．

（2）结论正确．

反证法：若 f 在 x_0 处可导，则 $\psi=f-\varphi$，由此得 ψ 在 x_0 处可导，且 $\psi'(x_0)=f'(x_0)-\varphi'(x_0)$，与假设矛盾．故 f 在 x_0 处一定不可导．

（3）结论错误．例如：

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad \psi(x)=\begin{cases}+1, & x\leqslant 0,\\ -1, & x>0,\end{cases}$$

则 $\varphi(x),\psi(x)$ 在 $x=0$ 处均不可导，而 $f=\varphi\cdot\psi=-1$ 在 $x=0$ 处可导．

（4）结论错误．例如：

$$\varphi(x)\equiv 0,\quad \psi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 φ 在 $x=0$ 处可导，但 ψ 在 $x=0$ 处不可导，而 $f=\varphi\cdot\psi\equiv 0$ 在 $x=0$ 处可导．

6．设 $\varphi(x)$ 在点 a 连续，$f(x)=|x-a|\varphi(x)$，求 $f'_-(a)$ 和 $f'_+(a)$，问在什么条件下 $f'(a)$ 存在？

解　由于 $f(a)=|a-a|\varphi(a)=0$ 及 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，故

$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|a+\Delta x-a|\varphi(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a),$$

$$f'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|a+\Delta x-a|\varphi(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}-\varphi(a+\Delta x)=-\varphi(a).$$

若要 $f'(a)$ 存在，则有 $f'_+(a)=f'_-(a)$，即 $\varphi(a)=-\varphi(a)\Rightarrow\varphi(a)=0$．因此，当且仅当 $\varphi(a)=0$ 时 $f'(a)$ 存在，且有 $f'(a)=0$．

7．设 f 为可导函数，求下列各函数的一阶导数：

（1）$y=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x)}$；　　（2）$y=f(f(f(x)))$．

解　（1）$y'=\mathrm{e}^{f(x)}(\mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x)+f(\mathrm{e}^x)f'(x))$．

（2）$y'=f'(f(f(x)))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)$．

8．设 φ,ψ 为可导函数，求 y'：

（1）$y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$；

(2) $y=\arctan\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

(3) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi,\psi>0,\varphi\neq 1)$.

解　(1) $y'=\dfrac{2\varphi'(x)\varphi(x)+2\psi'(x)\psi(x)}{2\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$

$$=\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi'(x)\psi(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}\ (\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0).$$

(2) $y'=\dfrac{1}{1+\left[\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]^2}\cdot\dfrac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)}$

$$=\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}.$$

(3) $y'=\left[\dfrac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}\right]'=\dfrac{\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x)-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$

$$=\frac{\psi'(x)\varphi(x)\ln\varphi(x)-\varphi'(x)\psi(x)\ln\psi(x)}{\psi(x)\varphi(x)\ln^2\varphi(x)}$$

9. 设 $f_{ij}(x)(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为可导函数，证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix},$$

并利用这个结果求 $F'(x)$:

(1) $F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2\\ -3 & x & 3\\ -2 & -3 & x+1\end{vmatrix}$;

(2) $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix}$

证 利用导数定义及行列式性质,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\begin{vmatrix} f_{11}(x+\Delta x) & f_{12}(x+\Delta x) & \cdots & f_{1n}(x+\Delta x) \\ f_{21}(x+\Delta x) & f_{22}(x+\Delta x) & \cdots & f_{2n}(x+\Delta x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x+\Delta x) & f_{n2}(x+\Delta x) & \cdots & f_{nn}(x+\Delta x) \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.-\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lim_{\Delta x\to 0}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{f_{k1}(x+\Delta x)-f_{k1}(x)}{\Delta x} & \frac{f_{k2}(x+\Delta x)-f_{k2}(x)}{\Delta x} & \cdots & \frac{f_{kn}(x+\Delta x)-f_{kn}(x)}{\Delta x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

(1) $F'(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$

$$+\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3(x^2+5).$$

(2) $F'(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}=6x^2.$

第六章　微分中值定理及其应用

知识要点

1. 罗尔中值定理与拉格朗日中值定理有着明显的几何意义，但我们还应了解它们在数学研究中的作用：

罗尔中值定理是用来确定导函数的根的存在性；拉格朗日中值定理是用来估计函数值的增量；柯西中值定理是利用导数的比来讨论两函数增量比的性质.

2. 泰勒公式是微分概念和拉格朗日中值定理的推广，这是利用$f(x)$在点x_0处的导数（直到n阶导数）构成的泰勒多项式来估计$f(x)$增量的公式. 带有佩亚诺型余项的泰勒公式主要用于研究$f(x)$在点x_0处的局部性质，而带有拉格朗日型余项的泰勒公式主要用于研究$f(x)$在区间上的整体性质，其公式成立的条件也比前者强.

3. 中值定理或泰勒公式余项中的中值点ξ存在，但没有明确性，更不能事先指定. 因此欲通过函数值增量来研究函数的性质，如单调性、凸性等整体性质及极值、拐点等局部性质，就必须给出在ξ点取值的导函数所在的相应区间或邻域上的性质. 至于用不含ξ的带佩亚诺余项的泰勒公式证局部性质，则需给出考察点的各阶导数值，再由连续函数保不等式性质等证出.

4. 函数严格递增（减）的充要条件：若f在(a,b)内可导，则f在(a,b)内严格递增（减）的充要条件是

（1）对一切$x\in(a,b)$，有$f'(x)\geqslant0(f'(x)\leqslant0)$；

（2）在(a,b)内的任何子区间上$f'(x)\not\equiv0$.

5. 最大（小）值的求法：

(1) 若 f 为$[a,b]$上的连续函数，则 f 在所有稳定点、不可导点和区间端点处的函数值中最大(小)值，便是 f 在$[a,b]$上的最大(小)值.

(2) 若 f 在区间 I 上连续，且在 I 上仅有惟一的极值点 x_0，若 x_0 是 f 的极大(小)值点，则 $f(x_0)$必是 f 在 I 上的最大(小)值.

(3) 在求最大(小)值的应用题中，还可借助实际意义来确认最大(小)值.

6. 利用凸函数证明不等式，主要应用了凸函数的以下性质：

(1) 连接曲线上任二点的弦在曲线上方；

(2) 曲线在它的任一切线的上方；

(3) 詹森不等式.

习 题 详 解

§1　拉格朗日定理和函数的单调性

1. 试讨论下列函数在指定区间内是否存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$：

(1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant\dfrac{1}{\pi}, \\ 0, & x=0; \end{cases}$

(2) $f(x)=|x|$，$-1\leqslant x\leqslant 1$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$.

故 $f(x)$在$\left[0,\dfrac{1}{\pi}\right]$上连续，且

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x},x\in\left(0,\frac{1}{\pi}\right),$$

$$f(0)=f\left(\frac{1}{\pi}\right)=0,$$

从而，$f(x)$在$\left[0,\dfrac{1}{\pi}\right]$上满足罗尔定理条件，即$\exists\xi\in\left(0,\dfrac{1}{\pi}\right)$，使 $f'(\xi)=0$.

(2)
$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1, \\ -x, & -1\leqslant x<0, \end{cases}$$
$$f'(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ \text{不存在}, & x=0, \\ -1, & -1<x<0. \end{cases}$$
故不存在 $\xi\in[-1,+1]$,使 $f'(\xi)=0$.

2. 证明:

(1) 方程 $x^3-3x+c=0$ (c 为常数)在区间 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的实根;

(2) 方程 $x^n+px+q=0$ (n 为正整数,p,q 为实数),当 n 为偶数时至多有两个实根,当 n 为奇数时至多有三个实根.

证 (1) 反证法:设 $f(x)=x^3-3x+c$. 若 $\exists x_1,x_2\in[0,1]$,$x_1<x_2$,使 $f(x_1)=f(x_2)=0$,则由罗尔定理知 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$,使 $f'(\xi)=0$,即 $3\xi^2-3=3(\xi^2-1)=0$,解之得 $\xi=\pm1\overline{\in}(x_1,x_2)$. 矛盾. 所以 $f(x)=0$ 不能有两个不等实根.

(2) 先证明如下结论:若多项式 $p(x)$ 的导函数 $p'(x)$ 有 n 个实根,则 $p(x)$ 至多有 $n+1$ 个实根.

反证法:设 $p(x)=0$ 有 $n+1$ 个以上的实根,则至少为 $n+2$ 个,设其前 $n+2$ 个实根依次为
$$p(x_1)=p(x_2)=p(x_3)=\cdots=p(x_{n+1})=p(x_{n+2})=0,$$
则由罗尔定理知,$\exists\xi_k\in(x_k,x_{k+1})$ ($k=1,2,\cdots,n+1$),使
$$p'(\xi_k)=0\ (k=1,2,\cdots,n+1),$$
与 $p'(x)=0$ 有 n 个实根矛盾. 故结论成立.

记 $f(x)=x^n+px+q$,则
$$f'(x)=nx^{n-1}+p$$
当 n 为偶数时,即 $n=2k$ 时
$$f'(x)=2kx^{2k-1}+p.$$
方程 $f'(x)=0$ 仅有一个实根

$$x=\left(-\frac{p}{2k}\right)^{\frac{1}{2k-1}}.$$

故 $f(x)=0$，即 $x^n+px+q=0$ 至多有两个实根.

当 n 为奇数时，即 $n=2k+1$ 时，

$$f'(x)=(2k+1)x^{2k}+p.$$

方程 $f'(x)=0$ 至多有两个实根

$$x_{1,2}=\pm\left(-\frac{p}{2k+1}\right)^{\frac{1}{2k}}(p<0).$$

故 $f(x)=0$，即 $x^n+px+q=0$ 至多有三个实根.

由此，结论得证.

3. 证明定理 6.2 推论 2.

定理6.2 推论2：若函数f 和g 均在区间I 上可导，且$f'(x)\equiv g'(x)$，$x\in I$，则在区间I 上 $f(x)$与 $g(x)$只相差某一常数，即

$$f(x)=g(x)+c\ (c\text{ 为某一常数}).$$

证　令$F(x)=f(x)-g(x)$，则

$$F'(x)=f'(x)-g'(x)\equiv 0,x\in I,$$

由定理 6.2 推论 1 知

$$F(x)=c,\quad \text{即}\quad f(x)-g(x)=c,x\in I,$$

从而
$$f(x)=g(x)+c,\quad x\in I\quad (c\text{ 为某一常数}).$$

4. 证明：

(1) 若函数 f 在$[a,b]$上可导，且 $f'(x)\geqslant m$，则

$$f(b)\geqslant f(a)+m(b-a);$$

(2) 若函数 f 在$[a,b]$上可导，且$|f'(x)|\leqslant M$，则

$$|f(b)-f(a)|\leqslant M(b-a);$$

(3) 对任意实数 x_1,x_2，都有

$$|\sin x_2-\sin x_1|\leqslant|x_2-x_1|.$$

证　(1) 由题设条件知，函数 f 在$[a,b]$上满足拉格朗日定理条件，故$\exists\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\geqslant m,$$

整理得
$$f(b)\geqslant f(a)+m(b-a).$$

(2) 由拉格朗日定理知,$\exists\xi\in(a,b)$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

即
$$|f(b)-f(a)|=|f'(\xi)|(b-a)\leqslant M(b-a).$$

(3) 设 $f(x)=\sin x$,则

i) 对于$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1\neq x_2$,f 在$[x_1,x_2]$或$[x_2,x_1]$上满足拉格朗日定理条件,且$|f'(x)|=|\cos x|\leqslant 1$. 由(2)得

$$|\sin x_2-\sin x_1|\leqslant|x_2-x_1|.$$

ii) 若 $x_1=x_2$,$\sin x_2-\sin x_1=0=x_2-x_1$,即

$$|\sin x_2-\sin x_1|=|x_2-x_1|.$$

综合 i)、ii),得,$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,有

$$|\sin x_2-\sin x_1|\leqslant|x_2-x_1|.$$

5. 应用拉格朗日中值定理证明下列不等式:

(1) $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$,其中 $0<a<b$;

(2) $\dfrac{h^2}{1+h^2}<\arctan h<h$,其中 $h>0$.

证 (1) 设
$$f(x)=\ln x,x\in[a,b],$$

显然 $f(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日定理条件,且 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$,故$\exists\xi\in(a,b)$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi},$$

即
$$\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}=\frac{b-a}{\xi},$$

而$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a}$,故有

$$\frac{b-a}{b}<\frac{b-a}{\xi}<\frac{b-a}{a},$$

即
$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}.$$

(2) **证**　i) **设**
$$F(x)=\arctan x-\frac{x^2}{1+x^2}=\arctan x-1+\frac{1}{1+x^2},$$
则 $F(0)=0$，**且**
$$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}=\frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}\geqslant 0,$$
上式仅在 $x=1$ **时等号成立．由定理** 6.4 **知，当** $h>0$ **时，**
$$F(h)>F(0)=0,\quad \text{即}\quad \arctan h>\frac{h^2}{1+h^2}.$$

ii) **设**
$$G(x)=x-\arctan x,$$
则 $G(0)=0$，**且**
$$G'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}>0,\ x>0.$$
故有 $h>0$ **时，**
$$G(h)>G(0),\quad \text{即}\quad h>\arctan h.$$

综合 i)、ii) **有**
$$\frac{h^2}{1+h^2}<\arctan h<h,\quad h>0.$$

6．确定下列函数的单调区间：

(1) $f(x)=3x-x^2$；　　(2) $f(x)=2x^2-\ln x$；

(3) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$；　　(4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$.

解　(1) **由** $f'(x)=3-2x$ **得，**$f(x)$ **在** $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$ **上严格单调递增，在** $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ **上严格单调递减．**

(2) **由** $f'(x)=4x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{4x^2-1}{x}$ **得，**$f(x)$ **在** $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ **上严格递减，在** $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ **上严格递增．**

(3) **由** $f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{1-x}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$ **及** $f(x)$ **的定义域为** $[0,2]$ **得，**$f(x)$ **在** $[0,1]$ **上严格递增，在** $[1,2]$ **上严格递减．**

(4) $f(x)$ **的定义域为** $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ **且** $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$，**故** $f(x)$ **在**

$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$上均为严格递增函数.

7. 应用函数的单调性证明下列不等式:

(1) $\tan x>x-\frac{1}{3}x^3, x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$;

(2) $\frac{2x}{\pi}<\sin x<x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}, x>0$.

证 (1) **设**
$$f(x)=\tan x-x+\frac{1}{3}x^3,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right),$$
则 $f(0)=0$,**且**
$$f'(x)=\sec^2 x-1+x^2=\tan^2 x+x^2>0,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right),$$
故有
$$f(x)>f(0)=0,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right),$$
即
$$\tan x>x-\frac{1}{3}x^3,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right).$$
(2) **设**
$$f(x)=x-\sin x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$
则 $f(0)=0$,**且**
$$f'(x)=1-\cos x>0,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$
故有
$$f(x)>f(0)=0,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$
即
$$x>\sin x.$$
又设
$$F(x)=\frac{\sin x}{x},\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$
则 $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$,**且**
$$F'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x),$$
而
$$\tan x>x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$
即
$$F'(x)<0,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

从而
$$F(x)>F\left(\frac{\pi}{2}\right),\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$
即
$$\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}\Rightarrow\sin x>\frac{2}{\pi}x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$
综上得
$$\frac{2x}{\pi}<\sin x<x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$
(3) 设
$$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2},$$
则有
$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0,\text{且 } f(0)=0.$$
故当 $x>0$ 时,
$$f(x)>f(0)=0,$$
即
$$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}.$$
又设
$$F(x)=x-\frac{x^2}{2(1+x)}-\ln(1+x),$$
则有
$$F'(x)=1-\frac{4x(1+x)-2x^2}{4(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=\frac{x^2}{2(1+x)^2}>0,x>0,$$
且 $F(0)=0$. 故当 $x>0$ 时,
$$F(x)>F(0)=0,$$
即
$$x-\frac{x^2}{2(1+x)}>\ln(1+x).$$
由此得
$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}.$$

8. 以 $S(x)$ 记由 $(a,f(a))$, $(b,f(b))$, $(x,f(x))$ 三点组成的三角形面积,试对 $S(x)$ 应用罗尔中值定理证明拉格朗日中值定理.

证　证法一:如图 6-1 所示. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 上可导,

$$\begin{aligned}S(x)=&\frac{1}{2}(x-a)[f(a)+f(x)]+\frac{1}{2}(b-x)[f(b)+f(x)]\\&-\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]\\=&\frac{1}{2}(b-a)f(x)-\frac{1}{2}[f(b)-f(a)]x+\frac{1}{2}af(b)-\frac{1}{2}bf(a)\end{aligned}$$

则
$$S(a)=S(b)=0.$$
$S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 上可导. 由罗尔中值定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 使

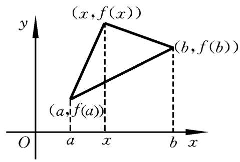

图 6-1

$S'(\xi)=0$，即

$$S'(\xi)=\frac{1}{2}(b-a)f'(\xi)-\frac{1}{2}[f(b)-f(a)]=0.$$

从而推得
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

即拉格朗日中值定理成立.

证法二：设
$$S(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\\ 1 & x & f(x)\end{vmatrix},$$

则$S(a)=S(b)=0$，且$S(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导. 由罗尔中值定理得$\exists\xi\in(a,b)$，使得$S'(\xi)=0$，即

$$S'(\xi)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\\ 0 & 1 & f'(\xi)\end{vmatrix}=0,$$

即
$$f(b)-f(a)-f'(\xi)(b-a)=0,$$

从而有
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

9. 设f为$[a,b]$上二阶可导函数，$f(a)=f(b)=0$，并存在一点$c\in(a,b)$，使得$f(c)>0$. 证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)<0$.

证　f在$[a,c]$，$[c,b]$上满足拉格朗日中值定理条件，对$[a,c]$、$[c,b]$分别由拉格朗日中值定理得

$$\exists \xi_1 \in (a,c),\quad \text{使得}\quad f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,$$

$$\exists \xi_2 \in (c,b),\quad \text{使得}\quad f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0.$$

由题设条件知 $f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上满足拉格朗日中值定理条件,从而对$[\xi_1,\xi_2]$由拉格朗日中值定理得

$$\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2)\subset(a,b),$$

使
$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

10. 设函数 f 在(a,b)内可导,且 f' 单调,证明 f' 在(a,b)内连续.

证　不失一般性. 设 $f'(x)$在(a,b)内单调递增,则对$\forall x_0\in(a,b)$,有

① $x\to x_0^-$ 时,$f'(x)$单调增加且有上界$f'(x_0)$,故 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$存在. 又由拉格朗日中值定理得 $\exists \xi\in(x,x_0)$,使

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

由 $x\to x_0^-$ 时有 $\xi\to x_0$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$存在,因此有

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x)=\lim_{x\to x_0^-} f'(\xi)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0).$$

② $x\to x_0^+$ 时,$f'(x)$单调减少且有下界$f'(x_0)$,故 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$存在. 由与①完全相同的方法得

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f'(\eta)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0),\quad \eta\in(x_0,x).$$

而 $f(x)$在 x_0 导数存在,即

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0),$$

故有
$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x)=\lim_{x\to x_0^+} f'(x)=f'(x_0),$$

即
$$\lim_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0).$$

由 x_0 的任意性知,f' 在(a,b)内连续.

11. 设 $p(x)$为多项式,α 是 $p(x)=0$ 的 r 重实根. 证明 α 必定是 $p'(x)=$

0 的 $r-1$ 重实根.

证　由代数基本定理得

$$p(x)=(x-\alpha)^r q(x),$$

其中 $q(x)$ 为多项式，且 $q(\alpha)\neq 0$，而

$$p'(x)=r(x-\alpha)^{r-1}q(x)+(x-\alpha)^r q'(x)$$
$$=(x-\alpha)^{r-1}[rq(x)+(x-\alpha)q'(x)].$$

因为　$$rq(\alpha)+(\alpha-\alpha)q'(\alpha)=rq(\alpha)\neq 0,$$

故 α 为 $p'(x)=0$ 的 $r-1$ 重实根.

12. 证明：设 f 为 n 阶可导函数，若方程 $f(x)=0$ 有 $n+1$ 个相异的实根，则方程 $f^{(n)}(x)=0$ 至少有一个实根.

证　由于 $f^{(n)}(x)$ 存在，故 $f(x),f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$ 连续且可导. 设 $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n<x_{n+1}$，$x_k\in\mathbf{R}$，且满足

$$f(x_k)=0\ (k=1,2,\cdots,n+1),$$

则在 $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 上 $f(x)$ 满足罗尔中值定理条件. 即 $\exists\xi_k^{(1)}\in(x_k,x_{k+1})$ $(k=1,2,\cdots,n)$，使

$$f'(\xi_k^{(1)})=0\ (k=1,2,\cdots,n).$$

又由 $f'(x)=0$ 有 n 个根 $\xi_k(k=1,2,\cdots,n)$，且 $\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{n-1}<\xi_n$，再据罗尔中值定理知，$\exists\xi_k^{(2)}\in(\xi_k^{(1)},\xi_{k+1}^{(1)})$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$，使

$$f''(\xi_k^{(2)})=0\ (k=1,2,\cdots,n-2),$$

依此类推，可得 $\exists\xi_0^{(n-1)}$、$\xi_1^{(n-1)}$，使

$$f^{(n-1)}(\xi_0^{(n-1)})=f^{(n-1)}(\xi_1^{(n-1)})=0.$$

最后由罗尔中值定理可知，$\exists\xi\in(\xi_0^{(n-1)},\xi_1^{(n-1)})\subset(x_1,x_{n+1})$，使得

$$f^{(n)}(\xi)=0,$$

即 $x=\xi$ 为 $f^{(n)}(x)=0$ 的实根. 得证.

13. 设 $a,b>0$. 证明方程 $x^3+ax+b=0$ 不存在正根.

证　设 $f(x)=x^3+ax+b$，则

$$f'(x)=3x^2+a>0,$$

即 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上严格单调递增函数. 故对 $\forall x\in(0,+\infty)$，有

$$f(x)>f(0)=b>0.$$

因此 $x^3+ax+b=0$ **不存在正根.**

14. 证明: $\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\sin x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

证　构造 $f(x)=\tan x\sin x-x^2$,**则**

$$f(0)=0,$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sin x\sec^2 x+\tan x\cdot\cos x-2x\\&=\sin x[1+\tan^2 x]+\sin x-2x\\&=2\sin x+\sin x\tan^2 x-2x,\end{aligned}$$

$$f'(0)=0,$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=2\cos x+\cos x\tan^2 x+2\sin x\tan x\cdot\sec^2 x-2\\&=\cos x+\cos x(1+\tan^2 x)+2\sin x\tan x\sec^2 x-2\\&=\left[\cos x+\frac{1}{\cos x}-2\right]+2\sin x\tan x\sec^2 x,\end{aligned}$$

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ **时**,$f''(x)>0$,**即** $f'(x)$ **在** $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ **上严格单调递增,故有**

$$f'(x)>f'(0)=0,\quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

进而

$$f(x)>f(0)=0,\quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

即对$\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ **有**

$$f(x)=\sin x\tan x-x^2>f(0)=0.$$

且

$$\sin x>0,\quad \tan x>0,$$

从而有

$$\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x},\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

15. 证明:若函数 f,g **在区间**$[a,b]$**上可导,且** $f'(x)>g'(x)$,$f(a)=g(a)$,**则在**$(a,b]$**内有**

$$f(x)>g(x).$$

证　构造

$$F(x)=f(x)-g(x).$$

由题设条件知,$F(x)$**在**$[a,b]$**上可导且** $F(a)=0$,**而**

$$F'(x)=f'(x)-g'(x)>0,\quad x\in[a,b],$$

故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增,即 $\forall x\in(a,b]$,有

$$F(x)>F(a)=0,$$

也就是

$$f(x)>g(x),\quad \forall x\in(a,b].$$

§2　柯西中值定理和不定式极限

1. 试问函数 $f(x)=x^2$,$g(x)=x^3$ 在区间 $[-1,+1]$ 上能否应用柯西中值定理得到相应的结论,为什么?

解　由 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=0$,而 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{2}{3x}$ 知,不存在 $\xi\in(-1,+1)$,使

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

故对于 $f(x)$,$g(x)$ 在区间 $[-1,+1]$ 上不能应用柯西中值定理. 这是由于 $f'(x)=2x$,$g'(x)=3x^2$ 在 $x=0\in[-1,+1]$ 时同时为零,从而不满足柯西中值定理的条件所致.

2. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可导. 证明:$\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

证　构造 $F(x)=x^2[f(b)-f(a)]-(b^2-a^2)f(x)$,则

$$F(a)=a^2[f(b)-f(a)]-(b^2-a^2)f(a)=a^2f(b)-b^2f(a),$$

$$F(b)=b^2[f(b)-f(a)]-(b^2-a^2)f(b)=a^2f(b)-b^2f(a),$$

即 $F(a)=F(b)$,且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔中值定理条件,$\exists\xi\in(a,b)$,使 $F'(\xi)=0$,即

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

注意:若进一步假设 $a\cdot b>0$(即 $[a,b]$ 中不含 0),则此题使用柯西中值定理证明更简单. 证明如下.

设 $f(x)=f(x)$,$g(x)=x^2$,易知 f,g 满足柯西中值定理条件,则 $\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

整理即得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

3. 设函数 f 在点 a 处具有连续的二阶导数,证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

证　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}=f''(a).$$

4. 设 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$. 证明:存在 $\theta\in(\alpha,\beta)$,使得

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\theta.$$

证　设　　$f(x)=\sin x, g(x)=\cos x, x\in[\alpha,\beta]$,

则 f,g 在$[a,b]$上满足柯西中值定理条件,

故$\exists\theta\in(\alpha,\beta)$**,使得**

$$\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\cos\beta-\cos\alpha}=\frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta,$$

即

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\theta,\quad \theta\in(\alpha,\beta).$$

5. 求下列不定式极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+5}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\tan x)^{\sin x}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$;　　(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;　　(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{\cos x}=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{-2\cos x}{-3\sin 3x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2x}=2$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+5}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2x}{\sec x\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sin x}=1$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

(7) **令** $y=(\tan x)^{\sin x}$,**则**

$$\ln y=\sin x\ln\tan x=\frac{\ln\tan x}{\csc x}.$$

而
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan x}{\csc x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\sec^2x}{\tan x}}{-\csc x\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\cos^2x}=0,$$

即
$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=0,$$

从而
$$\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}y=e^0=1.$$

(8) **令** $y=x^{\frac{1}{1-x}}$,**则**

$$\ln y=\frac{\ln x}{1-x}.$$

而
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{x}=-1,$$

从而
$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\exp\left(\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}\right)=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}\right)$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x}{1+x^2}\right)=e^0=1.$$

(10) $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\csc x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\csc x\cot x}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot(-\tan x)=0.$$

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2}{x^2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin x-x)(\sin x+x)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{3}.$$

(12) 令$\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=y$,则

$$\ln y=\frac{\ln\tan x-\ln x}{x^2},$$

而
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\tan x-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sec^2x}{\tan x}-\dfrac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{\sin x\cos x}-\dfrac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^2\sin x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x+\sin^2x}{6x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}2\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{1}{3},$$

从而
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\exp(\ln y)=\exp\left(\lim_{x\to0}\ln y\right)=e^{\frac{1}{3}}.$$

6. 设函数 f 在点 a 的某个邻域内具有二阶导数,证明:对充分小的 h,存在 θ,$0<\theta<1$,使得

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)}{2}.$$

证　设　$F(x)=f(a+x)+f(a-x)-2f(a)$,$G(x)=x^2$,

由已知,存在 $\delta>0$,使 f 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内有二阶导数,则当 $0<h<\delta$ 时,$F(x)$,$G(x)$ 在 $[0,h]$ 上满足柯西中值定理条件,$\exists\xi\in(0,h)$,使

$$\frac{F(h)-F(0)}{G(h)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

即 $$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{f'(a+\xi)-f'(a-\xi)}{2\xi},0<\xi<h.$$

而 $F'(x)=f'(a+x)-f'(a-x)$,$G'(x)=2x$ 在$[0,\xi]$上满足柯西中值定理条件,且 $F'(0)=0$,$G'(0)=0$,则$\exists\eta\in(0,\xi)\subset(0,h)$,使

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{F'(\xi)-F'(0)}{G'(\xi)-G'(0)}=\frac{F''(\eta)}{G''(\eta)}=\frac{f''(a+\eta)+f''(a-\eta)}{2},0<\eta<\xi<h.$$

记 $\eta=\theta h$,$0<\theta<1$,则有

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)}{2},0<\theta<1,0<h<\delta.$$

7. 求下列不定式极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x$;

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)^{(1+x)}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解 (1) $$\lim_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{-\dfrac{\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$$
$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\sec^2(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

(2) $$\lim_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arctan x}{\dfrac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{2}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x\ln^2x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\ln^2x}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln^2x+4\ln x}{2x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x+2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0.$$

(3) $$\lim_{x\to0^+}x^{\sin x}=\exp\left[\lim_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln x\right]=\exp\left(\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\csc x}\right)$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}\right]=\exp\left(\lim_{x\to0^+}\frac{-\sin x\tan x}{x}\right)=e^0=1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=\exp\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\ln\tan x\right]=\exp\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}\right]$

$$=\exp\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{-2\csc^2 2x\tan x}\right]=\exp\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin^2 2x}{2\cos^2 x\tan x}\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\sin 2x)\right]=e^{-1}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)^{(1+x)}}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+1-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x\tan x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sec^2 x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sec^2 x\tan x}{2}=0.$$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)-e}{x}=\lim_{x\to0}\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{1+x}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=e\lim_{x\to0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}e\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=-\frac{e}{2}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\exp\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}\right]$

$$=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\dfrac{-1}{1+x^2}}{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{x}{1+x^2}}{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}}{-\dfrac{1}{1+x^2}}\right)=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x^2}-1}{\dfrac{1}{x^2}+1}\right)=\mathrm{e}^{-1}.$$

8. 设$f(0)=0$，f'在原点的某邻域内连续，且$f'(0)\neq0$. 证明：$\lim\limits_{x\to0^+}x^{f(x)}=1$.

证　由于f'在原点某邻域内连续，故$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)\neq0$，而

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=\lim_{x\to0^+}\frac{-\dfrac{1}{x}}{\ln^2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{2\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{2\cdot\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{2x}=-\infty.$$

故有

$$\lim_{x\to0^+}x^{f(x)}=\exp\left(\lim_{x\to0^+}f(x)\ln x\right)=\exp\left(\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\ln x}}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'}\right)=\mathrm{e}^0=1.$$

9. 证明定理6.6**中**$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$**情形时的洛必达法则.**

证　**定理：若函数f和g满足：**

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$；

ii) **存在**$M>0$，**当**$x>M$**时**，f**和**g**都可导，且**$g'(x)\neq0$；

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$**可为实数，也可为**$\pm\infty$**或**$\infty$），**则**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

证明过程如下.

作变换$x=\dfrac{1}{t}$，**即**$t=\dfrac{1}{x}$. **当**$x\to+\infty$**时**，$t\to0^+$，**故有**

$$\lim_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0^+} g\left(\frac{1}{t}\right)=0,$$

且
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{d}f\left(\frac{1}{t}\right)\Big/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}g\left(\frac{1}{t}\right)\Big/\mathrm{d}t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

而当 $0<\frac{1}{t}<\frac{1}{M}$ 时，$f\left(\frac{1}{t}\right)$，$g\left(\frac{1}{t}\right)$ 可导，且

$$\frac{\mathrm{d}f\left(\frac{1}{t}\right)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right),\frac{\mathrm{d}g\left(\frac{1}{t}\right)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right).$$

因 $-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)\neq 0$，从而由定理 6.6 得

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\left(-\frac{1}{t^2}\right)f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(-\frac{1}{t^2}\right)g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A,$$

即
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

10. 证明：$f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}$ 为有界函数.

证　由 $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\mathrm{e}^{-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{2\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{4x\mathrm{e}^{x^2}}=0$，

知，对于 $\varepsilon_0=1$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有

$$|f(x)|<1.$$

又 $f(x)$ 在 $[-X,+X]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[-X,+X]$ 上有界，即 $\exists M_1>0$. 对于 $\forall x\in[-X,+X]$，有

$$|f(x)|\leqslant M_1,$$

取 $M=\max\{1,M_1\}$，得 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $|f(x)|\leqslant M$. 从而 $f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}$ 为有界函数.

§3　泰勒公式

1. 求下列函数带佩亚诺型余项的麦克劳林公式：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;

(2) $f(x)=\arctan x$ 到含 x^5 的项;

(3) $f(x)=\tan x$ 到含 x^5 的项.

解 (1) **因为** $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n n!},$$

所以 $$f(x)=1-\frac{1}{2}x+\frac{3!!}{2^2 2!}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^n+o(x^n).$$

(2) **因为** $$f'(x)=(1+x^2)^{-1},$$

$$f''(x)=-2x(1+x^2)^{-2},$$

$$f'''(x)=-2(1+x^2)^{-2}+8x^2(1+x^2)^{-3},$$

$$f^{(4)}(x)=24x(1+x^2)^{-3}-48x^3(1+x^2)^{-4},$$

$$f^{(5)}(x)=24(1+x^2)^{-3}-288x^2(1+x^2)^{-4}+384x^4(1+x^2)^{-5},$$

则 $f'(0)=1,f''(0)=f^{(4)}(0)=0,f'''(0)=-2,f^{(5)}(0)=24$,**而** $f(0)=0$,**故**

$$f(x)=\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o(x^5).$$

(3) **因为** $$f'(x)=\sec^2 x,$$

$$f''(x)=2\sec^2 x\tan x,$$

$$f'''(x)=6\sec^4 x-4\sec^2 x,$$

$$f^{(4)}(x)=24\sec^4 x\tan x-8\sec^2 x\tan x,$$

$$f^{(5)}(x)=96\sec^4 x\tan^2 x+24\sec^6 x-16\sec^2 x\tan^2 x-8\sec^2 x,$$

则 $f'(0)=1,f'''(0)=2,f^{(5)}(0)=16,f(0)=f''(0)=f^{(4)}(0)=0$,**故**

$$f(x)=\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5).$$

2. 按例 4 的方法求下列极限:

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)$.

解　（1）**因为**　$$e^x\sin x=\left[1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right]$$
$$=x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

所以　$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)-x-x^2}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

（2）**因为**　$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

所以　$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}-o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

（3）$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)-x}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

3. 求下列函数在指定点处带拉格朗日余项的泰勒公式：

（1）$f(x)=x^3+4x^2+5$，**在** $x=1$ **处**；

（2）$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，**在** $x=0$ **处**.

解　（1）**因**　$$f(1)=10,$$
$$f'(1)=(x^3+4x^2+5)'\big|_{x=1}=(3x^2+8x)\big|_{x=1}=11,$$
$$f''(1)=(x^3+4x^2+5)''\big|_{x=1}=(6x+8)\big|_{x=1}=14,$$
$$f'''(1)=(x^3+4x^2+5)'''\big|_{x=1}=6,$$
$$f^{(n)}(x)=0\ (n>3)$$

所以

$$f(x)=x^3+4x^2+5=10+11(x-1)+7(x-1)^2+(x-1)^3.$$

（2）**因**　$$f(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1},$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\ (1+x)^{-n-1},$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}(n+1)!\ (1+x)^{-n-2},$$

则 $f(0)=1, f'(0)=-1, f''(0)=2!, f'''(0)=-3!, \cdots, f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$,

$$f^{(n+1)}(\xi)=(-1)^{n+1}(n+1)!\ (1+\xi)^{-n-2},$$

ξ 在 0 与 x 之间,

$$\xi=\theta x(0<\theta<1),$$

所以

$$\begin{aligned}f(x)=\frac{1}{1+x}&=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}}\\&=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}\ (0<\theta<1).\end{aligned}$$

4. 估计下列近似公式的绝对误差:

(1) $\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{6}$,当 $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$;

(2) $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}, x\in[0,1]$.

解 (1) 因
$$\sin x-x+\frac{x^3}{6}=\frac{\cos\theta x}{5!}x^5,$$

所以
$$|R_4(x)|=\left|\frac{\cos\theta x}{5!}x^5\right|\leqslant\frac{|x|^5}{5!}\leqslant\frac{1}{2^5\cdot 5!}.$$

(2) 因
$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}&=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(1+\theta x)^{\frac{1}{2}-2-1}x^3\\&=\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3.\end{aligned}$$

所以
$$|R_2(x)|=\frac{1}{16}\left|(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3\right|\leqslant\frac{1}{16}.$$

5. 计算:

(1) 数 e 准确到 10^{-9};

(2) lg11 准确到 10^{-5}.

解 (1) $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{\mathrm{e}^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}, 0<\theta<1$

当 $x=1$ 时,

$$e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

欲使$\frac{3}{(n+1)!}<10^{-9}$**,则**$n\geqslant 12$**,取**$n=12$**,则有**$\frac{3}{13!}<10^{-9}$**,故**

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{12!}\approx 2.718281828.$$

(2) $\lg 11=\lg(10+1)=1+\lg\left(1+\frac{1}{10}\right)=1+\frac{1}{\ln 10}\ln\left(1+\frac{1}{10}\right)$

由于

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

取$x=\frac{1}{10}$**,则由**

$$\left|\frac{1}{\ln 10}\ln\left(1+\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{\ln 10}\left[\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3+\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]\right|$$
$$=\left|\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{(n+1)\left(1+\frac{\theta}{10}\right)^{n+1}}\right|<\frac{10^{-n-1}}{2(n+1)}<10^{-5},$$

得 $2(n+1)>10^{5-(n+1)}=10^{4-n}$**,故取**$n=4$.

$$\lg 11\approx 1+\frac{1}{\ln 10}\left[\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{40000}\right]\approx 1.04139.$$

§4　函数的极值与最大(小)值

1. 求下列函数的极值:

(1) $f(x)=2x^3-x^4$;　　(2) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$;

(3) $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$;　　(4) $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

解　(1)
$$f'(x)=6x^2-4x^3=2x^2(3-2x),$$
$$f''(x)=12x-12x^2=12x(1-x),$$

$$f'''(x)=12-24x.$$

解 $f'(x)=0$,得稳定点

$$x_1=0,\quad x_2=\frac{3}{2}.$$

而
$$f(0)=f'(0)=f''(0)=0,f'''(0)=12,$$
故 $x_1=0$ 不是极值点.

$$f''\left(\frac{3}{2}\right)=-9<0,$$

所以 $x_2=\frac{3}{2}$ 是函数的极大值点,且极大值 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{16}$.

(2)
$$f'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$
$$f''(x)=\frac{4x^3-12x}{(1+x^2)^3}$$

解 $f'(x)=0$,得稳定点

$$x_1=-1,x_2=1.$$

而
$$f''(-1)=1>0,$$
所以 $x_1=-1$ 是函数的极小值点,且极小值 $f(-1)=-1$.

$$f''(1)=-1<0,$$

所以 $x_2=1$ 是函数的极大值点,且极大值 $f(1)=1$.

(3)
$$f'(x)=-\frac{(\ln x)^2}{x^2}+\frac{2\ln x}{x^2},$$
$$f''(x)=\frac{2(\ln x)^2}{x^3}-\frac{6\ln x}{x^3}+\frac{2}{x^3}$$

解 $f'(x)=0$,得稳定点

$$x_1=1,x_2=e^2.$$

而
$$f''(1)=2>0,$$
所以 $x_1=1$ 是函数的极小值点,且极小值 $f(1)=0$.

$$f''(e^2)=-2e^{-6}<0,$$

所以 $x_2=e^2$ 是函数的极大值点,且极大值 $f(e^2)=4e^{-2}$.

(4)
$$f'(x)=\left(\frac{1}{1+x^2}-x(1+x^2)^{-1}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2},$$

$$f''(x)=\frac{-1}{1+x^2}-\frac{2x(1-x)}{(1+x^2)^2},$$

解 $f'(x)=0$,得稳定点

$$x_1=1.$$

而
$$f''(1)=-\frac{1}{2}<0,$$

所以 $x_1=1$ 是函数的极大值点,且 $f(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$.

2. 设
$$f(x)=\begin{cases} x^4\sin^2\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

(1) 证明 $x=0$ 是极小值点;

(2) 说明 f 在极小值点 $x=0$ 处是否满足极值的第一充分条件或第二充分条件.

证　(1) 对于 $\forall x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq 0$,有

$$f(x)=x^4\sin^2\frac{1}{x}\geqslant 0=f(0),$$

因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点,且极小值 $f(0)=0$.

(2) $f'(x)=4x^3\sin^2\dfrac{1}{x}-x^2\sin\dfrac{2}{x}=4x^3\sin^2\dfrac{1}{x}-2x^2\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$

$$=2x^2\sin\frac{1}{x}\left[2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right],x\neq 0,$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^3\sin^2\frac{1}{x}=0,$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\sin\frac{1}{x}\left[2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}2x\sin\frac{1}{x}\left[2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right]=0.$$

取 $x_k=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)^{-1}$,$k=\pm 1,\pm 2,\cdots$,得

$$f'(x_k)=\frac{4}{\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)^3}\sin^2\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)^2}\sin\left(4k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)^2}\left[\frac{2}{2k\pi+\frac{\pi}{4}}-1\right]<0,k=\pm 1,\pm 2,\cdots,$$

取
$$x_k'=\left(2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right)^{-1},\quad k=\pm 1,\pm 2,\cdots,$$

得
$$f'(x_k')=\frac{4}{\left(2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right)^3}\sin^2\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)^2}\sin\left(4k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{\left(2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right)^2}\left[\frac{1}{\left(2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right)}+1\right]>0,\quad k=\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

而当 $k\to\infty$ 时,$x_k\to 0$,$x_k'\to 0$,由此得,对于 $\forall\delta>0$,在 $(0,\delta)$ 与 $(-\delta,0)$ 内 $f'(x)$ 总可取到正值和负值. 故 f 在 $x=0$ 处不满足极值第一充分条件. 由 $f''(0)=0$,知 f 在 $x=0$ 处不满足极值第二充分条件.

3. 证明:若函数 f 在点 x_0 处有 $f_+'(x_0)<0(>0)$,$f_-'(x_0)>0(<0)$,则 x_0 为 f 的极大(小)值点.

证　由 $f_+'(x_0)<0(>0)$,$f_-'(x_0)>0(<0)$,及极限的保号性知,$\exists\delta>0$,当 $x\in U^\circ(x_0;\delta)$ 时,有

$x<x_0$ 时,$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0(<0)$,即
$$f(x)<f(x_0)\ (f(x)>f(x_0));$$

$x>x_0$ 时,$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0(>0)$,即
$$f(x)<f(x_0)\ (f(x)>f(x_0)).$$

从而得
$$\forall x\in U^\circ(x_0;\delta),f(x)<f(x_0)\ (f(x)>f(x_0)).$$

因此,x_0 为 f 的极大(小)值点.

