Description du mouvement d'une particule parallèlement à un plan dans un fluide visqueux.

Ibrahim HMAMOU
Université de Montpellier
1 Juin 2023

Encadré par M. HILLAIRET Matthieu

Références

E. Guazzelli, J. F. Morris, *A Physical Introduction to Suspension Dynamics*, 2012
R. G. Cox, *The motion of suspended particles almost in contact*, 1973

Nous allons voir comment un obstacle agit sur une particule soumise à la gravité dans un fluide en faisant le calcul des forces, se basant sur les deux références citées. Pour cela on considère un plan vertical infini, avec à un moment donné une bosse qui fait obstacle à la particule qui tombe comme dans les schémas ci dessous.
Le but ici est de voir comment sont mis en place les calculs des forces via différentes techniques.

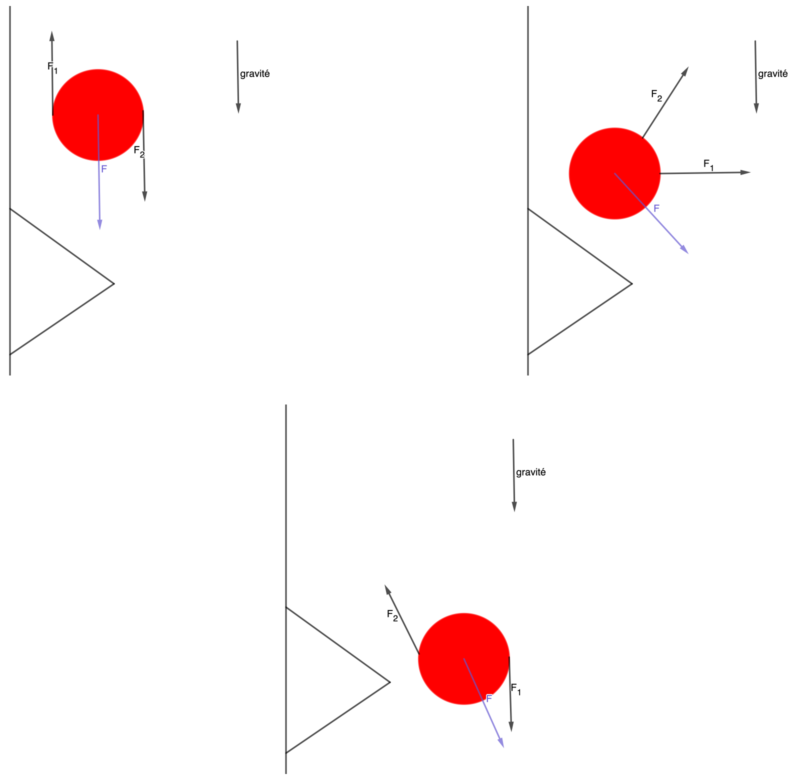

Figure 1 : Chute théorique de la particule à la rencontre de la bosse, avec F la somme des forces appliquées à la particule, F_1 la force appliquée par le plan sur la particule, F_2 la force appliquée par l'obstacle sur la particule, et la force de gravité appliquée à la particule.

On va travailler avec une distance par rapport au plan infini très petite, ce qui va nous permettre de pouvoir décomposer la force F en la somme d'une force qui vient du plan et d'une force qui vient de l'obstacle, c'est ce qui nous permet de se ramener au cas du plan.

1 Mise en place du problème avec quelques bases

Ici on se place dans un cadre global, on note $\mathbb{B}$ la particule et on se place dans $\mathbb{R}^3$.
On considère une particule rigide dans un fluide incompressible, le problème de Stokes associé pour le fluide est :

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = 0 \quad sur\ \Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B} \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Et on a comme conditions :

$$\begin{cases} u = 0 \quad sur\ \partial\mathbb{R}^3 \\ u = U \quad sur\ \partial\mathbb{B} \end{cases} \tag{2}$$

Les équations de Newton pour le solide sont :

$$\begin{cases} \dot{G} = U \\ m\dot{U} = -\displaystyle\int_{\partial\mathbb{B}} \sigma \cdot n\, ds + F_g \end{cases} \tag{3}$$

avec G le centre de la particule $\mathbb{B}$, U la vitesse , F_g la force de gravité et $\sigma = 2\mu\epsilon - pI$ tel qu'on ait : $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$.

