Resumen

En este documento se presentan las fórmulas de distancia entre el punto, la recta y el plano.

Álgebra I

Formulario de distancias

Andrés Miniguano T.
e-mail: andres.miniguano@epn.edu.ec

Milton Torres E.
e-mail: milton.torres@epn.edu.ec

6 de abril de 2017

Notación

En lo que sigue usaremos las letras del alfabeto $a, b, c, \ldots$ para un punto en el espacio con coordenadas dadas por índices; es decir

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Además, se usarán las letras del alfabeto griego para denotar escalares: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.
La única excepción a las reglas anteriores se dará con el vector

$$w = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

que indican los ejes horizontal, vertical y espacial.

definiciones

- **Punto: Es cualquier elemento del espacio, el cual consiste en una tripleta ordenada de números reales; es decir, un elemento de ^{3}. Por ejemplo, si $a \in^3$, entonces lo escribiremos como**

  $$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

- **Recta: Dados dos puntos a y b, una recta con vector director a y vector constante b consiste en todos los puntos de la forma**

  $$t\,a + b;$$

  aquí t es un número real. A esta recta la notamos como

  $$R : [\langle a \rangle + b].$$

- **Plano: Dados un punto a y un escalar $\alpha, unplanodevectornormala$ consiste en todos los puntos w que satisfacen**

  $$a \cdot w = a_1x + a_2y + a_3z = alpha.$$

Aquí $\%cdot$ indica el producto punto entre a

1 Formulario

0. **Distancia entre dos puntos:** Para dos puntos a y b, su distancia $dd(a,b)$ es la norma de su resta:
$$\mathrm{d}(a,b) = \|a-b\| = \sqrt{a-b-b} = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}.$$

1. **Distancia entre un punto y una recta:** La distancia entre un punto a y la recta $R : [\langle b\rangle + c]$ tiene dos fórmulas:
   - *Fórmula de proyección:*
   $$\mathrm{d}\big(a,\, R : [\rangle + c]\big) = \left\|(a-c) - \frac{(a-c}{\|b\|^2}b\right\|$$
   - *Fórmula del binormal:*
   $$\mathrm{d}\big(a,\, R : [\langle b\rangle + c]\big) = \frac{\big\|(a-c)\times b\big\|}{\|b\|}$$

2. **Distancia entre un punto y un plano:** Si a es un punto y $H : [\langle b, x\rangle = \alpha]$ un plano, entonces:
$$\mathrm{d}\big(a,\, H : [\langle b,x\rangle = \alpha]\big) = \frac{a\cdot b-\alpha}{\|b\|}.$$

3. **Distancia entre dos rectas:** Si $R : [\langle a\rangle + c]$ y $S : [\langle b\rangle + d]$ son dos rectas, entonces tenemos dos casos:
   - *Rectas paralelas:*
   $$\mathrm{d}\big(R : [\langle a\rangle + c],\, S : [\langle b\rangle + d]\big) = \frac{\big\|(c-d)\times a\big\|}{\|a\|}$$
   - *Rectas que se cruzan:*
   $$\mathrm{d}\big(R : [\langle a\rangle + c],\, S : [\langle b\rangle + d]\big) = \frac{\big|\det(c-d,a,b)\big|}{\|a\times b\|}.$$

4. **Distancia entre una recta y un plano:** Para la recta $R : \mathrm{d}\big(R : [\langle a\rangle + c],\, H : [\langle b,w\rangle = \alpha]\big) = \frac{c\cdot b-\alpha}{\|b\|}$

   Distancia entre dos planos: Finalmente para los planos $H : [\langle a,w\rangle = \alpha]$ e $I : [\langle b,w\rangle = \beta]$: [$\mathrm{d}\big(H : [\langle a,w\rangle = \alpha],\, I : [\langle b,w\rangle = \beta]\big) = \frac{|\alpha-\beta|}{\|a\|} = \frac{|\alpha-\beta|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$.]

Nota

Las fórmulas anteriores se demuestran usando elementos del álgebra lineal y cálculo vectorial, puesto que en algunos casos basta plantear un problema de minimización, en otros sólo aplicar propiedades del determinante y proyecciones. Algo bastante interesante es que todas las fórmulas anteriores se basan en obtener la norma de un único elemento, dicho elemento viene dado por el siguiente teorema: [Proyección sobre un conjunto cerrado, convexo y no vacío] Sea $M \subseteq^3$ un conjunto cerrado, convexo y no vacío; entonces para todo $a \in^3$ existe un único $b \in M$ tal que

$$\mathrm{d}(a,b) = \inf\big\{\, \mathrm{d}(a,c) : c \in M\big\};$$

a b se lo denomina la *proyección de a* en M y se nota $\mathrm{proy}_M\, a := b$. Notemos que este teorema nos permite afirmar que siempre existe un punto que optimiza la distancia entre un conjunto y otro punto.