4. 求下列函数在给定区间上的最大值、最小值:

(1) $y=x^5-5x^4+5x^3+1,[-1,2]$;

(2) $y=2\tan x-\tan^2 x,\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;

(3) $y=\sqrt{x}\ln x,(0,+\infty)$.

解　(1) $y'=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2(x-1)(x-3)$,

由 $y'=0$ 得$[-1,2]$上稳定点

$$x_1=0,\quad x_2=1.$$

由 $y(-1)=-10, y(0)=1, y(1)=2, y(2)=-7$，得

$$y_{\max}=y(1)=2,\quad y_{\min}=y(-1)=-10.$$

(2) $y'=2\sec^2x-2\sec^2x\tan x=2\sec^2x(1-\tan x)$，

由 $y'=0$ 得$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上稳定点

$$x_1=\frac{\pi}{4}.$$

而 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}2\tan x-\tan^2x=-\infty, y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，得

$$y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\text{，无最小值}.$$

(3)
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2}\ln x+1\right],$$

由 $y'=0$ 得$(0,+\infty)$上稳定点

$$x_1=\frac{1}{e^2}.$$

而
$$\lim_{x\to0^+}y=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-1}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0^+}-2\sqrt{x}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\ln x=+\infty,\quad y\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{2}{e},$$

故得 $y_{\min}=y\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{2}{e}$，无最大值.

5. 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，并且在 I 上仅有惟一的极值点 x_0. 证明：若 x_0 是 f 的极大(小)值点，则 x_0 必是 $f(x)$ 在 I 上的最大(小)值点.

证　先假设 x_0 是 $f(x)$ 在 I 上惟一的极大值点，则 $\exists\delta>0$，当 $x\in U^\circ(x_0;\delta)\subset I$ 时，$f(x_0)>f(x)$. 若 x_0 不是 $f(x)$ 在 I 上的最大值点，则 $\exists x_1\in I$，使得 $f(x_1)>f(x_0)$. 记

$$[a,b]=[\min\{x_0,x_1\},\max\{x_0,x_1\}],$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 可取到最小值 $f(x')$,$x'\in[a,b]$.

由 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点,且 $f(x_1)>f(x_0)$ 知,

$$\forall x\in U_+^\circ(x_0;\delta),\quad f(x)<f(x_0)<f(x_1),$$

故 x' 为 $[a,b]$ 的内点,即 $x'\in(a,b)$,从而 x' 为 $f(x)$ 在 I 上的极小值点,且 $f(x')$ 为极小值. 与题设矛盾,因此得 x_0 必为 $f(x)$ 在 I 上的最大值点.

若 x_0 是 $f(x)$ 在 I 上惟一的极小值点,则设 $F(x)=-f(x)$,x_0 必为 $F(x)$ 在 I 上的惟一的极大值点,由此 x_0 必为 $F(x)$ 在 I 上的最大值点,即 x_0 为 $f(x)$ 在 I 上的最小值点.

6. 把长为 l 的线段截为两段,问怎样截法能使以这两段为边所组成的矩形的面积最大.

解　设所截一段的长度为 x,组成的矩形面积为 $S(x)$,则

$$S(x)=x(l-x)=lx-x^2,\quad x\in[0,l],$$

由 $S'(x)=0$,得稳定点

$$x_1=\frac{l}{2},$$

且 $S''(x_1)=-2<0$,故 $x_1=\dfrac{l}{2}$ 为惟一极大值点. 由上题知其必为 $S(x)$ 的最大值点,此时矩形最大面积为

$$S\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{l}{4}l^2.$$

因此,把 l 平分为两段,则此时所组成的矩形面积最大.

7. 有一个无盖的圆柱形容器,当给定体积为 V 时,要使容器的表面积为最小,问底的半径与容器高的比例应该怎样?

解　设容器底半径为 x,高为 h,表面积为 $S(x)$,则由 $V=\pi x^2h$ 得

$$h=\frac{V}{\pi x^2},\quad S(x)=\pi x^2+2\pi xh=\pi x^2+\frac{2V}{x}.$$

由 $S'(x)=2\pi x-\dfrac{2V}{x^2}=0$,得

$$x_0=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},\quad h_0=\frac{V}{\pi x_0^2}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$

而
$$S''(x_0)=2\pi+\frac{4V}{x_0^3}>0(x_0>0),$$
故 x_0 是 $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上惟一极小值点，因此，x_0 是 $S(x)$ 的最小值点，即当底半径与高比例为 $1:1$ 时，容器的表面积最小，且 $S_{\min}=3(\pi V^2)^{\frac{1}{3}}$.

8. 设用某种仪器进行测量时，读得 n 次实验数据为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 问以怎样的数值 x 表达所要测量的真值，才能使它与这 n 个数之差的平方和为最小.

解　设 $s(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$，则
$$s'(x)=2(x-a_1)+2(x-a_2)+\cdots+2(x-a_n)=2\left(nx-\sum_{k=1}^{n}a_k\right),$$
由此得稳定点
$$x_0=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

又由 $s''(x)=2n>0$ 知，x_0 为 $s(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上惟一极小值点，从而 x_0 是 $s(x)$ 的最小值点，即以 $x=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 来表达真值时，它与 n 个数之差的平方和最小.

9. 求一正数 a，使它与其倒数之和最小.

解　设 $s(x)=x+\dfrac{1}{x}$，$x>0$，则由 $s'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=0$，得稳定点
$$x_0=1,$$
而 $s''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0$，因此 $x_0=1$ 为 $s(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内惟一极值点，从而为最小值点. 即当 $a=1$ 时，$s(a)=a+\dfrac{1}{a}=2$ 为最小倒数之和.

10. 求下列函数的极值：

(1) $f(x)=|x(x^2-1)|$；

(2) $f(x)=\dfrac{x(x^2+1)}{x^4-x^2+1}$；

(3) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$.

解　(1)
$$f(x)=|x(x^2-1)|,$$
$$f'(x)=(3x^2-1)\operatorname{sgn}(x^3-x)\ (x\neq 0,x\neq\pm 1)$$
$$=\begin{cases}1-3x^2, & x<-1,\\ 3x^2-1, & -1<x<0,\\ 1-3x^2, & 0<x<1,\\ 3x^2-1, & x>1,\end{cases}$$

由 $f'(x)=0$，得稳定点

$$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

且 $x_3=0, x_4=-1, x_5=1$ 处导数不存在.

当 $-1<x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $f'(x)>0$；当 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<0$ 时 $f'(x)<0$. 故 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 为极大值.

当 $0<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $f'(x)>0$；当 $\frac{\sqrt{3}}{3}<x<1$ 时 $f'(x)<0$. 故 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 为极大值.

由 $f(0)=f(-1)=f(1)=0$，且 $f(x)\geqslant 0$ 得 $f(0)=f(-1)=f(1)=0$ 为极小值. 故当 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $f(x)$ 取极大值 $\frac{2}{9}\sqrt{3}$；当 $x=0,\pm 1$ 时 $f(x)$ 取极小值 0.

（2）
$$f'(x)=\frac{(1-x^2)(x^4+5x^2+1)}{(x^4-x^2+1)^2},$$

由 $f'(x)=0$，得稳定点

$$x_1=-1,\quad x_2=1.$$

当 $x<-1$ 时 $f'(x)<0$；当 $-1<x<1$ 时 $f'(x)>0$；当 $x>1$ 时 $f'(x)<0$. 故当 $x=-1$ 时 $f(x)$ 取极小值 $f(-1)=-2$；当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取极大值 $f(1)=2$.

（3）
$$\begin{aligned} f'(x)&=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2\\ &=(x+1)^2(x-1)(5x-1), \end{aligned}$$

由 $f'(x)=0$，得稳定点

$$x_1=-1,\quad x_2=\frac{1}{5},\quad x_3=1.$$

这三点是否为极值点，可作如下分析.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,\frac{1}{5}\right)$	$\frac{1}{5}$	$\left(\frac{1}{5},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	极大值点	$\searrow$	极小值点	$\nearrow$

由此得，当 $x=\frac{1}{5}$ 时 $f(x)$ 有极大值，且 $f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{128}{3125}$；当 $x=1$ 时 $f(x)$ 有极小值，且 $f(1)=0$.

11. 设 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x_1=1, x_2=2$ 处都取得极值，试求 a 与 b；并问这时 $f(x)$ 在 x_1 与 x_2 处是取得极大值还是极小值？

解
$$f'(x)=\frac{a}{x}+2bx+1,$$
由
$$\begin{cases} f'(1)=a+2b+1=0, \\ f'(2)=\frac{a}{2}+4b+1=0, \end{cases}$$
解得
$$\begin{cases} a=-\frac{2}{3}, \\ b=-\frac{1}{6}. \end{cases}$$
由此得
$$f(x)=-\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{6}x^2+x,$$
而
$$f''(x)=2b-\frac{a}{x^2}=\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3},$$
故有
$$f''(1)=\frac{1}{3}>0,\quad f''(2)=-\frac{1}{6}<0.$$
即 $f(x)$ 在 $x_1=1$ 处取得极小值 $f(1)=\frac{5}{6}$，在 $x_2=2$ 处取得极大值 $f(2)=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\ln 2$.

12. 在抛物线 $y^2=2px$ 哪一点的法线被抛物线所截之线段最短.

解　由于抛物线 $y^2=2px$ 关于 x 轴对称，故设曲线上所求之点为 (a,b)，且 $b>0$，则由 $y^2=2px$ 得
$$y'=\frac{2p}{2y}=\frac{p}{y},\quad 即\quad y'\big|_{(a,b)}=\frac{p}{b},$$

因此,过(a,b)点的法线方程为

$$y-b=-\frac{b}{p}(x-a),\text{ 或 } y=-\frac{b}{p}(x-a)+b,$$

代入 $y^2=2px$ 中求另一交点,即

$$\left[b-\frac{b}{p}(x-a)\right]^2=2px,$$

整理得

$$b^2x^2-(2b^2a+2pb^2+2p^3)x+p^2b^2+b^2a^2+2pb^2a=0.$$

由根与系数关系得

$$x_1+x_2=(2ab^2+2pb^2+2p^3)/b^2.$$

注意到 $x_1=a$ 为方程之根,即 $b^2=2pa$,故

$$x_2=2a+2p+\frac{2p^3}{2pa}-a=\frac{a^2+2pa+p^2}{a}=(a+p)^2/a,$$

$$y_2=-b(a+p)/a,$$

则(a,b)与$\left(\frac{(a+p)^2}{a},-\frac{b}{a}(a+p)\right)$之间距离的平方

$$d(a)=\left[\frac{(a+p)^2}{a}-a\right]^2+\left[-\frac{b}{a}(a+p)-b\right]^2=p(p+a)^3/a^2.$$

由 $d'(a)=2p(p+2a)^2(a-p)/a^3=0$,得

$$a=p,\quad a=-\frac{p}{2},$$

由于a 与p 同号,故仅有解$a=p$,所以所求之点为$(p,\sqrt{2}p)$与$(p,-\sqrt{2}p)$.

13. 要把货物从运河边上 A 城运往与运河相距为 $BC=a\text{km}$ 的 B 城(图 6-2),轮船运费的单价是 α 元/km,火车运费的单价是 β 元/km$(\beta>\alpha)$,试求在运河边上一点 M,修建铁路 MB,使总运费最省.

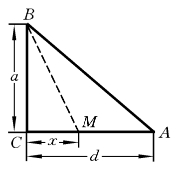

图 6-2

解　设 $MC=x$,则 $AM=d-x$,$BM=\sqrt{a^2+x^2}$. 运费 $L(x)$为

$$L(x)=\alpha(d-x)+\beta\sqrt{a^2+x^2}.$$

由 $L'(x)=0$,得

$$-\alpha+\frac{\beta x}{\sqrt{a^2+x^2}}=0,\quad (\beta^2-\alpha^2)x^2=a^2\alpha^2,\quad x_0=\frac{a\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}.$$

由 $x_0=\dfrac{a\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$为惟一稳定点,且 $L''(x)=\dfrac{a^2\beta}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}>0$ 知,x_0 为最小值点. 故 M 点选在距 C 点 $\dfrac{a\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$ km 处修建铁路时,总运费最省.

§5 函数的凸性与拐点

1. 确定下列函数的凸性区间与拐点:

(1) $y=2x^3-3x^2-36x+25$; (2) $y=x+\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=x^2+\dfrac{1}{x}$; (4) $y=\ln(x^2+1)$;

(5) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

解 (1) $y'=6x^2-6x-36$, $y''=12x-6=12\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.

由 $y''=0$ 得
$$x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{13}{2}.$$

当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时 $y''<0$,故 y 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ 内为凹函数,即 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ 为凹区间.

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时 $y''>0$,故 y 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 内为凸函数,即 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 为凸区间.

点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{13}{2}\right)$ 为 y 的拐点.

(2)
$$y'=1-\frac{1}{x^2},\quad y''=\frac{2}{x^3}.$$

y 在 $x=0$ 无定义,故函数无拐点.

当 $x<0$ 时 $y''<0$,即 $(-\infty,0)$ 为 y 的凹区间.

当 $x>0$ 时 $y''>0$,即 $(0,+\infty)$ 为 y 的凸区间.

(3) $y'=2x-\dfrac{1}{x^2}$,　$y''=2+\dfrac{2}{x^3}$.

由 $y''=0$ 得 $x=-1, y=0$,且 y 在 $x=0$ 处无定义.

当 $x<-1$ 时 $y''>0$,即 $(-\infty,-1)$ 为凸区间.

当 $-1<x<0$ 时 $y''<0$,即 $(-1,0)$ 为凹区间.

当 $x>0$ 时 $y''>0$,即 $(0,+\infty)$ 为凸区间.

$(-1,0)$ 为函数的拐点.

(4)
$$y'=\frac{2x}{x^2+1},\quad y''=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

由 $y''=0$ 得

$$x_1=-1,\quad x_2=+1,\quad y_1=\ln 2,\quad y_2=\ln 2.$$

当 $x<-1$ 时 $y''<0$,即 $(-\infty,-1)$ 为凹区间.

当 $-1<x<1$ 时 $y''>0$,即 $(-1,+1)$ 为凸区间.

当 $x>1$ 时 $y''>0$,即 $(1,+\infty)$ 为凹区间.

$(-1,\ln 2)$ 与 $(1,\ln 2)$ 均为函数的拐点.

(5)
$$y'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad y''=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

由 $y''=0$ 得

$$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad y_1=\frac{3}{4},\quad y_2=\frac{3}{4}.$$

当 $x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $y''>0$,即 $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 与 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 为凸区间.

当 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $y''<0$,即 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 为凹区间.

$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{3}{4}\right)$ 与 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{3}{4}\right)$ 均为曲线的拐点.

2. 问 a 和 b 为何值时,点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点?

解　$y'=3ax^2+2bx, y''=6ax+2b$. 由于点 $(1,3)$ 在曲线上且为曲线拐

点，故有

$$\begin{cases} a+b=3, \\ 6a+2b=0, \end{cases}$$

解之

$$\begin{cases} a=-\dfrac{3}{2}, \\ b=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

而此时有
$$y''=-9x+9=9(1-x).$$

当 $x<1$ 时 $y''>0$，当 $x>1$ 时 $y''<0$. 故当$\begin{cases} a=-\dfrac{3}{2} \\ b=\dfrac{9}{2} \end{cases}$时，点$(1,3)$是 $y=-\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{9}{2}x^2$的拐点.

3. 证明：

(1) 若 f 为凸函数，λ 为非负数，则 λf 为凸函数；

(2) 若 f,g 均为凸函数，则 $f+g$ 为凸函数；

(3) 若 f 为区间 I 上凸函数，g 为 $J\supset f(I)$上凸增函数，则 $g\circ f$ 为 I 上凸函数.

证　(1) 若 f 为凸函数，则对于$\forall\alpha\in(0,1)$及$\forall x_1,x_2$，有

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2).$$

而 $\lambda\geqslant 0$，因此，

$$\lambda f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leqslant\alpha[\lambda f(x_1)]+(1-\alpha)[\lambda f(x_2)].$$

由定义知 λf 为凸函数.

(2) 记 $H(x)=f(x)+g(x)$，对于$\forall\alpha\in(0,1)$及$\forall x_1,x_2$，由于 f,g 均为凸函数，故有

$$\begin{aligned} H(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)&=f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)+g(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2) \\ &\leqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)+\alpha g(x_1)+(1-\alpha)g(x_2) \\ &=\alpha[f(x_1)+g(x_1)]+(1-\alpha)[f(x_2)+g(x_2)] \\ &=\alpha H(x_1)+(1-\alpha)H(x_2), \end{aligned}$$

故 $H(x)$ 为凸函数，即 $f+g$ 为凸函数.

(3) 对于 $\forall x_1,x_2\in I$ 及 $\forall\lambda\in(0,1)$，由于 f 为 I 上的凸函数，故

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

又由 $\min\{f(x_1),f(x_2)\}\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\leqslant\max\{f(x_1),f(x_2)\}$，

得
$$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\in J.$$

故当 g 为 J 上的凸增函数时有

$$\begin{aligned}g\circ f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]&=g[f(\lambda x_1)+(1-\lambda)f(x_2)]\\&\leqslant g[\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)]\\&\leqslant\lambda g[f(x_1)]+(1-\lambda)g[f(x_2)]\\&=\lambda(g\circ f)(x_1)+(1-\lambda)(g\circ f)(x_2),\end{aligned}$$

由此知 $g\circ f$ 为 I 上的凸函数.

4. 设 f 为区间 I 上严格凸函数. 证明：若 $x_0\in I$ 为 f 的极小值点，则 x_0 为 f 在 I 上惟一的极小值点.

证 反证法：假设 x_1 为 $f(x)$ 在区间 I 上的另一个极小值点，即 $x_1\in I$，且 $x_1\neq x_0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in U^\circ(x;\delta)$ 时 $f(x_1)\leqslant f(x)$，记

$$a=\min\{x_0,x_1\},\quad b=\max\{x_0,x_1\},$$

则 f 在 $[a,b]$ 上为严格凸函数. 对于 $\forall c\in[a,b]$，令

$$\lambda=\frac{b-c}{b-a},\quad 1-\lambda=\frac{c-a}{b-a},$$

则
$$\lambda\in(0,1),\quad c=\lambda a+(1-\lambda)b,$$

由此得

$$f(c)=f(\lambda a+(1-\lambda)b)<\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\leqslant\max\{f(a),f(b)\}.$$

由于 c 为 $[a,b]$ 上任意一点，故由上式可得，存在 b 的某左邻域或 a 的某右邻域，使其中任意一点函数值均严格小于 $f(b)$ 或 $f(a)$. 这与 a,b 为极小值点矛盾.

因此 x_0 为 f 在 I 上惟一的极小值点.

5. 应用凸函数概念证明如下不等式：

(1) 对任意实数 a,b，有 $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b)$；

(2) 对任何非负实数 a,b，有 $2\arctan\frac{a+b}{2}\geqslant\arctan a+\arctan b$.

证　(1) 若 $a\neq b$，设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x, x\in(-\infty,+\infty)$，则

$$f'(x)=\mathrm{e}^x, f''(x)=\mathrm{e}^x>0,$$

故 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上严格凸函数，即对于 $\forall a,b\in\mathbf{R}$ 及 $\forall\lambda\in(0,1)$，有

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b)<\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b),$$

取 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，则得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(a)+f(b)],$$

即
$$\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}}<\frac{1}{2}(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b).$$

若 $a=b$，则有
$$\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}}=\mathrm{e}^a=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b).$$

由此，对 $\forall a,b\in\mathbf{R}$，总有

$$\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b).$$

(2) 若 $a\neq b$，设 $f(x)=\arctan x, x\in[0,+\infty]$，则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\leqslant 0,$$

故 $f(x)=\arctan x$ 为 $[0,+\infty)$ 上的凹函数，即对于 $\forall a,b\in[0,+\infty)$，$\lambda\in(0,1)$，有

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b)\geqslant\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b),$$

取 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}[f(a)+f(b)],$$

即
$$2\arctan\frac{a+b}{2}\geqslant\arctan a+\arctan b.$$

若 $a=b$，则有
$$2\arctan\frac{a+b}{2}=2\arctan a=\arctan a+\arctan b.$$

由此，对 $\forall a,b\geqslant 0$，总有　$2\arctan\dfrac{a+b}{2}\geqslant\arctan a+\arctan b.$

6. 证明：若 f,g 均为区间 I 上的凸函数，则 $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 也是 I 上的凸函数.

证　由凸函数定义,设$\forall\lambda\in(0,1)$,则对于$\forall x_1,x_2\in I$,有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\leqslant\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2),$$

$$g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2)\leqslant\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2),$$

从而
$$F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\max\{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2),\ g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\}\leqslant\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2).$$

因此$F(x)$为I上凸函数.

7. 证明:(1) f为区间I上凸函数的充要条件是对I上任意三点$x_1<x_2<x_3$,恒有

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & f(x_1)\\ 1 & x_2 & f(x_2)\\ 1 & x_3 & f(x_3)\end{vmatrix}\geqslant 0;$$

(2) f为严格凸函数的充要条件是$\Delta>0$.

证　必要性:若f为区间I上凸函数(严格凸函数),$x_1<x_2<x_3$是I上任意三点,记

$$\lambda=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\in(0,1),$$

则
$$1-\lambda=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1},$$

且
$$\lambda x_1+(1-\lambda)x_3=\frac{x_3x_1-x_2x_1+x_2x_3-x_3x_1}{x_3-x_1}=x_2,$$

因此
$$\begin{aligned}f(x_2)&=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)\\&=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_2)\\&\left(f(x_2)<\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_2)\right),\end{aligned}$$

即
$$I=(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)+(x_1-x_3)f(x_2)\geqslant 0(I>0),$$

而

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & f(x_1)\\ 1 & x_2 & f(x_2)\\ 1 & x_3 & f(x_3)\end{vmatrix}=(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)+(x_1-x_3)f(x_2)=I,$$

故有
$$\Delta\geqslant 0\ (\Delta>0).$$

充分性：若对任意的 $x_1<x_2<x_3$，恒有 $\Delta\geqslant 0(\Delta>0)$，则对于 $\forall y_1,y_3\in I$，$y_1<y_3$ 及 $\forall\lambda\in(0,1)$，记
$$y_2=\lambda y_1+(1-\lambda)y_3,$$
有 $y_1<y_2<y_3$，且 $\lambda=\dfrac{y_3-y_2}{y_3-y_1}$，由题设知
$$\begin{aligned}\Delta&=\begin{vmatrix}1 & y_1 & f(y_1)\\ 1 & y_2 & f(y_2)\\ 1 & y_3 & f(y_3)\end{vmatrix}\\ &=(y_3-y_2)f(y_1)+(y_2-y_1)f(y_3)+(y_1-y_3)f(y_2)\geqslant 0\quad(\Delta>0).\end{aligned}$$
即
$$f(y_2)\leqslant\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}f(y_1)+\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}f(y_3)$$
$$\left(f(y_2)<\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}f(y_1)+\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}f(y_3)\right),$$
也就是
$$f(\lambda y_1+(1-\lambda)y_3)\leqslant\lambda f(y_1)+(1-\lambda)f(y_3)$$
$$(f(\lambda y_1+(1-\lambda)y_3)<\lambda f(y_1)+(1-\lambda)f(y_3)).$$
因此，f 为 I 上凸函数(严格凸函数).

至此(1)、(2)得证.

8. 应用詹森不等式证明：

(1) 设 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，有
$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n};$$

(2) 设 $a_i,b_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，有
$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$
其中 $p>0,q>0,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

证　(1) 设 $f(x)=-\ln x$，则对于 $\forall a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，记
$$a=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},\quad b=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

若 $a=b$,则 $a_1=a_2=\cdots=a_n$,此时不等式等号成立.

若 $a<b$,则在 $[a,b]$ 上有 $f''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$,即 $f(x)=-\ln x$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数.

由詹森不等式,有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i),\forall x_i\in[a,b]\ (i=1,2,\cdots,n)\text{及}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1.$$

取 $\lambda_i=\dfrac{1}{n}\ (i=1,2,\cdots,n)$,$x_i=a_i$,则有

$$\begin{aligned}-\ln\left[\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right]&\leqslant-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(a_i)\\&=-\frac{1}{n}[\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n],\end{aligned}$$

即

$$\ln\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\frac{1}{n}[\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n]=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

由于 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

又由詹森不等式,有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{1}{x_i}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f\left(\frac{1}{x_i}\right),\forall x_i\in[a,b]\ (i=1,2,\cdots,n)\text{及}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1.$$

取 $\lambda_i=\dfrac{1}{n}\ (i=1,2,\cdots,n)$,$x_i=a_i$,则有

$$\begin{aligned}-\ln\left[\frac{\frac{1}{a_1}}{n}+\frac{\frac{1}{a_2}}{n}+\cdots+\frac{\frac{1}{a_n}}{n}\right]&\leqslant-\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{a_1}+\ln\frac{1}{a_2}+\cdots+\ln\frac{1}{a_n}\right]\\&=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\end{aligned}$$

即

$$\ln\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

由于 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

综上，对于$\forall a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$有

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

（2）证法一：由$p>0,q>0$，且$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，得$p>1,q>1$. 设

$$f(x)=x^p,x\in(0,+\infty),$$

则
$$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0,$$

即f是$(0,+\infty)$上严格凸函数. 设

$$\lambda_i=\frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}\in(0,1)(i=1,2,\cdots,n),$$

则
$$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1.$$

对于$\forall x_i\in(0,+\infty)\ (i=1,2,\cdots,n)$，由詹森不等式得

$$f\Big(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^n\lambda_if(x_i).$$

取$x_i=a_ib_i^{-\frac{q}{p}}(i=1,2,\cdots,n)$，代入上式得

$$f\left(\sum_{i=1}^n\frac{b_i^q\cdot a_ib_i^{-\frac{q}{p}}}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}\right)\leqslant\sum_{i=1}^n\frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}f(a_ib_i^{-\frac{q}{p}}),$$

即
$$\left[\sum_{i=1}^n\frac{a_i\cdot b^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}\right]^p=\left[\sum_{i=1}^n\frac{a_ib_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)}\right]^p\leqslant\sum_{i=1}^n\frac{b_i^q(a_ib_i^{-\frac{q}{p}})^p}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}=\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q},$$

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\sum_{i=1}^n b_i^q=\Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^n b_i^q\Big)^{1-\frac{1}{p}}=\Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^n b_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

证法二：设$f(x)=-\ln x,x\in(0,+\infty)$，则$f''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$，即$f(x)$是$(0,+\infty)$上严格凸函数. 对于$\forall x_1,x_2>0$，由詹森不等式得

$$f\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right)\leqslant\frac{1}{p}f(x_1)+\frac{1}{q}f(x_2)\text{（等号在 }x_1=x_2\text{ 时成立）}.$$

取 $x_1=a^p, x_2=b^q$，代入上式得

$$f\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right)\leqslant\frac{1}{p}f(a^p)+\frac{1}{q}f(b^q),$$

即
$$-\ln\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right)\leqslant-\frac{1}{p}\ln a^p+\frac{1}{q}\ln b^q=-\ln ab.$$

由 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，得

$$\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\geqslant ab.$$

记
$$a=a_k\Big/\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}},b=b_k\Big/\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}(k=1,2,\cdots,n),$$

代入上式得

$$\frac{a_kb_k}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\sum_{i=1}^n(b_i^q)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{1}{p}\cdot\frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_k^q}\ (k=1,2,\cdots,n),$$

对上式两边求和，则

$$\sum_{k=1}^n\frac{a_kb_k}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{1}{p}\cdot\sum_{k=1}^n a_k^p\Big/\sum_{i=1}^n a_i^p+\frac{1}{q}\cdot\sum_{k=1}^n b_k^q\Big/\sum_{i=1}^n b_i^q$$
$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

整理得
$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

§6　函数图象的讨论

按函数作图步骤，作下列函数图象：

(1) $y=x^3+6x^2-15x-20$；　　(2) $y=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$；

(3) $y=x-2\arctan x$；　　(4) $y=x\mathrm{e}^{-x}$；

(5) $y=3x^5-5x^3$；　　(6) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$；

(7) $y=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$；　　(8) $y=|x|^{\frac{2}{3}}(x-2)^2$.

解　(1) ① **定义域**:$D=(-\infty,+\infty)$.

② **确定单调区间、凹凸区间、极值点、拐点.**

由 $f'(x)=3(x+5)(x-1)$,$f''(x)=6(x+2)$,**得稳定点** $x_1=-5$,$x_2=1$ **及** $x_3=-2$.

③ **补充函数值**:$(0,-20)$,$\left(-\dfrac{5+\sqrt{105}}{2},0\right)$,$(-1,0)$,$\left(\dfrac{5+\sqrt{105}}{2},0\right)$ **及** $(-5,80)$,$(1,-28)$,$(-2,26)$.

④ **综上,列表如下.**

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,+\infty)$	**备　　注**
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	**补充函数值**:
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$	$(0,-20)$
$f(x)$	↗	**极大值** 80	↘	**拐点** $(-2,26)$	↘	**极小值** -28	↗	$(-1,0)$ $\left(\dfrac{5+\sqrt{105}}{2},0\right)$ $\left(-\dfrac{5+\sqrt{105}}{2},0\right)$

⑤**函数图象如图** 6-3 **所示.**

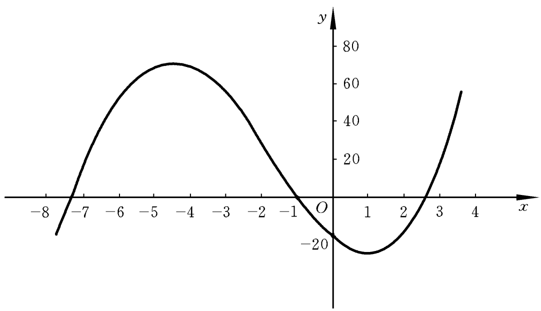

图 6-3

(2) ① **定义域**:$D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

② **确定单调区间、凹凸区间、极值点、拐点.**

由 $f'(x)=\frac{1}{2}x^2(x+3)/(1+x)^3$,$f''(x)=3x(1+x)^{-4}$,**得稳定点** $x_1=-3$,$x_2=0$ **及** $x_3=0$.

③ **求渐近线**:

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^3}{2(1+x)^2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(1+x)^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=-1,$$

得渐近线

$$x=-1,\quad y=\frac{1}{2}x-1.$$

④ **补充函数值**:$\left(-4,-\frac{32}{9}\right)$,$(-2,-4)$,$(4,1.28)$.

⑤ **综上,列表如下.**

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$	**备　注**
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	0	$+$	**补充函数值**: $\left(-4,-\frac{32}{9}\right)$ $(-2,-4)$ $(4,1.28)$ **渐近线**: $x=-1$ $y=\frac{1}{2}x-1$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	**极大值** $-27/8$	$\searrow$	$\times$	$\nearrow$	**拐点** $(0,0)$	$\nearrow$	

⑥ **函数图象如图** 6-4 **所示.**

(3) ① **定义域**:$D=(-\infty,+\infty)$,**且为奇函数.**

② **确定单调区间、凹凸区间、极值点、拐点.**

由 $f'(x)=\frac{x^2-1}{1+x^2}$,$f''(x)=4x(1+x^2)^{-2}$,**得稳定点** $x_1=-1$,$x_2=1$ **及** $x_3=0$.

③ **求渐近线**:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\arctan x\right)=1,$$

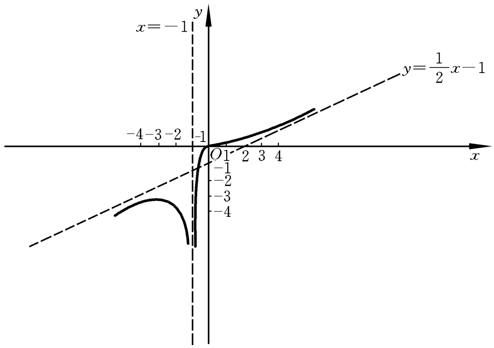

图 6-4

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}(-2\arctan x)=-\pi,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}(-2\arctan x)=\pi,$$

得渐近线
$$y=x+\pi,\quad y=x-\pi.$$

④ **补充函数值**：$(\sqrt{3},-0.36)$，$(-\sqrt{3},0.36)$.

⑤ **综上，列表如下.**

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$	**备注**
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	**补充函数值**：
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$(\sqrt{3},-0.36)$
$f(x)$		**极大值** $\frac{\pi}{2}-1$		**拐点** $(0,0)$		**极小值** $1-\frac{\pi}{2}$		$(-\sqrt{3},0.36)$ **渐近线**： $y=x+\pi$ $y=x-\pi$

⑥ **函数图象如图** 6-5 **所示.**

(4) ① **定义域**：$D=(-\infty,+\infty)$.

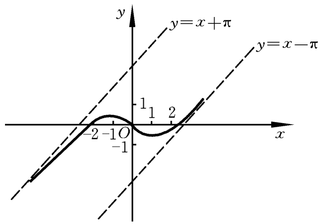

图 6-5

② **确定单调区间、凹凸区间、极值点、拐点.**

由 $f'(x)=(1-x)e^{-x}$, $f''(x)=(x-2)e^{-x}$, **得稳定点** $x_1=1$ **及** $x_2=2$.

③ **求渐近线:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$, **得渐近线** $y=0$.

④ **补充函数值:** $(0,0)$, $(-1,-e)$.

⑤ **综上,列表如下.**

x	$(-\infty,-1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$	**备注**
$f'(x)$	+	0	−	−	−	**补充函数值:** $(0,0)$ $(-1,-e)$ **渐近线:** $y=0$
$f''(x)$	−	−	−	0	+	
$f(x)$	↗	**极大值** $1/e$	↘	**拐点** $(2,2e^{-2})$	↘	

⑥ **函数图象如图** 6-6 **所示.**

(5) ① **定义域** $D=(-\infty,+\infty)$, **且为奇函数.**

② **确定单调区间、凹凸区间、极值点、拐点.**

由 $f'(x)=15x^2(x^2-1)$, $f''(x)=30x(2x^2-1)$, **得稳定点** $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ **及** $x_4=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x_5=+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

③ **补充函数值:** $\left(-\sqrt{\dfrac{5}{3}},0\right)$, $\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}},0\right)$.

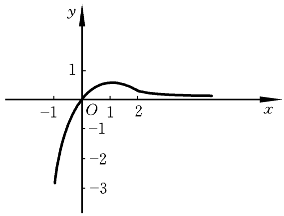

图 6-6

④ **综上,列表如下.**

x	0	$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$	1	$(1,+\infty)$	**备注**
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$	**补充函数值**: $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}},0\right)$ $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},0\right)$ **奇函数**
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	**拐点** $(0,0)$	↘	**拐点** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-7\sqrt{2}}{8}\right)$	↘	**极小值** -2	↗	

⑤ **函数图象如图** 6-7 **所示.**

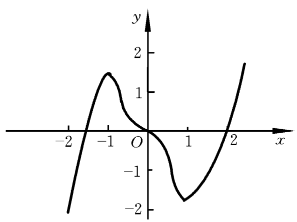

图 6-7

(6) ① **定义域**:$D=(-\infty,+\infty)$,**且为偶函数.**

② 确定单调区间、凹凸区间、极值点、拐点.

由 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$，$f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}$，得稳定点 $x_1=0$ 及 $x_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

③ 求渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$，渐近线 $y=0$.

④ 综上，列表如下.

x	0	$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$	备注
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	渐近线：$y=0$，偶函数
$f(x)$	极大值 1	↘	拐点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$	↘	

⑤ 函数图象如图 6-8 所示.

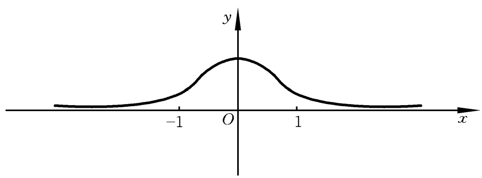

图 6-8

(7) ① 定义域：$D=(-\infty,+\infty)$.

② 确定单调区间、凹凸区间、极值点、拐点.

由 $f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(5x-2)$，$f''(x)=\dfrac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(5x+1)$，得稳定点 $x_1=\dfrac{2}{5}$，不

可导点 $x_2=0$ 及 $x_3=-\dfrac{1}{5}$.

③ 补充函数值:(1,0).

④ 综上,列表如下.

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)$	$-\frac{1}{5}$	$\left(-\frac{1}{5},0\right)$	0	$\left(0,\frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$	备注
$f'(x)$	+	+	+	x	−	0	+	(1,0)
$f''(x)$	−	0	+	x	+	+	+	
$f(x)$	↗	拐点 $\left(-\frac{1}{5},-\frac{6}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$	↗	极大值 0	↘	极大值 $-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$	↗	

⑤ 函数图象如图 6-9 所示.

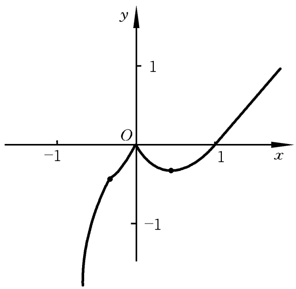

图 6-9

(8) ① 定义域:$D=(-\infty,+\infty)$.

② 确定单调区间、凹凸区间、极值点、拐点.

由 $f'(x)=\dfrac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2x^2-5x+2)$,$f''(x)=\dfrac{8}{9}x^{-\frac{4}{3}}(5x^2-5x-1)$,得稳定点 $x_1=\dfrac{1}{2}$,$x_2=2$,不可导点 $x_3=0$,及 $x_4=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{10}\sqrt{5}$,$x_5=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{10}\sqrt{5}$.

③ 记 $A_1\left(\dfrac{1}{2},1.42\right)$,$A_2(2,0)$,$A_3(0,0)$,$A_4(1.17,0.76)$,

$A_5(-0.17,1.46)$.

④ 综上,列表如下.

x	$\left(-\infty,\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{5}\right)$	$\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{5}$	$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{5},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$
$f(x)$	↘	拐点 A_5	↘	极小值 0	↗

x	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\sqrt{5}\right)$	$\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\sqrt{5}$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\sqrt{5},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	极大值 1.42	↘	拐点 A_4	↘	极小值 0	↗

⑤ 函数图象如图 6-10 所示.

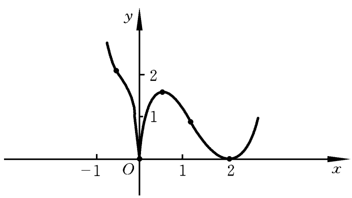

图 6-10

§7　方程的近似解

1. 求 $\frac{x^3}{3}-x^2+2=0$ 的实根到三位有效数字.

解　令 $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2+2$,则有

$$f'(x)=x^2-2x=x(x-2),$$

即　　$x>2$ 或 $x<0$ 时 $f'(x)>0$,　$0<x<2$ 时 $f'(x)<0$,

而　$$f(2)=\frac{8}{3}-4+2=\frac{2}{3}>0,\quad f(0)=2,$$

故当 $x\in[0,+\infty)$ 时　$$f(x)>0.$$

又　$$f(-2)=-\frac{8}{3}-4+2=-\frac{14}{3}<0,$$

$$f(-1)=-\frac{1}{3}-1+2=\frac{2}{3}>0,$$

且　$$f'(x)>0,\quad x<0,$$

由此 $f(x)=0$ 在 $[-2,-1]$ 内有一实根且仅有此实根,这时

$$f'(x)>0,\quad f''(x)=2x-2<0,$$

$m=\min\limits_{x\in[-2,-1]}\{|f'(x)|\}=3$,记 $x_0=-2$,由牛顿切线法可列表如下.

x_{n-1}	-2	$-17/12$	-1.2194
$f(x_{n-1})$	$-14/3$	-0.9547	-0.0913
$f'(x_{n-1})$	8	4.8403	3.9274
$x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$	$-17/12$	-1.2194	-1.1961
$\lvert x_n-\xi\rvert<\dfrac{\lvert f(x_n)\rvert}{m}$	3×10^{-1}	3×10^{-2}	3×10^{-4}

由上表所列计算过程及误差知,所求实根为 $x\approx-1.20$.

2. 求方程 $x=0.538\sin x+1$ 的根的近似值,精确到 0.001.

解　令　$$f(x)=x-0.538\sin x-1,$$

则有　$$f'(x)=1-0.538\cos x>0,$$

且　$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)\approx0.0328,\quad f\left(\frac{\pi}{3}\right)\approx-0.418.$$

故 $f(x)=0$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有一实根,且在 $(-\infty,+\infty)$ 上仅有一实根,此时

$$f''(x)=0.538\sin x>0,$$

$$x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right),\quad m=\min_{x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]}\{|f'(x)|\}=0.731,x_0=\frac{\pi}{2}.$$

由牛顿切线法得

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\approx 1.538,\quad f(x_1)\approx 0.000\,27,$$

$$|x_1-\xi|\leqslant\frac{|f(x_1)|}{m}\approx 0.0004<0.001.$$

由此所求根之近似值 $x\approx 1.538$.

§8 总练习题

1. 证明:若 $f(x)$ **在有限开区间** (a,b) **内可导,且** $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$**,则至少存在一点** $\xi\in(a,b)$**,使** $f'(\xi)=0$.