(Si $\mathbb{B}$ et U sont donnés alors on sait calculer u et p).
Dans la suite, on va se concentrer sur la partie $\int_{\partial\mathbb{B}} \sigma \cdot nds$.

1.1 Matrice de résistance

Grâce à la linéarité de l'équation de Stokes, il existe une relation simple entre forces exercées sur les paroi de la particule et vitesse du fluide et cela grâce à une matrice appelée matrice de résistance.

On note F^h la force que le fluide applique sur la particule, donnée par la relation : $F^h = \int_{\partial\mathbb{B}} \sigma \cdot nds$ qui dépend linéairement du tenseur des contraintes σ qui lui même dépend linéairement de u et donc dépend linéairement de U.

La linéarité de la force peut être exprimée grâce à la matrice de résistance R par la relation :

$$F^h = R \cdot U \tag{4}$$

Avant tout, on énonce le théorème de réciprocité qu'on va utiliser pour démontrer le lemme qui suivra :

Théorème 1. *Soit $(u^{(i)}, p^{(i)})$ solution de Stokes avec un terme source $f^{(i)}$ et la condition de bord $u^{(i)} = U^{(i)}$.*
Alors,

$$\int_{\mathbb{B}} f_j^{(1)} u_j^{(2)} dx - \int_{\partial\mathbb{B}} U_j^{(2)} \sigma_{ij}^{(1)} n_i ds = \int_{\mathbb{B}} f_j^{(2)} u_j^{(1)} dx - \int_{\partial\mathbb{B}} U_j^{(1)} \sigma_{ij}^{(2)} n_i ds \tag{5}$$

Et sans forces extérieurs, on a :

$$\int_{\partial\mathbb{B}} U_j^{(2)} \sigma_{ij}^{(1)} n_i ds = \int_{\partial\mathbb{B}} U_j^{(1)} \sigma_{ij}^{(2)} n_i ds \tag{6}$$

Démonstration. On réécrit le terme de gauche :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}} f_j^{(1)} u_j^{(2)} dx - \int_{\partial\mathbb{B}} U_j^{(2)} \sigma_{ij}^{(1)} n_i ds \\
&= \int_{\mathbb{B}} f_j^{(1)} u_j^{(2)} - \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j^{(2)} \sigma_{ij}^{(1)}) dx \\
&= \int_{\mathbb{B}} f_j^{(1)} u_j^{(2)} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij}^{(1)}) u_j^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j^{(2)}) dx
\end{aligned} \tag{7}$$

Et comme on à $\int_{\mathbb{B}} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij}^{(1)}) dx - f_j^{(1)} dx = 0$ (accélération nulle), on obtient :

$$\begin{aligned}
&= -\int_{\mathbb{B}} \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j^{(2)}) dx \\
&= -\int_{\mathbb{B}} \sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} dx \quad \text{car } \sigma^{(1)} \text{ symetrique} \\
&= -2 \int_{\mathbb{B}} \epsilon_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} dx \quad \text{car } \epsilon_{kk}^{(1)} = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

Et par symétrie des écoulements (1) et (2), il y a égalité entre le terme de gauche et le terme de droite. □

On va maintenant énoncer et démontrer des propriétés importante sur la matrice de résistance :

Lemme 1. *La matrice de résistance R est symétrique définie négative.*

Démonstration. Montrons que R est symétrique :

Notons $F^{h(1)}$ la force exercée sur la particule quand elle se déplace à vitesse $U^{(1)}$ et $F^{h(2)}$ la force exercée sur la particule quand elle se déplace à vitesse $U^{(2)}$.

Par le théorème de réciprocité, on a (avec indice de sommation répété) :

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\mathbb{B}} U_j^{(2)}\sigma_{ij}^{(1)} n_i ds = \int_{\partial\mathbb{B}} U_j^{(1)}\sigma_{ij}^{(2)} n_i ds \\ &\Leftrightarrow U_j^{(2)} F_j^{h(1)} = U_j^{(1)} F_j^{h(2)} \end{aligned} \tag{9}$$

Or on sait que $F_j^{h(l)} = R_{ji}U_i^{(l)}$ pour $l = 1, 2$ et pour tout i,j, et donc en remplaçant on obtient :

$$\begin{aligned} R_{ji}U_i^{(1)}U_j^{(2)} &= R_{ji}U_j^{(1)}U_i^{(2)} \\ &= R_{ij}U_i^{(1)}U_j^{(2)} \end{aligned} \quad \text{(en inversant les roles de i et j)} \tag{10}$$

Comme $U^{(1)}$ et $U^{(2)}$ sont arbitraire, on a que R est symétrique.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} F^h \cdot U &= -\int_{\partial\mathbb{B}} \sigma(u,p)_{ij} n_j u_i ds \\ &= -\int_{\mathbb{B}} \partial_j(\sigma(u,p)_{ij} u_i) dx \\ &= -\int_{\mathbb{B}} \partial_j(\sigma(u,p)_{ij}) u_i + (\epsilon(u) - p\delta_{ij})\partial_j u_i dx \end{aligned} \tag{11}$$

Or (u,p) est solution du problème de stokes, donc :

$$-\int_{\mathbb{B}} \partial_j(\sigma(u,p)_{ij}) u_i dx = 0 \tag{12}$$

Et donc,

$$F^h \cdot U = -\int_{\mathbb{B}} \epsilon(u) : \nabla u - p\partial_i u_i dx \tag{13}$$

Or $\nabla \cdot u = 0$ donc (avec ϵ symétrique) :

$$\begin{aligned} F^h \cdot U &= -\int_{\mathbb{B}} \epsilon(u) : \nabla u dx \\ &= -2\int_{\mathbb{B}} |\nabla u|^2 dx \\ &= -2\int_{\mathbb{B}} |\epsilon(u)|^2 dx \end{aligned} \tag{14}$$

Si on suppose maintenant que F_h est nulle, montrons que $U = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= F^h \cdot U \\ &= -2\int_{\mathbb{B}} |\nabla u|^2 dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}|^2 \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|^2 - |\frac{\partial u_j}{\partial x_i}|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} |\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|^2 - \int_{\mathbb{R}^3} (\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_i})u_j = (*) \end{aligned} \tag{15}$$

On a $\nabla \cdot u = 0$ donc le deuxième terme s'annule, et on se retrouve avec :

$$(*) = -\int_{\mathbb{R}^3} |\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|^2 \tag{16}$$

Ce qui implique que $u = 0$, et donc $U = 0$.

R est donc symétrique, définie négative (car -R est définie positive) tel que :

$$F^h = RU, \tag{17}$$

□

Ainsi, grâce aux propriétés de la matrice de résistance R qui nous permet de passer de force à vitesse, on a un problème bien posé.

Résoudre notre problème se ramène à calculer la matrice R.
Dans cette optique, on montre maintenant qu'un certain nombre de coefficients de cette matrice s'annulent :

Pour cela, appelons $\mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice , telle que $x \mapsto \mathcal{Q}_1 x$ est une isométrie, qui transforme $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{B}$ en $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{B}$ avec $\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_1^T = I_d$.