证　构造函数

$$F(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x), & x=a,\\ f(x), & a<x<b,\\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x), & x=b,\end{cases}$$

则有 $F(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续,且** $F(a)=F(b)$**,又**

$$F(x)=f(x),\quad x\in(a,b),$$

即 $F(x)$ **在** (a,b) **上可导,由罗尔定理知,** $\exists\xi\in(a,b)$**,使** $F'(\xi)=0$**,即**

$$f'(\xi)=0.$$

2. 证明:若 $x>0$**,则**

(1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$**,其中** $\dfrac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

证　(1) **令** $F(u)=\sqrt{u}$, $u\in[x,x+1]$**,显然** $F(u)$ **在** $[x,x+1]$ **上满足拉格朗日中值定理条件,故** $\exists\xi\in(x,x+1)$**,使**

$$\frac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x}=F'(\xi).$$

记 $\xi=x+\theta(x)$，$0<\theta(x)<1$，则有

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

$$2\sqrt{x+\theta(x)}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x},$$

$$\theta(x)=\left[\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right]^2-x=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{x}{2\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}\right)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)},$$

由 $x>0$，得

$$0<\frac{1}{2\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}<\frac{1}{4},$$

故
$$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2}.$$

(2)
$$\lim_{x\to0^+}\theta(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{2}\right]=\frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}\right]=\frac{1}{2}.$$

3. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $ab>0$. 证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证　构造函数

$$F(x)=\frac{f(x)}{x},G(x)=\frac{1}{x},x\in[a,b],$$

由 $ab>0$，得 $x\neq0$，因此，$F(x)$，$G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且

$$G'(x)=-\frac{1}{x^2}\neq0,\quad F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}.$$

由柯西中值定理知,$\exists\xi\in(a,b)$,使

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

而 $$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix},$$

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)/\xi^2}{-1/\xi^2}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

即有 $$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上三阶可导,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

证　设

$$F(x)=f(b)-f(x)-\frac{1}{2}(b-x)[f'(x)+f'(b)]+\frac{1}{12}(b-x)^3G,$$

则 $$F(a)=F(b)=0.$$

且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导. 由罗尔定理知,$\exists\xi_1\in(a,b)$,使得

$$F'(\xi_1)=0.$$

又 $$\begin{aligned}F'(x)&=-f'(x)+\frac{1}{2}[f'(x)+f'(b)]-\frac{1}{2}(b-x)f''(x)-\frac{(b-x)^2}{4}G\\&=\frac{1}{2}[f'(b)-f'(x)]-\frac{1}{2}(b-x)f''(x)-\frac{(b-x)^2}{4}G,\end{aligned}$$

则 $F'(b)=F'(\xi_1)=0$,且 $F'(x)$ 在 $[\xi_1,b]$ 上可导. 由罗尔定理知,$\exists\xi\in(\xi_1,b)\subset(a,b)$,使得

$$F''(\xi)=0,$$

即 $$\begin{aligned}F''(\xi)&=-\frac{1}{2}f''(\xi)+\frac{1}{2}f''(\xi)-\frac{1}{2}(b-\xi)f'''(\xi)+\frac{b-\xi}{2}G\\&=\frac{1}{2}(b-\xi)[G-f'''(\xi)]=0,\end{aligned}$$

而 $\xi\neq b$,故有 $G=f'''(\xi)$,由此得,$\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

5. 对 $f(x)=\ln(1+x)$ 应用拉格朗日中值定理，试证：对 $x>0$ 有

$$0<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<1.$$

证　对 $\forall x>0$，$f(u)=\ln(1+u)$ 在 $[0,x]$ 上连续，在 $(0,x)$ 上可导，由拉格朗日中值定理知，$\exists\xi\in(0,x)$，使得

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}=\frac{1}{1+\xi},$$

即
$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}>\frac{x}{1+x}.$$

又 $\ln(1+x)<x\ (x>0)$，则 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，

即
$$\frac{1}{x}<\frac{1}{\ln(1+x)}<\frac{1+x}{x}=1+\frac{1}{x},$$

整理得
$$\forall x>0,\quad 0<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<1.$$

6. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个正数，且 $f(x)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$. 证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

证　(1)
$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{x}.$$

由洛必达法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln f(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\\&=\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\end{aligned}$$

故
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

(2) 记 $M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则 $0<\frac{a_k}{M}\leqslant 1\ (k=1,2,\cdots,n)$，且

$$f(x)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=M\left[\frac{\left(\frac{a_1}{M}\right)^x+\left(\frac{a_2}{M}\right)^x+\cdots+\left(\frac{a_n}{M}\right)^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}},\quad x>0,$$

故有
$$M\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}<f(x)<M\left(\frac{1+1+\cdots+1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=M,$$

而
$$\lim_{x\to+\infty}M\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=M,$$

故有
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

7. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x^2)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x^2)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$

$$=\lim_{x\to1^-}\exp\left(\frac{1}{\ln(1-x)}\ln(1-x^2)\right)=\lim_{x\to1^-}\exp\left(1+\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}\right)$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to1^-}\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}\right)=\mathrm{e}\cdot\exp\left(\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}\right)$$

$$=\mathrm{e}\cdot\exp\left(\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{1+x}\right)=\mathrm{e}.$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+xe^x-\frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{xe^x+2e^x+\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=\frac{3}{2}.$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right]=0.$$

8. 设 $h>0$，函数 f 在 $U(a;h)$ 内具有 $n+2$ 阶连续导数，且 $f^{(n+2)}(a)\neq0$，f 在 $U(a;h)$ 内的泰勒公式为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},0<\theta<1.$$

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+2}$.

证　由 f 在 $U(a;h)$ 内具有 $n+2$ 阶连续导数及拉格朗日中值定理，有

$$f^{(n+1)}(a+\theta h)=f^{(n+1)}(a)+\theta h f^{(n+2)}(a+\theta_1\theta h),\quad 0<\theta_1<1,$$

所以

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[f^{(n+1)}(a)+\theta h f^{(n+2)}(a+\theta_1\theta h)]$$

又由泰勒公式得

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)$$

$$+\frac{h^{n+2}}{(n+2)!}f^{(n+2)}(a+\theta_2 h),0<\theta_2<1,$$

因此有
$$\frac{\theta h^{n+2}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(a+\theta_1\theta h)=\frac{h^{n+2}}{(n+2)!}f^{(n+2)}(a+\theta_2 h),$$

即
$$\theta f^{(n+2)}(a+\theta_1\theta h)=\frac{1}{n+2}f^{(n+2)}(a+\theta_2 h).$$

由题意知 $f^{(n+2)}(x)$ 连续，且 $f^{(n+2)}(a)\neq 0$，故

$$\lim_{h\to 0}\theta f^{(n+2)}(a+\theta_1\theta h)=\frac{1}{n+2}\lim_{h\to 0}f^{(n+2)}(a+\theta_2 h),$$

即得
$$\lim_{h\to 0}\theta f^{(n+2)}(a)=\frac{1}{n+2}f^{(n+2)}(a),\quad \lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+2}.$$

9. **设** $k>0$，**试问** k **为何值时，方程** $\arctan x-kx=0$ **存在正实根**.

解　令 $f(x)=\arctan x-kx$，则

$$f(0)=0,\quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-k,$$

且
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\arctan x-kx)=-\infty,$$

故 $\exists x_1>0$，使 $f(x_1)<0$. 下面讨论 k 的情况.

i）当 $0<k<1$ 时，由

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-k=\frac{1-k-kx^2}{1+x^2}=\frac{k}{1+x^2}\left[\left(\frac{1}{k}-1\right)-x^2\right]$$

$$=\frac{k}{1+x^2}\left(\sqrt{\frac{1}{k}-1}+x\right)\left(\sqrt{\frac{1}{k}-1}-x\right),$$

得,当 $0<x<\sqrt{\frac{1}{k}-1}$ 时,$f'(x)>0$. 又 $f(0)=0$,故$\exists x'\in\left(0,\sqrt{\frac{1}{k}-1}\right)$,使 $f(x')>0$. 由介值定理知$\exists x_0\in(\min\{x',x_1\},\max\{x',x_1\})$,使 $f(x_0)=0$,即方程 $\arctan x-kx=0$ 存在正实根.

ii) 当 $1\leqslant k$ 时,$f'(x)<0$,$x\in(0,+\infty)$,$f(0)=0$,即 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上严格递减,故方程无正根.

综上,当 $0<k<1$ 时,$\arctan x-kx=0$ 存在正实根.

10. 证明:对任一多项式 $p(x)$,一定存在 x_1 与 x_2,使 $p(x)$ 在$(-\infty,x_1)$与$(x_2,+\infty)$内分别严格单调.

证　不失一般性,设

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,a_0>0.$$

当 $n=1$ 时,$p(x)=a_0x+a_1$,且 $p'(x)=a_0>0$,故 $p(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上严格单调.

当 $n>1$ 时,$p'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$.

i) 若 n 为奇数,则 $n-1$ 为偶数,此时有

$$\lim_{x\to\infty}p'(x)=+\infty,$$

即任给 $M>0$,$\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,有 $p'(x)>M>0$,取 $x_1=-X$,$x_2=X$,则 $p(x)$ 在$(-\infty,x_1)$及$(x_2,+\infty)$上严格单调递增.

ii) 若 n 为偶数,则 $n-1$ 为奇数,此时有

$$\lim_{x\to+\infty}p'(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}p'(x)=-\infty,$$

即任给 $M>0$,$\exists X_1,X_2>0$,当 $x>X_1$ 时,有 $p'(x)>M>0$,当 $x<-X_2$ 时,有 $p'(x)<-M<0$,取 $x_1=-X_2$,$x_2=X_1$,则 $p(x)$ 在$(-\infty,x_1)$及$(x_2,+\infty)$上分别严格递减和严格递增.

综上,本题结论成立.

11. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

（1）在 $x=0$ 点是否可导？

（2）是否存在 $x=0$ 的一个邻域，使 f 在该邻域内单调？

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{2}+x\sin\dfrac{1}{x}\right]=\dfrac{1}{2}.$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

（2）
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\end{cases}$$

$$f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right)=-\frac{1}{2},f'\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right)=\frac{3}{2}\ (k=\pm 1,2,\cdots).$$

由于 $k\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{2k\pi}\to 0$，$\dfrac{1}{(2k+1)\pi}\to 0$，故在 $x=0$ 的任一邻域内，$f'(x)$ 不能保持同一符号，因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 的任一邻域内均不单调.

12. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，$f'(a)=f'(b)=0$. 证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证　将 $f(x)$ 分别在 $x=a$ 和 $x=b$ 展成泰勒公式. 考虑到 $f'(a)=f'(b)=0$，则

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2\\&=f(b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2,a<\xi_1<x,x<\xi_2<b,\end{aligned}$$

即
$$f(b)-f(a)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2,$$

取 $x=\dfrac{a+b}{2}$，代入上式得

$$f(b)-f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)],$$

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)|&=\frac{(b-a)^2}{8}|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|\\&\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|].\end{aligned}$$

取 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$,则有

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

13. 设函数 f 在 $[0,a]$ 上具有二阶导数,且 $|f''(x)|\leqslant M$,f 在 $(0,a)$ 内取得最大值. 试证

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

证　设 f 在 $x=c\in(0,a)$ 取得最大值. 由费马定理知 $f'(c)=0$,对 $f'(x)$ 在 $[0,c]$,$[c,a]$ 上分别应用拉格朗日中值定理,得

$$f'(c)-f'(0)=cf''(\xi_1),\quad \xi_1\in(0,c),$$

$$f'(a)-f'(c)=(a-c)f''(\xi_2),\quad \xi_2\in(c,a).$$

故

$$\begin{aligned}|f'(0)|+|f'(a)|&=|f'(c)-f'(0)|+|f'(a)-f'(c)|\\&=c\cdot|f''(\xi_1)|+(a-c)|f''(\xi_2)|\\&\leqslant c\cdot M+(a-c)M=Ma.\end{aligned}$$

14. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微,且 $0\leqslant f'(x)\leqslant f(x)$,$f(0)=0$. 证明:在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv0$.

证　由 $0\leqslant f'(x)\leqslant f(x)$,得 $f(x)\geqslant0$ 且 $f'(x)-f(x)\leqslant0$,即

$$\mathrm{e}^{-x}f'(x)-\mathrm{e}^{-x}f(x)\leqslant0,$$

$$[\mathrm{e}^{-x}f(x)]'=[\mathrm{e}^{-x}f'(x)-\mathrm{e}^{-x}f(x)]\leqslant0.$$

由 $f(0)=0$,得 $\mathrm{e}^{-x}f(x)|_{x=0}=0$,故

$$\mathrm{e}^{-x}f(x)\leqslant0,\quad 即\quad f(x)\leqslant0.$$

从而有 $f(x)\geqslant0$ 且 $f(x)\leqslant0$,因此,

$$f(x)\equiv0,\quad x\in[0,+\infty).$$

15. 设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$,其中 $g(x)$ 为任一函数,证明:若 $f(x_0)=f(x_1)=0$ $(x_0<x_1)$,则 f 在 $[x_0,x_1]$ 上恒等于 0.

证　**证法一**：由于 $f(x)$ 在 $[x_0,x_1]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[x_0,x_1]$ 内取得最大值和最小值. 设

$$f(\xi)=\max_{x\in[x_0,x_1]} f(x),$$

若 $f(\xi)\neq 0$，则 $f(\xi)>0,\xi\in(x_0,x_1)$. 由费马定理知

$$f'(\xi)=0.$$

据题设 $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$，可得 $f''(\xi)=f(\xi)>0$. 这与 $f(\xi)$ 为极大值从而 $f''(\xi)<0$ 相矛盾. 故有

$$f(\xi)=0.$$

同理可证：若 $f(\eta)=\min\limits_{x\in[x_0,x_1]} f(x)$，则

$$f(\eta)=0.$$

由此对 $\forall x\in[x_0,x_1]$，$f(\eta)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi)$，而 $f(\xi)=f(\eta)=0$，得 $f(x)\equiv 0,x\in[x_0,x_1]$.

证法二：i）先证 $\forall x\in(x_0,x_1)$ 有 $f'(x)=0$.

反证法：若 $\exists \bar{x}\in(x_0,x_1)$，使 $f'(\bar{x})\neq 0$，则取

$$g(x)\equiv\frac{-f''(\bar{x})+f(\bar{x})+1}{f'(\bar{x})},x\in(x_0,x_1),$$

代入题设条件得在 $x=\bar{x}$ 时

$$f''(\bar{x})+f'(\bar{x})\frac{-f''(\bar{x})+f(\bar{x})+1}{f'(\bar{x})}-f(\bar{x})=1\neq 0,\text{矛盾}.$$

因此 $\forall x\in(x_0,x_1)$ 时　$f'(x)=0.$

ii）再证 $\forall x\in[x_0,x_1]$ 有 $f(x)\equiv 0$.

由 $f'(x)=0,x\in(x_0,x_1)$，得 $f(x)\equiv$ 常数，$x\in(x_0,x_1)$，此时有

$$f'(x)=f''(x)\equiv 0,x\in(x_0,x_1).$$

由题设条件知　$f(x)=f''(x)+g(x)f'(x)=0,x\in[x_0,x_1],$

又　$$f(x_0)=f(x_1)=0.$$

故　$$\forall x\in[x_0,x_1],\quad f(x)\equiv 0.$$

16. 证明：定圆内接正 n 边形面积将随 n 的增加而增加.

证　设定圆半径为 R，则圆内接正 n 边形面积

$$S(n)=\frac{1}{2}R^2n\sin\frac{2\pi}{n},n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^+.$$

则
$$S(3)=\frac{3}{2}R^2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2,$$
$$S(4)=2R^2\sin\frac{\pi}{2}=2R^2,$$
$$S(5)=\frac{5}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{5}>\frac{5}{2}R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{4}R^2,$$

故有
$$S(3)<S(4)<S(5).$$

设
$$S(x)=\frac{1}{2}R^2x\sin\frac{2\pi}{x},x\in[5,+\infty),$$

则
$$S'(x)=\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{x}-\frac{R^2\pi}{x}\cos\frac{2\pi}{x}=\frac{1}{2}R^2\cos\frac{2\pi}{x}\left[\tan\frac{2\pi}{x}-\frac{2\pi}{x}\right].$$

当 $x\geqslant 5$ 时,
$$0<\frac{2\pi}{x}<\frac{\pi}{2},\quad \tan\frac{2\pi}{x}>\frac{2\pi}{x}.$$

故有$S'(x)>0$,即$S(x)$在$[5,+\infty)$上严格递增.由此得$S(n)=\frac{1}{2}R^2n\sin\frac{2\pi}{n}$随 n 的增加而增加.

17. 证明:f 为 I 上凸函数的充要条件是对任何 $x_1,x_2\in I$,函数 $\varphi(\lambda)=f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]$为$[0,1]$上的凸函数.

证 必要性:若 f 为 I 上的凸函数,则对$\forall t_1,t_2\in[0,1]$,$\alpha\in(0,1)$,有

$$\begin{aligned}\varphi[\alpha t_1+(1-\alpha)t_2]&=f[(\alpha t_1+(1-\alpha)t_2)x_1+(1-\alpha t_1-t_2+\alpha t_2)x_2]\\&=f[\alpha t_1x_1+(1-\alpha)t_2x_1+x_2-\alpha t_1x_2-(1-\alpha)t_2x_2]\\&=f[\alpha t_1x_1+(1-\alpha)t_2x_1+\alpha x_2-\alpha t_1x_2\\&\quad+(1-\alpha)x_2-(1-\alpha)t_2x_2]\\&=f[\alpha[t_1x_1+(1-t_1)x_2]+(1-\alpha)(t_2x_1+(1-t_2)x_2)]\\&\leqslant\alpha f[t_1x_1+(1-t_1)x_2]+(1-\alpha)f[t_2x_1+(1-t_2)x_2]\\&=\alpha\varphi(t_1)+(1-\alpha)\varphi(t_2).\end{aligned}$$

因此 φ 是$[0,1]$上的凸函数.

充分性:若 φ 是$[0,1]$上的凸函数,则对$\forall t_1,t_2\in[0,1]$,$\alpha\in(0,1)$,有
$$\varphi[\alpha t_1+(1-\alpha)t_2]\leqslant\alpha\varphi(t_1)+(1-\alpha)\varphi(t_2).$$

对于$\forall y_1,y_2\in I$,不妨设$y_1<y_2$,取$x_1,x_2\in I$,使$x_1\leqslant y_1<y_2\leqslant x_2$,并记

$$\begin{cases} y_1=t_1x_1+(1-t_1)x_2, \\ y_2=t_2x_1+(1-t_2)x_2, \end{cases} \quad \text{易知 } t_1,t_2\in[0,1].$$

对于$\forall \alpha\in(0,1)$,有

$$\begin{aligned} \alpha f(y_1)+(1-\alpha)f(y_2)&=\alpha\varphi(t_1)+(1-\alpha)\varphi(t_2)\geqslant\varphi(\alpha t_1+(1-\alpha)t_2) \\ &=f[(\alpha t_1+(1-\alpha)t_2)x_1+(1-\alpha t_1-t_2+\alpha t_2)x_2] \\ &=f[\alpha(t_1x_1+(1-t_1)x_2)+(1-\alpha)(t_2x_1+(1-t_2)x_2)] \\ &=f(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2), \end{aligned}$$

即f是I上的凸函数.

18. 证明:(1) 设f在$(a,+\infty)$上可导,若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$都存在,则$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(2) 设f在$(a,+\infty)$上n阶可导,若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)$都存在,则

$$\lim_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0,\ k=1,2,\cdots,n.$$

证 (1) 对于$\forall x\in(a,+\infty)$,则$f(x)$在$[x,x+1]$上可导. 记$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+1)=A$,因此

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0.$$

又由拉格朗日中值定理知

$$f(x+1)-f(x)=f'(\xi)[(x+1)-x]=f'(\xi),x<\xi<x+1,$$

且当$x\to+\infty$时,$\xi\to+\infty$,于是

$$\lim_{x\to+\infty}f'(\xi)=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0.$$

又由$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在及归结原则,得

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(\xi)=0.$$

(2) i) 取$c>a$,则$f(x)$在$[c,+\infty)$上可导. 记

$$I_1^{(1)}=[c,c+1],I_2^{(1)}=[c+1,c+2],\cdots,$$

$$I_k^{(1)}=[c+k-1,c+k],\cdots \quad (k=1,2,\cdots).$$

则在$I_k^{(1)}$上由拉格朗日中值定理得,$\exists\xi_k^{(1)}\in(c+k-1,c+k)$,使

$$f'(\xi_k^{(1)})=\frac{f(c+k)-f(c+k-1)}{c+k-(c+k-1)}$$

$$=f(c+k)-f(c+k-1)\quad(k=1,2,\cdots,n,\cdots),$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$**存在,故有**

$$\lim_{k\to\infty}[f(c+k)-f(c+k-1)]=0,$$

即

$$\lim_{k\to\infty}f'(\xi_k^{(1)})=0,$$

即存在数列$\{\xi_k^{(1)}\}$**使得**

$$\lim_{k\to+\infty}f'(\xi_k^{(1)})=0,$$

且

$$|\xi_k^{(1)}-\xi_{k-1}^{(1)}|<2\ (k=2,3,\cdots).$$

记 $I_k^{(2)}=[\xi_k,\xi_{k+1}]\ (k=1,2,\cdots)$,**则在** $I_k^{(2)}$ **上由拉格朗日中值定理得,**

$$\exists\xi_k^{(2)}\in(\xi_k^{(1)},\xi_{k+1}^{(1)})$$

使

$$f''(\xi_k^{(2)})=[f'(\xi_{k+1}^{(1)})-f'(\xi_k^{(1)})]/[\xi_{k+1}^{(1)}-\xi_k^{(1)}].$$

由于$\lim\limits_{k\to\infty}f'(\xi_k^{(1)})=0$,**故有**

$$\lim_{k\to\infty}f''(\xi_k^{(2)})=\lim_{k\to\infty}[f'(\xi_{k+1}^{(1)})-f'(\xi_k^{(1)})]/[\xi_{k+1}^{(1)}-\xi_k^{(1)}]=0.$$

即存在数列$\{\xi_k^{(2)}\}$**使得**

$$\lim_{k\to\infty}f''(\xi_k^{(2)})=0,\text{且}\ |\xi_k^{(2)}-\xi_{k-1}^{(2)}|<2^2\quad(k=2,3,\cdots).$$

由此继续得,存在数列$\{\xi_k^{(m)}\}$,**使得**

$$\lim_{k\to\infty}f^{(m)}(\xi_k^{(m)})=0,\text{且}\ |\xi_k^{(m)}-\xi_{k-1}^{(m)}|<2^m\quad(m=1,2,\cdots,n;k=2,3,\cdots,n,\cdots).$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)$**存在及归结原则,得**

$$\lim_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)=\lim_{k\to\infty}f^{(n)}(\xi_k^{(n)})=0,\text{且}\ |\xi_k^{(n)}-\xi_{k-1}^{(n)}|<2^n(k=2,3,\cdots,n,\cdots).$$

ii) **由** $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)=0$ **知,对于**$\forall\varepsilon>0,\exists M_1>0$,**当** $x>M_1$ **时,有**

$$|f^{(n)}(x)|<\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

又$\lim\limits_{k\to\infty}f^{(n-1)}(\xi_k^{(n-1)})=0$,**则**$\exists M_2>0$,**当** $\xi_k^{(n-1)}>M_2$ **时,有**

$$|f^{(n-1)}(\xi_k^{(n-1)})|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $M=\max\{M_1,M_2\}$,**且当** $m\geqslant k$ **时,**

$$\xi_m^{(n-1)}>M.$$

则对于$\forall x>\xi_k^{(n-1)}$，$\exists m\in\mathbf{N}_+$，当$m>k$时，

$$\xi_m^{(n-1)}\leqslant x\leqslant\xi_{m+1}^{(n-1)}，且\left|\xi_{m+1}^{(n-1)}-\xi_m^{(n-1)}\right|<2^{n-1}.$$

此时

$$f^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}[\xi_m^{(n-1)}]+f^{(n)}(\eta)[x-\xi_m^{(n-1)}],M<\xi_m^{(n-1)}<\eta<x,$$

$$|f^{(n-1)}(x)|\leqslant|f^{(n-1)}[\xi_m^{(n-1)}]|+|f^{(n)}(\eta)||x-\xi_m^{(n-1)}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^n}\cdot 2^{n-1}=\varepsilon.$$

即
$$\lim_{x\to+\infty}f^{(n-1)}(x)=0.$$

同理可得　$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0\ (k=1,2,\cdots,n-2).$

iii）由此结论成立.

19. 设f为$(-\infty,+\infty)$上的二阶可导函数. 若f在$(-\infty,+\infty)$上有界，则存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$，使$f''(\xi)=0$.

证　i）若$f''(x)$在$(-\infty,+\infty)$上变号，则由达布定理得$\exists\xi\in(-\infty,+\infty)$，使

$$f''(\xi)=0.$$

ii）若$f''(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不变号，不失一般性，设$f''(x)>0,x\in\mathbf{R}$，则$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格递增，且$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不恒等于0，取$\xi\in(-\infty,+\infty)$，使

$$f'(\xi)\neq 0.$$

a）若$f'(\xi)>0$，则在$[\xi,x]$上由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi_1)(x-\xi),\xi<\xi_1<x.$$

由$f'(x)$严格递增，得$f'(\xi_1)>f'(\xi)$，则

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)>f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi).$$

当$x\to+\infty$时，　$f'(\xi)(x-\xi)\to+\infty.$

故有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，与$f$在$(-\infty,+\infty)$有界矛盾.

b）若$f'(\xi)<0$，则在$[x,\xi]$上由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi_1)(x-\xi),x<\xi_1<\xi.$$

由$f'(x)$严格递增得$f'(\xi_1)<f'(\xi)$，则

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi_1)(x-\xi)>f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi).$$

当 $x\to-\infty$ 时，　　$f'(\xi)(x-\xi)\to+\infty.$

故有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 与 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界矛盾.

若 $f''(x)<0$,同理可得类似结果.

故 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一定变号.

综上,结论成立.

第七章　实数的完备性

知识要点

1. 实数的完备性定理由以下相互等价的定理构成，其中任何一个定理都可以作为实数完备性的定义：

① 确界原理；② 单调有界定理；③ 区间套定理；④ 聚点定理；⑤ 致密性定理；⑥ 柯西收敛准则；⑦ 有限覆盖定理.

2. 在描述实数完备性定理中有限覆盖定理与其余六个等价定理有较大的差别. 有限覆盖定理着眼点是闭区间的整体，而其余六个等价定理着眼点是某点的局部，因此在证明问题中也具有不同的功能. 有限覆盖定理可将每点的局部性质推广到整个闭区间上，其余几个定理则可将闭区间上的整体性质归结到某点或该点的邻域中. 注意：若应用反证法，则整体（即闭区间）与局部（即一点）又可以互相转化，应用的定理类型也发生变化. 而如何应用反证法证明结论是数学分析学习过程中的一个难点，掌握好基本概念的否定说法的正面叙述是其中的关键.

3. 有界闭区间上连续函数将闭区间$[a,b]$映射为闭区间$[\min\limits_{x\in[a,b]} f(x),\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)]$. 因此其有界性，最大、最小值存在性，介值性及一致连续性均为实数完备性的反映，故需用实数的完备性定理证之.

4. 有界数列$\{x_n\}$的最大和最小聚点分别称为$\{x_n\}$的上极限和下极限，而$\{x_n\}$中则存在有收敛至上极限和下极限的子列，于是上、下极限的问题可通过选子列的方法解决. 上、下极限另一等价定义是用确界的极限来描述的，它方便于证明有关上、下极限的不等式.

5. 有界数列的上、下极限与极限的关系：

(1) **上、下极限必定存在，而极限未必存在.**

(2) **极限的四则运算法则对上、下极限而言已不再成立.**

(3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$.

习 题 详 解

§1 关于实数集完备性的基本定理

1. 验证数集$\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$有且仅有两个聚点$\xi_1=-1,\xi_2=1$.

解 记 $x_n=(-1)^{2n}+\dfrac{1}{2n}, y_n=(-1)^{2n-1}+\dfrac{1}{2n-1}\ (n=1,2,\cdots)$,

则
$$\{x_n\},\{y_n\}\subset\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\right\} \text{且} \lim_{n\to\infty}x_n=1, \lim_{n\to\infty}y_n=-1.$$

由定义$2''$**知**，$\xi_1=-1,\xi_2=1$ **为**$\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$**的两个聚点.**

又 对于$\forall a\in\mathbf{R}, a\neq\pm1$，**记**$\Big|\,|a|-1\,\Big|=d>0$，**则对于** $\varepsilon_0=\dfrac{d}{2}$，**取** $N=\left[\dfrac{2}{d}\right]$，**当** $n>N$，**即** $n>\dfrac{2}{d}$ **时**，

$$\left|(-1)^n+\frac{1}{n}-a\right|\geqslant\Big|\,|a|-1\,\Big|-\frac{1}{n}>d-\frac{d}{2}=\frac{d}{2}=\varepsilon_0,$$

即在a **的**$\dfrac{d}{2}$**邻域内至多有有限个数集**$\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$**的点. 由定义**$2$ **知**a **不是数集**$\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$**的聚点. 因此**$\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$**有且仅有两个聚点**$\xi_1=-1$，$\xi_2=1$.

2. 证明：任何有限数集都没有聚点.

证 由定义 2 **知，聚点的任何邻域内都含有数集的无穷多个点，而对于有限数集，不可能满足此定义，因此，任何有限数集都没有聚点.**

3. 设$\{(a_n,b_n)\}$**是一个严格开区间套，即满足**

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<b_n<\cdots<b_2<b_1,$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 证明：存在惟一的一点$\xi$，使得$a_n<\xi<b_n(n=1,2,\cdots)$.

证　i）构造闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，则

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<b_{n-1}<\cdots<b_2<b_1,$$

$$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]\ (n=1,2,\cdots,n,\cdots)\quad \text{且}\quad \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

由区间套定理知，存在惟一的ξ，使得

$$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n(n=1,2,\cdots).$$

而对于$\forall n\in\mathbf{N}_+$，由题意知，

$$a_n<a_{n+1}\leqslant\xi\leqslant b_{n+1}<b_n,$$

即有
$$a_n<\xi<b_n\quad(n=1,2,\cdots,n,\cdots).$$

ii）若同时存在$\xi'\neq\xi$，且$a_n<\xi'<b_n(n=1,2,\cdots)$，则

$$0<\varepsilon_0=|\xi'-\xi|<b_n-a_n(n=1,2,\cdots),$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0<\varepsilon_0$，矛盾. 故必有$\xi'=\xi$.

由 i）、ii）结论得证.

注意：亦可构造闭区间套$[x_n,y_n]$，其中$x_n=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$，$y_n=\dfrac{b_n+b_{n+1}}{2}$，则由

$$a_n<x_n<a_{n+1},\quad b_{n+1}<y_n<b_n,$$

得
$$(a_{n+1},b_{n+1})\subset[x_n,y_n]\subset(a_n,b_n),$$

从而
$$[x_n,y_n]\supset[x_{n+1},y_{n+1}],$$

且
$$b_{n+1}-a_{n+1}<y_n-x_n<b_n-a_n,$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}y_n-x_n=0.$$

根据区间套定理知，

$$\exists\xi\in[x_n,y_n]\subset(a_n,b_n)(n=1,2,\cdots),$$

使$a_n<\xi<b_n$. 用同样方法再证明ξ的惟一性.

4. 试举例说明：在有理数集内，确界原理、单调有界原理、聚点定理和柯西收敛准则一般都不能成立.

解　取$\sqrt{2}$的精确到小数点后一位、二位…的不足近似值数列与过剩近似值数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$，即

$$a_1=1.4, a_2=1.41, a_3=1.414, \cdots;$$

$$b_1=1.5, b_2=1.42, b_3=1.415, \cdots.$$

则$\{a_n\}$、$\{b_n\}$均为有理数列:而

i）由确界定理知,有界数列必有确界,且在实数范围内,$\sup\{a_n\}=\inf\{b_n\}=\sqrt{2}$. 故在有理数范围内$\{a_n\}$有上界但无上确界,$\{b_n\}$有下界但无下确界.

ii）由单调有界原理知,$\{a_n\}$单调增加有上界,$\{b_n\}$单调减少有下界,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$均存在. 在实数范围内$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\sqrt{2}$. 但由极限的惟一性知,在有理数范围内$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$均不存在.

iii）由聚点定理知,有界无穷数列必有聚点,在实数范围内$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均有惟一聚点$\sqrt{2}$. 故在有理数范围内,有界无穷数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均无聚点.

iv）由于在实数范围内$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$,故对于$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当$n\geqslant m>N$时,$|a_n-a_m|<\varepsilon$,而在有理数范围内,$\{a_n\}$依然满足柯西准则条件,但$\{a_n\}$无极限.

5. 设$H=\left\{\left(\dfrac{1}{n+2},\dfrac{1}{n}\right)\,\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}$. 问

(1) H能否覆盖$(0,1)$?

(2) 能否从H中选出有限个开区间覆盖(i) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,(ii) $\left(\dfrac{1}{100},1\right)$?

解　(1) 对于$\forall x\in(0,1)$,只须取$n_0\in\mathbf{N}_+$,使得$n_0<\dfrac{1}{x}<n_0+2$,则

$$x\in\left(\frac{1}{n_0+2},\frac{1}{n_0}\right)\subset H.$$

由x的任意性知,H能覆盖$(0,1)$.

(2) i）若在H中存在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$的一个有限开覆盖$\overline{H}$,则在$\overline{H}$的有限个开区间中可找到最靠近0点的开区间. 记为$\left(\dfrac{1}{N+2},\dfrac{1}{N}\right)$,则取$x_0=\dfrac{1}{N+3}\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,由于$\dfrac{1}{N+3}<\dfrac{1}{N+2}$,故这一点$x_0$不属于$\overline{H}$中任一开区间. 与$\overline{H}$为

$\left(0,\frac{1}{2}\right)$的有限开覆盖矛盾. 故不能对$\left(0,\frac{1}{2}\right)$有限覆盖.

ii) 取$\overline{H}=\left\{\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right)\middle| n=1,2,\cdots,98\right\}\subset H$,则$\overline{H}$覆盖了$\left(\frac{1}{100},1\right)$. 故能对$\left(\frac{1}{100},1\right)$有限覆盖.

6. 证明:闭区间$[a,b]$的全体聚点的集合是$[a,b]$本身.

证　i) 对于$\forall x\in[a,b]$,当$x\neq a$时,对于x的任意邻域$(x-\delta,x+\delta)$,取

$$\delta_0=\min\{x-a,\delta\}>0,$$

则

$$(x-\delta_0,x)\subset(x-\delta,x+\delta),(x-\delta_0,x)\subset[a,b],$$

于是在$(x-\delta_0,x)$内,亦即在$(x-\delta,x+\delta)$内有无穷个点属于$[a,b]$,故x为$[a,b]$的聚点.

当$x=a$时,对于a的任意邻域$(a-\delta,a+\delta)$,取$\delta_0=\min\{b-a,\delta\}$,则

$$(a,a+\delta)\subset(a-\delta,a+\delta),\quad (a,a+\delta_0)\subset[a,b],$$

于是在$(a,a+\delta_0)$内,亦即在$(a-\delta,a+\delta)$内有无穷多个点属于$[a,b]$. 故a为$[a,b]$聚点.

ii) 若x是$[a,b]$的聚点,且$x\overline{\in}[a,b]$,则

$$x\in(-\infty,a)\quad 或\quad x\in(b,+\infty).$$

不失一般性,设$x\in(-\infty,a)$,令$\delta_0=\frac{1}{2}(a-x)$,则$U(x;\delta_0)\cap[a,b]=\varnothing$,即在$U(x;\delta_0)$中不含$[a,b]$中的点,这与$x$是$[a,b]$聚点矛盾. 故$x\overline{\in}(-\infty,a)$. 同理可证,$x\overline{\in}(b,+\infty)$.

由i)、ii)知$[a,b]$的聚点的集合是$[a,b]$本身.

7. 设$\{x_n\}$为单调数列,证明:若$\{x_n\}$存在聚点,则必是惟一的,且为$\{x_n\}$的确界.

证　i) 不失一般性,设$\{x_n\}$单调增加且存在聚点a.

由定义$2''$知,存在各项互异数列$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$,使得

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=a.$$

而$\{x_n\}$为单调增加数列,故$\{x_{n_k}\}$亦为单调增加数列,因此有

$$x_{n_k}\leqslant\xi,\quad k=1,2,\cdots,$$

且对于$\forall k\in\mathbf{N}_+$,有

$$x_k\leqslant x_{n_k}\leqslant\xi,$$

即数列$\{x_n\}$单调增加,且有上界. 由单调有界定理知,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,而$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$. 由归结原则知,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,又由归结原则知,$\{x_n\}$的任何一个各项互异的子列$\{x_{m_k}\}$都收敛且$\lim\limits_{k\to\infty}x_{m_k}=a$. 从而,$a$ 为$\{x_n\}$的惟一聚点.

ii) 由于$\{x_n\}$为单调增加的有界数列,故据第二章 § 3 中习题 8 的结论知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sup\{x_n\}=a.$$

即 a 为$\{x_n\}$的上确界.

iii) 用与上完全相同的方法可证:若$\{x_n\}$为单调减少数列,且存在聚点 c,则 c 为惟一聚点且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\inf\{x_n\}=c$,即 c 为$\{x_n\}$的下确界.

综上,结论得证.

8. 试用有限覆盖定理证明聚点定理.

证　设 E 为有界无穷点集,因此存在 $M>0$,使得 $E\subset[-M,+M]$. 由本节习题 6 知,$[-M,+M]$的聚点均含于$[-M,+M]$,故 E 若有聚点,必含于$[-M,+M]$.

反证法:若 E 无聚点,即$[-M,+M]$中任何一点都不是 E 的聚点,则对于$\forall x\in[-M,+M]$,必有相应的$\delta_x>0$,使得$U(x;\delta_x)$内至多只有点$x\in E$(若$x\overline{\in}E$,则$U(x;\delta_x)$中不含 E 中之点). 所有这些邻域的全体形成$[-M,+M]$的一个无限开覆盖:

$$H=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\mid x\in[-M,+M]\}.$$

由有限覆盖定理知,H 中存在有限个开区间能覆盖$[-M,+M]$. 记

$$\overline{H}=\{(x-\delta_{x_k},x+\delta_{x_k})\mid x_k\in[-M,+M],k=1,2,\cdots,N\}\subset H$$

为$[-M,+M]$的一个有限开覆盖,则$\overline{H}$ 也覆盖了E. 由$U(x;\delta_x)$的构造含意知,$\overline{H}$ 中N 个邻域至多有N 个点属于E,这与E 为无穷点集相矛盾. 因此,在$[-M,+M]$内一定有 E 的聚点.

由此聚点定理得证.

9. 试用聚点定理证明柯西收敛准则.

证　必要性：若数列$\{a_n\}$收敛，则对于任给的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得对m，$n>N$有$|a_m-a_n|<\varepsilon$.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，由数列极限定义知，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$m$，$n>N$时，有

$$|a_m-A|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2},$$

因而
$$|a_m-a_n|\leqslant|a_m-A|+|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

充分性：若对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当m，$n>N$时，有$|a_m-a_n|<\varepsilon$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$收敛.

i）对于$\varepsilon_0=1$，存在$N_0>0$，当m，$n>N_0$时，有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon_0=1\text{，即 }a_m-1<a_n<a_m+1.$$

取$m=N_0+1$，$n>N_0$，则

$$a_{N_0+1}-1<a_n<a_{N_0+1}+1.$$

记
$$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{N_0}|,|a_{N_0+1}-1|,|a_{N_0+1}+1|\},$$

则对于$\forall n\in\mathbf{N}_+$，有$|a_n|\leqslant M$，即$\{a_n\}$为有界数列.

ii）由聚点定理推论知，有界数列必含有收敛子列，故$\{a_n\}$必有收敛子列$\{a_{n_k}\}$. 记

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=A.$$

iii）由柯西条件知，对于$\forall\varepsilon>0$，则$\exists N_1>0$，当m，$n>N_1$时，有

$$|a_m-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

而由于$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=A$，故$\exists N_2>0$，当$k>N_2$时，有

$$|a_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当m，n，$k>N$时，有

$$|a_m-a_n|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |a_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

故
$$|a_n-A|=|a_n-a_{n_k}+a_{n_k}-A|\leqslant|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即有
$$\lim_{n\to\infty}a_n=A.$$

§2　闭区间上连续函数性质的证明

1. 设 f 是 R 上连续的周期函数. 证明:f 在 R 上有最大值与最小值.

证　设 T 为 f 的一个周期,则由 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 上连续,必有最大值 $f(\xi)$ 和最小值 $f(\eta)$,其中 $\xi,\eta\in[0,T]$. 对于 $\forall x\in\mathbf{R}$,一定存在某整数 n,使得 $x\in[nT,(n+1)T]$,即

$$x-nT\in[0,T],$$

从而有 $f(x)=f(x-nT)$,而

$$f(\eta)\leqslant f(x-nT)\leqslant f(\xi),$$

故有

$$f(\eta)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi).$$

即 $f(x)$ 在 R 上有最大值 $f(\xi)$ 与最小值 $f(\eta)$.

2. 设 I 为有限区间. 证明:若 f 在 I 上一致连续,则 f 在 I 上有界. 举例说明此结论当 I 为无限区间时不一定成立.

证　i) 由于 f 在有限区间 I 上一致连续,故对于 $\varepsilon_0=1>0$,必有 $\exists\delta_0>0$,当 $|x'-x''|<\delta_0(x',x''\in I)$ 时有

$$|f(x')-f(x'')|<1.$$

由于 I 是有限区间,记其长度为 $|I|$,故存在某自然数 N,使得

$$\frac{|I|}{N}<\delta_0.$$

将 I 分成 n 等分,记分点为

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n,$$

其中,x_0,x_n 分别为 I 的左右端点. 取

$$\xi_k=\frac{1}{2}(x_{k-1}+x_k)\in(x_{k-1},x_k),$$

则当 $x\in[x_{k-1},x_k]$ 时,有

$$|x-\xi_k|<\frac{|I|}{N}<\delta,$$

故有

$$|f(x)-f(\xi_k)|<1.$$

即

$$f(\xi_k)-1<f(x)<f(\xi_k)+1.$$

令 $M=\max\limits_{k=1,2,\cdots,N}\{|f(\xi_k)-1|,|f(\xi_k)+1|\}$，则对于 $\forall x\in I$，必存在 k 使 $x\in[x_{k-1},x_k]$，故有 $|f(x)|<M$，即 $f(x)$ 在 I 上有界.

ii) 考察函数 $f(x)=x,x\in\mathbf{R}$. 由于对于 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|<\delta=\varepsilon,$$

则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续，但 $f(x)=x$ 在 $\mathbf{R}$ 上无界，故 I 为无限区间时，结论不一定成立.

3. 证明：$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

证 令
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\in(0,+\infty),\\ 1, & x=0,\end{cases}$$
则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 现证明 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，则根据柯西准则有 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x',x''>X$ 时 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 分 $[0,+\infty)$ 为 $[0,X+1]$，$[X,+\infty)$，由于 $F(x)$ 在 $[0,X+1]$ 上连续，因而 $F(x)$ 在 $[0,X+1]$ 上一致连续. 故对于上述 $\varepsilon>0$，必有 $\delta_0>0$，当 $x',x''\in[0,X+1]$，且 $|x'-x''|<\delta_0$ 时，有

$$|F(x')-F(x'')|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\left\{\delta_0,\dfrac{1}{2}\right\}$，则对于一切 $x',x''\in[0,+\infty)$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，x',x'' 或同属于 $[0,X+1]$，或同属于 $[X,+\infty)$，总有

$$|F(x')-F(x'')|<\varepsilon.$$

即 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. 于是，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

注意：实际上，若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. 证明如下：只需将本题证明过程中之 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 改成 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=A$，即为此结论的证明.

4. 试用有限覆盖定理证明根的存在定理.

证 根的存在定理：若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x)=0$.

反证法:假定对于$\forall x\in[a,b]$,有$f(x)\neq 0$.