Le changement de variable est donc :

$$\begin{cases} \tilde{u} = \mathcal{Q}_1^T u(\mathcal{Q}_1 x) \\ \tilde{p} = p(\mathcal{Q}_1 x) \end{cases} \tag{18}$$

Ainsi , $\mathcal{Q}_1(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, x_3)$, $\tilde{p}(x_1, x_2, x_3) = p(-x_1, x_2, x_3)$ et

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(x_1, x_2, x_3) \\ \tilde{u}_2(x_1, x_2, x_3) \\ \tilde{u}_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} = \begin{cases} -u_1(-x_1, x_2, x_3) \\ u_2(-x_1, x_2, x_3) \\ u_3(-x_1, x_2, x_3) \end{cases} \tag{19}$$

Et on a aussi :

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u}_1(x) = -\Delta u_1(\mathcal{Q}_1 x) = -\partial_1 p(\mathcal{Q}_1 x) = \partial_1 \tilde{p}(x) \\ \Delta \tilde{u}_2(x) = \Delta u_2(\mathcal{Q}_1 x) = \partial_2 p(\mathcal{Q}_1 x) = \partial_2 \tilde{p}(x) \\ \Delta \tilde{u}_3(x) = \Delta u_2(\mathcal{Q}_1 x) = \partial_3 p(\mathcal{Q}_1 x) = \partial_3 \tilde{p}(x) \\ div(\tilde{u}(x)) = div(u(\mathcal{Q}_1 x) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Avec la condition au bord $\tilde{U} = \mathcal{Q}_1 U$.
Et ainsi, $(\tilde{u}, \tilde{p})$ sont solution de Stokes dans la même géométrie.

De plus,

$$\begin{aligned}
\epsilon(\tilde{u}) &= \frac{1}{2}((\nabla\tilde{u})^T + \nabla\tilde{u})(x) \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_1^T(\nabla u)^T(\mathcal{Q}_1 x)\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_1^T\nabla u(\mathcal{Q}_1 x)\mathcal{Q}_1) \\
&= \mathcal{Q}_1\epsilon(u)(\mathcal{Q}_1 x)\mathcal{Q}_1
\end{aligned} \tag{21}$$

Et, pour u,v vérifiant ce qu'on ci dessus, on a :

$$\begin{aligned}
&\int \epsilon(\tilde{u}) : \epsilon(\tilde{v}) \\
&= \int Tr(\epsilon(\tilde{u})(x) : \epsilon(\tilde{v})(x)) \\
&= \int Tr(\mathcal{Q}_1^T\epsilon(v)(\mathcal{Q}_1 x)\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_1^T\epsilon(u)(\mathcal{Q}_1 x)\mathcal{Q}_1 \\
&= \int \epsilon(u) : \epsilon(v)
\end{aligned} \tag{22}$$

Ainsi, pour (u, p_1),(v, p_2) et (w, p_3) solutions de Stokes tel que les conditions de bords sont $u = U$, $v = V$ et $w = W$,et tel qu'on ait $\tilde{u}$,$\tilde{v}$ et $\tilde{w}$ leur transformation par la matrice $\mathcal{Q}_1$ de conditions de bords $\tilde{U} = \mathcal{Q}_1 U$, $\tilde{V} = \mathcal{Q}_1 V$ et $\tilde{W} = \mathcal{Q}_1 W$, on a $U \cdot RV = -2\int \epsilon(u) : \epsilon(v)$, si on pose $U = e_1$, $V = e_2$ et $W = e_3$, alors (on oublie la constante devant l'intégrale car elle nous est inutile pour montrer ce qu'on veut) :

$$\begin{aligned}
R_{12} = R_{21} &= \int \epsilon(u) : \epsilon(v) \\
&= \int \epsilon(\tilde{u}) : \epsilon(\tilde{v}) \\
&= \int \epsilon(-u) : \epsilon(v) \\
&= -\int \epsilon(u) : \epsilon(v)
\end{aligned} \tag{23}$$

Ce qui implique que $R_{12} = R_{21} = 0$.

De même,

$$\begin{aligned}
R_{13} = R_{31} &= \int \epsilon(u) : \epsilon(w) \\
&= \int \epsilon(\tilde{u}) : \epsilon(\tilde{w}) \\
&= \int \epsilon(-u) : \epsilon(w) \\
&= -\int \epsilon(u) : \epsilon(w)
\end{aligned} \tag{24}$$

Ce qui implique que $R_{13} = R_{31} = 0$.