由连续函数的保号性知,对于$\forall x\in[a,b]$,总存在其某一邻域$U(x;\delta_x)$,使得$U(x;\delta_x)$的任一点的函数值$f(y)$,$y\in U(x;\delta_x)$保持同一符号.特别地,若$x=a,b$,则考虑$U_+(a;\delta_a)$,$U_-(b;\delta_b)$,这样$H=\{U(x;\delta_x)\mid x\in[a,b]\}$构成$[a,b]$的一个开覆盖.由有限覆盖定理知,存在一个有限覆盖$\overline{H}=\{U(y_k,\delta_{y_k})\mid k=1,2,\cdots,N\}$覆盖$[a,b]$. 不妨设$y_1<y_2<\cdots<y_N$,则有

i) $a\in U(y_1;\delta_{y_1})$,$b\in U(y_N;\delta_{y_N})$.

ii) $U_+(y_{k-1};\delta_{y_{k-1}})\cap U_-(y_k;\delta_{y_k})\neq\varnothing$,且$z_{k-1}\in U(y_{k-1};\delta_{y_{k-1}})\cap U_-(y_k;\delta_{y_k})$,$k=2,3,\cdots,N$.由此,知$f(a)$与$f(y_1)$同号,$f(y_1)$与$f(z_1)$同号;而$z_1\in U_-(y_2;\delta_{y_2})$,故$f(z_1)$与$f(y_2)$同号,$f(y_2)$与$f(z_2)$同号,即$f(a)$与$f(y_2)$同号.且依此类推,$f(a)$与$f(y_3)$同号,…最后有$f(a)$与$f(y_N)$同号,$f(y_N)$与$f(b)$同号,得$f(a)$与$f(b)$同号. 矛盾. 因此,至少有一点$x\in(a,b)$,使得$f(x)=0$.

5. 证明:在(a,b)上的连续函数f为一致连续的充要条件是$f(a+0)$与$f(b-0)$都存在.

证　充分性:若$f(a+0)$,$f(b-0)$存在,定义

$$F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a,\\ f(x), & a<x<b,\\ f(b-0), & x=b,\end{cases}$$

则$F(x)$在$[a,b]$上连续,从而$F(x)$在$[a,b]$上一致连续,故$f(x)$在(a,b)上一致连续.

必要性:若$f(x)$在(a,b)上一致连续,则任给$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$x',x''\in(a,b)$,且$|x'-x''|<\delta$时,有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

特别地,当$x',x''\in(a,a+\delta)$或$x',x''\in(b-\delta,b)$时,有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由柯西准则知,$f(a+0)$与$f(b-0)$均存在.

注意:把(a,b)推广到无限区间. 若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=B,$$

则用与上述完全相同的方法可证得 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

但其逆不一定成立. 考察 $f(x)=x$，知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，但

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

§3　上极限与下极限

1. 求以下数列的上、下极限：

(1) $\{1+(-1)^n\}$；　(2) $\left\{(-1)^n \dfrac{n}{2n+1}\right\}$；

(3) $\{2n+1\}$；　(4) $\left\{\dfrac{2n}{n+1}<\sin \dfrac{n\pi}{4}\right\}$；

(5) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\sin \dfrac{\pi}{n}\right\}$；　(6) $\left\{\sqrt[n]{\left|\cos \dfrac{n\pi}{3}\right|}\right\}$.

解　(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}[1+(-1)^n]=2$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}[1+(-1)^n]=0$.

(2) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[(-1)^n \frac{n}{2n+1}\right]=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[(-1)^n \frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right]=\frac{1}{2},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\left[(-1)^n \frac{n}{2n+1}\right]=\underline{\lim_{n\to\infty}}\left[(-1)^n \frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right]=-\frac{1}{2}.$$

(3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(2n+1)=+\infty$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(2n+1)=+\infty$.

(4) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{2n}{n+1}\sin \frac{n\pi}{4}\right)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{2}{1+\frac{1}{n}}\cdot \sin \frac{n\pi}{4}\right)$$
$$=2\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\sin \frac{n\pi}{4}=2\times 1=2,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{2n}{n+1}\sin \frac{n\pi}{4}\right)=2\,\underline{\lim_{n\to\infty}}\sin \frac{n\pi}{4}=2\times(-1)=-2.$$

(5) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n}\sin \frac{\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot \pi\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\pi\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}=\pi,$$

因此，得 $$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}\sin\frac{\pi}{n}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}\sin\frac{\pi}{n}=\pi.$$

（6）由 $\left|\cos\dfrac{3k}{3}\pi\right|=1$，$\left|\cos\dfrac{3k+1}{3}\pi\right|=\dfrac{1}{2}$，$\left|\cos\dfrac{3k+2}{3}\pi\right|=\dfrac{1}{2}$，得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|}=1.$$

即 $$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|}=\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|}=1.$$

2. 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为有界数列，证明：

（1）$\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=-\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$；

（2）$\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$；

（3）若 $a_n>0,b_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，则

$$\varliminf_{n\to\infty}a_n\ \varliminf_{n\to\infty}b_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}a_nb_n,\quad \varlimsup_{n\to\infty}a_n\ \varlimsup_{n\to\infty}b_n\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}a_nb_n;$$

（4）若 $a_n>0$，$\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n>0$，则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n}$.

证　（1）设 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则由定理 7.7 知，任给 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $a_n>A-\varepsilon$，即

$$-a_n<-A+\varepsilon,\tag{1}$$

且存在子列 $\{a_{n_k}\}$，使 $a_{n_k}<A+\varepsilon\ (k=1,2,\cdots)$，即

$$-a_{n_k}>-A-\varepsilon\ (k=1,2,\cdots),\tag{2}$$

综合不等式①、②，由定理 7.7 知，$\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)=-A$，故有

$$\varliminf_{n\to\infty}a_n=-\varlimsup_{n\to\infty}(-a_n).$$

（2）设 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n=B$，由定理 7.7 知，任给 $\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$a_n>A-\frac{\varepsilon}{2},\quad b_n>B-\frac{\varepsilon}{2},$$

即
$$a_n+b_n>A+B-\varepsilon.$$
再由定理7.8,得
$$\varliminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)\geqslant A+B-\varepsilon.$$
故由ε的任意性,得
$$\varliminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)\geqslant A+B,$$
即
$$\varliminf_{n\to\infty}a_n+\varliminf_{n\to\infty}b_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(a_n+b_n).$$

(3) i) 先证$\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n\ \varliminf\limits_{n\to\infty}b_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}a_nb_n$.

设$\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=\underline{A}$,$\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n=\underline{B}$,由$a_n>0$,$b_n>0$,根据定理7.8,有
$$\underline{A}\geqslant 0,\underline{B}\geqslant 0.$$
若$\underline{A}\ \underline{B}=0$,则由$a_nb_n>0$知,
$$\varliminf_{n\to\infty}a_nb_n\geqslant 0=\underline{A}\ \underline{B}=\varliminf_{n\to\infty}a_n\ \varliminf_{n\to\infty}b_n.$$
若$\underline{A}\ \underline{B}\neq 0$,则$\underline{A}>0$,$\underline{B}>0$. 由
$$\varliminf_{n\to\infty}a_n=\underline{A},\varliminf_{n\to\infty}b_n=\underline{B},$$
任给$\varepsilon>0$,且$\varepsilon<\min\{\underline{A},\underline{B}\}$,$\exists N>0$,当$n>N$时,有
$$a_n>\underline{A}-\varepsilon,b_n>\underline{B}-\varepsilon,$$
即
$$a_nb_n>\underline{A}\ \underline{B}-(\underline{A}+\underline{B})\varepsilon+\varepsilon^2.$$
由定理7.8及ε的任意性,得
$$\varliminf_{n\to\infty}a_nb_n\geqslant\underline{A}\ \underline{B},$$
即
$$\varliminf_{n\to\infty}a_nb_n\geqslant\varliminf_{n\to\infty}a_n\ \varliminf_{n\to\infty}b_n.$$
故有
$$\varliminf_{n\to\infty}a_n\ \varliminf_{n\to\infty}b_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}a_nb_n.$$

ii) 再证$\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n\ \varlimsup\limits_{n\to\infty}b_n\geqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_nb_n$.

设$\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n=\overline{A}$,$\varlimsup\limits_{n\to\infty}b_n=\overline{B}$,由$a_n>0$,$b_n>0$,根据定理7.8,有
$$\overline{A}\geqslant 0,\quad \overline{B}\geqslant 0.$$
且任给$\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,有
$$a_n<\overline{A}+\varepsilon,\quad b_n<\overline{B}+\varepsilon,$$
即
$$a_nb_n<\overline{A}\overline{B}+(\overline{A}+\overline{B})\varepsilon+\varepsilon^2.$$

由定理 7.8，得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n b_n \leqslant \overline{A}\overline{B} + (\overline{A}+\overline{B})\varepsilon + \varepsilon^2.$

再由 ε 的任意性，得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n b_n \leqslant \overline{A}\overline{B} = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \ \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n.$$

（4）设 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = A > 0$，由定理 7.7 知，任给 $\varepsilon > 0$，使 $\varepsilon < \min\left\{A, \dfrac{1}{A}\right\}$，令

$$\varepsilon_1 = \frac{A^2\varepsilon}{1-A\varepsilon} > 0, \quad \varepsilon_2 = \frac{A^2\varepsilon}{1+A\varepsilon} > 0,$$

则 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有

$$a_n > A - \varepsilon_2 = \frac{A}{1+A\varepsilon},$$

即

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{A} + \varepsilon, \tag{①}$$

且存在 $\{a_{n_k}\}$，使

$$a_{n_k} < A + \varepsilon_1 = \frac{A}{1-A\varepsilon} \quad (k=1,2,\cdots),$$

即

$$\frac{1}{a_{n_k}} > \frac{1}{A} - \varepsilon. \tag{②}$$

综合式①、②，由定理 7.7 知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A},$$

故

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n}.$$

3. 证明：若 $\{a_n\}$ 为递增数列，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

证　i）若 $\{a_n\}$ 为无界数列，则任给 $M > 0$，一定存在某一项 $a_N \in \{a_n\}$，使得 $a_N > M$，而 $\{a_n\}$ 为递增数列，故当 $n > N$ 时，有 $a_n \geqslant a_N > M$. 因此，有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

从而有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

ii）若 $\{a_n\}$ 为有界数列，则由单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 又由定理 7.6 知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

综合 i）、ii），结论得证.

4. 证明：若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{a_n}=1$，则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证　由题设条件知，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$ 存在，且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=A>0$，由此知 $\{a_n\}$ 为有界数列，故 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$ 存在.

若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=0$，则由定理 7.7 知，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在子列 $\{a_{n_k}\}$，使 $a_{n_k}<\varepsilon$，而 $a_n>0$，故有

$$-\varepsilon<0<a_{n_k}<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}a_{n_k}=0,$$

也就有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_{n_k}}=+\infty$，与题设矛盾. 故

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n>0.$$

由本章 §3 习题 2(4)知，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n},$$

而
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{A},$$

因此，
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=A,$$

即
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=A.$$

由定理 7.6，得
$$\lim_{n\to\infty}a_n=A.$$

5. 证明定理 7.8.

证　定理 7.8：设有界数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足：存在 $N_0>0$，当 $n>N_0$ 时，有 $a_n\leqslant b_n$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n,$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}b_n.$$

特别，若 α,β 为常数，又存在 $N_0>0$，当 $n>N_0$ 时有 $\alpha\leqslant a_n\leqslant\beta$，则

$$\alpha\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n\leqslant\beta.$$

证明过程如下.

由定理 7.4 知，两数列的上、下极限均存在. 记

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n=\overline{A},\ \varlimsup_{n\to\infty} b_n=\overline{B},$$

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n=\underline{A},\ \varliminf_{n\to\infty} b_n=\underline{B}.$$

若 $\overline{A}>\overline{B}$,取 $0<\varepsilon_0<\dfrac{\overline{A}-\overline{B}}{2}$,则有

$$\overline{A}-\varepsilon_0>\frac{1}{2}(\overline{A}+\overline{B})>\overline{B}+\varepsilon_0.$$

由定理 7.7,取 $\varepsilon_0=\dfrac{\overline{A}-\overline{B}}{3}$,则存在 $N_1>0$,当 $n>N$ 时,有

$$b_n<\overline{B}+\varepsilon_0,$$

且存在 $\{a_{n_k}\}$,使

$$a_{n_k}>\overline{A}-\varepsilon_0\quad(k=1,2,\cdots).$$

记 $N=\max\{N_0,N_1,n_1\}$,则当 $k>N$ 时,$n_k>k>N$,且 $\varepsilon_0<\dfrac{\overline{A}-\overline{B}}{2}$,因此有

$$a_{n_k}>\overline{A}-\varepsilon_0>\overline{B}+\varepsilon_0>b_{n_k},$$

与题设矛盾. 从而必有 $\overline{A}\leqslant\overline{B}$,即

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} b_n.$$

又由 $a_n\leqslant b_n$($n>N_0$ 时),得 $-a_n\geqslant -b_n$,从而有

$$\varlimsup_{n\to\infty}(-a_n)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}(-b_n),$$

即
$$-\varlimsup_{n\to\infty}(-a_n)\leqslant-\varlimsup_{n\to\infty}(-b_n).$$

由本章 §3 习题 2(1)知

$$-\varlimsup_{n\to\infty}(-a_n)=\varliminf_{n\to\infty} a_n,$$

$$-\varlimsup_{n\to\infty}(-b_n)=\varliminf_{n\to\infty} b_n,$$

故有
$$\varliminf_{n\to\infty} a_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty} b_n.$$

记 α 为 $\{\alpha_n\}$,$\alpha_n=\alpha$,$n=1,2,\cdots$,β 为 $\{\beta_n\}$,$\beta_n=\beta$,$n=1,2,\cdots$. 则

由 $\alpha_n\leqslant a_n$ 得
$$\varliminf_{n\to\infty}\alpha_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty} a_n;$$

由 $a_n\leqslant\beta_n$ 得
$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\beta_n.$$

而 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$,$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\beta_n=\beta$,且 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$,故有

$$\alpha\leqslant\varliminf_{n\to\infty} a_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} a_n\leqslant\beta.$$

由此定理7.8得证.

6. 证明定理7.9.

证　定理7.9：设$\{x_n\}$为有界数列.

(1) $\overline{A}$为$\{x_n\}$上极限的充要条件是

$$\overline{A}=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}\{x_k\};$$

(2) $\underline{A}$为$\{x_n\}$下极限的充要条件是

$$\underline{A}=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n}\{x_k\}.$$

证明过程如下.

设$\{x_n\}$为有界数列. 以下将证$\overline{A}$为数列$\{x_n\}$上极限的充要条件是

$$\overline{A}=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}.$$

必要性：若$\overline{A}$为$\{x_n\}$的上极限，则由定理7.7，有任给$\varepsilon>0$，

i）存在$N>0$，当$n>N$时，$x_n<\overline{A}+\varepsilon$，即当$n>N$时，有

$$\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}\leqslant\overline{A}+\varepsilon;$$

ii）存在子列$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，使$x_{n_k}>\overline{A}-\varepsilon\ (k=1,2,\cdots)$，即有

$$\overline{A}-\varepsilon<x_{n_k}\leqslant\sup_{j\geqslant n_k}\{x_j\},$$

而$\sup\limits_{j\geqslant n_k}\{x_j\}$为递减数列，故有

$$\overline{A}-\varepsilon<\sup_{j\geqslant n_k}\{x_j\}\leqslant\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}\leqslant\overline{A}+\varepsilon.$$

由此得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}\{x_n\}=\overline{A}.$$

充分性：若$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}=\overline{A}$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有

$$\overline{A}-\varepsilon<\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}<\overline{A}+\varepsilon,$$

即

$$x_n\leqslant\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}<\overline{A}+\varepsilon.$$

而$\sup\limits_{k\geqslant N+1}\{x_k\}>\overline{A}-\varepsilon$，故$\exists n_1>N$，使

$$x_{n_1}>\overline{A}-\varepsilon;$$

$\sup\limits_{k\geqslant n_1+1}\{x_k\}>\overline{A}-\varepsilon$，故$\exists n_2>n_1$，使

$$x_{n_2}>\overline{A}-\varepsilon;$$

以此类推，由此得一子列$\{x_{n_k}\}$，$k=1,2,\cdots$，使得

$$x_{n_k}>\overline{A}-\varepsilon.$$

由定理 7.7 知 $$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{A}.$$

同理可证:$\underline{A}$ 为$\{x_n\}$下极限的充要条件是$\underline{A}=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$. 由此定理 7.9 得证.

§4 总练习题

1. 证明:$\{x_n\}$为有界数列的充要条件是$\{x_n\}$的任何子列都存在其收敛子列.

证 必要性:若$\{x_n\}$为有界数列,则其任何子列$\{x_{n_k}\}$均有界. 由致密性定理知$\{x_{n_k}\}$必有收敛子列.

充分性:用反证法. 若$\{x_n\}$的任何子列都有其收敛子列,而$\{x_n\}$为无界数列,则

对于 $M_1=1$,$\exists x_{n_1}\in\{x_n\}$,使得

$$|x_{n_1}|>1;$$

对于 $M_2=2$,$\exists x_{n_2}\in\{x_n|n>n_1\}$,使得

$$|x_{n_2}|>\max\{|x_{n_1}|,2\}>2;$$

一般地有,对于 $M_k=k$,$\exists x_{n_k}\in\{x_n|n>n_{k-1}\}$,使得

$$|x_{n_k}|>\max\{|x_{n_{k-1}}|,k\}>k.$$

由此得到一子列$\{x_{n_k}\}$,满足$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,且$|x_{n_k}|>k$. 故有$\lim\limits_{k\to\infty}|x_{n_k}|=\infty$,与题设矛盾. 因此$\{x_n\}$必为有界数列.

2. 设 f 在(a,b)内连续,且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=0$. 证明:$f$ 在(a,b)内有最大值或最小值.

证 i) 若 $f(x)\equiv 0$,$x\in(a,b)$,则结论显然成立.

ii) 若 $f(x)\not\equiv 0$,$x\in(a,b)$,则$\exists x_1\in(a,b)$使

$$f(x_1)\neq 0.$$

构造函数 $$F(x)=\begin{cases}0, & x=a,\\ f(x), & a<x<b,\\ 0, & x=b,\end{cases}$$

则$F(x)$在$[a,b]$上连续，故可取得最大值或最小值.

如果$f(x_1)=F(x_1)>0$，则$F(x)$在$[a,b]$上的最大值必为正数，而$F(a)=F(b)=0$，故$F(x)$的最大值只能在(a,b)内取得．又$F(x)=f(x)$，$x\in(a,b)$，此即$f(x)$在(a,b)内有最大值.

如果$f(x_1)=F(x_1)<0$，则$F(x)$在$[a,b]$上的最小值必为负数，而$F(a)=F(b)=0$，故$F(x)$的最小值只能在(a,b)内取得．又$F(x)=f(x)$，$x\in(a,b)$，此即$f(x)$在(a,b)内有最小值.

综上，f在(a,b)内有最大值或最小值．结论得证.

3．设f在$[a,b]$上连续，又有$\{x_n\}\subset[a,b]$，使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$．证明：存在$x_0\in[a,b]$，使得$f(x_0)=A$.

证　因为$\{x_n\}\subset[a,b]$，所以$\{x_n\}$为一有界点列．根据致密性定理知，必有收敛子列$\{x_{n_k}\}$．设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$，由$\{x_{n_k}\}\subset[a,b]$，知$x_0\in[a,b]$.

由题设$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$及归结原则得

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

而$f(x)$在x_0连续，即有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$．再由归结原则得

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

从而有

$$f(x_0)=A,x_0\in[a,b].$$

结论得证.

4．设函数f和g都在区间I上一致连续.

(1) 若I为有限区间，证明$f\cdot g$在I上一致连续；

(2) 若I为无限区间，举例说明$f\cdot g$在I上不一定一致连续.

证　(1) 由本章§2习题2知，f,g在I上有界，故存在$M>0$，使

$$|f(x)|<M,\quad |g(x)|<M,\quad x\in I.$$

由f和g在I上一致连续知，对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当$|x'-x''|<\delta_1$时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(M+1)},$$

$\exists\delta_2>0$，当$|x'-x''|<\delta_2$时，有

$$|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(M+1)}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $|x'-x''|<\delta$ 时,有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(M+1)},$$

$$|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(M+1)}$$

同时成立. 且

$$\begin{aligned}&|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\\&=|f(x')g(x')-f(x'')g(x')+f(x'')g(x')-f(x'')g(x'')|\\&\leqslant|f(x')g(x')-f(x'')g(x')|+|f(x'')g(x')-f(x'')g(x'')|\\&\leqslant|f(x')-f(x'')||g(x')|+|f(x'')||g(x')-g(x'')|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2(M+1)}\cdot M+\frac{\varepsilon}{2(M+1)}\cdot M<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $f\cdot g$ 在 I 上一致连续.

(2) 若 I 为无限区间,则 $f\cdot g$ 在 I 上不一定一致连续. 考察

$$f(x)=x,g(x)=x,x\in(-\infty,+\infty),$$

显然 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续,而 $f(x)\cdot g(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续;但 $f(x)=\sin x,g(x)=\cos x,x\in(-\infty,+\infty)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续,$f(x)g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ 亦在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

5. 设 f 定义在 (a,b) 上. 证明:若对 (a,b) 内任一收敛数列 $\{x_n\}$,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在,则 f 在 (a,b) 上一致连续.

证 反证法:若 f 在 (a,b) 上不一致收敛,则 $\exists\varepsilon_0>0$,对于 $\forall\delta>0$,$\exists x',x''\in(a,b)$. 虽然 $|x'-x''|<\delta$,但

$$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0.$$

现取 $\delta_n=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$,则可相应找到 $\{x_n'\},\{x_n''\}\subset(a,b)$,使得

$$|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n},|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0\quad(n=1,2,\cdots).$$

由 $\{x_n'\}\subset(a,b)$ 及致密性定理知,存在子列 $\{x_{n_k}'\}\subset\{x_n'\}$,使 $\{x_{n_k}'\}$ 收敛,设 $\lim\limits_{k\to\infty}$

$x'_{n_k}=x_0$. 再在$\{x''_n\}$中选出与$\{x'_n\}$有相同下标的子列$\{x''_{n_k}\}$. 由于

$$0\leqslant|x'_{n_k}-x''_{n_k}|\leqslant\frac{1}{n_k}\to 0\ (k\to\infty),$$

故
$$\lim_{k\to\infty}(x'_{n_k}-x''_{n_k})=0,$$

从而$\{x''_{n_k}\}$收敛,且

$$\lim_{k\to\infty}x''_{n_k}=\lim_{k\to\infty}x'_{n_k}=x_0.$$

构造数列$\{x_n\}$,使

$$\{x_n\}=\{x'_{n_1},x''_{n_1},x'_{n_2},x''_{n_2},\cdots,x'_{n_k},x''_{n_k},\cdots\},$$

显然
$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

而
$$|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0,$$

即$\{f(x_n)\}$不收敛,与假设矛盾. 故f在(a,b)上一致连续.

6. 设函数f在$[a,+\infty)$上连续,且有斜渐近线,即有数b与c,使得

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-bx-c]=0.$$

证明f在$[a,+\infty)$上一致连续.

证　i) 若$b=0$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c$. 由第四章§2习题16知,$f$在$[a,+\infty)$上一致连续.

ii) 若$b\neq0$,由$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-bx-c]=0$,得对$\forall\varepsilon>0$,$\exists M>0$,当$x>M$时,有

$$|f(x)-bx-c|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

而对于$\forall x',x''>M$,且$|x'-x''|<\dfrac{\varepsilon}{3(|b|+1)}$时,有

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&=|(f(x')-bx'-c)-f(x'')+bx''+c+b(x'-x'')|\\&\leqslant|f(x')-bx'-c|+|f(x'')-bx''-c|+|b||x'-x''|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

又f在$[a,M+1]$上连续,故f在$[a,M+1]$上一致连续,即$\exists\delta_1>0$,当$|x'-x''|<\delta_1$,且$x',x''\in[a,M+1]$时,有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

故取 $\delta=\min\left\{\delta_1,\dfrac{\varepsilon}{3(|b|+1)},1\right\}$，当 $x',x''\in[a,+\infty)$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 x',x''或属于$[a,M+1]$，或属于$[M,+\infty)$，即总成立

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

故 $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

第八章　不定积分

知识要点

1. 原函数与不定积分是与区间有关的概念：

(1) 若在区间 I 上有 $F'(x)=f(x)$，则称 F 为 f 在 I 上的一个原函数.

(2) 若 f 在区间 I 上连续，则 f 在 I 上存在有原函数.

(3) f 在区间 I 上的任意两个原函数之间，只能相差一个常数.

(4) f 在区间 I 上的全体原函数称为 f 在 I 上的不定积分. 因此，我们求不定积分时，总是指在被积函数 f 的某连续区间 I 上求，且区间 I 一般不予以明示.

2. 由不定积分定义知：

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x),\quad \int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C.$$

因此，在不计较任意常数 C 时，不定积分可看作导数运算的逆运算，且被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 正是 $f(x)$ 的任一原函数 $F(x)$ 的微分：$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$.

3. 由于不定积分的定义是定性的，因此，求不定积分的计算是困难的. 但不定积分与导数的运算既然是一对矛盾，便是同一事物的两个方面. 因此，不定积分的运算法则来自于导数的运算法则：

(1) 由导数线性运算法则得到不定积分的线性运算法则——拆项积分法.

(2) 由导数的复合运算法则得到不定积分的换元积分法则——凑微分法(第一换元积分法)和第二换元积分法.

(3) 由导数乘积的运算法则得到不定积分的分部积分法.

4. 不定积分的计算是通过不定积分的计算法则将所给的积分化为基本

积分公式表中的积分而得出结果. 建议基本积分公式表添加以下公式:

$$\int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C;$$

$$\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\quad(a>0);$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\ (a>0);$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\ (a>0);$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

5. 计算不定积分应注意如下几点.

(1) 使用第二换元积分法时,若变量替换为$x=\varphi(t)$,则一般需用$\varphi'(t)\neq 0$来保证逆变换$t=\varphi^{-1}(x)$的存在,所以通常需指出$\varphi(t)$的定义范围.

(2) 在分部积分中选取u和v'是重要的,一般经验是优先将指数函数、三角函数放入微分号,使其成为$\mathrm{d}v$,其次是幂函数,再其次是反三角函数、对数函数. 为了记忆方便,也可将这种次序读成“反、对、幂、指、三”. 当然,也有例外.

(3) 任一有理函数可化为一个多项式与真分式的和,任一真分式可表为若干部分分式之和,每个部分分式的不定积分都可按固定的方法求出. 因此有理函数或通过变量代换而化为有理函数的不定积分均可求出.

习 题 详 解

§1 不定积分概念与基本积分公式

1. 验证下列等式,并与(3)、(4)两式$\left(\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=[F(x)+C]'=\right.$

$f(x)$，$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}[F(x)+C]=f(x)\mathrm{d}x$. 见原教材）相比照：

(1) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$；

(2) $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$.

解　(1) 因为　$(f(x)+C)'=f'(x)+0=f'(x)$，

所以
$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C.$$

而是对 $f(x)$ 先求导再积分，等于 $f(x)+C$，而式(3)则是对 $f(x)$ 先积分再求导，则等于 $f(x)$.

(2) 设 $f(x)=u(x)$，则有 $(u(x)+C)'=u'(x)$，即
$$\int \mathrm{d}u(x)=u(x)+C.$$

因而有
$$\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C.$$

它是对 $f(x)$ 先微分后积分，则等于 $f(x)+C$；而式(4)是对 $f(x)$ 先积分后微分，则等于 $f(x)\mathrm{d}x$.

2. 求一曲线 $y=f(x)$，使得在曲线上每一点 (x,y) 处的切线斜率为 $2x$，且通过点 $(2,5)$.

解　由题意，有 $f'(x)=2x$，即
$$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C=f(x).$$

再由于 $y=f(x)$ 过点 $(2,5)$，即
$$5=4+C\text{，故 } C=1.$$

因而所求的曲线为
$$y=f(x)=x^2+1.$$

3. 验证 $y=\dfrac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x$ 是 $|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数.

证　因为 $y=\dfrac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & x>0,\\ -\dfrac{1}{2}x^2, & x<0,\end{cases}$

所以
$$y'=\begin{cases} x, & x>0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

而当 $x=0$ 时,有
$$y'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{2}x\right)=0,$$
$$y'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}x\right)=0,$$

即
$$y'(0)=0.$$

因而
$$\left(\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x\right)'=|x|,\quad x\in\mathbf{R},$$

即 $y=\frac{1}{2}x^2\operatorname{sgn}x$ 是 $|x|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的一个原函数.

4. 据理说明为什么每一个含有第一类间断点的函数都没有原函数?

解　设 x_0 为 $f(x)$ 在区间 I 上的第一类间断点,则分两种情况讨论.

i)若 x_0 为可去间断点.

反证法:若 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数 $F(x)$,则在 $N(x_0,\delta)$ $(\delta>0)$ 内按拉格朗日定理有
$$F(x)=F(x_0)+F'(\xi)(x-x_0)=F(x_0)+f(\xi)(x-x_0),$$

ξ 在 x_0 和 x 之间. 而
$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f(\xi)=f(x_0).$$

这与 x_0 为第一类可去间断点是矛盾的,故 $F(x)$ 不存在.

ii)若 x_0 为跳跃间断点.

反证法:若 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数 $F(x)$,则亦有
$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f(\xi)=f(x_0)\text{成立}.$$

而
$$f(x_0-0)=F'_-(x_0)=f(x_0)=F'_+(x_0)=f(x_0+0).$$

这与设 x_0 为跳跃间断点矛盾,故原函数仍不存在.

5. 求下列不定积分:

(1) $\int\left(1-x+x^3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2gx}}$（$g$ 为正常数）；　　(4) $\displaystyle\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$；

(5) $\displaystyle\int\frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\mathrm{d}x$；　　(6) $\displaystyle\int\frac{x^2}{3(1+x^2)}\mathrm{d}x$；

(7) $\displaystyle\int\tan^2x\mathrm{d}x$；　　(8) $\displaystyle\int\sin^2x\mathrm{d}x$；

(9) $\displaystyle\int\frac{\cos2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$；　　(10) $\displaystyle\int\frac{\cos2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}\mathrm{d}x$；

(11) $\displaystyle\int10^t\cdot3^{2t}\mathrm{d}t$；　　(12) $\displaystyle\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$；

(13) $\displaystyle\int\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\mathrm{d}x$；　　(14) $\displaystyle\int(\cos x+\sin x)^2\mathrm{d}x$；

(15) $\displaystyle\int\cos x\cdot\cos2x\mathrm{d}x$；　　(16) $\displaystyle\int(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^3\mathrm{d}x$.

解　(1) $$\int\left(1-x+x^3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x=\int(1-x+x^3-x^{-\frac{2}{3}})\mathrm{d}x=x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}x^4-3x^{\frac{1}{3}}+C.$$

(2) $$\int\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x=\int(x^2-2\sqrt{x}+x^{-1})\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\ln|x|+C.$$

(3) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2gx}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2g}}\cdot2x^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{\frac{2x}{g}}+C.$$

(4) $$\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x=\int(2^{2x}+2\cdot2^x\cdot3^x+3^{2x})\mathrm{d}x=\int(4^x+2\cdot6^x+9^x)\mathrm{d}x=\frac{4^x}{\ln4}+2\cdot\frac{6^x}{\ln6}+\frac{9^x}{\ln9}+C.$$

(5) $$\int\frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{3}{2}\arcsin x+C.$$

(6) $$\int\frac{x^2}{3(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\arctan x+C=\frac{1}{3}(x-\arctan x)+C.$$

(7) $\int \tan^2 x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C.$

(8) $\int \sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

(9) $$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$$
$$=\sin x-\cos x+C.$$

(10) $$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int(\csc^2 x-\sec^2 x)\mathrm{d}x$$
$$=-(\cot x+\tan x)+C.$$

(11) $\int 10^t\cdot 3^{2t}\mathrm{d}t=\int(10\cdot 3^2)^t\mathrm{d}t=\int 90^t\mathrm{d}t=\frac{90^t}{\ln 90}+C.$

(12) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{7}{8}}\mathrm{d}x=\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C.$

(13) $$\int\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1+x+1-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=2\arcsin x+C.$$

(14) $$\int(\cos x+\sin x)^2\mathrm{d}x=\int(\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x)\mathrm{d}x$$
$$=\int(\cos^2 x+\sin 2x+\sin^2 x)\mathrm{d}x$$
$$=\int(1+\sin 2x)\mathrm{d}x=x-\frac{1}{2}\cos 2x+C.$$

(15) $\int\cos x\cdot\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\cos 3x+\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x+C.$

(16) $$\int(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^3\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^{3x}-3\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-3x})\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}-3\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}+C.$$

§2　换元积分法和分部积分法

1. 应用换元积分法求下列不定积分：

(1) $\int\cos(3x+4)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int x\mathrm{e}^{2x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2x}$；　(4) $\int(1+x)^n\mathrm{d}x$；

(5) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\right)\mathrm{d}x$；　(6) $\int 2^{2x+3}\mathrm{d}x$；

(7) $\int\sqrt{8-3x}\,\mathrm{d}x$；　(8) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{7-5x}}$；

(9) $\int x\sin x^2\mathrm{d}x$；　(10) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$；

(11) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$；　(12) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$；

(13) $\int\csc x\mathrm{d}x$；　(14) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(15) $\int\frac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x$；　(16) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$；

(17) $\int\frac{x^4}{(1-x^5)^3}\mathrm{d}x$；　(18) $\int\frac{x^3}{x^8-2}\mathrm{d}x$；

(19) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)}$；　(20) $\int\cot x\mathrm{d}x$；

(21) $\int\cos^5 x\mathrm{d}x$；　(22) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cdot\cos x}$；

(23) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$；　(24) $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+8}\mathrm{d}x$；

(25) $\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3}\mathrm{d}x$；　(26) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}\quad(a>0)$；

(27) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\quad(a>0)$；　(28) $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(29) $\int\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$；　(30) $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int\cos(3x+4)\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则 }\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t]{\text{令 }t=3x+4}\int\cos t\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{3}\sin t+C=\frac{1}{3}\sin(3x+4)+C.$$

(2) $\int x\mathrm{e}^{2x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\mathrm{e}^{2x^2}\mathrm{d}(2x^2)\xlongequal{\text{令 }t=2x^2}\frac{1}{4}\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\mathrm{e}^t+C$

$$=\frac{1}{4}e^{2x^2}+C.$$

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+2x}\xlongequal[\text{则 } dx=\frac{1}{2}dt]{\text{令 } 2x+1=t}\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\ln|t|+C$

$$=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C.$$

(4) $\displaystyle\int(1+x)^n dx\xlongequal[\text{则 } dx=dt]{\text{令 } 1+x=t}\int t^n dt=\frac{1}{n+1}t^{n+1}+C$

$$=\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}+C.$$

(5) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\right)dx$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2}}$$

$$=\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{3}x+C.$$

(6) $\displaystyle\int 2^{2x+3}dx\xlongequal[\text{则 } dx=\frac{1}{2}dt]{\text{令 } 2x+3=t}\frac{1}{2}\int 2^t dt=\frac{1}{2}\frac{2^t}{\ln 2}+C$

$$=\frac{1}{2}\frac{2^{2x+3}}{\ln 2}+C=\frac{2^{2x+2}}{\ln 2}+C.$$

(7) $\displaystyle\int\sqrt{8-3x}\,dx\xlongequal[\text{则 } dx=-\frac{1}{3}dt]{\text{令 } 8-3x=t}-\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$

$$=-\frac{2}{9}(8-3x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(8) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{7-5x}}\xlongequal[\text{则 } dx=-\frac{1}{5}dt]{\text{令 } 7-5x=t}-\frac{1}{5}\int t^{-\frac{1}{3}}dt=-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C$

$$=-\frac{3}{10}(7-5x)^{\frac{2}{3}}+C.$$

(9) $\int x\sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin x^2 \mathrm{d}x^2 \xlongequal{\text{令 } x^2=t} \frac{1}{2}\int \sin t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t + C$

$$= -\frac{1}{2}\cos x^2 + C.$$

(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} \xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t]{\text{令 } 2x+\frac{\pi}{4}=t} \frac{1}{2}\int \csc^2 t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cot t + C$

$$= -\frac{1}{2}\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + C.$$

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\xlongequal{\text{令 } \frac{x}{2}=t} \int \sec^2 t\mathrm{d}t = \tan t + C = \tan\frac{x}{2} + C.$$

(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t]{\text{令 } \frac{\pi}{2}-x=t} -\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}$

$$= -\tan\frac{t}{2} + C = -\tan\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2} + C$$

$$= -\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C.$$

(13) $\int \csc x\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}$

$$\xlongequal{\text{令 } t=\frac{x}{2}} \int \frac{\mathrm{d}t}{\tan t\cdot\cos^2 t} = \int \frac{\mathrm{d}(\tan t)}{\tan t} = \ln|\tan t| + C$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C$$

$$= \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

(14) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2) \xlongequal{\text{令 } 1-x^2=t} -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$=-\sqrt{1-x^2}+C.$$

(15) $\displaystyle\int\frac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x^2}{4+x^4}=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)\xlongequal{令\frac{x^2}{2}=t}\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

$$=\frac{1}{4}\arctan t+C=\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}+C.$$

(16) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x}=\ln|\ln x|+C.$

(17) $\displaystyle\int\frac{x^4}{(1-x^5)^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(1-x^5)}{(1-x^5)^3}\xlongequal{令1-x^5=t}-\frac{1}{5}\int t^{-3}\mathrm{d}t$

$$=-\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-2}+C=\frac{1}{10}(1-x^5)^{-2}+C.$$

(18) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^8-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x^4}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2}\xlongequal{令t=x^4}\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-(\sqrt{2})^2}$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C.$$

(19) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\ln|1+x|+C$

$$=\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|+C.$$

(20) $\displaystyle\int\cot x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x}\xlongequal{令t=\sin x}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+C=\ln|\sin x|+C.$

(21) $\displaystyle\int\cos^5x\mathrm{d}x=\int\cos^4x\mathrm{d}\sin x=\int(1-\sin^2x)^2\mathrm{d}\sin x$

$$\xlongequal{令\sin x=t}\int(1-t^2)^2\mathrm{d}t=\int(1-2t^2+t^4)\mathrm{d}t$$

$$=t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3x+\frac{1}{5}\sin^5x+C.$$

(22) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cdot\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\tan x\cos^2x}=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan x}=\ln|\tan x|+C.$

(23) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2+1}\xlongequal{令\mathrm{e}^x=t}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$

$$=\arctan t+C=\arctan e^{x}+C.$$

（24）$$\int\frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx=\int\frac{d(x^2-3x+8)}{x^2-3x+8}\xlongequal{令\, x^2-3x+8=t}\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C$$

$$=\ln|x^2-3x+8|+C.$$

（25）$$\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3}dx=\int\frac{(x+1)^2-2(x+1)+3}{(x+1)^3}d(x+1)$$

$$=\int\frac{d(x+1)}{x+1}-2\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}+3\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^3}$$

$$\xlongequal{令\, x+1=t}\int\frac{dt}{t}-2\int t^{-2}dt+3\int t^{-3}dt$$

$$=\ln|t|-2\cdot(-1)t^{-1}+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-2}+C$$

$$=\ln|x+1|+\frac{2}{1+x}-\frac{3}{2}\frac{1}{(1+x)^2}+C.$$

（26）令 $x=a\tan t$，则

$$dx=a\sec^2 t\,dt,\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}.$$

故　$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{dt}{\cos t}=\ln|\sec t+\tan t|+C_1=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C.$$

（27）令 $x=a\tan t$，则

$$dx=a\sec^2 t\,dt,\quad |t|<\frac{\pi}{2}.$$

故　$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\int\frac{a\sec^2 t}{a^3\sec^3 t}dt=\frac{1}{a^2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C$$

$$=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C.$$

（28）令 $x=\sin t$，则

$$dx=\cos t\,dt,\quad |t|<\frac{\pi}{2}.$$

故　$$\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\sin^5 t}{\cos t}\cos t\,dt=\int\sin^5 t\,dt=-\int(1-\cos^2 t)^2 d\cos t$$

$$=-\int(1-2\cos^2 t+\cos^4 t)d\cos t$$

$$\xlongequal{令\, \cos t=u}-\int(1-2u^2+u^4)du=-u+\frac{2}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5+C$$

$$=-\cos t+\frac{2}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t+C$$

$$=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+C.$$

(29) **令** $t=\sqrt[6]{x}$,**则**

$$\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t,\quad t\in[0,+\infty)\text{且}t\neq 1.$$

故 $$\int\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{t^3}{1-t^2}\cdot 6t^5\mathrm{d}t$$

$$=6\int\left(-t^6-t^4-t^2-1+\frac{1}{2(1+t)}-\frac{1}{2(t-1)}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5-2t^3-6t+3\ln|1+t|-3\ln|t-1|+C$$

$$=-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{6}}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}\right|+C.$$

(30) $$\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则}\,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t]{\text{令}\,t=\sqrt{x+1}}\int\frac{t-1}{t+1}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int\left(t-2+\frac{2}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=t^2-4t+4\ln|t+1|+C$$

$$=x+1-4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}+1|+C.$$

2. 应用分部积分法求下列不定积分:

(1) $\int\arcsin x\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\ln x\mathrm{d}x$;

(3) $\int x^2\cos x\mathrm{d}x$;　　(4) $\int\frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x$;

(5) $\int(\ln x)^2\mathrm{d}x$;　　(6) $\int x\arctan x\mathrm{d}x$;

(7) $\int\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right]\mathrm{d}x$;　　(8) $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$;

(9) $\int\sec^3 x\mathrm{d}x$;　　(10) $\int\sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

解 (1) $$\int\arcsin x\mathrm{d}x=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

(2) $\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$

(3) $$\begin{aligned}\int x^2\cos x\mathrm{d}x &= \int x^2\mathrm{d}\sin x = x^2\sin x - 2\int x\sin x\mathrm{d}x \\ &= x^2\sin x + 2\int x\mathrm{d}\cos x = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\mathrm{d}x \\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \ln x\mathrm{d}x^{-2} = -\frac{1}{2}\ln x \cdot x^{-2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^4} + C.\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}\int (\ln x)^2\mathrm{d}x &= x(\ln x)^2 - 2\int x \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x\mathrm{d}x = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\mathrm{d}x \\ &= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C.\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}\int x\arctan x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \arctan x\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\arctan x + C.\end{aligned}$$

(7) $$\begin{aligned}\int\left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right]\mathrm{d}x &= \int \ln(\ln x)\mathrm{d}x + \int \frac{x}{x\ln x}\mathrm{d}x \\ &= \int \ln(\ln x)\mathrm{d}x + \int x\mathrm{d}\ln(\ln x) \\ &= \int \ln(\ln x)\mathrm{d}x + x\ln(\ln x) - \int \ln(\ln x)\mathrm{d}x + C \\ &= x\ln(\ln x) + C.\end{aligned}$$

(8) $$\begin{aligned}\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x &\xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t,\ |t| \leqslant \frac{\pi}{2}]{\text{令 } t = \arcsin x} \int t^2\cos t\mathrm{d}t \\ &= t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.\end{aligned}$$

(9) **因为**
$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\mathrm{d}x &= \int \sec x \cdot \sec^2 x\mathrm{d}x = \int \sec x\mathrm{d}\tan x \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x(\tan x)^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\sec x\cdot\tan x-\int\sec^3 x\mathrm{d}x+\int\sec x\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int\sec^3 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec x\cdot\tan x+\frac{1}{2}\int\sec x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\sec x\cdot\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C.$$

(10) **因为** $\int\sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x$

$$=x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\frac{x^2\pm a^2\mp a^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x\pm a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}},$$

所以 $\int\sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$$

3. 求下列不定积分：

(1) $\int[f(x)]^\alpha f'(x)\mathrm{d}x\quad(\alpha\neq-1)$；　　(2) $\int\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int[f(x)]^\alpha f'(x)\mathrm{d}x=\int[f(x)]^\alpha\mathrm{d}f(x)$

$$\xlongequal{\text{令 }f(x)=t}\int t^\alpha\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}+C$$

$$=\frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1}+C.$$

(2) $\int\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{1+[f(x)]^2}\xlongequal{\text{令 }t=f(x)}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\arctan t+C$

$$=\arctan f(x)+C.$$

(3) $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|+C.$

(4) $\int\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}f(x)\xlongequal{\text{令 }t=f(x)}\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t+C=\mathrm{e}^{f(x)}+C.$

4. 证明：

（1）若 $I_n=\int\tan^n x\mathrm{d}x, n=2,3,\cdots$，则

$$I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}.$$

（2）若 $I(m,n)=\int\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$，则当 $m+n\neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}I(m,n)&=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)\\&=-\frac{\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2)\ (n,m=2,3,\cdots).\end{aligned}$$

证　（1）$$\begin{aligned}I_n&=\int\tan^n x\mathrm{d}x=\int\tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x\\&=\int\tan^{n-2}x\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x-\int\tan^{n-2}x\mathrm{d}x\\&=\int\tan^{n-2}x\mathrm{d}\tan x-I_{n-2}\xlongequal{\text{令}\tan x=t}\int t^{n-2}\mathrm{d}t-I_{n-2}\\&=\frac{1}{n-1}t^{n-1}-I_{n-2}=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}.\end{aligned}$$

（2）因为

$$\begin{aligned}I(m,n)&=\int\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x=\int\cos^{m-1}x\sin^n x\mathrm{d}\sin x\\&=\frac{1}{n+1}\int\cos^{m-1}x\mathrm{d}\sin^{n+1}x\\&=\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^{m-2}x\sin^{n+2}x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^{m-2}x\sin^n x\cdot(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}I(m-2,n)-\frac{m-1}{n+1}\int\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}I(m-2,n)-\frac{m-1}{n+1}I(m,n),\end{aligned}$$

所以　$$\begin{aligned}I(m,n)&=\frac{n+1}{m+n}\left(\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}I(m-2,n)\right)\\&=\frac{1}{m+n}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)\ (n,m=2,3,\cdots).\end{aligned}$$

又因为

$$I(m,n)=\int\cos^m x\sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos x=-\frac{1}{m+1}\int\sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos^{m+1}x$$

$$=-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{m+1}\int\cos^{m+2}x\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{m+1}\int\cos^{m}x\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{m+1}I(m,n-2)-\frac{n-1}{m+1}I(m,n),$$

所以　$I(m,n)=-\frac{1}{m+n}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2)$ $(n,m=2,3,\cdots)$.

5. 利用上题的递推公式计算：

(1) $\int\tan^3x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\tan^4x\mathrm{d}x$；　　(3) $\int\cos^2x\sin^4x\mathrm{d}x$.

解　(1) **利用上述题 4 中的**(1)**，这时** $n=3$**，故有**

$$I_3=\frac{1}{3-1}\tan^{3-1}x-I_{3-2}=\frac{1}{2}\tan^2x-I_1=\frac{1}{2}\tan^2x-\int\tan x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\tan^2x+\ln|\cos x|+C.$$

(2) **利用上述题 4 中的**(1)**，这时** $n=4$**，故有**

$$I_4=\frac{1}{3}\tan^3x-I_2=\frac{1}{3}\tan^3x-\int\tan^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\tan^3x-\int(\sec^2x-1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3x-\int\sec^2x\mathrm{d}x+\int\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\tan^3x-\tan x+x+C.$$

(3) **利用上述题 4 中的**(2)**，这时** $m=2,n=4$**，故有**

$$I(2,4)=-\frac{\cos^3x\sin^3x}{6}+\frac{1}{2}I(2,2)$$

$$=-\frac{\cos^3x\sin^3x}{6}+\frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{1}{4}\cos^3x\sin x+\frac{1}{4}I(2,0)\right]$$

$$=-\frac{\cos^3x\sin^3x}{6}-\frac{\cos^3x\sin x}{8}+\frac{1}{8}I(2,0)$$

$$=-\frac{\cos^3x\sin^3x}{6}-\frac{\cos^3x\sin x}{8}+\frac{1}{8}\int\cos^2x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\cos^3x\sin^3x}{6}-\frac{\cos^3x\sin x}{8}+\frac{1}{16}\int(1+\cos2x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\cos^3x\sin^3x}{6}-\frac{\cos^3x\sin x}{8}+\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}\sin2x+C.$$

6. 导出下列不定积分对于正整数 n **的递推公式：**

（1）$I_n=\int x^n e^{kx}dx$；　　（2）$I_n=\int(\ln x)^n dx$；

（3）$I_n=\int(\arcsin x)^n dx$；　　（4）$I_n=\int e^{ax}\sin^n x dx$.

解　（1）
$$I_n=\frac{1}{k}\int x^n de^{kx}=\frac{1}{k}x^n e^{kx}-\frac{n}{k}\int e^{kx}x^{n-1}dx$$
$$=\frac{1}{k}x^n e^{kx}-\frac{n}{k}I_{n-1}\quad(k\neq 0).$$

（2）
$$I_n=x(\ln x)^n-n\int x\cdot\frac{1}{x}(\ln x)^{n-1}dx=x(\ln x)^n-n\int(\ln x)^{n-1}dx$$
$$=x(\ln x)^n-nI_{n-1}.$$

（3）
$$I_n\xlongequal[\text{则 } dx=\cos t dt,\ |t|\leqslant\frac{\pi}{2}]{\text{令 } t=\arcsin x}\int t^n d\sin t$$
$$=t^n\sin t-n\int t^{n-1}\sin t dt=t^n\sin t+n\int t^{n-1}d\cos t$$
$$=t^n\sin t+nt^{n-1}\cdot\cos t-n(n-1)\int t^{n-2}\cos t dt$$
$$=t^n\sin t+nt^{n-1}\cos t-n(n-1)I_{n-2}$$
$$=x(\arcsin x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1}-n(n-1)I_{n-2}.$$

（4）
$$I_n=\frac{1}{a}\int\sin^n x de^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a}\int e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x dx$$
$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2}\int\sin^{n-1}x\cos x de^{ax}$$
$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2}\Big[e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x$$
$$-\int e^{ax}((n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x-\sin^n x)dx\Big]$$
$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2}e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x$$
$$+\frac{n(n-1)}{a^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx-\frac{n}{a^2}I_n$$
$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2}e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x$$
$$+\frac{n(n-1)}{a^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx-\frac{n}{a^2}I_n$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2}e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2}-\frac{n(n-1)}{a^2}I_n$$
$$-\frac{n}{a^2}I_n$$
$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2}e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2}-\frac{n^2}{a^2}I_n\quad(a\neq 0).$$

7. 利用上题所得递推公式计算：

(1) $\int x^3 e^{2x}dx$；　　(2) $\int(\ln x)^3 dx$；

(3) $\int(\arcsin x)^3 dx$；　　(4) $\int e^x\sin^3 x dx$.

解　(1) $\int x^3e^{2x}dx=I_3=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{2}I_2=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}-I_1\right)$

$$=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{2}I_1$$
$$=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}I_0\right)$$
$$=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{4}xe^{2x}-\frac{3}{4}\int e^{2x}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{4}xe^{2x}-\frac{3}{8}e^{2x}+C.$$

(2) $\int(\ln x)^3dx=I_3=x(\ln x)^3-3I_2=x(\ln x)^3-3(x(\ln x)^2-2I_1)$

$$=x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+6(x\ln x-I_0)$$
$$=x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+6x\ln x-6I_0$$
$$=x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+6x\ln x-6x+C.$$

(3) $\int(\arcsin x)^3dx=I_3=x(\arcsin x)^3+3\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2-6I_1$

$$=x(\arcsin x)^3+3\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2$$
$$-6(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2})+C$$
$$=x(\arcsin x)^3+3\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2$$
$$-6x\arcsin x-6\sqrt{1-x^2}+C.$$

(4) **由于题** 6 **中**(4)**的结果可以表示为**

$$I_n=\frac{a}{a^2+n^2}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2+n^2}e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}I_{n-2},$$

所以 $\displaystyle\int e^x\sin^3 x\mathrm{d}x=I_3=\frac{1}{10}e^x\sin^3 x-\frac{3}{10}e^x\sin^2 x\cos x+\frac{3}{5}I_1$

$$=\frac{1}{10}e^x\sin^3 x-\frac{3}{10}e^x\sin^2 x\cos x+\frac{3}{5}\int e^x\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{10}e^x\sin^3 x-\frac{3}{10}e^x\sin^2 x\cos x+\frac{3}{5}\cdot\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{2}+C$$

$$=\frac{1}{10}e^x\sin^3 x-\frac{3}{10}e^x\sin^2 x\cos x+\frac{3}{10}e^x\sin x-\frac{3}{10}e^x\cos x+C.$$

§3　有理函数和可化为有理函数的不定积分

1. 求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x-1}\mathrm{d}x$；　(2) $\displaystyle\int\frac{x-2}{x^2-7x+12}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$；　(4) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$；

(5) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+1)^2}$；　(6) $\displaystyle\int\frac{x-2}{(2x^2+2x+1)^2}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x-1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x^3-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\int(x^2+x+1)\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C.$$

(2) $\displaystyle\int\frac{x-2}{x^2-7x+12}\mathrm{d}x=\int\frac{x-2}{(x-3)(x-4)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{x-4}-\frac{1}{x-3}\right)\mathrm{d}x$

$$=2\ln|x-4|-\ln|x-3|+C=\ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|}+C.$$

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(x^2-x+1)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2-x}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{|x^2-x+1|}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

（4）**因为** $\dfrac{1}{1+x^4}=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}-\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+2\sqrt{x}+1}{x^2-2\sqrt{x}+1}\right|$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}[\arctan(\sqrt{2}\,x+1)+\arctan(\sqrt{2}\,x-1)]+C.$$

（5）**因为** $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{4(x-1)}-\dfrac{x+1}{2(x^2+1)^2}-\dfrac{1+x}{4(x^2+1)}$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int\frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

$$-\frac{1}{8}\int\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{1}{4}\arctan x$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+1}-\frac{x}{4(x^2+1)}-\frac{1}{4}\arctan x$$

$$-\frac{1}{8}\ln|x^2+1|-\frac{1}{4}\arctan x+C$$

$$=\frac{1}{8}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{1-x}{4(x^2+1)}-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

（6）$\displaystyle\int\frac{x-2}{(2x^2+2x+1)^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{4x-8}{(2x^2+2x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2}\mathrm{d}x-\frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+2x+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x^2+2x+1}-\frac{5}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]^2}$$

$$=-\frac{1}{4(2x^2+2x+1)}-\frac{5}{8}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{1}{2}}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

$$=-\frac{5x+3}{2(2x^2+2x+1)}-\frac{5}{2}\arctan(2x+1)+C.$$

2. 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{5-3\cos x}$；　　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin^2x}$；

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}$；　　(4) $\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}}$；　　(6) $\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$.

解 (1) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{5-3\cos x}\xlongequal{\text{令 }t=\tan\frac{x}{2}}\int\frac{\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t}{5-3\,\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+(2t)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\arctan2t+C=\frac{1}{2}\arctan\left(2\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

(2) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin^2x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2(\sin^2x+\cos^2x)+\sin^2x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2x+3\sin^2x}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{2+3\tan^2x}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right)+C.$$

(3) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}\xlongequal{\text{令 }t=\tan x}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}-\frac{t-1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}-\frac{1}{4}\int\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\ln|1+t^2|+\frac{1}{2}\arctan t+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2}{1+t^2}+\frac{1}{2}\arctan t+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(1+\tan x)^2}{1+\tan^2 x}+\frac{1}{2}x+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{x}{2}+C.$$

(4) $\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$\xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t\mathrm{d}t,\ |t|<\frac{\pi}{2}]{\text{令 } x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t\right)^2\mathrm{d}t$$

$$=\int\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t+\frac{5}{4}\sin^2 t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}t-\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t+\frac{5}{4\times 2}\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}t-\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t+\frac{5}{8}t-\frac{5}{16}\sin 2t+C$$

$$=\frac{7}{8}t-\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t-\frac{5}{16}\sin 2t+C$$

$$=\frac{7}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}-\frac{2x+3}{4}\sqrt{1+x-x^2}+C.$$

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$

$$\xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t,\ |t|<\frac{\pi}{2}]{\text{令 } x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sec t}\int\sec t\mathrm{d}t$$

$$=\ln|\sec t+\tan t|+C=\ln|(2x+1)+2\sqrt{x^2+x}|+C.$$

(6) $\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t]{\text{令 } t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\int\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2\cdot t\cdot\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$

$$=-4\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t=2\int\frac{t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}(1-t^2)$$

$$=-2\int t\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-t^2}\right)=-2\left(\frac{t}{1-t^2}-\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}\right)$$

$$=\frac{2t}{t^2-1}+2\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{2t}{t^2-1}-\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$$

§4　总 练 习 题

求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$；

(2) $\int x\arcsin x\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$；

(4) $\int \mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x\mathrm{d}x$；

(5) $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$；

(7) $\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x$；

(8) $\int\frac{x^2-x}{(x-2)^3}\mathrm{d}x$；

(9) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$；

(10) $\int\sin^4 x\mathrm{d}x$；

(11) $\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}\mathrm{d}x$；

(12) $\int\arctan(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$；

(13) $\int\frac{x^7}{x^4+2}\mathrm{d}x$；

(14) $\int\frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}\mathrm{d}x$；

(15) $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x$；

(16) $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$；

(17) $\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$；

(18) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x\cdot\cos^7 x}}$；

(19) $\int \mathrm{e}^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x$；

(20) $I_n=\int\frac{v^n}{\sqrt{u}}\mathrm{d}x$，**其中** $u=a_1+b_1x, v=a_2+b_2x$，**求递推形式解.**

解　(1) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则 }\mathrm{d}x=12t^{11}\mathrm{d}t,t>0]{\text{令 }t=x^{\frac{1}{12}}}\int\frac{t^6-2t^4-1}{t^3}\cdot12t^{11}\mathrm{d}t$

$$=12\int(t^{14}-2t^{12}-t^8)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4}{5}t^{15}-\frac{24}{13}t^{13}-\frac{4}{3}t^9+C$$

$$=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{13}x^{\frac{13}{12}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C.$$

(2) $\displaystyle\int x\arcsin x\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则 }\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t,\ |t|\leqslant\frac{\pi}{2}]{\text{令 }t=\arcsin x}\frac{1}{2}\int t\sin2t\mathrm{d}t=-\frac{1}{4}\int t\mathrm{d}\cos2t$

$$=-\frac{t}{4}\cos2t+\frac{1}{8}\sin2t+C$$

$$=\frac{2x^2-1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C.$$

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}\xlongequal[\text{则 }\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t]{\text{令 }t=x^{\frac{1}{2}}}2\int\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t=2\int\mathrm{d}t-2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}$

$$=2t-2\ln|1+t|+C=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

(4) $\displaystyle\int\mathrm{e}^{\sin x}\sin2x\mathrm{d}x=2\int\mathrm{e}^{\sin x}\sin x\cos x\mathrm{d}x=2\int\mathrm{e}^{\sin x}\sin x\mathrm{d}\sin x$

$$\xlongequal{\text{令 }\sin x=t}2\int\mathrm{e}^t\cdot t\mathrm{d}t=2\int t\mathrm{d}\mathrm{e}^t=2\left(t\cdot\mathrm{e}^t-\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)$$

$$=2t\mathrm{e}^t-2\mathrm{e}^t+C=2\sin x\cdot\mathrm{e}^{\sin x}-2\mathrm{e}^{\sin x}+C.$$

(5) $\displaystyle\int\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则 }\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t,t\geqslant0]{\text{令 }t=\sqrt{x}}2\int\mathrm{e}^t\cdot t\mathrm{d}t=2\mathrm{e}^t\cdot t-2\mathrm{e}^t+C$

$$=2\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C.$$

(6) **分两种情况**:

当 $x>1$ **时,有**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$=-\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

当 $x<-1$ 时，有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

(7) $$\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$$
$$=\ln|\sin x+\cos x|+C.$$

(8) $$\int\frac{x^2-x}{(x-2)^3}\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则 }\mathrm{d}x=\mathrm{d}t]{\text{令 }x-2=t}\int\frac{(t+2)^2-(t+2)}{t^3}\mathrm{d}t$$
$$=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}+\frac{2}{t^3}\right)\mathrm{d}t=\ln|t|-3\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+C$$
$$=\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+C.$$

(9) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4x}=\int\sec^4x\mathrm{d}x=\int(\tan^2x+1)\mathrm{d}\tan x$$
$$=\frac{1}{3}\tan^3x+\tan x+C.$$

(10) $$\int\sin^4x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int(1-2\cos2x+\cos^22x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos4x}{2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\int\cos4x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{32}\sin4x+C.$$

(11) $$\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则 }\mathrm{d}x=\mathrm{d}t]{\text{令 }x=t+2}\int\frac{t-3}{t^2(t+3)}\mathrm{d}t$$
$$=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}-\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t+3}$$
$$=\frac{1}{t}+\frac{2}{3}\ln|t|-\frac{2}{3}\ln|t+3|+C$$
$$=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$$

(12) $\int\arctan(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$

$$\xlongequal[\text{则 } dx=d(t-1)^2]{\text{令 } t=1+\sqrt{x}}\int \arctan t\, d(t-1)^2=(t-1)^2\arctan t-\int\frac{(t-1)^2}{1+t^2}dt$$

$$=(t-1)^2\arctan t-\int\frac{t^2-2t+1}{1+t^2}dt=(t-1)^2\arctan t-\int dt+\int\frac{d(1+t^2)}{1+t^2}$$

$$=(t-1)^2\arctan t-t+\ln(1+t^2)+C_1$$

$$=x\arctan(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln(2+2\sqrt{x}+x)+C.$$

(13) $\displaystyle\int\frac{x^7}{x^4+2}dx=\int\frac{x^4\cdot x^3}{x^4+2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^4}{x^4+2}dx^4\xlongequal{\text{令 } x^4=t}\frac{1}{4}\int\frac{t}{t+2}dt$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{2}{t+2}\right)dt=\frac{1}{4}t-\frac{1}{2}\ln|t+2|+C$$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}\ln(x^4+2)+C.$$

(14) $\displaystyle\int\frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2x}dx$

$$\xlongequal[\text{则 } dx=\frac{dt}{1+t^2},\ |t|<+\infty]{\text{令 } t=\tan x}\int\frac{t}{1+t+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+t+t^2}\right)dt=\int\frac{dt}{1+t^2}-\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\arctan t-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=x-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

(15) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx\xlongequal[\text{则 } dx=-t]{\text{令 } t=1-x}\int\frac{-(1-t)^2}{t^{100}}dt$

$$=\int(-t^{-100}+2t^{-99}-t^{98})dt$$

$$=\frac{1}{99}t^{-99}-\frac{1}{49}t^{-98}+\frac{1}{97}t^{-97}+C$$

$$=\frac{1}{99}(1-x)^{-99}-\frac{1}{49}(1-x)^{-98}+\frac{1}{97}(1-x)^{-97}+C.$$

(16) $\displaystyle\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx\xlongequal[\text{则 } dx=\cos t dt]{\text{令 } t=\arcsin x}\int\frac{t\cos t}{\sin^2t}dt=\int t\frac{1}{\sin^2t}d\sin t$

$$=-\int t\mathrm{d}\,\frac{1}{\sin t}=-\frac{t}{\sin t}+\int \csc t\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{t}{\sin t}-\ln|\csc t+\cot t|+C$$

$$=-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$$

（17） $$\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{2}{(1+x)(1-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\int\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\int\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

（18） $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x\cdot\cos^7 x}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x\cdot\frac{\cos^8 x}{\cos x}}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x\sqrt{\tan x}}$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}(\tan x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int(\tan^2 x+1)(\tan x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tan x$$

$$\xlongequal{令 t=\tan x}\int(t^2+1)\cdot t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\int(t^{\frac{3}{2}}+t^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}t=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{5}(\tan x)^{\frac{5}{2}}+2(\tan x)^{\frac{1}{2}}+C.$$

（19） $$\int\mathrm{e}^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\,\frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\,\frac{1-2x+x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}-\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}\mathrm{d}x+C$$

$$=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}+C.$$

（20）**因为** $I_n=\int v^n u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{u-a_1}{b_1}\right)=\frac{1}{b_1}\int v^n u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u$

$$=\frac{2}{b_1}\int v^n\mathrm{d}u^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{b_1}v^n u^{\frac{1}{2}}-\frac{2nb_2}{b_1}\int v^{n-1}u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{b_1}v^n u^{\frac{1}{2}}-\frac{2nb_2}{b_1}\int v^{n-1}\frac{(a_1+b_1x)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{b_1}v^n u^{\frac{1}{2}}-\frac{2nb_2a_1}{b_1}\int\frac{v^{n-1}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}x-\frac{2nb_1}{b_1}\int\frac{v^{n-1}b_2x}{\sqrt{u}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{b_1}v^n u^{\frac{1}{2}}-\frac{2nb_2a_1}{b_1}I_{n-1}-\frac{2nb_1}{b_1}\int\frac{v^{n-1}(v-a_2)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{b_1}v^n u^{\frac{1}{2}}-\frac{2nb_2a_1}{b_1}I_{n-1}-\frac{2nb_1}{b_1}\int\frac{v^n}{\sqrt{u}}\mathrm{d}x+\frac{2nb_1a_2}{b_1}\int\frac{v^{n-1}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{b_1}v^n u^{\frac{1}{2}}-\frac{2nb_2a_1}{b_1}I_{n-1}-\frac{2nb_1}{b_1}I_n+\frac{2nb_1a_2}{b_1}I_{n-1}$$

$$=\frac{2}{b_1}v^n u^{\frac{1}{2}}+\frac{2n(b_1a_2-b_2a_1)}{b_1}I_{n-1}-\frac{2nb_1}{b_1}I_n,$$

所以
$$I_n=\frac{b_1}{b_1(1+2n)}\left(\frac{2}{b_1}v^n u^{\frac{1}{2}}+\frac{2n(b_1a_2-b_2a_1)}{b_1}I_{n-1}\right)$$

$$=\frac{2}{b_1(1+2n)}[v^n\sqrt{u}+n(b_1a_2-b_2a_1)I_{n-1}].$$

第九章　定　积　分

知识要点

1. 对定积分定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

的注释：

（1）**黎曼和** $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ **包含两个任意性，即对区间分割** T **与** ξ_i **的选取都是任意的，但在** $\|T\|\to 0$ **时均收敛于同一个数.**

（2）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **是一个确定的数，其值仅与** f **及积分区间**$[a,b]$**有关，而与积分变量无关.**

2. f **在**$[a,b]$**上可积的必要条件：**

（1）f **在**$[a,b]$**上有界.**

（2）**对**$[a,b]$**某个特殊分割** T_0 **及**$\{\xi_i\}_1^n$ **的某个特殊选择，有**

$$\lim_{\|T_0\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

3. f **在**$[a,b]$**上可积的充要条件：**

（1）$\inf\limits_{(T)} S(T) = \sup\limits_{(T)} s(T)$.

（2）$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i = 0$.

（3）$\forall \varepsilon,\eta>0$，$\exists T$，**使** $\sum\limits_{\omega_{i'}>\varepsilon}\Delta x_{i'}<\eta$.

4. 计算定积分最有效的工具是牛顿-莱布尼茨公式（微积分基本公式）：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

其中,$f(x)$在$[a,b]$上连续,$F(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数. 使用时应注意:

(1) 被积函数必须是$[a,b]$上的连续函数. 若被积函数可积但有有限多个间断点,则需用积分区间的可加性,将$[a,b]$分为几个子区间之并,使得间断点位于子区间的端点,再求积分.

(2) 用不定积分求得的原函数未必是积分区间上的原函数. 若所求的原函数在积分区间上有间断点,则需用积分区间的可加性,将间断点置于子区间的端点,再积分之.

(3) 仅用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分是不够的,还需要使用定积分的换元法和分部积分法. 特别应注意换元法的条件,换元要换限,分部积分的边积分边带限的特点. 有时还应根据被积函数的对称性、周期性来简化计算.

5. 定积分的主要性质可分为:积分的线性性、积分区间可加性、积分的不等式性质和中值定理. 在定积分的计算和论证问题中常用到它们. 特别指出的是,积分第一中值定理中的中间点ξ可在开区间(a,b)内取得.

6. 变限积分扩大了函数的表示法,它表示的可能是初等函数,也可能是非初等函数. 特别是当被积函数$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数时,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x),$$

这便是微积分学的基本定理. 若将定积分作为变限积分在某点的函数值时,可采用微分学中的各种方法证明有关定积分的命题. 当然,有时也需用积分的方法(如拆项、换元、分部积分及积分的中值定理、积分的不等式性质等)证出.

习 题 详 解

§1 定积分概念

1. 按定积分定义证明:

$$\int_a^b k\mathrm{d}x=k(b-a).$$

证　在闭区间$[a,b]$上任取点$x_i(0\leqslant i\leqslant n)$，使得

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 令

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i,$$

则
$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n k\Delta x_i=k(x_n-x_0)=k(b-a).$$

故$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|\lambda|<\delta$时，有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-k(b-a)\right|=0<\varepsilon.$$

即
$$\int_a^b k\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n k\Delta x_i=k(b-a).$$

2. 通过对积分区间作等分分割，并取适当的点集$\{\xi_i\}$，把定积分看作是对应的积分和的极限，来计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；$\left(\text{提示：}\sum_{i=1}^n i^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.\right)$

(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(3) $\int_a^b \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(4) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2}(0<a<b)$.（提示：取$\xi_i=\sqrt{x_{i-1}\cdot x_i}$.）

解　(1) 将区间$[0,1]$作n等分，则$[0,1]$上各分点

$$x_i=\frac{i}{n}\quad(i=0,1,2,\cdots,n),$$

即$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，而$y=x^3$在$[0,1]$上连续，取

$$\xi_i=x_i\quad(i=0,1,2,\cdots,n),$$

令$\lambda=\max_{0\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$，则有

$$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n\left(\frac{i}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{1}{4}.$$

（2）将区间$[0,1]$作n等分，则$[0,1]$上各分点

$$x_i=\frac{i}{n}\quad(i=0,1,2,\cdots,n),$$

即$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，而$y=e^x$在$[0,1]$上连续，取

$$\xi_i=\frac{i-1}{n}\in(x_{i-1},x_i)\quad(i=0,1,2,\cdots,n),$$

令$\lambda=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$，则有

$$\int_0^1 e^x dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n e^{\frac{i-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1-e^{\frac{1}{n}\cdot n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=e-1.$$

（3）在闭区间$[a,b]$上取分点

$$x_i=a+\frac{i(b-a)}{n}\quad(i=0,1,2,\cdots,n),$$

则$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$，同时取

$$\xi_i=a+\frac{(i-1)(b-a)}{n}\in[x_{i-1},x_i],$$

令$\lambda=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$，则有

$$\int_a^b e^x dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n e^{a+\frac{(i-1)(b-a)}{n}}\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^a\frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}\cdot\frac{b-a}{n}=e^a(e^{b-a}-1)=e^b-e^a.$$

（4）由于$0<a<b$，函数$y=\dfrac{1}{x^2}$在$[a,b]$上是连续的，因而$y=\dfrac{1}{x^2}$是可积的.类似(3)取分点x_i，有$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$，取

$$\xi_i=\sqrt{x_{i-1}\cdot x_i}\in(x_{i-1},x_i)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

令 $\lambda=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$，则有

$$\begin{aligned}
\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\left(\sqrt{\left[a+\frac{i-1}{n}(b-a)\right]\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]}\right)^2}\cdot\frac{b-a}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\left[a+\frac{i-1}{n}(b-a)\right]\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n\left[\frac{1}{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}-\frac{1}{a+\frac{i}{n}(b-a)}\right]\cdot\frac{n}{b-a}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\left[\frac{1}{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}-\frac{1}{a+\frac{i}{n}(b-a)}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.
\end{aligned}$$

§2　牛顿-莱布尼茨公式

1. 计算下列定积分：

(1) $\displaystyle\int_0^1(2x+3)\mathrm{d}x$；　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$；　(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x$；

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2x\mathrm{d}x$；　(6) $\displaystyle\int_4^9\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$；

(7) $\displaystyle\int_0^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$；　(8) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}(\ln x)^2\mathrm{d}x$.

解　(1) $\displaystyle\int_0^1(2x+3)\mathrm{d}x=(x^2+3x)\Big|_0^1=1+3=4$.

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{2}{1+x^2}-1\right)\mathrm{d}x=(2\arctan x-x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1$.

(3) $\displaystyle\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}=\int_{e}^{e^2}\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_{e}^{e^2}=\ln 2.$

(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x-e^{-x}}{2}dx=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-e^{-1})-1.$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x-1)dx=(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$

(6) $\displaystyle\int_4^9\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=24-\frac{28}{3}=\frac{44}{3}.$

(7) $$\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}\xlongequal[\text{则 } dx=2tdt]{\text{令 } t=\sqrt{x}}\int_0^2\frac{2t}{1+t}dt=2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=2\int_0^2 dt-2\int_0^2\frac{dt}{1+t}=2t\Big|_0^2-2\ln(1+t)\Big|_0^2=4-2\ln 3.$$

(8) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}(\ln x)^2dx=\int_{\frac{1}{e}}^{e}(\ln x)^2 d\ln x=\frac{1}{3}(\ln x)^3\Big|_{\frac{1}{e}}^{e}=\frac{1}{3}(1+1)=\frac{2}{3}.$

2. 利用定积分求极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1+2^3+\cdots+n^3)$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]$;

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)$;

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

解　(1) **令** $f(x)=x^3, x\in[0,1]$. **将** $[0,1]$ n **等分,即** $x_i=\dfrac{i}{n}, \Delta x_i=\dfrac{1}{n}$,**取** $\xi_i=\dfrac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$,**令** $\lambda=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$,**则**

$$\int_0^1 x^3dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1+2^3+3^3+\cdots+n^3)=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}.$$

(2) **令** $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}, x\in[0,1]$. **将** $[0,1]$ n **等分,即** $x_i=\dfrac{i}{n}, \Delta x_i=\dfrac{1}{n}$,

取 $\xi_i=x_i(i=1,2,\cdots,n)$，令 $\lambda=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$，则

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{1+x}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}.$$

(3) 令 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$x\in[0,1]$．类似(1)、(2)，有

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{n}{n^2+i^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=\arctan x\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

(4) 令 $f(x)=\sin x$，$x\in[0,\pi]$．将 $[0,\pi]$ n 等分，即 $\Delta x_i=\dfrac{\pi}{n}$，取 $\xi_i=x_{i-1}=\dfrac{i-1}{n}x$，令 $\lambda=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$，则

$$\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^n\sin\frac{(i-1)}{n}\pi$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)=-\cos x\Bigg|_0^\pi=2.$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)=\frac{2}{\pi}.$$

3. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，F 在 $[a,b]$ 上连续，且除有限个点外有 $F'(x)=f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

证　在 $[a,b]$ 上不妨设 $x_1',x_2',\cdots,x_k'$ 是使 $F'(x)\neq f(x)$ 的有限个点，则在 $[a,b]$ 上任取点 $x_i(0\leqslant i\leqslant n)$，使得

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

且使
$$\{x_1',x_2',\cdots,x_k'\}\subset\{x_0,x_1,\cdots,x_n\},$$

则 $F(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上连续，在 (x_{i-1},x_i) 内可微且

$$F'(x)=f(x)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

因而利用拉格朗日中值定理可得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

而由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，故

$$F(b)-F(a)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\quad(\lambda=\max_{0\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i).$$

§3　可 积 条 件

1．证明：若 T' 是 T 增加若干个分点后所得的分割，则

$$\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i'\leqslant\sum_{T}\omega_i\Delta x_i.$$

证　不失一般性．仅考虑 T' 是 T 增加一个分点后所得的分割即可．

设
$$T=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},x_k,\cdots,x_{n-1},x_n\},$$
且
$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1},x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_n;$$
$$T'=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},x',x_k,\cdots,x_{n-1},x_n\},$$
且
$$x_{k-1}<x'<x_k.$$
记 $[x_{k-1},x']$ 上振幅为 $\omega_{k'}$，$[x',x_k]$ 上振幅为 $\omega_{k''}$，则由
$$[x_{k-1},x']\subset[x_{k-1},x_k],[x',x_k]\subset[x_{k-1},x_k],$$
知
$$\omega_{k'}\leqslant\omega_k,\quad\omega_{k''}\leqslant\omega_k,$$
即有
$$\omega_{k'}(x'-x_{k-1})+\omega_{k''}(x_k-x')\leqslant\omega_k(x_k-x_{k-1})=\omega_k\Delta x_k.$$
而
$$\begin{aligned}\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i'&=\sum_{i=1}^{k-1}\omega_i\Delta x_i+\omega_{k'}(x'-x_{k-1})+\omega_{k''}(x_k-x')+\sum_{i=k+1}^{n}\omega_i\Delta x_i\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{T}\omega_i\Delta x_i,\end{aligned}$$
故有
$$\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i'\leqslant\sum_{T}\omega_i\Delta x_i.$$

2．证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，则 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上也可积．

证　$\forall\varepsilon>0$,由于f在$[a,b]$上可积,故存在分割T,使

$$\sum_{T}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

将α,β两点加入T,构成新的分割T',由本节习题1知,

$$\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i\leqslant\sum_{T}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

记T'在$[\alpha,\beta]$上的那部分分点构成的$[\alpha,\beta]$的一个分割为T'',则有

$$\sum_{T''}\omega_i''\Delta x_i\leqslant\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i<\varepsilon.$$

由定理9.3′知,f在$[\alpha,\beta]$上可积.

3. 设f,g均为定义在$[a,b]$上的有界函数. 证明:若仅在$[a,b]$中有限个点处$f(x)\neq g(x)$,则当f在$[a,b]$上可积时,g在$[a,b]$上也可积,且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证　不失一般性. 设f,g仅在一点c处之值不同,这里$c\in[a,b]$. 先证g在$[a,b]$上可积. 由题设知f,g在$[a,b]$上有界,故$\exists M>0$,使得$\forall x\in[a,b]$有

$$|f(x)|<M,\quad |g(x)|<M.$$

又f在$[a,b]$上可积,由可积的充要条件(定理9.3′)知,$\forall\varepsilon>0,\exists T$,使得

$$\sum_{T}\omega_i^f\Delta x_i'<\frac{\varepsilon}{2}.$$

记T'为T的加密,且满足$\|T'\|<\dfrac{\varepsilon}{4M+1}$,则由本节习题1知

$$\sum_{T'}\omega_i'^f\Delta x_i'\leqslant\sum_{T}\omega_i^f\Delta x_i'<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设点c落在T'中的第k个小区间中,于是有

$$\sum_{T'}\omega_i'^g\Delta x_i'=\sum_{\substack{T'\\ i\neq k}}\omega_i'^f\Delta x_i'+\omega_k'^g\Delta x_k'<\frac{\varepsilon}{2}+\omega_k'^g\Delta x_k'.$$

而
$$\omega_k'^g<2M,\quad \Delta x_k'\leqslant\|T'\|<\frac{\varepsilon}{4M+1},$$

故
$$\sum_{T'}\omega_i'^g\Delta x_i'<\frac{\varepsilon}{2}+2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M+1}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由定理9.3′知,$g(x)$在$[a,b]$上可积.

再证
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

反证法:设
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I_1,\quad \int_a^b g(x)\mathrm{d}x=I_2,$$

且
$$I_1\neq I_2,\quad |f(x)|<M,\quad |g(x)|<M,\ x\in[a,b],$$

则由定积分定义知,$\forall \varepsilon_0=\dfrac{|I_1-I_2|}{2}$,$\exists\delta_1>0$,**使得对**$[a,b]$**上的任何分割**$T$ **及在其上任意选取的点集**$\{\xi_i^f\}$,**只要**$\|T\|<\delta_1$,**就有**

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i^f)\Delta x_i-I_1\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

及$\exists\delta_2>0$,**使得对**$[a,b]$**上的任何分割**T **及在其上任意选取的点集**$\{\xi_i^g\}$,**只要**$\|T\|<\delta_2$,**就有**

$$\left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i^g)\Delta x_i-I_2\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

取
$$\delta=\min\left\{\delta_1,\delta_2,\frac{\varepsilon_0}{4M+1}\right\},$$

则对于$[a,b]$**上的任何分割**T **及在其上任意选取的点集**$\{\xi_i\}$,**只要**$\|T\|<\delta$,**就有**

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-I_1\right|<\frac{\varepsilon_0}{2},$$
$$\left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i-I_2\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

同时成立,即

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-I_1\right|+\left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i-I_2\right|<\varepsilon_0.$$

而
$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-I_1\right|+\left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i-I_2\right|\\ \geqslant&\left|\sum_{i=1}^n [f(\xi_i)-g(\xi_i)]\Delta x_i-(I_1-I_2)\right|\\ \geqslant&|I_1-I_2|-\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)-g(\xi_i)\Delta x_i\right|\\ \geqslant&|I_1-I_2|-\sum_{i=1}^n|f(\xi_i)-g(\xi_i)|\Delta x_i.\end{aligned}$$

由题设知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 仅在 c 点不相等，故

$$\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)-g(\xi_i)|\Delta x_i\leqslant 2M\cdot\frac{\varepsilon_0}{4M+1}<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

因此有
$$|I_1-I_2|-\frac{\varepsilon_0}{2}<\varepsilon_0,$$

即
$$|I_1-I_2|<\frac{3}{2}\varepsilon_0=\frac{3}{4}|I_1-I_2|,$$

矛盾，从而 $I_1=I_2$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

综上，结论得证.

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界，$\{a_n\}\subset[a,b]$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上只有 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 为其间断点，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证　由题意知，f 在 $[a,b]$ 上有界，故 $\exists M>0$，使 $|f(x)|<M$，$x\in[a,b]$.

i）若 $c\in(a,b)$，则：

对于 $\forall\varepsilon>0$，取 $0<\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{6M+1},c-a,b-c\right\}$，而由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c\in[a,b]$，则 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$c-\frac{\delta}{3}<a_n<c+\frac{\delta}{3}.$$

记 $\left[c-\dfrac{\delta}{3},c+\dfrac{\delta}{3}\right]=\Delta$，其长度记为 Δ'，振幅为 ω'，显然

$$\omega'\leqslant 2M.$$

f 在闭区间 $\left[a,c-\dfrac{\delta}{3}\right]$ 上只有有限个间断点，由定理 9.5 知，f 在 $\left[a,c-\dfrac{\delta}{3}\right]$ 上可积. 故由定理 9.3′ 知，存在 $\left[a,c-\dfrac{\delta}{3}\right]$ 上的一个分割 T_1，使

$$\sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}.$$

f 在闭区间 $\left[c+\dfrac{\delta}{3},b\right]$ 上只有有限个间断点，由定理 9.5 知，f 在 $\left[c+\dfrac{\delta}{3},b\right]$ 上可积. 故由定理 9.3′ 知，存在 $\left[c+\dfrac{\delta}{3},b\right]$ 上的一个分割 T_2，使

$$\sum_{T_2}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}.$$

记分割 $T=T_1+T_2$,则 T 为$[a,b]$上的一个分割,则

$$\sum_{T}\omega_i\Delta x_i=\sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i+\sum_{T_2}\omega_i\Delta x_i+\omega'\Delta'<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2}{3}\delta\cdot\omega'$$

$$<\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{6M+1}\cdot 2M<\varepsilon.$$

由定理 9.3′知,f 在$[a,b]$上可积.

ii) 若 $c=a$,或 $c=b$. 不失一般性,设 $c=a$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则:

对于$\forall\varepsilon>0$,取 $0<\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{4M+1},b-a\right\}$,而由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有

$$a<a_n<a_n+\frac{\delta}{2}.$$

记$\left[a,a+\frac{\delta}{2}\right]=\Delta$,其长度为$\frac{\delta}{2}$,振幅为 ω,显然

$$\omega\leqslant 2M.$$

f 在$\left[a+\frac{\delta}{2},b\right]$上只有有限个间断点,由定理 9.5 知,$f$ 在$\left[a+\frac{\delta}{2},b\right]$上可积. 故由定理 9.3′知,存在$\left[a+\frac{\delta}{2},b\right]$上的一个分割 T_1,使

$$\sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

将点 a 与 T_1 的分点合并得到$[a,b]$上的分割 T,则

$$\sum_{T}\omega_i\Delta x_i=\omega\cdot\frac{\delta}{2}+\sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

由定理 9.3′知 f 在$[a,b]$上可积.

综合 i)、ii)知,f 在$[a,b]$上可积.

5. 证明:若 f 在区间 Δ 上有界,则

$$\sup_{x\in\Delta}f(x)-\inf_{x\in\Delta}f(x)=\sup_{x',x''\in\Delta}|f(x')-f(x'')|.$$

证　记　　$\inf\limits_{x\in\Delta}f(x)=m,\quad \sup\limits_{x\in\Delta}f(x)=M.$

i) 若 $m=M$,则 $f(x)\equiv M$,有

$$\sup_{x\in\Delta}f(x)-\inf_{x\in\Delta}f(x)=0=\sup_{x',x''\in\Delta}|f(x')-f(x'')|.$$

结论成立.

ii）若 $M>m$，则由确界定义知

a）$\forall x\in\Delta$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 因此 $\forall x',x''\in\Delta$，有

$$f(x'),f(x'')\in[m,M],$$

故
$$|f(x')-f(x'')|\leqslant M-m.$$

b）$\forall\varepsilon>0$，且 $\varepsilon<\frac{1}{2}(M-m)$，则

$$\exists x'\in\Delta,\text{使 } f(x')>M-\frac{\varepsilon}{2},\text{即}-f(x')<-M+\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\exists x''\in\Delta,\text{使 } f(x'')<m+\frac{\varepsilon}{2},\text{即}-f(x'')>-m-\frac{\varepsilon}{2}.$$

由此
$$f(x')-f(x'')>M-m-\varepsilon,$$

且
$$f(x'')-f(x')<-M+m+\varepsilon=-(M-m-\varepsilon),$$

即
$$|f(x')-f(x'')|>M-m-\varepsilon.$$

由 a)、b)得

$$\sup_{x',x''\in\Delta}|f(x')-f(x'')|=M-m=\sup_{x\in\Delta}f(x)-\inf_{x\in\Delta}f(x).$$

§4　定积分的性质

1. 证明：若 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

其中，ξ_i,η_i 是 T 所属小区间 Δx_i 中的任意两点，$i=1,2,\cdots,n$.

证　由 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积，可知 $f\cdot g$ 在 $[a,b]$ 上亦可积，即对于 $\forall\varepsilon>0$，对闭区间 $[a,b]$ 上的任意分割 T 以及任意选择的点集 $\{\xi_i\}$，都有

$$\left|\sum f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon/2,\ \|T\|<\delta.$$

而由 $g(x)$ 可积，可知亦存在 $[a,b]$ 上的某个分割 T'，使

$$\sum_{T'}\omega_i^g\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2A}.$$

在T'的基础上再作一个新分割T'',使$\|T''\|<\delta$,那么亦有

$$\sum_{T''}\omega_i^g\Delta x_i\leqslant\sum_{T'}\omega_i^g\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2A}.$$

故$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$及$\|T''\|<\delta$,对任意的点集$\{\xi_i\},\{\eta_i\}$,有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(\eta_i)-g(\xi_i))\Delta x_i+\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^n|f(\xi_i)||g(\eta_i)-g(\xi_i)|\Delta x_i\\&\quad+\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant A\sum_{T''}\omega_i^g\Delta x_i+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant A\cdot\frac{\varepsilon}{2A}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

其中,$\xi_i,\eta_i\in\Delta x_i,i=1,2,\cdots,n$. 即

$$\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

2. 不求出定积分的值,比较下列各对定积分的大小:

(1) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为$\int_0^1 x\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x$

而当$x\in(0,1)$时,有

$$x(1-x)>0,$$

当$x=0$和$x=1$时,有

$$x(1-x)=0.$$

所以
$$\int_0^1 x\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x>0.$$

即
$$\int_0^1 x\mathrm{d}x>\int_0^1 x^2\mathrm{d}x.$$

（2）因为$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\sin x)\mathrm{d}x.$

而当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，有

$$x-\sin x>0,$$

当$x=0$时，有
$$x-\sin x=0.$$

所以
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\sin x)\mathrm{d}x>0.$$

即
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x.$$

3．证明下列不等式：

（1）$\frac{\pi}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2x}}<\frac{\pi}{\sqrt{2}}$；　　（2）$1<\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x<\mathrm{e}$；

（3）$1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}$；　　（4）$3\sqrt{\mathrm{e}}<\int_{\mathrm{e}}^{4\mathrm{e}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x<6.$

证　（1）设
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2x}},x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

则有
$$f(0)<f(x)<f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

而$f(0)=1,f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}$，故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x,$$

即
$$\frac{\pi}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2x}}<\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

（2）设$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，则由于

$$f'(x)=2x\mathrm{e}^{x^2}>0,x\in[0,1],$$

即$f(x)$为递增函数，因而有

$$1<\mathrm{e}^{x^2}<\mathrm{e},x\in[0,1].$$

故
$$\int_0^1 \mathrm{d}x<\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x<\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{d}x},$$

即
$$1<\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x<\mathrm{e}.$$

（3）设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. 而 $x=0$ 点为 $f(x)$ 的可去间断点，补充 $f(0)=1$，这样可知在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 内 $f(x)$ 是递减函数，即

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(x)<f(0),$$

$$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1.$$

故
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x,$$

即
$$1<\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}.$$

（4）设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, x\in[\mathrm{e},4\mathrm{e}]$，令 $f'(x)=0$，得惟一一个稳定点

$$x_0=\mathrm{e}^2\in(\mathrm{e},4\mathrm{e}),$$

即 $f(x)$ 在 $[\mathrm{e},4\mathrm{e}]$ 上的最大值为 $f(\mathrm{e}^2)=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，最小值为 $f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，故

$$f(\mathrm{e})<f(x)<f(\mathrm{e}^2),$$

即
$$\int_{\mathrm{e}}^{4\mathrm{e}} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\mathrm{d}x<\int_{\mathrm{e}}^{4\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x<\int_{\mathrm{e}}^{4\mathrm{e}} \frac{2}{\mathrm{e}}\mathrm{d}x,$$

$$3\sqrt{\mathrm{e}}<\int_{\mathrm{e}}^{4\mathrm{e}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<6.$$

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 不恒等于零，证明 $\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x>0$.

证　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)\cdot f(x)=(f(x))^2$ 亦在 $[a,b]$ 上连续，且

$$(f(x))^2\geqslant 0.$$

又由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒等于零，则至少存在一点 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)\neq 0$，故有

$$(f(x_0))^2>0.$$

所以
$$\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x>0.$$

5. 设 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上可积，证明：

$$M(x)=\max_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\},\quad m(x)=\min_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}$$

在 $[a,b]$ 上也都可积.

证　由于 f,g 在 $[a,b]$ 上可积，故 $f-g$ 在 $[a,b]$ 上亦可积. 而

$$M(x)=\max_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

$$m(x)=\min_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|],$$

故 $M(x),m(x)$ 在 $[a,b]$ 上亦可积.

6. 试求心形线 $r=a(1+\cos\theta),0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 上各点极径的平均值.

解　由积分第一中值定理可知，心形线 $r=a(1+\cos\theta),0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 上各点极径的平均值为

$$\begin{aligned}\bar{r}&=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}r\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}a(1+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a}{2\pi}[\theta+\sin\theta]\Big|_0^{2\pi}=a.\end{aligned}$$

7. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，且在 $[a,b]$ 上满足 $|f(x)|\geqslant m>0$. 证明 $\frac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

证　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，即 $\forall\varepsilon>0,\exists[a,b]$ 上的某一分割 T，使

$$\sum_T\omega_i\Delta x_i<m^2\varepsilon,$$

而
$$\begin{aligned}\omega_i^{\frac{1}{f}}&=\sup_{x',x''\in\Delta x_i}\left|\frac{1}{f(x')}-\frac{1}{f(x'')}\right|=\sup_{x',x''\in\Delta x_i}\left|\frac{f(x')-f(x'')}{|f(x')f(x'')|}\right|\\&\leqslant\frac{1}{m^2}\sup_{x',x''\in\Delta x_i}|f(x')-f(x'')|\\&=\frac{1}{m^2}\left(\sup_{x\in\Delta x_i}f(x)-\inf_{x\in\Delta x_i}f(x)\right)=\frac{1}{m^2}\omega_i\quad(i=1,2,\cdots,n),\end{aligned}$$

故
$$\sum_T\omega_i^{\frac{1}{f}}\Delta x_i\leqslant\frac{1}{m^2}\sum_T\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{m^2}\cdot m^2\varepsilon=\varepsilon.$$

即$\dfrac{1}{f}$在$[a,b]$上亦可积.

8. 进一步证明积分第一中值定理(包括定理9.7和定理9.8)中的中值点$\xi\in(a,b)$.

证　定理9.7和定理9.8中的ξ都是属于$[a,b]$上的点. 本题意是要证明ξ是属于(a,b)内的点.

(1) 因为$f(x)$在$[a,b]$上连续,即在$[a,b]$上$f(x)$必有最大值M和最小值m. 分如下两种情况讨论.

i) 若$M=m$,则$f(x)\equiv M,x\in[a,b]$. 即在(a,b)内任意点均可作为其中值ξ.

ii) 若$M>m$,则设$f(x_1)=M,f(x_2)=m$,那么有

$$M-f(x_2)>0,\quad M-f(x)\geqslant 0,\ x\in[a,b],$$

即
$$M(b-a)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[M-f(x)]\mathrm{d}x>0.$$

同理有
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-m(b-a)=\int_a^b(f(x)-m)\mathrm{d}x>0.$$

即
$$M(b-a)-f(\xi)(b-a)>0,\quad f(\xi)(b-a)-m(b-a)>0,$$

于是$\xi\neq x_1,\xi\neq x_2$,因而有

$$m<f(\xi)<M.$$

由连续函数的介值定理可知,

$$\xi\in(x_1,x_2)\quad\text{或}\quad\xi\in(x_2,x_1),$$

而
$$(x_1,x_2)\subset(a,b),\quad(x_2,x_1)\subset(a,b).$$

故
$$\xi\in(a,b).$$

即若$f(x)$在$[a,b]$上连续,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

成立.

(2) 因为$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续,且$g(x)$在$[a,b]$上不变号,即$g(x)\geqslant 0\ (x\in[a,b])$或$g(x)\leqslant 0\ (x\in[a,b])$. 故不妨设$f(x)$在$[a,b]$上的最大值为$M$,最小值为$m$,$g(x)\geqslant 0,x\in[a,b]$. 显然当$M=m$或$g(x)\equiv 0$时,$(a,b)$内

任意一点都可作为其中值点ξ.

而当$M>m$,且$g(x)\not\equiv 0$,$x\in[a,b]$时,设$f(x_1)=M$,$f(x_2)=m$,$g(x_3)>0$,则一定有某个邻域$U(x_3)\cap(a,b)$,使

$$\forall x\in U(x_3)\cap(a,b),\text{有 } g(x)>0.$$

因而当$M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (M-f(x))g(x)\mathrm{d}x=0$时,有

$$(M-f(x))g(x)=0.$$

即当$g(x)>0$时,有

$$f(x)\equiv M,$$

当$g(x)=0$时,有

$$f(x)\leqslant M.$$

这时

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

对于$U(x_3)\cap(a,b)$内任何一点都可作介值点$\xi\in(a,b)$.

同理当$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (f(x)-m)g(x)\mathrm{d}x=0$时,对于$U(x_3)\cap(a,b)$内任何点$\xi\in(a,b)$都可作为其介值点.

当$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x<\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x<M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$时,有

$$m<f(\xi)<M,$$

则由介值定理可知,ξ是属于(x_1,x_2)或(x_2,x_1)上的点,即

$$\xi\in(a,b).$$

也就是说若$f(x)$和$g(x)$都是在$[a,b]$上连续,且$g(x)$在$[a,b]$上不变号,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

成立.

9. 证明:若f和g都在$[a,b]$上可积,且$g(x)$在$[a,b]$上不变号,M,m分别为$f(x)$在$[a,b]$上的上、下确界,则必存在某实数$\mu(m\leqslant\mu\leqslant M)$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证　由题意知，不妨设 $g(x)\geqslant 0$，$x\in[a,b]$，则有

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

即
$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,\quad x\in[a,b].$$

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0.$$

这时取 μ：$m\leqslant\mu\leqslant M$，就有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0.$$

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$，则

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\leqslant M.$$

这时取
$$\mu=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},$$

使之 $m\leqslant\mu\leqslant M$，且有　$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

10. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0,$$

则在 (a,b) 内至少存在两点 x_1,x_2，使 $f(x_1)=f(x_2)=0$. 又若 $\int_a^b x^2f(x)\mathrm{d}x=0$，这时 f 在 (a,b) 内是否至少有三个零点？

证　(1) 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则至少存在一点 $x_1\in(a,b)$，使

$$f(x_1)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0.$$

若只有这一个零点，则

$$f(x)>0, x\in(a,x_1);f(x)<0, x\in(x_1,b).$$

这时设
$$g(x)=(x-x_1)f(x),$$
则 $g(x)\leqslant 0, x\in(a,b)$，且 $g(x_1)=0$. 故

$$0>\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-x_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0.$$

矛盾，所以 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少还有其它一个零点.

(2) 若 $\int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x=0$，而 $f(x)$ 在 (a,b) 内只有两个零点 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$，则有

$$f(x)>0, x\in(a,x_1);$$
$$f(x)<0, x\in(x_1,x_2);$$
$$f(x)>0, x\in(x_2,b).$$

这时设
$$g(x)=(x-x_1)(x-x_2)f(x),$$
则 $g(x)\geqslant 0, x\in(a,b)$，且 $g(x_1)=g(x_2)=0$. 故

$$\begin{aligned}0&<\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x-(x_1-x_2)\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x+x_1x_2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\\&=0.\end{aligned}$$

矛盾，所以 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少还有其它一个零点.

11. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$. 证明：

(1) $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

(2) 又若 $f(x)\leqslant 0, x\in[a,b]$，则又有

$$f(x)\geqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ x\in[a,b].$$

证　(1) 设 $\dfrac{a+b}{2}=x_0$，由一阶泰勒公式，有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2\\&>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\ (\xi\text{ 在 }x\text{ 和 }x_0\text{ 之间}).\end{aligned}$$

即
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > f(x_0)\int_a^b \mathrm{d}x + f'(x_0)\int_a^b (x-x_0)\mathrm{d}x$$
$$= f(x_0)(b-a)+\frac{f'(x_0)}{2}[(b-x_0)^2-(a-x_0)^2]$$
$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$
$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a),$$
故
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 在$[a,b]$上任设一变量t,由一阶泰勒公式,有
$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-t)^2$$
$$> f(t)+f'(t)(x-t)\quad(\xi\text{ 在 }x\text{ 与 }t\text{ 之间}).$$
两边在$[a,b]$上对t积分,有
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}t > \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f'(t)(x-t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + (x-t)f(t)\Big|_a^b + \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + [(x-b)f(b)-(x-a)f(a)]$$
其中
$$(x-b)f(b)\geqslant 0, x\in[a,b],$$
$$(x-a)f(a)\leqslant 0, x\in[a,b],$$
于是
$$f(x)(b-a) > 2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$
故
$$f(x) > \frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

12. 证明:

(1) $\ln(1+n) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\ln n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$.

证 $\forall x\in[k,k+1], k=1,2,\cdots$,则有

$$\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{k}.$$

两边积分，有

$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{k}.$$

即
$$\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}.$$

对 $k=1$ 到 $k=n+1$，可得以下 $n+1$ 个不等式：

$$\frac{1}{2}<\ln 2-\ln 1<1,$$

$$\frac{1}{3}<\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},$$

把上述各不等式相加，可得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}<\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

而
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n,$$

即
$$\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n.$$

(2) 因为 $\dfrac{\ln(1+n)}{\ln n}<\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}<1+\dfrac{1}{\ln n}$,

而
$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\ln n}\right)=1.$$

所以由夹逼原理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1.$$

§5　微积分学基本定理·定积分计算(续)

1. 设 f 为连续函数，u、v 均为可导函数，且可实行复合 $f\circ u$ 与 $f\circ v$. 证

明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t=f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x).$$

证 由于 f 为连续函数，故必有原函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

设 $v(x)=v$，$u(x)=u$，则

$$\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t=\int_u^v f(t)\mathrm{d}t=\int_u^a f(t)\mathrm{d}t+\int_a^v f(t)\mathrm{d}t=\int_a^v f(t)\mathrm{d}t-\int_a^u f(t)\mathrm{d}t.$$

其中，a 是 $f(t)$ 的定义域内某一定点．上式两边对 x 求导，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^v f(t)\mathrm{d}t\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^u f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(v)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(u)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}F(v)\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}F(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(v)\cdot v'-f(u)\cdot u'\\&=f(v(x))\cdot v'(x)-f(u(x))\cdot u'(x).\end{aligned}$$

2．设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)=\int_a^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t$．证明

$$F''(x)=f(x),\quad x\in[a,b].$$

证 因为 $F(x)=\int_a^x xf(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)t\mathrm{d}t=x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)t\mathrm{d}t$

所以 $$F'(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b],$$

故 $$F''(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)=f(x),\quad x\in[a,b].$$

3．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

解 (1) $$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x^2}{1}=1.$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\cdot\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}}$$

$$\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to\infty}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x}=0.$$

4. 求下列定积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin 2x\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$；　（4）$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)^{3/2}}$；

（5）$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$；　（6）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

（7）$\int_0^1\arcsin x\mathrm{d}x$；　（8）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$；

（9）$\int_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\mathrm{d}x$；　（10）$\int_0^1\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

（11）$\int_0^a x^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x\ (a>0)$；　（12）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$.

解　（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin 2x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\cdot\sin x\cos x\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\mathrm{d}\cos x$

$$=-2\cdot\frac{1}{7}\cos^7 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{7}.$$

（2）$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则 }\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t,0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{6}]{\text{令 }x=2\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\cdot\cos t\cdot 2\cos t\mathrm{d}t$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=(2t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

（3）$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则 }\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t,0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}]{\text{令 }x=a\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^2 t\cdot a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t$$

$$=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}a^4.$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)^{3/2}}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^{3/2}}$

$$\xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2t\mathrm{d}t,\ |t|\leqslant\frac{\pi}{6}]{\text{令 } x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2t}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sec t\right)^3}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{3}.$$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}}=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{1+(\mathrm{e}^x)^2}$

$$=\arctan\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\arctan\mathrm{e}-\frac{\pi}{4}.$$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\sin x}{1+(\sin x)^2}=\arctan(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x\mathrm{d}x=(x\cdot\arcsin x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1.$$

(8) **因为** $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\cos x=-\mathrm{e}^x\cos x+\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$

$$=-\mathrm{e}^x\cos x+\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\sin x$$

$$=-\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{e}^x\sin x-\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x.$$

即 $$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C.$$

所以 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1).$$

(9) $\displaystyle\int_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\mathrm{d}x=-\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 \ln x\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x$

$$=(-x\ln x+x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_{1}^{e}=2(1-e^{-1}).$$

(10) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx \xlongequal[\text{则 } dx=2tdt,0\leqslant t\leqslant 1]{\text{令 } t=\sqrt{x}} \int_0^1 e^t\cdot 2tdt=2(te^t-e^t)\Big|_0^1=2.$

(11) $\int_0^a x^2\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}dx$

$$\xlongequal[\text{则 } dx=-2a\sin 2tdt,0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{4}]{\text{令 } x=a\cos 2t}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2(\cos 2t)^2\sqrt{\frac{a-a\cos 2t}{a+a\cos 2t}}(-2a\sin 2t)dt$$

$$=2a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2t(\cos 2t)^2\ \frac{\sin t}{\cos t}dt=a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 3t-\sin t)^2dt$$

$$=a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1-\cos 6t}{2}+\frac{1-\cos 2t}{2}+\cos 4t-\cos 2t\right)dt$$

$$=a^3\left(t-\frac{1}{12}\sin 6t+\frac{1}{4}\sin 4t-\frac{3}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right).$$

(12) 设 $I=\int\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta,\quad J=\int\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta,$

则
$$I+J=\theta+C_1,$$
$$J-I=\ln|\sin\theta+\cos\theta|+C_2.$$

即
$$J=\frac{1}{2}(\theta+\ln|\sin\theta+\cos\theta|)+C.$$

故
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}(\theta+\ln|\sin\theta+\cos\theta|)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

5. 设 f 在 $[-a,a]$ 上可积,证明:

(1) 若 f 为奇函数,则 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$;

(2) 若 f 为偶函数,则 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

证 (1) 因为 $f(x)=-f(-x)$,而

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=-\int_0^{-a}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$$

$$=\int_0^{-a}f(x)d(-x)+\int_0^a f(x)dx,$$

对其中的$\int_0^{-a} f(x)\mathrm{d}(-x)$，令$t=-x$，则

$$\int_0^{-a} f(x)\mathrm{d}(-x)=\int_0^a f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x=-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

所以
$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=0.$$

(2) 因为$f(x)=f(-x)$，而

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{-a} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

对其中的$-\int_0^{-a} f(x)\mathrm{d}x$，令$x=-t$，则

$$-\int_0^{-a} f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^a f(-t)\cdot\mathrm{d}(-t)=\int_0^a f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

所以
$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

6. 设f为$(-\infty,+\infty)$上以p为周期的连续周期函数，证明对任何实数a，恒有

$$\int_a^{a+p} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^p f(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为$\int_a^{a+p} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^p f(x)\mathrm{d}x+\int_p^{a+p} f(x)\mathrm{d}x$

而
$$\int_p^{a+p} f(x)\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则 }\mathrm{d}x=\mathrm{d}t]{\text{令 }x=p+t}\int_0^a f(p+t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x,$$

所以
$$\int_a^{a+p} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^p f(x)\mathrm{d}x-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^p f(x)\mathrm{d}x.$$

7. 设f为连续函数，证明：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

证 (1)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则 }\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t]{\text{令 }x=\frac{\pi}{2}-t}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)(-\mathrm{d}t)$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

（2）因为$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x \xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t]{\text{令 } x=\pi-t} \int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))(-\mathrm{d}t)$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}tf(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x,$$

所以
$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

8．设$J(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$（$m,n$ **为正整数**）．**证明：**

$$J(m,n)=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)=\frac{m-1}{m+n}J(m-2,n),$$

并求$J(2m,2n)$．

证　因为

$$J(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^{n-1}x\mathrm{d}\sin x$$

$$=\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\mathrm{d}\sin^{m+1}x$$

$$=\frac{1}{m+1}\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\sin^{m+2}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\sin^m x(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n-1}{m+1}J(m,n-2)-\frac{n-1}{m+1}J(m,n),$$

所以
$$J(m,n)=\frac{m+1}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+1}J(m,n-2)$$

$$=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2).$$

类似亦可得
$$J(m,n)=\frac{m-1}{m+n}J(m-2,n).$$

利用$J(m,n)=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)=\frac{m-1}{m+n}J(m-2,n)$，有

$$J(2m,2n)=\frac{2n-1}{2m+2n}J(2m,2(n-1))$$

$$=\frac{(2n-1)}{2(m+n)}\cdot\frac{(2m-1)}{2(m+n-1)}J(2(m-1),2(n-1))$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)(2m-1)(2m-3)}{2(m+n)\cdot 2(m+n-1)\cdot 2(m+n-2)\cdot 2(m+n-3)}\cdot J(2(m-2),2(n-2))$$

$$=\cdots=\frac{(2n-1)!!\ (2m-1)!!}{2(m+n)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(2n-1)!!\ (2m-1)!!}{2(m+n)!!}\frac{\pi}{2}.$$

9. 证明:若在$(0,+\infty)$上 f 为连续函数,且对任何 $a>0$ 有

$$g(x)=\int_x^{ax}f(t)\mathrm{d}t\equiv\text{常数},\quad x\in(0,+\infty),$$

则 $f(x)=\dfrac{c}{x}$,$x\in(0,+\infty)$,c 为常数.

证 $\forall a>0$,由于 f 在$(0,+\infty)$上连续,可得 $g(x)$在$(0,+\infty)$内可导,

$$g'(x)=f(ax)(ax)'-f(x)(x)'=af(ax)-f(x)\equiv 0,$$

即
$$f(ax)=\frac{1}{a}f(x),\quad x\in(0,+\infty).$$

令 $x=1$,得

$$f(a)=\frac{1}{a}f(1)\xlongequal{\text{令}f(1)=c}\frac{c}{a}\ (a>0),$$

故
$$f(x)=\frac{c}{x},\quad x\in(0,+\infty).$$

10. 设 f 为连续可微函数,试求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x(x-t)f'(t)\mathrm{d}t,$$

并用此结果求$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x(x-t)\sin t\mathrm{d}t$.

解 因为$\displaystyle\int_a^x(x-t)f'(t)\mathrm{d}t=x\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t-\int_a^x tf'(t)\mathrm{d}t$

所以
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x(x-t)f'(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t+xf'(x)-xf'(x)$$

$$=\int_a^x\mathrm{d}f(t)=f(t)\Big|_a^x=f(x)-f(a),$$

因而
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x (x-t)\sin t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x (x-t)(-\cos t)'\mathrm{d}t$$
$$=(-\cos t)\Big|_0^x = 1-\cos x.$$

11. 设 $y=f(x)$ 为 $[a,b]$ 上严格递增的连续函数曲线(图9-1). 试证存在 $\xi\in(a,b)$，使图中两阴影部分面积相等.

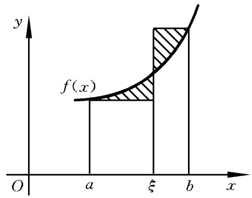

图 9-1

证　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以可构造一个函数
$$F(x)=\int_a^x (f(t)-f(a))\mathrm{d}t - \int_x^b (f(b)-f(t))\mathrm{d}t$$
在 $[a,b]$ 上亦连续. 再由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为严格增可推出
$$F(a)<0,\quad F(b)>0.$$
故由介值定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使
$$F(\xi)=0,$$
即
$$\int_a^{\xi}(f(t)-f(a))\mathrm{d}t=\int_{\xi}^b (f(b)-f(t))\mathrm{d}t,$$
因此
$$\int_a^{\xi}(f(x)-f(a))\mathrm{d}x=\int_{\xi}^b (f(b)-f(x))\mathrm{d}x$$
即为所证.

12. 设 f 为 $[0,2\pi]$ 上的单调递减函数. 证明：对任何正整数 n 恒有
$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

证
$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \xlongequal[\text{则 } x=\frac{t}{n},\ \mathrm{d}x=\frac{1}{n}\mathrm{d}t]{\text{令 } t=nx} \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{2i\pi}^{2(i+1)\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t+\int_{(2i+1)\pi}^{(2i+2)\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t\right),$$

而
$$\int_{(2i+1)\pi}^{(2i+2)\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t \xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}u=\mathrm{d}t]{\text{令 } u=t-\pi} -\int_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} f\left(\frac{u+\pi}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u$$
$$=-\int_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} f\left(\frac{t+\pi}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t.$$

再由于 f 为单调递减,故有

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{2i\pi}^{(2i+1)\pi}\left[f\left(\frac{t}{n}\right)-f\left(\frac{t+\pi}{n}\right)\right]\sin t\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

13. 证明:当 $x>0$ 时有不等式

$$\left|\int_x^{x+c}\sin t^2\mathrm{d}t\right|<\frac{1}{x}\quad(c>0).$$

证　因为

$$\int_x^{x+c}\sin t^2\mathrm{d}t \xlongequal[\text{则 } t=\sqrt{u},\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u]{\text{令 } u=t^2} \int_{x^2}^{(x+c)^2}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

设
$$f(u)=\sin u,\quad g(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}},$$

则 $f(u)$ 在 $[x^2,(x+c)^2]$ 上连续,$g(u)$ 是单调减,且 $g(u)>0$. 所以由积分第二中值定理可知,存在 $\xi\in[x^2,(x+c)^2]$,使

$$\int_x^{x+c}\sin t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{x^2}}\int_{x^2}^{\xi}\sin u\mathrm{d}u=\frac{1}{2x}(\cos x^2-\cos\xi),$$

故
$$\left|\int_x^{x+c}\sin t^2\mathrm{d}t\right|=\frac{1}{2x}|\cos x^2-\cos\xi|<\frac{1}{x}.$$

14. 证明:若 f 在 $[a,b]$ 上可积,φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上单调且连续可微,$\varphi(\alpha)=a$,$\varphi(\beta)=b$,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

证　设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,则

$$(F(\varphi(t)))'=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),$$

故
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(x)\Big|_a^b=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

15. 证明:若在 $[a,b]$ 上 f 为连续函数,g 为连续可微的单调函数,则存在

$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证　设$F(x)$是$f(x)$的原函数，则$F(x)$在$[a,b]$上可导，又由于$g(x)$为连续可微的单调函数，有$g'(x)$在$[a,b]$上不变号，故

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b F'(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x)\\&=g(x)F(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\mathrm{d}g(x).\end{aligned}\qquad ①$$

而由推广的积分第一中值定理可知，至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}g(x)=F(\xi)\int_a^b \mathrm{d}g(x)=F(\xi)[g(b)-g(a)].$$

因而式①为

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=g(b)F(b)-g(a)F(a)-F(\xi)[g(b)-g(a)]\\&=g(a)[F(\xi)-F(a)]+g(b)[F(b)-F(\xi)]\\&=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

§6　可积性理论补叙

1．证明性质2中关于下和的不等式(3)．

证　性质2中关于下和的不等式(3)为

$$s(T)\leqslant s(T')\leqslant s(T)+(M-m)p\|T\|.$$

记T'为分割T添加p个新分点后所得的分割．而将这p个分点逐次添加，产生分割$T,T_1,T_2,\cdots,T_{p-1},T'$，使得$T_i$所添加的分割点恰好在$T_{i-1}$的小区间$\Delta_k$内．则在$\Delta_k$内，有

$$M_k=\sup_{x\in\Delta_k}\{f(x)\},\quad m_k=\inf_{x\in\Delta_k}\{f(x)\}.$$

同时对于Δ_k，又分两个小区间$\Delta_{k'}$，$\Delta_{k''}$，则亦有

$$M_{k'}=\sup_{x\in\Delta_{k'}}\{f(x)\},\quad m_{k'}=\inf_{x\in\Delta_{k'}}\{f(x)\};$$

$$M_{k''}=\sup_{x\in\Delta_{k''}}\{f(x)\},\quad m_{k''}=\inf_{x\in\Delta_{k''}}\{f(x)\}.$$

因而有
$$M_{k'}\leqslant M_k,\quad M_{k''}\leqslant M_k,$$
$$m_{k'}\geqslant m_k,\quad m_{k''}\geqslant m_k.$$

即
$$M_{k'}-m_{k'}\leqslant M_k-m_k,\quad M_{k''}-m_{k''}\leqslant M_k-m_k.$$

所以
$$\begin{aligned}s(T_i)-s(T_{i-1})&=(m_{k'}\Delta x_{k'}+m_{k''}\Delta x_{k''})-m_k\Delta x_k\\&=(m_{k'}-m_k)\Delta x_{k'}+(m_{k''}-m_k)\Delta x_{k''}.\end{aligned}$$

即
$$\begin{aligned}0&\leqslant s(T_i)-s(T_{i-1})\leqslant(M-m)\Delta x_{k'}+(M-m)\Delta x_{k''}\\&\leqslant(M-m)\|T_{i-1}\|\quad(i=1,2,\cdots,p).\end{aligned}$$

把这些不等式对 i 依次相加,得到
$$0\leqslant s(T')-s(T)\leqslant(M-m)\sum_{i=0}^{p-1}\|T_i\|\leqslant(M-m)p\|T\|$$

即
$$s(T)\leqslant s(T')\leqslant s(T)+(M-m)p\|T\|.$$

2. 证明性质 6 中关于下和的极限式 $\lim\limits_{\|T\|\to0}s(T)=s$.

证　$\forall\varepsilon>0$,必存在某一个分割 T',使得
$$s(T')>s-\frac{\varepsilon}{2}.$$

设 T' 是由 p 个分割点构成的,对任意的另一个分割 T,由性质 2 和性质 3,有
$$s(T')\leqslant s(T+T'),\quad s(T+T')\leqslant s(T)+(M-m)p\|T\|.$$

所以只要 $\|T\|<\dfrac{\varepsilon}{2(M-m)p}$,就有
$$s\geqslant s(T)\geqslant s(T')-(M-m)p\|T\|\geqslant s-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=s-\varepsilon.$$

即
$$\lim_{\|T\|\to\infty}s(T)=s.$$

3. 设
$$f(x)=\begin{cases}x, & x\ \text{为有理数},\\ 0, & x\ \text{为无理数}.\end{cases}$$

试求 f 在 $[0,1]$ 上的上积分和下积分;并由此判断 f 在 $[0,1]$ 上是否可积.

解　对 $[0,1]$ 上任意分割

$$T=\{0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1\},$$

由有理数、无理数在实数系中的稠密性可知，对任一小区间$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$，有

$$M_i=\sup_{x\in\Delta_i}f(x)=x_i,\quad m_i=\inf_{x\in\Delta_i}f(x)=0,$$

故有
$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\Delta x_i,\quad s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=0.$$

而$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\Delta x_i$即为$F(x)=x$在$[0,1]$上对于分割$T$取$\xi_i=x_i(i=1,2,\cdots)$的黎曼和，且$F(x)=x$在$[0,1]$上连续，故$F(x)=x$在$[0,1]$上可积. 由达布定理知，

上积分
$$S=\lim_{\|T\|\to 0}S(T),$$

下积分
$$s=\lim_{\|T\|\to 0}s(T).$$

故有
$$S=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\quad s=0.$$

由于$s\neq S$，由定理9.14(可积的第一充要条件)得，f在$[0,1]$上不可积.

4. 设f在$[a,b]$上可积，且$f(x)\geqslant 0$，$x\in[a,b]$. 试问$\sqrt{f}$在$[a,b]$上是否可积？为什么？

解　作辅助函数

$$F(x)=\sqrt{x}\ (x\geqslant 0),$$

由f在$[a,b]$上可积，根据定理9.2知，f在$[a,b]$上有界，即$\exists M>0$，使

$$0\leqslant f(x)\leqslant M.$$

由于$F(x)=\sqrt{x}$在$[0,M]$上连续，$f(x)$在$[a,b]$上可积，且

$$0\leqslant f(x)\leqslant M,\ x\in[a,b].$$

根据教材第九章§6例2的结论可知，$F\circ f$在$[a,b]$上可积，即$\sqrt{f(x)}$在$[a,b]$上可积，由此$\sqrt{f}$在$[a,b]$上可积.

5. 证明：定理9.15中的可积第二充要条件等价于“任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对一切满足$\|T\|<\delta$的T，都有

$$\sum_{T}\omega_i\Delta x_i=S(T)-s(T)<\varepsilon.$$

证　定理9.15关于可积充要条件的叙述为：$\forall\varepsilon>0$，存在分割T，使得

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

显然,本题中关于可积充要条件的叙述中包含,$\forall \varepsilon > 0$,$\exists T$,使

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

故本题的充要条件包含了定理 9.15,即由本题⇒定理 9.15.

下讨论定理 9.15 成立⇒本题结论成立.

由定理 9.15 知,$\forall \varepsilon > 0$,存在分割 T,使得 $\sum\limits_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$,此时有

$$s(T) \leqslant s \leqslant S \leqslant S(T),$$

即
$$0 \leqslant S - s \leqslant S(T) - s(T) = \sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

由 ε 的任意性知,$S = s$,由达布定理(性质 6)知

$$\lim_{\|T\| \to 0} [S(T) - s(T)] = \lim_{\|T\| \to 0} S(T) - \lim_{\|T\| \to 0} s(T) = S - s = 0.$$

即对于 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,对一切满足 $\|T\| < \delta$ 的分割 T,都有

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i = S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

此即本题结论.

由此,两种充要条件的叙述是等价的.

6. 据理回答:

(1) 何种函数具有"任意下和等于任意上和"的性质?

(2) 何种连续函数具有"所有下和(或所有上和)都相等"的性质?

(3) 对于可积函数,若"所有下和(或上和)都相等",是否仍有(2)的结论?

解　(1) 常数函数. 即 $f(x) \equiv c$,$x \in [a,b]$,具有"任意下和等于任意上和"的性质. 此时,对任意分割 T,$M_i = m_i = c$,故

$$S(T) = s(T) = c(b-a).$$

另一方面,若 f 不为常数函数,将不具备此性质:此时对分割 $T_0 = \{a,b\}$,

$$s(T) = M(b-a), \quad s(T) = m(b-a).$$

由假设 $M \neq m$,固有

$$S(T) > s(T).$$

由此，具有“任意下和等于任意上和”性质的函数必为常函数 $f(x)\equiv c$.

(2) 常数函数. 即 $f(x)\equiv c, x\in[a,b]$，具有“所有下和(或所有上和)都相等”的性质. 此时，对任意分割 T，

$$S(T)=c(b-a),\quad s(T)=c(b-a).$$

另一方面，若 f 不为常数函数，则将不具备此性质. 不失一般性，以下和为例来说明. 由于 f 不为常数函数，故存在 $x_1, x_2\in(a,b)$，使 $f(x_1)\neq f(x_2)$，不妨设 $x_1<x_2$，且 $f(x_1)<f(x_2)$. 由于 $f(x)$ 为连续函数，因此 $\exists\delta>0$ 且满足 $\delta<\min\{x_2-x_1, b-x_2\}$，当 $x\in(x_2-\delta, x_2+\delta)$ 时，

$$f(x)>f(x_1).$$

则对于分割 $T_1=\{a,b\}$ 及 $T_2=\{a, x_2-\delta, x_2+\delta, b\}$，分别有

$$s(T_1)=f(x_0)\cdot(b-a),$$

其中，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

$$s(T_2)=f(\xi_1)(x_2-\delta-a)+f(\xi_2)(b-x_2-\delta)+f(\xi)\cdot 2\delta,$$

其中，$f(\xi_1)$、$f(\xi_2)$ 分别为 f 在 $[a, x_2-\delta]$，$[x_2+\delta, b]$ 上的最小值，且

$$f(\xi_1)\geqslant f(x_0),\quad f(\xi_2)\geqslant f(x_0),$$

而 $f(\xi)$ 为 f 在 $[x_2-\delta, x_2+\delta]$ 上的最小值，且

$$f(\xi)>f(x_1)\geqslant f(x_0).$$

所以有 $s(T_2)>f(x_0)(b-a)=s(T_1)$，矛盾. 因此 $\forall x_1, x_2\in(a,b)$，有 $f(x_1)=f(x_2)$. 由 f 在 $[a,b]$ 上连续，可推出

$$\forall x\in[a,b],\quad f(x)\equiv c.$$

因此，具有“所有下和(或所有上和)都相等”性质的连续函数必为常函数.

(3) 此时(2)的结论不成立. 考察黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, p, q \text{ 互素}, p<q,\\ 0, & x=0,1, \text{以及}(0,1)\text{内的无理数}.\end{cases}$$

由无理数在实数系内的稠密性可知，对于任意分割 T，均有 $s(T)=0$. 但黎曼函数非常函数. 出现此种情形是由于黎曼函数在 $[0,1]$ 上是非连续函数.

7. 本题的最终目的是要证明，若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 f 在 $[a,b]$ 上必定

存在无限多个连续点,而且它们在$[a,b]$上处处稠密. 这可以用区间套方法按以下顺序逐一证明:

(1) 若T是$[a,b]$的一个分割,使得$S(T)-s(T)<b-a$,则在T中存在某个小区间Δ_i,使$\omega_i^f<1$.

(2) 存在区间$I_1=[a_1,b_1]\subset(a,b)$,使得

$$\omega^f(I_1)=\sup_{x\in I_1}f(x)-\inf_{x\in I_1}f(x)<1.$$

(3) 存在区间$I_2=[a_2,b_2]\subset(a_1,b_1)$,使得

$$\omega^f(I_2)=\sup_{x\in I_2}f(x)-\inf_{x\in I_2}f(x)<\frac{1}{2}.$$

(4) 继续以上方法,求出一区间序列$I_n=[a_n,b_n]\subset(a_{n-1},b_{n-1})$,使得

$$\omega^f(I_n)=\sup_{x\in I_n}f(x)-\inf_{x\in I_n}f(x)<\frac{1}{n}.$$

说明$\{I_n\}$为一区间套,从而存在$x_0\in I_n,n=1,2,\cdots$;而且f在点x_0连续.

(5) 上面求得的f的连续点在$[a,b]$内处处稠密.

证 (1) 反证法:若在所有小区间上都有$\omega^f(\Delta_i)\geqslant 1\ (i=1,2,\cdots,n)$,则

$$S(T)-s(T)=\sum_T\omega^f(\Delta_i)\Delta x_i\geqslant\sum_T\Delta x_i=b-a,$$

与题设矛盾. 因此在T中一定存在某个小区间Δ_i使$\omega_i^f<1$.

(2) 由f在$[a,b]$上可积及定理9.15(可积第二充要条件)可知,对于$0<\varepsilon_0<b-a$,存在分割T,使得

$$S(T)-s(T)=\sum_{i=1}^n\omega_i^f\Delta x_i<\varepsilon_0<b-a.$$

由(1)知,存在$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]\subset[a,b]$,在其上有$\omega^f(\Delta_i)<1$. 现按如下规定来得到$I_1$.

若$1<i<n$,则取$a_1=x_{i-1},b_1=x_i$,即

$$[a_1,b_1]=[x_{i-1},x_i]\subset(a,b).$$

若$i=1$,则取a_1为(a,x_1)中任一数,$b_1=x_1$,即

$$[a_1,b_1]=[a_1,x_1]\subset(a,b).$$

若$i=n$,则取b_1为(x_{n-1},b)中任一数,$a_1=x_{n-1}$,即

$$[a_1,b_1]=[x_{n-1},b_1]\subset(a,b).$$

显然,由此得到
$$I_1=[a_1,b_1]\subset\Delta_i,$$
故有
$$\omega^f(I_1)\leqslant\omega^f(\Delta_i)<1.$$

（3）由本章§3习题2知,f 在$[a_1,b_1]$上可积,则对于 $0<\varepsilon_1<\frac{1}{2}(b_1-a_1)$,存在$[a_1,b_1]$上的分割 T_1,使得

$$S(T_1)-s(T_1)<\frac{1}{2}(b_1-a_1).$$

由与(1)完全相同的方法知,存在 T_1 中的某个小区间 Δ_i',使得

$$\omega^f(\Delta_i')<\frac{1}{2}.$$

再由类似于(2)的寻找方法知,

$$\exists I_2=[a_2,b_2]\subset(a_1,b_1),$$

使得
$$\omega^f(I_2)\leqslant\omega^f(\Delta_i')<\frac{1}{2}.$$

（4）当以上方法继续下去时,分割 T_n 可以做得无限细密,且有

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n\|=0.$$

由
$$b_{n+1}-a_{n+1}\leqslant\|T_n\|,$$
得
$$\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-a_{n+1})=0,$$
而 $I_{n+1}\subset I_n$,所以$\{I_n\}$为一区间套.

根据区间套定理知,$\exists x_0\in I_n,n=1,2,\cdots$,且对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n\geqslant N$ 时,有 $\frac{1}{n}<\varepsilon$ 及$[a_n,b_n]\subset U(x_0,\varepsilon)$.

由于 I_n 的构造方法为

$$[a_n,b_n]\subset(a_{n-1},b_{n-1}),n=1,2,\cdots,$$

故有
$$x_0\in(a_n,b_n),n=1,2,\cdots.$$

取 $\delta=\min\{x_0-a_N,b_N-x_0\}>0$,当 $x',x''\in U(x_0;\delta)\subset U(x_0;\varepsilon)$时,有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\omega^f(I_N)=\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

由此得 f 在 x_0 连续.

(5) 对于$\forall\ [\alpha,\beta]\subset[a,b]$,由 f 在$[a,b]$上可积及本章§3 习题 2 知,f 在$[\alpha,\beta]$上可积. 在闭区间$[\alpha,\beta]$上运用上述(1)~(4)的结果,可证得 f 在(α,β)内至少有一个连续点. 由$[\alpha,\beta]$的任意性,最终证得 f 的连续点在$[a,b]$中处处稠密.

§7　总 练 习 题

1. 证明:若 φ 在$[0,a]$上连续,f 二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0$,则有

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t\geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)\mathrm{d}t\right).$$

证　因为 f 二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0$,所以有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2\\&\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\xi\in(x,x_0).\end{aligned}$$

取 $x=\varphi(t)$,$x_0=\varphi(\eta)$,则

$$f(\varphi(t))\geqslant f(\varphi(\eta))+f'(\varphi(\eta))[\varphi(t)-\varphi(\eta)],t\in[0,a],$$

即

$$\begin{aligned}\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t&\geqslant\int_0^a f(\varphi(\eta))\mathrm{d}t+\int_0^a f'(\varphi(\eta))[\varphi(t)-\varphi(\eta)]\mathrm{d}t\\&=af(\varphi(\eta))+f'(\varphi(\eta))\left(\int_0^a\varphi(t)\mathrm{d}t-a\varphi(\eta)\right).\end{aligned}$$

而 φ 在$[0,a]$上连续,由积分第一中值定理可知,至少存在一点 $\eta\in[0,a]$,使得

$$\varphi(\eta)=\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

故

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t\geqslant f(\varphi(\eta))=f\left(\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)\mathrm{d}t\right).$$

2. 证明下列命题:

(1) 若 f 在$[a,b]$上连续增,

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, & x\in(a,b],\\ f(a), & x=a,\end{cases}$$

则 $F(x)$为$[a,b]$上的增函数.

（2）若 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，则

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

为 $(0,+\infty)$ 上的严格增函数．如果要使 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为严格增，试问应补充定义 $\varphi(0)=?$

证　（1）对于 $x\to a^+$，有

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to a^+}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a),$$

即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续．故对任意的 $x\in[a,b]$，有

$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}=\frac{\int_a^x (f(x)-f(t))\mathrm{d}t}{(x-a)^2}\geqslant 0,$$

即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上为增函数．

（2）由于 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续及 $f(x)>0$，故

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}>0$$

即 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格单调增函数．

若补充 $\varphi(0)=0$，则有

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0^+}x=0.$$

从而 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续．

3. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=A.$$

证　对任意的 $x>0$,有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left[\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t+\int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left[f(\xi_1)\sqrt{x}+f(\xi_2)(x-\sqrt{x})\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[f(\xi_1)\frac{\sqrt{x}}{x}+f(\xi_2)\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right],\\&\qquad\xi_1\in(0,\sqrt{x}),\quad\xi_2\in(\sqrt{x},x).\end{aligned}$$

而当 $x\to+\infty$ 时,$\xi_1\to+\infty$,$\xi_2\to+\infty$,即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\xi_1)}{\sqrt{x}}=0,\quad\lim_{x\to+\infty}f(\xi_2)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)=A.$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0+A=A.$$

4. 设 f 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个连续周期函数,周期为 p,证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t.$$

证　由于本题讨论 $x\to+\infty$ 时的极限问题,故不妨假设 $x>0$.

对任意的 $x>0$,存在 $x_0\in[0,p]$ 及 $n\in\mathbf{N}_+$,使 $x=x_0+np$,且

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t&=\frac{1}{x_0+np}\int_0^{x_0+np}f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{x_0+np}\int_0^{np}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x_0+np}\int_{np}^{x_0+np}f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{n}{x_0+np}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x_0+np}\int_0^{x_0}f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

当 $x\to+\infty$ 时,$n\to\infty$,且 $\int_0^p f(t)\mathrm{d}t$ 为常数,$\int_0^{x_0}f(t)\mathrm{d}t$ 为有界量,故有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{x_0+np}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x_0+np}\int_0^{x_0}f(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

5. 证明:连续的奇函数的一切原函数皆为偶函数;连续的偶函数的原函数中只有一个是奇函数.

证　令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$（$C$ 为任一常数），

则
$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C \xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}t=-\mathrm{d}u]{\text{令 } t=-u} \int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C$$
$$=-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u+C.$$

若 $f(t)$ 是连续的奇函数，则 $f(-u)=-f(u)$，因而
$$F(-x)=-\int_0^x(-f(u))\mathrm{d}u+C=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F(x),$$
故 $F(x)$ 为偶函数.

若 $f(t)$ 是连续的偶函数，则 $f(-u)=f(u)$，因而
$$F(-x)=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=-F(x)+C.$$
要使 $F(-x)=-F(x)$，则有 $C=0$，即只有一个原函数为奇数.

6. 证明施瓦茨(Schwarz)不等式：若 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积，则
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

证　因为 f,g 在 $[a,b]$ 上可积，由性质 3 可知 $f^2(x),g^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上亦可积，所以
$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(y)\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$
$$-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^b\left(\int_a^b[f(x)g(y)-g(x)f(y)]^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$$
而
$$(f(x)g(y)-g(x)f(y))^2\geqslant 0,$$
即
$$\int_a^b[f(x)g(y)-g(x)f(y)]\mathrm{d}x\geqslant 0,$$
故
$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant 0,$$
即
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

7. 利用施瓦茨不等式证明：

(1) **若** f **在** $[a,b]$ **上可积，则**

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x;$$

(2) **若** f **在** $[a,b]$ **上可积，且** $f(x)\geqslant m>0$，**则**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2;$$

(3) **若** f,g **都在** $[a,b]$ **上可积，则有闵可夫斯基**(Minkowski)**不等式**

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证　(1) **在** $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$ **中令** $g(x)\equiv 1$，$x\in[a,b]$，**则有**

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \mathrm{d}x = (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

(2) **因为** f **在** $[a,b]$ **上可积，则** $\sqrt{f(x)}$，$1/\sqrt{f(x)}$ **在** $[a,b]$ **上亦可积，所以在施瓦茨不等式中令** $f(x)$ **为** $\sqrt{f(x)}$，$g(x)$ **为** $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$，**则有**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 = (b-a)^2.$$

(3)
$$\begin{aligned}
&\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b (f(x)+g(x))(f(x)+g(x))\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x \\
&\leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}$$

即 $$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^{\,2}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

8. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x.$$

证　由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，故 $\exists\xi\in[a,b]$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

同时构造一函数：

$$h(u)=\ln u,u=f(x),\text{且 }u>0,x\in[a,b].$$

将该函数在 $u_0=f(\xi)$ 点上利用泰勒公式，有

$$\begin{aligned}h(u)&=h(u_0)+h'(u_0)(u-u_0)+\frac{1}{2!}h''(\eta)(u-u_0)^2\\&\leqslant h(u_0)+h'(u_0)(u-u_0)\ (\eta\text{ 在 }u,u_0\text{ 之间}),\end{aligned}$$

将上式两边在 $[a,b]$ 上定积分，有

$$\begin{aligned}\int_a^b h(f(x))\mathrm{d}x&\leqslant\int_a^b h(f(\xi))\mathrm{d}x+\int_a^b h'(f(\xi))(f(x)-f(\xi))\mathrm{d}x\\&=h(f(\xi))(b-a)+h'(f(\xi))\int_a^b(f(x)-f(\xi))\mathrm{d}x\\&=h(f(\xi))(b-a),\end{aligned}$$

故 $$\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\mathrm{d}x\leqslant h(f(\xi))=\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

9. 设 f 为 $(0,+\infty)$ 上的连续减函数，$f(x)>0$；又设

$$a_n=\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 $\{a_n\}$ 为收敛数列.

证　只要证明 $\{a_n\}$ 是单调有界数列即可.

由于 f 在 $(0,+\infty)$ 上是连续减函数，且 $f(x)>0$，则有

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n-1}\left(f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right)+f(n)\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}(f(k)-f(x))\mathrm{d}x+f(n)>0,\end{aligned}$$

而　$$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}(f(n+1)-f(x))\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

故数列$\{a_n\}$是收敛数列.

10. 证明：若 f 在$[a,b]$上可积，且处处有 $f(x)>0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

证　由本章§6 习题 7 可知，f 的连续点在$[a,b]$内处处稠密，即在(a,b)内至少存在一点 x_0，使 $f(x_0)>0$，且 f 在点 x_0 连续.

对$\forall x\in U(x_0;\delta)$ $(\delta>0)$，由于 f 的连续性，即有

$$f(x)>f(x_0)-\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)\ \left(\text{取 }\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)\right).$$

故
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^{x_0-\frac{1}{2}\delta}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0-\frac{1}{2}\delta}^{x_0+\frac{1}{2}\delta}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0+\frac{1}{2}\delta}^{b}f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant 0+\frac{1}{2}f(x_0)\delta+0>0.\end{aligned}$$

第十章　定积分的应用

知识要点

1. 可以用定积分来表达的量具有以下特征：

（1）是区间$[a,b]$上的非均匀连续分布的量.

（2）具有对区间的可加性，即分布在$[a,b]$上的总量等于分布在各子区间上的局部量之和.

2. 建立积分表达式可通过“分割、近似求和、取极限”的方法由定积分的定义给出，也可采用工程技术上普遍采用的“微元法”来建立.

3. 微元法的关键在于所求量Q在小区间$[x,x+\Delta x]$上的量ΔQ可用Δx的线性函数$q(x)\Delta x$来近似代替，且二者误差$\Delta Q-q(x)\Delta x$是Δx的高阶无穷小，即$\mathrm{d}Q=q(x)\mathrm{d}x$.

为确定$\mathrm{d}Q$，常根据量Q在常量数学或常量物理中的公式给出. 它通常由一个在$[x,x+\Delta x]$中视为均匀变化的量$q_1(x)$与另一个和Δx相关的量$q_2(x)\Delta x$的乘积表出，为达到此目的常将$[x,x+\Delta x]$所对应的“微分小块”取作细条形、薄片形、薄壳形等，甚至视为质点等方式给出.

4. 微分三角形中有两个“以直代曲”：$\Delta y\approx \mathrm{d}y$，$\Delta s\approx \mathrm{d}s$.

习题详解

§1　平面图形的面积

1. 求由抛物线$y=x^2$和$y=2-x^2$所围图形的面积.

解　如图10-1所示. 因为图中两条曲线 $y=x^2$ 和 $y=2-x^2$ 的交点为 $P_1(-1,1)$,$P_2(1,1)$,故所求图形的面积 S 为

$$S=\int_{-1}^{1}(2-x^2-x^2)\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x$$
$$=2\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}.$$

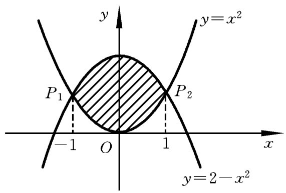

图10-1

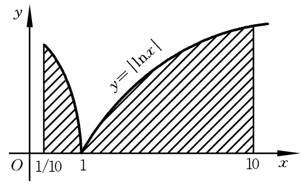

图10-2

2. 求由曲线 $y=|\ln x|$ 与直线 $x=\dfrac{1}{10}$,$x=10$,$y=0$ 所围图形的面积.

解　如图10-2所示. 由曲线与直线所围的面积为

$$S=\int_{1/10}^{10}|\ln x|\mathrm{d}x=-\int_{1/10}^{1}\ln x\mathrm{d}x+\int_{1}^{10}\ln x\mathrm{d}x$$
$$=(-x\ln x+x)\big|_{1/10}^{1}+(x\ln x-x)\big|_{1}^{10}$$
$$=(99\ln 10-81)/10.$$

3. 抛物线 $y^2=2x$ 把圆 $x^2+y^2\leqslant 8$ 分成两部分,求这两部分面积之比.

解　如图10-3所示. 由抛物线 $y^2=2x$ 和圆 $x^2+y^2=8$ 可知,在第一象限的交点为 $P_1(2,2)$,而 S_1 图形是关于 x 轴对称的. 故

$$S_1=2\int_{0}^{2}\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y=2\pi+\frac{4}{3},$$

而
$$S_2=8\pi-S_1=6\pi-\frac{4}{3},$$

因而
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi+\dfrac{4}{3}}{6\pi-\dfrac{4}{3}}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}.$$

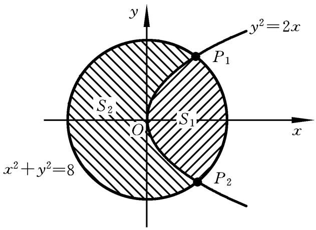

图 10-3

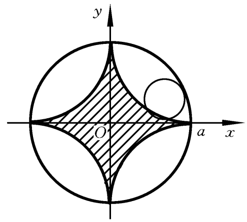

图 10-4

4. 求内摆线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t(a>0)$**所围图形的面积.**

解　如图 10-4 **所示. 由于所围的图形关于** x **轴或** y **轴对称,故所求的面积为**

$$S=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y(t)x'(t)\mathrm{d}t=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t\cdot(-3a\cos^2 t)\cdot\sin t\mathrm{d}t$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t=12a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\mathrm{d}t\right)$$

$$=12a^2\left(\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{8}a^2.$$

5. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$**所围图形的面积.**

解　如图 10-5 **所示. 由于所围图形关于** x **轴对称,故所求的面积为**

$$S=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\left(\pi+2\sin\theta\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

$$=a^2\left(\pi+0+2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

6. 求三叶形曲线 $r=a\sin3\theta\ (a>0)$**所围图形的面积.**

解　如图 10-6 **所示. 由于图形对称,故所求面积为**

$$S=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}a^2\sin^2 3\theta\mathrm{d}\theta\xlongequal{\text{令 }t=3\theta}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\pi a^2.$$

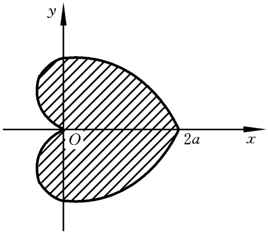

图 10-5

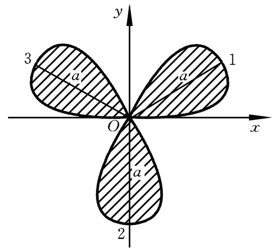

图 10-6

7. 求由曲线 $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1\ (a,b>0)$ **与坐标轴所围图形的面积.**

解　**如图** 10-7 **所示. 由曲线与坐标轴所围的面积为**

$$S=\int_0^a y\mathrm{d}x=b\int_0^a\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6}ab.$$

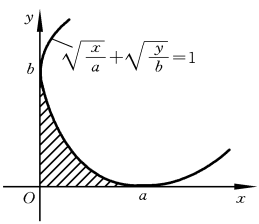

图 10-7

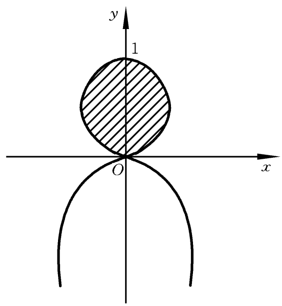

图 10-8

8. 求由曲线 $x=t-t^3, y=1-t^4$ **所围图形的面积.**

解　**如图** 10-8 **所示. 由于所求的图形关于** y **轴对称,故所求图形的面积为**

$$S=2\int_1^0 x\mathrm{d}y=2\int_1^0(t-t^3)\cdot(-4t^3)\mathrm{d}t=8\int_0^1(t^4-t^6)\mathrm{d}t=\frac{16}{35}.$$

9. 求二曲线$r=\sin\theta$**与**$r=\sqrt{3}\cos\theta$**所围公共部分的面积.**

解　如图10-9所示. 由于这二曲线的交点为$\theta=0$和$\theta=\frac{\pi}{3}$,故所求图形的面积为

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos2\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{3}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{5}{24}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

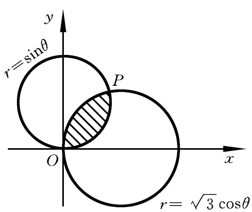

图10-9

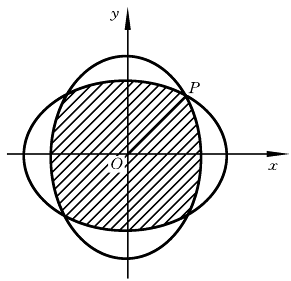

图10-10

10. 求两椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$**与**$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$　$(a>0,b>0)$**所围公共部分的面积.**

解　如图10-10所示. 由于这两椭圆在第一象限的交点为$P\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$,而直线$\overline{OP}$的方程为$y=x$,且图形关于$x$轴,$y$轴对称,故所求图形的面积为

$$S=8\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4b}{a}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-4x^2\right)\Bigg|_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$=4ab\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

§ 2 由平行截面面积求体积

1. 如图10-11所示,直椭圆柱体被通过底面短轴的斜平面所截,试求截得楔形体的体积.

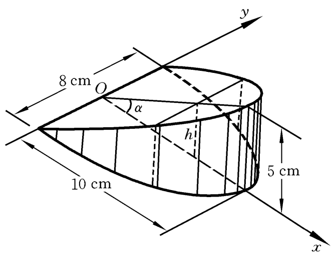

图10-11

解 如图10-11所示,底面边界曲线方程为

$$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{4^2}=1, x\geqslant 0.$$

作截面垂直x轴,则与楔形体交面是一个矩形,其截面面积为

$$S(x)=h\cdot 2y=x\tan\alpha\cdot 2\cdot\frac{4}{5}\sqrt{100-x^2}$$

$$=\frac{1}{2}x\cdot\frac{8}{5}\sqrt{100-x^2}=\frac{4}{5}x\sqrt{100-x^2}.$$

因而所求的体积为

$$V=\int_0^{10}S(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int_0^{10}x\sqrt{100-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{2}{15}(100-x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{10}=\frac{400}{3}\ (\mathrm{cm}^3).$$

2. 求下列平面曲线绕轴旋转所围成立体的体积：

(1) $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant \pi$，绕 x 轴；

(2) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ (a>0), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，绕 x 轴；

(3) $r=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$，绕极轴；

(4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，绕 y 轴.

解　(1) 如图10-12 所示. $y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$绕 x 轴所产生的旋转体体积为

$$V=\pi\int_0^\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}.$$

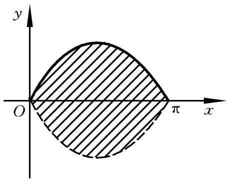

图10-12

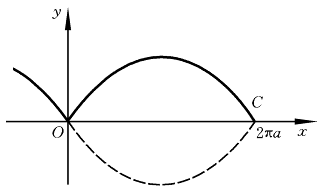

图10-13

(2) 由于$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0, 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$是一摆线，其图形如图10-13 所示，故所求的旋转体体积为

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{2\pi a} y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{2\pi a} a^2(1-\cos t)^2\cdot \mathrm{d}(a(t-\sin t))\\&=\pi a^2\int_0^{2\pi a}(1-\cos t)^2(1-\cos t)\mathrm{d}t\\&=\pi a^2\int_0^{2\pi a}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=5\pi^2a^3.\end{aligned}$$

(3) 由于$r=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$为心形线，如图10-14 所示.

由图可知，曲线关于极轴对称，故只考虑 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 的情形，而 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}\in(0,\pi)$是其稳定点，因而所求的旋转体体积为

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{3}a^3\left(\int_0^{\frac{2\pi}{3}}(1+\cos\theta)^3\sin\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(1+\cos\theta)^3\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

$$=\frac{2\pi a^3}{3\cdot 4}\left[(1+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{0}+(1+\cos\theta)^4\Big|_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}}\right]=\frac{\pi a^3}{3\cdot 2}\cdot 2^4=\frac{8\pi a^3}{3}.$$

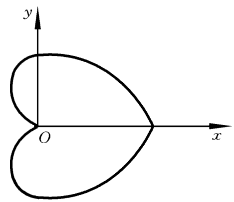

图 10-14

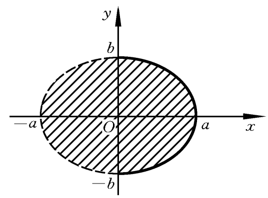

图 10-15

(4) 如图 10-15 所示,椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$绕 y 轴所产生的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_{-b}^{b}x^2\mathrm{d}y=\pi\int_{-b}^{b}\left[a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\right]\mathrm{d}y$$

$$=\pi a^2\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

3. 已知球半径为 r,验证高为 h 的球缺体积

$$V=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)\quad (h\leqslant r).$$

解　球缺如图 10-16 所示,可把球缺的球心看作是在坐标原点. 球缺是曲线 $x^2+y^2=r^2$, $y=r-h$ $(r-h\leqslant y\leqslant r)$绕 y 轴旋转所产生的旋转体. 故其体积为

$$V=\pi\int_{r-h}^{r}x^2\mathrm{d}y=\pi\int_{r-h}^{r}(r^2-y^2)\mathrm{d}y=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right).$$

4. 求曲线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(a>0)$所围平面图形绕 x 轴旋转所得立体的体积.

解　曲线如图 10-17 所示. 旋转所得立体的体积可以看作是第一象限的曲线绕 y 轴旋转所得立体体积的 2 倍,即

$$V=2\pi\int_0^a x^2\mathrm{d}y=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^6 t\cdot 3a\sin^2 t\cdot\cos t\mathrm{d}t=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 t(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=6\pi a^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9 t\mathrm{d}t\right)=6\pi a^3\left(\frac{6!!}{7!!}-\frac{8!!}{9!!}\right)=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

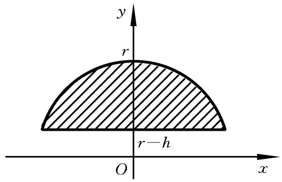

图 10-16

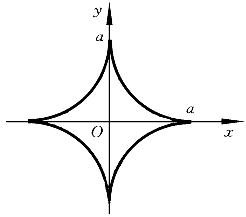

图 10-17

5. 导出曲边梯形 $0\leqslant y\leqslant f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$绕 y 轴旋转所得立体的体积公式为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

解　如图10-18 所示. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积,则对$[a,b]$做任意分割,即$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 而在每个区间$[x_i,x_{i+1}]$上任取一点ξ_i,这样以$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$为底,$f(\xi_i)$为高的小曲边梯形绕 y 轴所产生的环形薄片的体积

$$\Delta V_i\approx 2\pi\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i,$$

因而所有的区间对应的环形薄片的体积和约为所求的体积,即

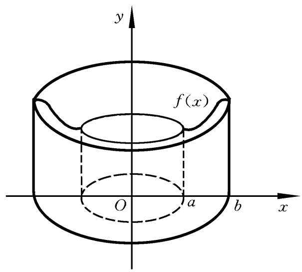

图 10-18

$$V\approx 2\pi\sum_{i=1}^n\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i.$$

故由定积分定义,可知

$$V=\int_a^b 2\pi xf(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

6. 求 $0\leqslant y\leqslant \sin x\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$**所示平面图形绕** y **轴旋转所得立体的体积.**

解　由上题所证的公式,可知所求的体积为

$$V=2\pi\int_0^{\pi}x\cdot\sin x\mathrm{d}x=2\pi\int_{\pi}^{0}x\mathrm{d}\cos x=2\pi\left(x\cos x\Big|_{\pi}^{0}-\int_{\pi}^{0}\cos x\mathrm{d}x\right)=2\pi^2.$$

§3　平面曲线的弧长与曲率

1. 求下列曲线的弧长:

(1) $y=x^{\frac{3}{2}},0\leqslant x\leqslant 4$;

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$;

(3) $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t\ (a>0,0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(4) $x=a(\cos t+t\sin t),y=a(\sin t-t\cos t)\ (a>0,0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(5) $r=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}\ (a>0,0\leqslant\theta\leqslant 3\pi)$;

(6) $r=a\theta\ (a>0,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$.

解　(1) **因为** $y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$,**所以**

$$s=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{4+9x}\mathrm{d}x=\frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}(4+9x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4$$

$$=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

(2) **该曲线的图形如图** 10-19 **所示,而**

$$y'=1-\frac{1}{\sqrt{x}},$$

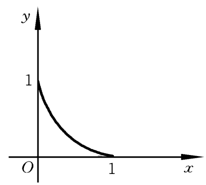

图 10-19

故　$$s=\int_0^1\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{2x-2\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

（3）**因为** $x'(t)=3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)$， $y'(t)=3a\sin^2 t\cdot\cos t$

所以 $$s=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\mathrm{d}t$$
$$=12a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\mathrm{d}t=6a.$$

（4）**因为** $x'(t)=at\cos t$， $y'(t)=at\sin t$

所以 $$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2\cos^2 t+a^2t^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}t\mathrm{d}t=2a\pi^2.$$

（5）**因为** $r'(\theta)=3a\sin^2\frac{\theta}{3}\cdot\cos\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{3}=a\sin^2\frac{\theta}{3}\cdot\cos\frac{\theta}{3}$，

所以 $$s=\int_0^{3\pi}\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}+a^2\sin^6\frac{\theta}{3}}\mathrm{d}\theta$$
$$=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}a\pi.$$

（6）**因为** $r'(\theta)=a$，

所以 $$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\theta^2+a^2}\mathrm{d}\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}+\ln\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$=\frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right].$$

2. 求下列各曲线在指定点处的曲率：

（1）$xy=4$，**在点**$(2,2)$；

（2）$y=\ln x$，**在点**$(1,0)$；

（3）$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$，**在** $t=\frac{\pi}{2}$ **的点**；

（4）$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ $(a>0)$，**在点** $t=\frac{\pi}{4}$ **的点**.

解 （1）**因为** $y'=-\frac{4}{x^2}$， $y''=\frac{8}{x^3}$，

所以 $$K\Big|_{(2,2)}=\left[|y''|\Big/(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_{(2,2)}=\left[\frac{8}{x^3}\Big/\left(1+\frac{16}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_{(2,2)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(2) **因为**
$$y'=\frac{1}{x},\quad y''=-\frac{1}{x^2},$$
所以
$$K\Big|_{(1,0)}=\left[\left|-\frac{1}{x^2}\right|\Big/\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{(1,0)}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$
(3) **因为**
$$x'(t)=a(1-\cos t),\quad y'(t)=a\sin t,$$
$$x''(t)=a\sin t,\quad y''(t)=a\cos t.$$
所以
$$K\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left[|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|\Big/(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{t=\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left[|a^2\cos t(1-\cos t)-a^2\sin^2 t|\Big/(a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{t=\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4a}.$$
(4) **因为** $x'(t)=3a\cos^2 t(-\sin t),\quad y'(t)=3a\sin^2 t\cos t,$
$$x''(t)=6a\cos t\sin^2 t-3a\cos^3 t,\quad y''(t)=6a\sin t\cos^2 t-3a\sin^3 t,$$
即
$$|x'y''-x''y'|=9a^2\sin^2 t\cos^2 t,\quad x'^2(t)+y'^2(t)=9a^2\sin^2 t\cos^2 t,$$
所以
$$K\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left[\frac{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}{(9a^2\sin^2 t\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}\right]\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{3a}.$$

3. 求 a,b **的值,使椭圆** $x=a\cos t,y=b\sin t$ **的周长等于正弦曲线** $y=\sin x$ **在** $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ **上一段的长.**

解　椭圆周长为
$$s_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,$$
而正弦弧长为
$$s_2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x,$$
(**因为** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x.$)

要使 $s_1=s_2$**,则** $a>b$ **时,由**
$$s_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2(1-\sin^2 t)}\,\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

可知,必须 $$b=1,\quad a=\sqrt{2};$$

$b>a$ **时,由**
$$\begin{aligned}s_1&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

可知,必须 $$a=1,\quad b=\sqrt{2}.$$

4. 设曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)$ **给出,且二阶可导,证明它在点** (r,θ) **处的曲率为**

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

证　由于极坐标方程为 $r=r(\theta)$,**故其参数方程为**

$$x=r(\theta)\cos\theta,$$
$$y=r(\theta)\sin\theta.$$

因而
$$x'(\theta)=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta,$$
$$y'(\theta)=r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta,$$

及
$$\begin{aligned}x''(\theta)&=r''(\theta)\cos\theta-r'(\theta)\sin\theta-r'(\theta)\sin\theta-r(\theta)\cos\theta\\&=r''(\theta)\cos\theta-2r'(\theta)\sin\theta-r(\theta)\cos\theta,\\y''(\theta)&=r''(\theta)\sin\theta+r'(\theta)\cos\theta+r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta\\&=r''(\theta)\sin\theta+2r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta,\end{aligned}$$

故利用原教材公式(7),**有**

$$\begin{aligned}K&=|x'y''-x''y'|/(x'^2+y'^2)^{3/2}\\&=|r^2(\theta)+2r'^2(\theta)-r(\theta)r''(\theta)|/(r'^2(\theta)+r^2(\theta))^{3/2}.\end{aligned}$$

5. 用上题公式,求心形线 $r=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ **在** $\theta=0$ **处的曲率、曲率半径和曲率圆.**

解　因为 $$r'(\theta)=-a\sin\theta,\quad r''(\theta)=-a\cos\theta,$$

所以心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ **在** $\theta=0$ **处的曲率为**

$$\begin{aligned}K&=\left[\frac{|a^2(1+\cos\theta)^2+2a^2\sin^2\theta+a^2\cos\theta(1+\cos\theta)|}{[a^2\sin^2\theta+a^2(1+\cos\theta)^2]^{3/2}}\right]\Bigg|_{\theta=0}\\&=\frac{|a^2\cdot 4+0+a^2\cdot 2|}{(a^2\cdot 4)^{3/2}}=\frac{3}{4a}.\end{aligned}$$

曲率半径为 $$R=\frac{1}{K}=\frac{4}{3}a.$$

而当 $\theta=0$ **时，曲率中心在极轴上的点为**

$$x_0=a\cos 0\cdot(1+\cos 0)=2a,$$

$$y_0=a\sin 0(1+\sin 0)=0.$$

因而曲率圆方程为 $$\left[x-\left(2a-\frac{4}{3}a\right)\right]^2+y^2=\left(\frac{4}{3}a\right)^2,$$

即 $$\left(x-\frac{2}{3}a\right)^2+y^2=\frac{16}{9}a^2.$$

6. 证明抛物线 $y=ax^2+bx+c$ **在顶点处的曲率为最大.**

证　因为 $$y'=2ax+b,\quad y''=2a,$$

所以曲率为 $$K=|2a|/[1+(2ax+b)^2]^{3/2}.$$

显然当 $2ax+b=0$ **时，**K **最大，即**

$$x=-\frac{b}{2a}.$$

而当$x=-\dfrac{b}{2a}$**时，**$y=c-\dfrac{b^2}{4a}$**，正是抛物线**$y=ax^2+bx+c$ **的顶点，即抛物线**$y=ax^2+bx+c$ **在顶点**$\left(-\dfrac{b}{2a},c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$**时，曲率为最大. 最大曲率为**

$$K_{\max}=|2a|.$$

7. 求曲线 $y=e^x$ **上曲率最大的点.**

解　因为 $$y'=e^x,\quad y''=e^x,$$

所以曲率为 $$K=e^x/(1+e^{2x})^{3/2}.$$

设 $$f(x)=e^x/(1+e^{2x})^{3/2},$$

则 $$f'(x)=\frac{e^x[(1+e^{2x})^{3/2}-3e^{2x}(1+e^{2x})^{1/2}]}{(1+e^{2x})^3}$$

令 $f'(x)=0$**，得惟一驻点**

$$x=-\frac{1}{2}\ln 2.$$

而当 $x<-\dfrac{1}{2}\ln 2$ **时** $f'(x)>0$**，当** $x>-\dfrac{1}{2}\ln 2$ **时** $f'(x)<0$**，即** $x=-\dfrac{1}{2}\ln 2$ **为** $f(x)$**(即曲率** K**)的最大值点，其相应的** $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在$\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$点时的曲率最大.

§4　旋转曲面的面积

1. 求下列平面曲线绕指定轴旋转所得旋转曲面的面积：

（1）$y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$，绕 x 轴；

（2）$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ (a>0, 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，绕 x 轴；

（3）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕 y 轴；

（4）$x^2+(y-a)^2=r^2\quad (r<a)$，绕 x 轴.

解　（1）因为
$$y'=\cos x,$$
所以所求的旋转曲面面积为
$$\begin{aligned} S &=2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{1+y'}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &=-2\pi\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}\cos x=2\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]. \end{aligned}$$

（2）因为
$$x'(t)=a(1-\cos t),\quad y'(t)=a\sin t$$
所以
$$\begin{aligned} S &=2\pi\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t \\ &=2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &=4\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{64}{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

（3）椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为
$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

当 $a=b$ 时，
$$x'^2(t)+y'^2(t)=a,$$
故
$$\begin{aligned} S &=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t \\ &=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\,\mathrm{d}t=4\pi a^2. \end{aligned}$$

当 $a>b$ 时，　$x'^2(t)+y'^2(t)=b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t$，

故
$$S=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$
$$=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\mathrm{d}t$$
$$=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$
$$=2\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

当 $a<b$ 时，　$x'^2(t)+y'^2(t)=b^2-(b^2-a^2)\sin^2 t$，

故
$$S=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$
$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\sqrt{b^2-(b^2-a^2)\sin^2 t}\mathrm{d}t$$
$$=2\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arcsin\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}.$$

(4) 曲线 $x^2+(y-a)^2=r^2$ 如图 10-20 所示. 其圆弧可分上、下半圆弧，其参数方程分别为

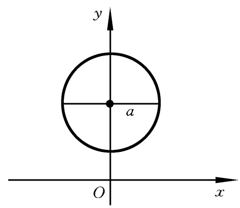

图 10-20

上半圆弧：$\begin{cases}x=r\cos t,\\ y=a+r\sin t,\end{cases}$　$0\leqslant t\leqslant\pi$，

下半圆弧：$\begin{cases}x=r\cos t,\\ y=a-r\sin t,\end{cases}$　$0\leqslant t\leqslant\pi$.

而这上、下两半圆弧绕 x 轴所产生的旋转面面积分别为
$$S_1=2\pi\int_0^{\pi}y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$
$$=2\pi\int_0^{\pi}(a+r\sin t)\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\mathrm{d}t$$
$$=2\pi\int_0^{\pi}r(a+r\sin t)\mathrm{d}t=2\pi r(a\pi+2r).$$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= 2\pi\int_0^{\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi\int_0^{\pi} (a-r\sin t)\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi r\int_0^{\pi} (a-r\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi r(a\pi-2r).
\end{aligned}
$$

故所求的旋转曲面的面积为

$$S=S_1+S_2=4\pi^2 ar.$$

2. 设平面光滑曲线由极坐标方程

$$r=r(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\quad ([\alpha,\beta]\subset[0,\pi],r(\theta)\geqslant 0)$$

给出，试求它绕极轴旋转所得旋转曲面的面积计算公式.

解　**因为所给的极坐标方程**$r=r(\theta)$**在直角坐标系下为**

$$x=r(\theta)\cos\theta,y=r(\theta)\sin\theta,$$

且由$[\alpha,\beta]\subset[0,\pi]$**和**$r(\theta)\geqslant 0$**，可知** $y=r(\theta)\sin\theta\geqslant 0$**，而**

$$
\begin{aligned}
x'^2(\theta)+y'^2(\theta) &= (r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta)^2+(r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta)^2 \\
&= r'^2(\theta)+r^2(\theta).
\end{aligned}
$$

所以曲线$r=r(\theta)$**绕极轴，即** x **轴旋转所得旋转曲面的面积为**

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y(\theta)\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)\sin\theta\,\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

3. 试求下列极坐标曲线绕极轴旋转所得旋转曲面的面积：

(1) **心形线**$r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$；

(2) **双纽线**$r^2=2a^2\cos 2\theta$ $(a>0)$.

解　(1) **由于曲线关于极轴对称，且**

$$r'(\theta)=-a\sin\theta,$$

故所求的面积为

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta\,\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2(1+\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{32}{5}\pi a^2.
\end{aligned}
$$

(2) 双纽线 $r^2=2a^2\cos 2\theta\ (a>0)$ 的图形如图 10-21 所示，其参数方程为

$$\begin{cases}x(\theta)=\sqrt{2a^2\cos 2\theta}\cdot\cos\theta,\\ y(\theta)=\sqrt{2a^2\cos 2\theta}\cdot\sin\theta,\end{cases}$$

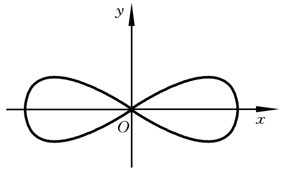

图 10-21

且关于 x 轴对称，故所求的面积为

$$S=2\left(2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2a^2\cos 2\theta}\sin\theta\cdot\frac{2a^2}{\sqrt{2a^2\cos^2\theta}}\mathrm{d}\theta\right)$$

$$=8\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta=8\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi a^2.$$

§5　定积分在物理中的某些应用

1. 有一等腰梯形闸门，它的上、下两条底边各长为 10 m 和 6 m，高为 20 m，计算当水面与上底边相齐时闸门一侧所受的静压力.

解　如图 10-22 所示建立坐标系，则直线 $\overline{AB}$ 的方程为

$$y=5-\frac{x}{10},$$

直线 $\overline{DC}$ 的方程为

$$y=\frac{x}{10}-5.$$

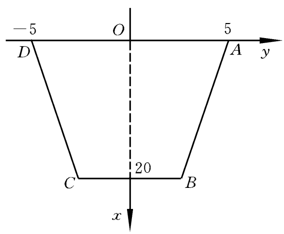

图 10-22

且设水的密度为 $\rho=10^3\ \mathrm{kg/m^3}$，则闸门一侧所受的压力为

$$F=\rho g\int_0^{20}x\left[5-\frac{x}{10}-\left(\frac{x}{10}-5\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=2\rho g\int_0^{20}x\left(5-\frac{x}{10}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{22}{3}\cdot g\cdot\rho\times 10^2=14\ 373.33\ (\mathrm{kN}).$$

2. 边长为 a 和 b 的矩形薄板，与液面成 $\alpha(0<\alpha<90^\circ)$ 角斜沉于液体中. 设 $a>b$，长边平行于液面，上沿位于深 h 处，液体的密度为 ρ，试求薄板每侧所受的静压力.

解　如图10-23所示建立坐标系. 在液体内x处,作用在薄板条(阴影部分)上的微压力为

$$\mathrm{d}F=a\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha}\cdot x\rho g,$$

则积分区间从h到$h+b\sin\alpha$. 故薄板每侧所受的静压力为

$$F=\int_h^{h+b\sin\alpha}a\cdot\frac{x\rho g}{\sin\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{a\rho g}{\sin\alpha}x^2\Big|_h^{h+b\sin\alpha}=\frac{1}{2}ab\rho g(2h+b\sin\alpha).$$

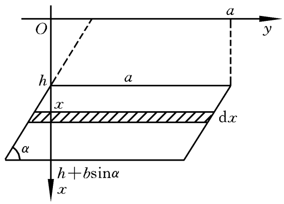

图10-23

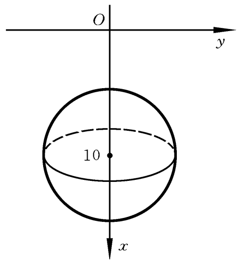

图10-24

3. 直径为6m的一球浸入水中,其球心在水平面下10 m处,求球面上所受静压力.

解　如图10-24所示建立坐标系. xOy面上截面圆周方程为

$$(x-10)^2+y^2=3^2,$$

而球面在水深x处所受到的压力的微元为

$$\mathrm{d}F=2\pi g\sqrt{3^2-(x-10)^2}\mathrm{d}x,$$

故球面所受的总(静)压力为

$$F=2\pi g\int_7^{13}x\ \sqrt{9-(x-10)^2}\mathrm{d}x\approx 1108.35(\mathrm{kN})$$

4. 设在坐标轴的原点有一质量为m的质点,在区间$[a,a+l]$ $(a>0)$上有一质量为M的均匀细杆,试求质点与细杆之间的万有引力.

解　如图10-25所示建立坐标系. 在$[a,a+l]$上任取一小区间$[x,x+$

$\Delta x]$，当 Δx 很小时，可将这一小段细杆看作一质点，其质量

$$dM=\frac{M}{l}\cdot dx,$$

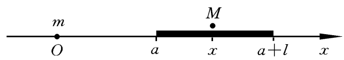

图 10-25

由万有引力公式，可知

$$dF=\frac{k\cdot m\cdot dM}{r^2}=\frac{k\cdot m\cdot M}{x^2\cdot l}dx,$$

故所求的万有引力为

$$F=\int_a^{a+l}\frac{kmM}{lx^2}dx=\frac{kmM}{l}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^{a+l}=\frac{kmM}{a(a+l)}.$$

其中，k 为引力常数.

5. 设有两条各长为 l 的均匀细杆在同一直线上，中间离开距离 c，每根细杆的质量为 M，试求它们之间的万有引力.

解　如图 10-26 所示建立坐标系. 两细杆在 x 轴上. 在第二根细杆中取一小段 $[x,x+dx]$，其质量为 $\frac{M}{l}dx$，它与第一根细杆中心距离为 $x+c+\frac{l}{2}$，利用上题结果，可知第二根细杆中一小段 $[x,x+dx]$ 与第一根细杆的万有引力微元是

$$dF=\frac{k\cdot M\cdot\frac{M}{l}dx}{(x+c)(x+c+l)}=\frac{kM^2dx}{l\left[\left(x+c+\frac{l}{2}\right)^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]},$$

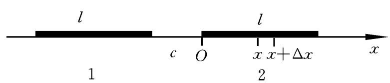

图 10-26

故两细杆之间的万有引力为

$$F=\int_0^l \frac{kM^2\mathrm{d}x}{l\left[\left(x+c+\frac{l}{2}\right)^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]}=\frac{k}{l}M^2\int_0^l\left(\frac{1}{x+c}-\frac{1}{x+c+l}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{kM^2}{l^2}\ln\frac{(l+c)^2}{c(c+2l)}.$$

6. 设有半径为 r 的半圆形导线，均匀带电，电荷密度为 δ，在圆心处有一单位正电荷，试求它们之间作用力的大小.

解　如图10-27所示建立坐标系. 将单位正电荷置于原点，中心角为 $\mathrm{d}\varphi$ 的小段导线作为一点电荷，则由库仑定律可知，它对电荷的作用力为

$$\mathrm{d}F=k\,\frac{1\cdot\delta}{r^2}\mathrm{d}s,$$

即

$$\mathrm{d}F_x=\mathrm{d}F\cdot\cos\theta,\quad \mathrm{d}F_y=\mathrm{d}F\cdot\sin\theta.$$

而由于导线对称，故水平分力 $\mathrm{d}F_x$ 相互抵消，从而有

$$F_y=\int_0^\pi\frac{k\delta}{r^2}\sin\theta\mathrm{d}s=\frac{k\delta}{r}\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta=2\,\frac{k\delta}{r},$$

即所求的作用力大小为 $2\,\frac{k\delta}{r}$.

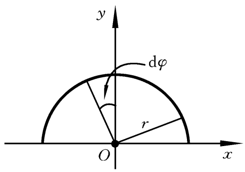

图10-27

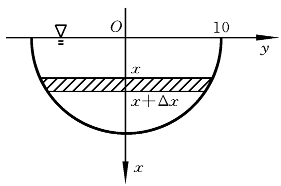

图10-28

7. 一个半球形(直径为 20 m)的容器内盛满了水，试问把水抽尽需作多少功?

解　如图10-28所示建立坐标系. 容器中深度为 x 到 $x+\Delta x$ 的一层水被抽到容器外所作的微功为(水密度为 10^3 kg/m^3)

$$\mathrm{d}W\approx x\times\text{所抽水的体积}\times\text{水密度}\times g,$$

而

$$\text{所抽水的体积}\approx\pi(10^2-x^2)\cdot\Delta x,$$

故所求的功为

$$W=\int_0^{10}10^3\cdot g\pi x(10^2-x^2)\mathrm{d}x=25\pi g\times 10^5(\mathrm{J}).$$

8. 长 10 m 的铁索下垂于矿井中，已知铁索每米的质量为 8 kg，问将此铁索提出地面需作多少功？

解　设 x 轴正向为铁索的下垂方向，当 Δx 很小时，把 x 到 $x+\Delta x$ 一段铁索提出地面所作的微功为

$$\mathrm{d}W=8gx\mathrm{d}x,$$

故所求的功为

$$W=\int_0^{10}8gx\mathrm{d}x=400\ g.$$

9. 一物体在某介质中按 $x=ct^3$ 作直线运动，介质的阻力与速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 的平方成正比. 计算物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时克服介质阻力所作的功.

解　因为 $x=ct^3$，所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3ct^2,$$

而该物体在时间段 $[t,t+\Delta t]$ 内克服介质阻力所作的功的微元为

$$\mathrm{d}W=F\mathrm{d}x=k(3ct^2)^2\cdot(3ct^2\mathrm{d}t)=27c^3kt^6\mathrm{d}t,$$

故所求的功为

$$W=\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{c}}}\mathrm{d}W=\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{c}}}27c^3kt^6\mathrm{d}t=\frac{27}{7}ka^{\frac{7}{3}}c^{\frac{2}{3}}.$$

10. 半径为 r 的球体沉入水中，其密度与水相同，试问将球体从水中捞出需作多少功？

解　如图 10-29 所示建立坐标系. 由于球体的密度与水的密度相同，故将位于 $[x,x+\Delta x]$ 的球体抬到水面时不作功，作功只是从离开水面时才开始，且 xOy 面的圆的方程为

$$(x-r)^2+y^2=r^2.$$

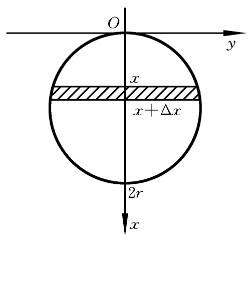

图 10-29

故将$[x,x+\Delta x]$的球体提升到$[x-2r,x+\mathrm{d}x-2r]$位置时所作的微功为(ρ为水的密度)

$$\mathrm{d}W=\pi y^2\mathrm{d}x\cdot\rho g(2r-x),$$

故所求的功为

$$\begin{aligned}W&=\rho g\pi\int_0^{2r}(2r-x)[r^2-(x-r)^2]\mathrm{d}x\\&=\rho g\pi\int_0^{2\pi}(4r^2x-4rx^2+x^3)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\rho g\pi r^4.\end{aligned}$$

§6　定积分的近似计算

1. 分别用梯形法和抛物线法近似计算$\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}$(将积分区间十等分).

解　(1) 梯形法.

取$n=10$,则

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}&\approx\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right)\\&=\frac{2-1}{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{10}{11}+\frac{10}{12}+\cdots+\frac{10}{19}+\frac{10}{2\cdot20}\right)\\&=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.9}+\frac{1}{4}\right)\approx0.6937.\end{aligned}$$

(2) 抛物线法.

由公式

$$\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})],$$

取$n=10$,得

$$\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}\approx\frac{1}{60}\left[1+\frac{1}{2}+4\left(\frac{20}{21}+\frac{20}{23}+\cdots+\frac{20}{39}\right)+2\left(\frac{20}{22}+\frac{20}{24}+\cdots+\frac{20}{38}\right)\right]\approx0.6931.$$

2. 用抛物线法近似计算$\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$(分别将积分区间二等分、四等分、六等分).

解　当 $n=2$ 时，

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{12}\left[1+4\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}+\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\right)+2\cdot\frac{2}{\pi}\right]\approx 1.8524.$$

当 $n=4$ 时，

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{24}\left[1+4\left(\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{8}+\frac{8}{3\pi}\sin\frac{3}{8}\pi+\frac{8}{5\pi}\sin\frac{5}{8}\pi+\frac{8}{7\pi}\sin\frac{7}{8}\pi\right)\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}+\frac{2}{\pi}+\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\right)\right]$$
$$\approx 1.8522.$$

当 $n=6$ 时，

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{36}\left[1+4\left(\frac{12}{\pi}\sin\frac{\pi}{12}+\frac{2\sqrt{2}}{\pi}+\frac{12}{5\pi}\sin\frac{5}{12}\pi+\frac{12}{7\pi}\sin\frac{7}{12}\pi\right.\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{12}{11\pi}\sin\frac{11}{12}\pi\right)$$
$$\left.+2\left(\frac{3}{\pi}+\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{2}{\pi}+\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}+\frac{3}{5\pi}\right)\right]\approx 1.8519.$$

3. 图 10-30 所示的为河道某一截面图，试由测得数据用抛物线法求截面面积.

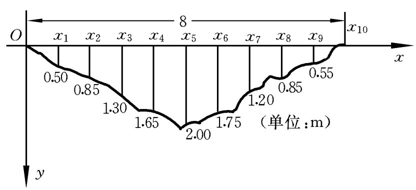

图 10-30

解　如图 10-30 所示建立坐标系，则所求截面面积为

$$S=\int_0^8 y\mathrm{d}x\approx\frac{8}{30}[0+0+4(0.5+1.3+2.0+1.2+0.55)$$
$$+2(0.85+1.65+1.75+0.85)]$$
$$=8.64(\mathrm{m}^2).$$

4. 下表所列为夏季某一天每隔两小时测得的气温：

时间(t_i)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
温度(C_i)	25.8	23.0	24.1	25.6	27.3	30.2	33.4	35.0	33.8	31.1	28.2	27.0	25.0

(1) 按积分平均$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ 求这一天的平均气温，其中定积分值由三种近似法分别计算；

(2) 若按算术平均$\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}C_{i-1}$或$\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}C_i$ 求得平均气温，那么它们与矩形法积分平均和梯形法积分平均各有什么联系？简述理由.

解　(1) 矩形法.

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t &\approx \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{12} f(t_i)\Delta t_i\\ &\approx \frac{1}{24}\cdot 2\cdot(25.8+23+24.1+25.6+\cdots+28.2+27+25)\\ &\approx 28.71.\end{aligned}$$

梯形法.

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t &\approx \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{12} \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta t_i\\ &\approx \frac{1}{24}\cdot 2\cdot\left(\frac{25.8}{2}+23+24.1+\cdots+28.2+27+\frac{25}{2}\right)\\ &\approx 28.68.\end{aligned}$$

抛物线法.

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \approx{}& \frac{1}{36}[y_0+y_{12}+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9+y_{11})\\ &+2(y_2+y_4+y_6+y_8+y_{10})]\\ \approx{}& 28.67.\end{aligned}$$

(2) 算术平均所求的平均气温表达式是

$$\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}C_i\left(\text{或}\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}C_{i-1}\right),$$

而矩形法所求的平均气温表达式是

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \approx \frac{1}{24}\times\sum_{i=1}^{12} f(t_i)\Delta t_i = \frac{1}{24}\times 2\times\sum_{i=1}^{12} f(t_i) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} C_i,$$

即这两种算法相同. 而算术平均与梯形法相比,只是在梯形法中 C_0 和 C_{12} 用 $C_0/2$ 及 $C_{12}/2$ 代替罢了,其它一样.

第十一章　反常积分

知识要点

1. 若一个反常积分有多个奇点(包括$\pm\infty$),则应将积分分成小区间上的积分,其中每个积分仅在其积分区间端点上有奇点,而反常积分的收敛定义为每个小区间上的反常积分均收敛.

2. 反常积分计算的三大基本方法.

设反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ (b>a)$仅在$x=a$或$x=b$处有奇点(包括$\pm\infty$),则有如下计算方法.

(1) 广义牛顿-莱布尼茨公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{a^+}^{b^-}=F(b-0)-F(a+0)\ (a<b),$$

其中,$f(x)$在(a,b)上至多除去有限个点外连续,$F(x)$在(a,b)上连续且至多除去有限个点外有$F'(x)=f(x)$.

在公式中,若$F(a+0)$,$F(b-0)$中有一个不存在时,则积分发散.

(2) 分部积分公式:

$$\int_a^b u\mathrm{d}v=uv\Big|_{a^+}^{b^-}-\int_a^b v\mathrm{d}u\ (a<b),$$

其中,$u(x)$,$v(x)$在(a,b)上连续,$u'(x)$,$v'(x)$在(a,b)上除去有限个点外存在且连续,$uv\Big|_{a^+}^{b^-}$存在(有限).

若以上条件满足,积分$\int_a^b u\mathrm{d}v$与$\int_a^b v\mathrm{d}u$收敛性相同.

(3) 积分换元公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \quad (a<b), \qquad ①$$

其中,$\varphi(t)$在(α,β)上连续、单调且除有限个点外$\varphi'(t)$在(α,β)上连续,$\varphi(\alpha+0)=a,\varphi(\beta-0)=b$.

若以上条件满足,等式①左、右两边积分收敛性相同.

3. 绝对收敛的反常积分必收敛,但收敛却又不绝对收敛的反常积分称为条件收敛. 绝对收敛与条件收敛是反常积分收敛的前提下互相不包含的两个对立概念,注意予以区分.

4. 反常积分敛散性判定要点.

这里只就无穷积分进行叙述,对于瑕积分也有类似结果. 一般判别法使用可按以下次序考虑.

(1) 若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,则可考察$x\to+\infty$时无穷小量$f(x)$的阶来判定$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$的收敛性(原教材中定理11.2推论3).

(2) 用比较判别法或比较判别法的极限形式来判定$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$的收敛性(原教材中定理11.2及其推论1、推论2).

(3) 用阿贝尔判别法和狄利克雷判别法可判定$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛,但其是绝对收敛还是条件收敛还得进一步讨论.

(4) 用柯西准则判定$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛.

(5) 利用拆项、分部积分法或积分换元法,变换积分的形式,再进行反常积分敛散性的判定.

习 题 详 解

§1 反常积分概念

1. 讨论下列无穷积分是否收敛?若收敛,则求其值:

(1) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$；　(4) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)}$；

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$；　(6) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$；

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{x}\sin x\mathrm{d}x$；　(8) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解　(1) $$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x^2$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(\mathrm{e}^{-b^2}-\mathrm{e}^0) = \frac{1}{2}.$$

故 $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ **收敛**.

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0.$$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ **收敛**.

(3) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x}} = \lim_{b\to+\infty}\left(-2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)\Big|_0^b = 2.$$

故 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$ **收敛**.

(4) $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}-\ln|x|+\ln|1+x|\right)\Big|_1^b = 1-\ln 2.$$

故 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)}$ **收敛**.

(5) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2+2^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2+2^2}$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}\arctan\left(x+\frac{1}{2}\right)\Big|_a^0$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}\arctan\left(x+\frac{1}{2}\right)\Bigg|_0^b$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

故$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$收敛.

(6) $$\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\sin x dx$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}[e^{-x}(-\sin x-\cos x)]\Big|_0^b=\frac{1}{2}.$$

故$\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx$ 收敛.

(7) $$\int_{-\infty}^{+\infty}e^x\sin x dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\sin x dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^x\sin x dx.$$

而$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b e^x\sin x dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}\Big|_0^b$ 发散. 故$\int_{-\infty}^{+\infty}e^x\sin x dx$ 发散.

(8) $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{b\to+\infty}\ln|b+\sqrt{1+b^2}|=+\infty.$$

故$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$发散.

2. 讨论下列瑕积分是否收敛？若收敛,则求其值:

(1) $\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}$;　　(2) $\int_0^1\frac{dx}{1-x^2}$;

(3) $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$;　　(4) $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(5) $\int_0^1\ln x dx$;　　(6) $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$;

(7) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$;　　(8) $\int_0^1\frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

解　(1) 因为$f(x)=1/(x-a)^p$ 在$(a,b]$上连续,从而在$(a,b]$上可积,因此$x=a$ 为瑕点. 故

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}=\lim_{u\to a}\int_u^b\frac{dx}{(x-a)^p}=\lim_{u\to a}\int_u^b(x-a)^{-p}d(x-a)$$
$$=\lim_{u\to a}\frac{1}{1-p}(x-a)^{1-p}\Big|_u^b$$

$$=\lim_{u\to a}\frac{1}{1-p}[(b-a)^{1-p}-(u-a)^{1-p}].$$

当 $p<1$ 时,

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}=\frac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}\text{收敛}.$$

当 $p=1$ 时,

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}\text{发散}.$$

当 $p>1$ 时,

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}\text{亦发散}.$$

(2) $$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\lim_{a\to1^-}\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{a\to1^-}\left[\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1-x}+\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to1^-}\ln\frac{1+x}{1-x}\bigg|_0^a=\frac{1}{2}\lim_{a\to1^-}\ln\frac{1+a}{1-a}=+\infty.$$

故 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$ 发散.

(3) $$\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1|}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1|}}+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1|}}$$
$$=\lim_{a\to1^-}\int_0^a(1-x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\lim_{b\to1^+}\int_b^2(x-1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{a\to1^-}(-2(1-x)^{\frac{1}{2}})\bigg|_0^a+\lim_{b\to1^+}(2(x-1)^{\frac{1}{2}})\bigg|_b^0=4.$$

故 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1|}}$ 收敛.

(4) $$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{a\to1^-}\int_0^a\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\lim_{a\to1^-}\int_0^a(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{a\to1^-}2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\bigg|_0^a=\lim_{a\to1^-}(1-(1-a^2)^{\frac{1}{2}})=1.$$

故 $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 收敛.

(5) $$\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=\lim_{a\to0^+}\int_a^1\ln x\mathrm{d}x=\lim_{a\to0^+}\left(x\ln x\bigg|_a^1-\int_a^1\mathrm{d}x\right)$$

$$=\lim_{a\to 0^+}(-a\ln a-1-a)=-1.$$

故$\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$ 收敛.

(6) $$\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x=\lim_{a\to 1^-}\int_0^a\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=\frac{2t}{(1+t^2)^2}]{\text{令 } t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\lim_{a\to 1^-}\int_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}}t\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{a\to 1^-}\left(-\frac{t}{1+t^2}+\arctan t\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}}=\frac{\pi}{2}.$$

故$\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$ 收敛.

(7) $$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\int_a^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}+\lim_{b\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\arcsin(2x-1)\Big|_a^{\frac{1}{2}}+\lim_{b\to 1^-}\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^b$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

故$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$收敛.

(8) $$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^p}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^p}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^p}$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\int_a^{\frac{1}{2}}(\ln x)^{-p}\mathrm{d}\ln x+\lim_{b\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^b(\ln x)^{-p}\mathrm{d}\ln x$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_a^{\frac{1}{2}}+\lim_{b\to 1^-}\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_{\frac{1}{2}}^b$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{1-p}\left[\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{1-p}-(\ln a)^{1-p}\right]$$

$$+\lim_{b\to 1^-}\frac{1}{1-p}\left[(\ln b)^{1-p}-\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{1-p}\right]$$

$$\xlongequal{\text{令}}u(p)+v(p),$$

而 $u(p)=\lim\limits_{a\to 0^+}\frac{1}{1-p}\left[\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{1-p}-(\ln a)^{1-p}\right]:\begin{cases}\text{当 } p>1 \text{ 时}, & u(p)\text{收敛},\\ \text{当 } p\leqslant 1 \text{ 时}, & u(p)\text{发散};\end{cases}$

$v(p)=\lim\limits_{b\to 1^-}\frac{1}{1-p}\left[(\ln b)^{1-p}-\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{1-p}\right]:\begin{cases}\text{当 } p<1 \text{ 时}, & v(p)\text{收敛},\\ \text{当 } p\geqslant 1 \text{ 时}, & v(p)\text{发散}.\end{cases}$

故 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ 发散.

3. 举例说明：瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 不一定收敛.

解　由原教材 P268 的例 6 可知，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{1}{2}}}$ 收敛，但 $\int_0^1\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 是发散的.

4. 举例说明：$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续时，不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

解　由原教材第十一章 §2 P274 例 4 可知 $\int_1^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x)=\cos x^2$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x^2$ 是是不存在的.

5. 证明：若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则 $A=0$.

证　不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$，则对于 $\varepsilon_1=A/2$，$\exists M_1$，当 $x>M_1$ 时，有 $f(x)\geqslant\frac{A}{2}$，从而

$$\int_{M_1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{M_1}^{+\infty}\frac{A}{2}\mathrm{d}x.$$

而 $\int_{M_1}^{+\infty}\frac{A}{2}\mathrm{d}x$ 发散. 由此可得 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散. 但这与题意矛盾，故

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

6. 证明：若 f 在 $[a,+\infty)$ 上可导，且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$

证　因为 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}(f(b)-f(a))$，

即
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x+f(a),$$

而 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故由上题可知
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

§2　无穷积分的性质与收敛判别

1. 证明定理 11.2 及其推论 1.

证　(1) 定理11.2：设定义在 $[a,+\infty)$ 上的两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，且满足
$$|f(x)|\leqslant g(x),\quad x\in[a,+\infty),$$
则当 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 必收敛.

定理 11.2 的证明如下.

由定理 11.1 知，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A>a$，$\forall p_1>A$，$p_2>A$，有
$$\left|\int_{p_1}^{p_2}|g(x)|\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$
再由不等式 $|f(x)|\leqslant g(x)$，有
$$\left|\int_{p_1}^{p_2}|f(x)|\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_{p_1}^{p_2}g(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$
即
$$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x\ \text{收敛}.$$

(2) 定理11.2 的推论1：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在任何 $[a,u]$ 上可积，$g(x)>0$，且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=c$，则有

i) 当 $0<c<+\infty$ 时，$\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 同敛态；

ii) 当 $c=0$ 时，由 $\displaystyle\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，可推知 $\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 也收敛；

iii) 当 $c=+\infty$ 时，由 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散，可推知 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 也发散.

定理 11.2 的推论 1 证明如下.

当 $0\leqslant c<+\infty$ 及 $g(x)>0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}=c$ 存在，故由极限定义可知，$\forall \varepsilon>0$，$\exists A>0$，对 $\forall x>A$，有

$$c-\varepsilon<\frac{|f(x)|}{g(x)}<c+\varepsilon,$$

即
$$(c-\varepsilon)g(x)<|f(x)|<(c+\varepsilon)g(x).$$

故由定理 11.2 的结论知 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 是同敛态，即 i)、ii) 成立.

而当 $c=+\infty$ 时，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}=c$ 可知，取 $B>0$，$\exists A>0$，对 $\forall x>A$，有

$$\frac{|f(x)|}{g(x)}>B,$$

即
$$|f(x)|>g(x)B.$$

故当 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 亦发散，即 iii) 成立.

2. 设 f 和 g 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数，对任何 $u>a$，它们在 $[a,u]$ 上都可积. 证明：若 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x$ 也都收敛.

证　因为 $\forall x\in[a,+\infty)$，有

$$0\leqslant|f(x)g(x)|\leqslant\frac{1}{2}[f^2(x)+g^2(x)],$$

而 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，即 $\int_a^{+\infty}[f^2(x)+g^2(x)]\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

又因为　$[f(x)+g(x)]^2=f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)$，

而 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，所以 $\int_a^{+\infty}[f(x)+$

$g(x)]^2\mathrm{d}x$**亦收敛.**

3. 设 f, g, h **是定义在** $[a,+\infty)$ **上的三个连续函数，且成立不等式** $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. **证明：**

（1）**若** $\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ **与** $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ **都收敛，则** $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **也收敛；**

（2）**又若** $\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x=A$，**则** $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=A$.

证　（1）**因** $\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ **和** $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ **都收敛，可得** $\int_a^{+\infty}(g(x)-h(x))\mathrm{d}x$ **亦收敛. 而**

$$0\leqslant f(x)-h(x)\leqslant g(x)-h(x),$$

即 $\int_a^{+\infty}(f(x)-h(x))\mathrm{d}x$ **亦收敛. 故**

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &=\int_a^{+\infty}[(f(x)-h(x))+h(x)]\mathrm{d}x\\&=\int_a^{+\infty}(f(x)-h(x))\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

是收敛的.

（2）**由**

$$\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x=A$$

及

$$0\leqslant f(x)-h(x)\leqslant g(x)-h(x),$$

有

$$0\leqslant \lim_{b\to+\infty}\int_a^b(f(x)-h(x))\mathrm{d}x\leqslant \lim_{b\to+\infty}\int_a^b(g(x)-h(x))\mathrm{d}x=0,$$

即

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b(f(x)-h(x))\mathrm{d}x=0,$$

故

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &=\int_a^{+\infty}[(f(x)-h(x))+h(x)]\mathrm{d}x\\&=\int_a^{+\infty}(f(x)-h(x))\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x=A.\end{aligned}$$

4. 讨论下列无穷积分的收敛性：

（1）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$；　　（2）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$；

（3）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$；　　（4）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$；

（5）$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$；　　（6）$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x\ (n,m\geqslant 0)$.

解　（1）**因为**
$$x^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\to 1\ (x\to+\infty),$$
所以由柯西判别法可知$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$**收敛**.

（2）**因为**
$$x^2\cdot\frac{x}{1-\mathrm{e}^x}\to 0\ (x\to+\infty),$$
所以$\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1-\mathrm{e}^x}$**收敛**.

（3）**因为**
$$x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}}\to 1\ (x\to+\infty),$$
所以无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$**发散**.

（4）**因为**
$$x^2\cdot\frac{x\arctan x}{1+x^3}\to\frac{\pi}{2}\quad(x\to+\infty),$$
所以无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$ **收敛**.

（5）**当** $0<n\leqslant 1$ **时**，
$$x^{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n}\to+\infty\ (x\to+\infty),$$
即$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$ **发散**；

当 $n>1$ **时**，　$x^{1+\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n}\to 0\ (x\to+\infty)$，

即$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$ **收敛**.

（6）**因为**
$$x^{n-m}\cdot\frac{x^m}{1+x^n}\to\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=0,\\ 1, & n>0,\end{cases}$$
所以，当 $n-m>1$**，即** $n>m+1$ **时**，$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$ **收敛**；

当 $n-m\leqslant 1$**，即** $n\leqslant m+1$ **时**，$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$ **发散**.

5. 讨论下列无穷积分为绝对收敛还是条件收敛：

（1）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$；　　（2）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

（3）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\mathrm{d}x$；　　（4）$\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$.

解　（1）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令}\sqrt{x}=t}2\int_1^{+\infty}\frac{t\sin t}{t^2}\mathrm{d}t=2\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

而对$\forall a\geqslant 1$，有

$$\int_1^a\sin t\mathrm{d}t=|\cos 1-\cos a|\leqslant 2$$

及
$$\frac{1}{x}\to 0\ (x\to+\infty),$$

故由狄利克雷判别法知$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$收敛.

又
$$\left|\frac{\sin t}{t}\right|\geqslant\frac{\sin^2 t}{t}=\frac{1}{2t}-\frac{\cos 2t}{2t},$$

而$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2t}\mathrm{d}t$是发散的，即$\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t$发散，亦即$\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\right|\mathrm{d}x$发散，因而$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$在$[1,+\infty)$上是条件收敛的.

（2）因为
$$\left|\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}\ (x\geqslant 0),$$

而$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$收敛，故$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$是绝对收敛的.

（3）因为
$$\left|\int_0^a\cos x\mathrm{d}x\right|\leqslant 1,$$

$\dfrac{\sqrt{x}}{100+x}$在$[0,+\infty)$上单调且趋于$0(x\to+\infty)$，所以由狄利克雷判别法知$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\mathrm{d}x$收敛. 但

$$\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\right|\geqslant\frac{\sqrt{x}}{100+x}(\cos x)^2=\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}-\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}\cos 2x,$$

而$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{100+x}\mathrm{d}x$发散，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}\cos 2x\mathrm{d}x$收敛，故$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\mathrm{d}x$为

条件收敛.

(4) 因为
$$\left|\int_0^a |\sin x|\mathrm{d}x\right| \leqslant 2,$$
而$\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$在$[3,+\infty)$上单调且趋于 0 $(x\to+\infty)$,所以由狄利克雷判别法知$\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$ 收敛. 但
$$\left|\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\right| \geqslant \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}(\sin x)^2 = \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x} - \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\cos 2x,$$
而$\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\mathrm{d}x$ 发散,$\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\cos 2x\mathrm{d}x$ 收敛,故$\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$ 为条件收敛.

6. 举例说明:$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时,$\displaystyle\int_a^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 不一定收敛;$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛时,$\displaystyle\int_a^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 也不一定收敛.

解　由原教材第十一章 § 2 P274 的例 4 可知,$\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$ 是条件收敛,但
$$\int_1^{+\infty}(\sin x^2)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(1-\cos 2x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\cos 2x^2\mathrm{d}x,$$
而$\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x$ 发散,$\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\cos 2x^2\mathrm{d}x$ 收敛,即$\displaystyle\int_1^{+\infty}(\sin x^2)^2\mathrm{d}x$ 发散.

再由原教材第十一章 P280 的总练习题 4 可知,$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ 是绝对收敛,但$\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right)^2\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^3}\mathrm{d}x$ 是发散的.

7. 证明:若$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,则$\displaystyle\int_a^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛 (a 不是 $f(x)$的瑕点).

证　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,即当 $x\to+\infty$,$\exists x'>0$,使 $x\geqslant x'$ 时,有
$$f^2(x)\leqslant|f(x)|,$$
所以由比较法则可知,若$\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,则$\displaystyle\int_a^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 亦收敛.

8. 证明:若 f 是$[a,+\infty)$上的单调函数,且$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,且 $f(x)=o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x\to+\infty$.

证　不妨设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上为单调减函数,则必有 $f(x)\geqslant 0$. 若不然,存在 $x=b$ 使 $f(x)<0$,则当 $x>b$ 时,有

$$f(x)\leqslant f(b)<0,$$

从而
$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

发散. 与已知条件 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛矛盾.

再由 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>a$,当 $x>M$ 时,有

$$\varepsilon/2>\int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t\geqslant f(x)\int_{x/2}^{x}\mathrm{d}t=\frac{x}{2}f(x),$$

即
$$0<xf(x)\leqslant\varepsilon.$$

因此
$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

故 $f(x)=o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x\to+\infty$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

9. 证明:若 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续,且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证　因为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续,即对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,使当 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$,且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

所以当 $x<t<x+\delta$ 时,有

$$f(t)-\varepsilon<f(x)<f(t)+\varepsilon,$$

故
$$\int_x^{x+\delta}(f(t)-\varepsilon)\mathrm{d}t<\int_x^{x+\delta} f(x)\mathrm{d}x<\int_x^{x+\delta}(f(t)+\varepsilon)\mathrm{d}t,$$

即
$$\left|\int_x^{x+\delta} f(x)\mathrm{d}x-\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_x^{x+\delta}(f(t)+\varepsilon)\mathrm{d}t-\int_x^{x+\delta}(f(t)+\varepsilon)\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon\delta.$$

又因为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,即 $\exists M>a$,使当 $x>M$ 时,有

$$\left|\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon\delta,$$

于是有

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \frac{1}{\delta}\left|\int_x^{x+\delta} f(x)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\delta}\left[\left|\int_x^{x+\delta} f(x)\mathrm{d}x - \int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t\right|\right] \\
&< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

即
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

10. 利用狄利克雷判别法证明阿贝尔判别法.

证　狄利克雷判别法中所给的条件为，若 $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上当 $x\to+\infty$ 时，单调趋于 0，则由于 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，必有 $F(u)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

而 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，按单调有界定理可知，$\exists A$，使 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=A$，设

$$\varphi(x) = g(x) - A.$$

则由狄利克雷判别法知

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-A)\mathrm{d}x \text{ 收敛},$$

即
$$\int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-A)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x - A\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

由于已知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 亦收敛.

§3　瑕积分的性质与收敛判别

1. 写出性质 3 的证明.

证　性质 3：设函数 f 的瑕点为 $x=a$，f 在 $(a,b]$ 的任一内闭区间 $[u,b]$ 上可积，则当 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也必定收敛，并有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 在瑕点 $x=a$ 处收敛，由柯西准则可知，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $u_1,u_2\in(a,a+\delta)$ 时，总有

$$\left|\int_{u_1}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x-\int_{u_2}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\mathrm{d}x\right|$$
$$=\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon\quad(u_1<u_2),$$

而
$$\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\mathrm{d}x\right|<\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

由柯西准则(充分性)可知,瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

又因为
$$\left|\int_{a+\delta}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{a+\delta}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x,$$

令 $\delta\to 0$,便可得到
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

2. 写出定理 11.6 及其推论 1 的证明.

证　(1) 定理11.6(比较法则):设定义在$(a,b]$上的两个函数f 与g,瑕点同为 $x=a$,在任何$[u,b]\subset(a,b]$上都可积,且满足
$$|f(x)|\leqslant g(x)\quad x\in(a,b].$$

则当$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时,$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 必定收敛(或者当$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散时,$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 亦必发散).

定理 11.6 的证明如下.

设$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则由柯西准则可知,对$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,只要 $u_1,u_2\in(a,a+\delta)\subset(a,b]$,$u_1<u_2$ 时,总有
$$\int_{u_1}^{u_2}g(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

而利用$|f(x)|\leqslant g(x)$,可得
$$0\leqslant\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{u_1}^{u_2}g(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

由柯西准则(充分性)可知,瑕积分$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛.

或者当$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散,而$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 却收敛时,可由上述证明推出

$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$必收敛，这与假设矛盾．故这时$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 亦必发散．

（2）定理 11.6 的推论 1：又若 $g(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}=c$，则有：

i）当 $0<c<+\infty$时，$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 与$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同敛态；

ii）当 $c=0$ 时，由$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛可推知，$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 也收敛；

iii）当 $c=+\infty$时，由$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散可推知，$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 也发散．

定理 11.6 的推论 1 证明如下．

由于 $g(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}=c$，则对 $\varepsilon_0>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in(a,a+\delta)$时，总有

$$c-\varepsilon_0<\frac{|f(x)|}{g(x)}<c+\varepsilon_0,$$

即
$$(c-\varepsilon_0)g(x)<|f(x)|<(c+\varepsilon_0)g(x).$$

因而由定理 11.6 可知：

i）当 $0<c<+\infty$时，$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 与$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同敛态；

ii）当 $c=0$ 时，由$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛可得$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 也收敛；

iii）当 $c=+\infty$时，取 $B>0$，则$\exists\delta>0$，当 $x\in(a,a+\delta)$时，总有$\dfrac{|f(x)|}{g(x)}>B$，即$|f(x)|>g(x)B$．显然由$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散可推知，$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 亦发散．

3．讨论下列瑕积分的收敛性：

（1）$\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$；　（2）$\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$；

（3）$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\ln x}$；　（4）$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$；

（5）$\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1-x^3}\mathrm{d}x$；　（6）$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^m}\mathrm{d}x$；

（7）$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；　（8）$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$．

解 (1) 因为 $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}=\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}+\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

而由定理 11.6 的推论 2 可知,这两个瑕积分均发散,所以 $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ 发散.

(2) 由定理 11.6 的推论 3 可知,当

$$\lim_{x\to0^+} x^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{x^{3/2}}=1,$$

即 $p=\frac{1}{2}$, $\lambda=1$ 时, $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$ 收敛.

(3) 因为 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}=\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}+\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$,

而 $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$ 的瑕点为 $x=1$,且

$$\lim_{x\to1^-}(x-1)\frac{(-1)}{\sqrt{x}\ln x}=1,$$

即 $p=1$, $\lambda=1$. 由定理11.6 的推论3 可知 $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$ 发散,所以 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$ 发散.

(4) 因为 $x=1$ 为瑕点,而

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}|f(x)|=\lim_{x\to1^-}\frac{-\ln x}{(1-x)^{1/2}}=0,$$

即 $p=\frac{1}{2}$, $\lambda=0$. 所以由定理 11.6 的推论 3 可知 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$ 收敛.

(5) 因为 $x=1$ 为瑕点,而

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\frac{\arctan x}{1-x^3}=\frac{\pi}{12},$$

即 $p=1$, $\lambda=\frac{\pi}{12}$. 故 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1-x^3}dx$ 发散.

(6) 因为 $x=0$ 为瑕点,而

$$\lim_{x\to0^+} x^{m-2}\frac{1-\cos x}{x^m}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

即 $\lambda=\frac{1}{2}$. 故:

当 $m<3$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}\mathrm{d}x$ 收敛；

当 $m\geqslant 3$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}\mathrm{d}x$ 发散.

（7）因为 $x=0$ 为瑕点，而

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{x^\alpha}.$$

故：

当 $0<\alpha<1$ 时，由定理 11.6 的推论 2 可知，$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛；

当 $1\leqslant\alpha<2$ 时，由狄利克雷判别法知，$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 为条件收敛；

当 $\alpha\geqslant 2$ 时，由 $\left|\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{x^\alpha}$ 可知，$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

（8）因为　$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x=\int_0^{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x.$

瑕积分 $\int_0^{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$ 的瑕点为 $x=0$，因为

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}\ln x=0,$$

故 $\int_0^{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$ 收敛.

无穷积分 $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$，因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}=0,$$

故 $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$ 收敛.

所以 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$ 收敛.

4. 计算下列瑕积分的值（其中 n 为正整数）：

（1）$\int_0^1(\ln x)^n\mathrm{d}x$；　　　（2）$\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.

解　（1）设 $J_n=\int_0^1(\ln x)^n\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to 0^+}\int_a^1(\ln x)^n\mathrm{d}x$

$$=\lim_{a\to0^+}\left(x(\ln x)^n\Big|_a^1-n\int_a^1(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x\right)=-nJ_{n-1},$$

而 $J_0=\int_0^1\mathrm{d}x=1$，故

$$J_n=-nJ_{n-1}=(-1)n(n-1)J_{n-2}=\cdots=(-1)^n n!.$$

(2) 令 $x=\sin^2 t$，则

$$\mathrm{d}x=2\sin t\cos t\mathrm{d}t,$$

于是
$$J_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\sin t\mathrm{d}t$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\mathrm{d}t=2\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

5. 证明瑕积分 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $J=-\frac{\pi}{2}\ln2$.

证 因为
$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln(\sin x)=0,$$

所以瑕积分 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$ 收敛.

再由于
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x,$$

即
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x.$$

故
$$2J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(\sin x)+\ln(\cos x)]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x-\ln2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln2.$$

而
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin t)\mathrm{d}t\right)$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\mathrm{d}t=J,$$

即
$$2J=J-\frac{\pi}{2}\ln2.$$

因此
$$J=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

6. 利用上题结果，证明：

(1) $\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$；

(2) $\int_0^{\pi}\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}\mathrm{d}\theta=2\pi\ln 2.$

证　(1) **令** $x=\pi-\theta$，**则**

$$\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\pi\ln(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}x\ln(\sin x)\mathrm{d}x,$$

即
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin x)\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\mathrm{d}t\right)=\frac{\pi}{2}(-\pi\ln 2)=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}\mathrm{d}\theta&=\int_0^{\pi}\theta\mathrm{d}\ln(1-\cos\theta)\\&=\theta\ln(1-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\ln(1-\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\pi\ln 2-\int_0^{\pi}\ln\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\\&=\pi\ln 2-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(2\sin^2 x)\mathrm{d}x\\&=\pi\ln 2-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2\mathrm{d}x-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x\\&=\pi\ln 2-2\ln 2\cdot\frac{\pi}{2}-4\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)=2\pi\ln 2.\end{aligned}$$

§4　总 练 习 题

1. 证明下列等式：

(1) $\int_0^1\frac{x^{p-1}}{x+1}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{x^{-p}}{x+1}\mathrm{d}x$，$p>0$；

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^{-p}}{x+1}\mathrm{d}x$，$0<p<1$.

证　(1) $\int_0^1\frac{x^{p-1}}{x+1}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to0^+}\int_a^1\frac{x^{p-1}}{x+1}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 }x=t^{-1}}\lim\limits_{a\to0^+}\int_{1/a}^1\frac{t^{1-p}}{1+t^{-1}}(-t^{-2})\mathrm{d}t$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{x^{-p}}{1+t}\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{x^{-p}}{1+x}\mathrm{d}x\ (p>0).$$

(2) **由于** $0<p<1$，**故** $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}\mathrm{d}x$ **和** $\int_0^{+\infty}\frac{x^{-p}}{1+x}\mathrm{d}x$ **都收敛，而**

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{x+1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}\mathrm{d}x,$$

由(1)可知

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{x^{-p}}{1+x}\mathrm{d}x,$$

另一个积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{x^{p-1}}{x+1}\mathrm{d}x\overset{\text{令 }x=t^{-1}}{=\!=\!=\!=}\lim_{b\to+\infty}\int_{1/b}^1\frac{t^{-p}}{t+1}\mathrm{d}t$

$$=\int_0^1\frac{t^{-p}}{t+1}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{x^{-p}}{x+1}\mathrm{d}x.$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{x+1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{x^{-p}}{x+1}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x^{-p}}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^{-p}}{x+1}\mathrm{d}x.$$

2. 证明下列不等式：

(1) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}<\frac{\pi}{2}$；

(2) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)<\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<1+\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

证　(1) **因为**　$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$,

而

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}}>\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

所以

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}<\frac{\pi}{2}.$$

(2) **因为**

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$<\int_0^1\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{2\mathrm{e}},$$

而

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x>\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x>\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right),$$

所以
$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)<\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<1+\frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

3. 计算下列反常积分的值：

（1）$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x\ (a>0)$；　（2）$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x\ (a>0)$；

（3）$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan\theta)\mathrm{d}\theta$.

解　（1）$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x$
$$=\lim_{u\to+\infty}\int_0^u\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx-a\cos bx)\Big|_0^u$$
$$=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{-a\cos bu+b\sin bu}{(a^2+b^2)\mathrm{e}^{au}}+\frac{a}{a^2+b^2}\right)=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

（2）
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_0^u\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{-(a\sin bx+b\cos bx)}{\mathrm{e}^{ax}(a^2+b^2)}\Big|_0^u=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

（3）
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{-\ln x}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\ln u}{1+u^2}\mathrm{d}u=0.$$

（4）
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan\theta)\mathrm{d}\theta\xlongequal{\text{令}\tan\theta=x}\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0.$$

4. 讨论反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x\ (b\neq0)$，$\lambda$取何值时绝对收敛或条件收敛.

解　设
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x,I_1=\int_0^1\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x,I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x,$$
则
$$I=I_1+I_2.$$

i）对于I_1，由于
$$\lim_{x\to0^+}x^{\lambda-1}|f(x)|=\lim_{x\to0^+}\frac{|\sin bx|}{x}=|b|.$$
故：

当$0<\lambda-1<1$，即$1<\lambda<2$时，I_1为绝对收敛；

当 $\lambda\leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin bx}{x^\lambda}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{1-\lambda}\dfrac{\sin bx}{x}=\begin{cases}b, & \lambda=1,\\ 0, & \lambda<1,\end{cases}$ I_1 为定积分；

当 $\lambda\geqslant 2$ 时，I_1 为发散.

ii）对于 I_2，当 $\lambda>1$ 时，为绝对收敛；当 $0<\lambda\leqslant 1$ 时，为条件收敛；

当 $\lambda\leqslant 0$ 时，为发散.

综上分析：I 在 $\lambda\leqslant 0$ 时为发散；I 在 $0<\lambda\leqslant 1$ 时为条件收敛；I 在 $0<\lambda<2$ 时为绝对收敛；I 在 $\lambda\geqslant 2$ 时为发散.

5. 证明：设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$0<a<b$.

（1）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=(f(0)-k)\ln\frac{b}{a};$$

（2）若 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

证 （1）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$

$$=\lim_{u\to 0^+}\int_u^1\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x+\lim_{v\to+\infty}\int_1^v\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\left(\int_u^1\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_u^1\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\right)$$

$$+\lim_{v\to+\infty}\left(\int_1^v\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_1^v\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\right)$$

$$\xlongequal[s=bx]{\text{令}\,t=ax}\lim_{u\to 0^+}\left(\int_{au}^a\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{bu}^b\frac{f(s)}{s}\mathrm{d}s\right)$$

$$+\lim_{v\to+\infty}\left(\int_a^{av}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_b^{bv}\frac{f(s)}{s}\mathrm{d}s\right)$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\int_{au}^{bu}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\lim_{v\to+\infty}\int_{av}^{bv}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{u\to 0^+}f(\xi)\int_{au}^{bu}\frac{\mathrm{d}t}{t}-\lim_{v\to+\infty}f(\eta)\int_{av}^{bv}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$=\ln\frac{b}{a}\left[\lim_{u\to 0^+}f(\xi)-\lim_{v\to+\infty}f(\eta)\right]=\ln\frac{b}{a}(f(0)-k)$$

$$=(f(0)-k)\ln\frac{b}{a},$$

其中，$\qquad\xi\in[au,bu],\quad\eta\in[av,bv].$

（2）由于积分$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$收敛，即对$\forall\varepsilon>0$，有

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

因而
$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x&=\int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}-\int_{\varepsilon b}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{f(\varepsilon x)}{x}\mathrm{d}x\\&=f(\varepsilon\xi)\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x},\quad a\leqslant\xi\leqslant b.\end{aligned}$$

令$\varepsilon\to0$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

6. 证明下述命题：

（1）设f为$[a,+\infty)$上的非负连续函数，若$\int_a^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$也收敛.

（2）设f为$[a,+\infty)$上的连续可微函数，且当$x\to+\infty$时，$f(x)$递减地趋于0，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛的充要条件为$\int_a^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$收敛.

证　（1）取$\qquad M=\max\{|a|,1\},$

则由$\int_a^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$收敛，可知$\int_M^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$也收敛. 而

$$0\leqslant\int_M^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_M^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x,$$

即$\int_M^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，因而可推出$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$也收敛.

（2）若$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，$f$在$[a,+\infty)$上递减，并趋于0，则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0.$$

而
$$\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b xf'(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left(xf(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$= \lim_{b\to+\infty}(bf(b)-af(a)) - \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= -af(a) - \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

故 $\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

若 $\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\forall \varepsilon>0$,$\exists M>|a|$,使当 $A>x>M$ 时,有
$$\left|\int_x^A f'(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

由于 $f'(x)$ 不变号($\leqslant 0$),由积分中值定理知,存在 $\xi\in[x,A]$,使
$$\int_x^A tf'(t)\mathrm{d}t = \xi\int_x^A f'(t)\mathrm{d}t = \xi(f(A)-f(x)),$$
即
$$0\leqslant x|f(A)-f(x)|\leqslant \xi|f(A)-f(x)|<\varepsilon,$$
亦即
$$0\leqslant x|f(A)-f(x)|<\varepsilon.$$
令 $A\to+\infty$,由 $\lim\limits_{A\to+\infty} f(A)=0$,可得
$$|xf(x)| = x|f(x)|\leqslant\varepsilon\quad (x>M),$$
故
$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$
于是 $\lim\limits_{A\to+\infty} xf(x)\Big|_a^A = -af(a)$ 存在. 故由
$$\int_a^A xf'(x)\mathrm{d}x = \int_a^A x\mathrm{d}f(x) = xf(x)\Big|_a^A - \int_a^A f(x)\mathrm{d}x,$$
可知 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 存在,即 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.