Ainsi, pour l'instant la matrice ressemble à :

$$R = \begin{pmatrix} \square & 0 & 0 \\ 0 & \triangle & \circ \\ 0 & \circ & \times \end{pmatrix} \tag{25}$$

On pose maintenant $\mathcal{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, par les même calculs que pour $\mathcal{Q}_1$ on a que les deux matrice ont les même propriétés tel que :

$$\begin{cases} \bar{u}_1(x_1, x_2, x_3) \\ \bar{u}_2(x_1, x_2, x_3) \\ \bar{u}_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} = \begin{cases} u_2(x_2, -x_1, x_3) \\ -u_1(x_2, -x_1, x_3) \\ u_3(x_2, -x_1, x_3) \end{cases} \tag{26}$$

Ainsi, pour les même u, v, w et U, V, W que précédemment, avec cette fois ci la transformation par la matrice $\mathcal{Q}_2$:

$$\begin{aligned}
R_{23} = R_{32} &= \int \epsilon(v) : \epsilon(w) \\
&= \int \epsilon(\bar{v}) : \epsilon(\bar{w}) \\
&= \int \epsilon(-u) : \epsilon(w) \\
&= -\int \epsilon(u) : \epsilon(w) \\
&= -R_{13}
\end{aligned} \tag{27}$$

Donc, $R_{23} = R_{32} = 0$.

Et en plus de ça,

$$\begin{aligned} R_{11} &= \int \epsilon(u) : \epsilon(u) \\ &= \int \epsilon(\bar{u}) : \epsilon(\bar{u}) \\ &= \int \epsilon(v) : \epsilon(v) \\ &= R_{22} \end{aligned} \tag{28}$$

Ainsi , on devrait avoir une matrice de la forme :

$$R = \begin{pmatrix} \square & 0 & 0 \\ 0 & \square & 0 \\ 0 & 0 & \triangle \end{pmatrix} \tag{29}$$

2 Calculs mathématiques pour trouver la force

Ici on va chercher une forme analytique de la force en fonction de la distance "a" qu'on définit ci dessous, et du rayon de la particule R.
On reprend le problème précédent dans le cas où on a une distance entre la particule et le plan très petite (<< 1). On part donc d'une particule et d'un plan infini vertical avec un obstacle, comme montré dans la figure suivante :

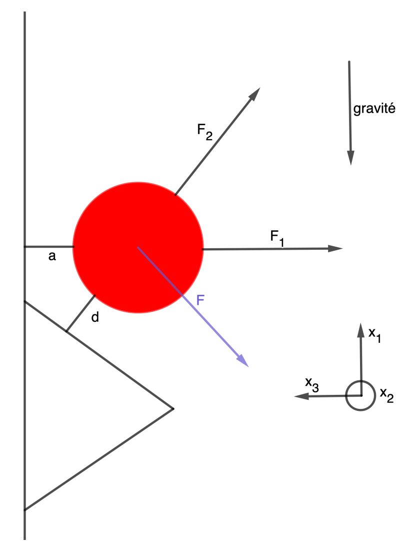

Figure 2 : Géométrie utilisée pour notre situation, avec "a" l'écart au plan infini, "d" une distance à l'obstacle à déterminer (pas utilisée dans la suite), F_1,F_2 et la gravité, trois forces qui s'exercent sur la particule (voir introduction pour la définition de F_1 et F_2), et F la somme des forces appliquée sur la particule.

L'équation de Stokes associée est donc :

$$\begin{cases} \mu \Delta u - \nabla p = 0 \\ \nabla u = 0 \end{cases} \tag{30}$$

On prend comme repère (O, x_1, x_2, x_3) et $(O', x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ où O et O' sont les origines pris sur les points les plus proches sur la particule et sur le plan (les axes sont pris de façon similaire au schéma ci dessus mais placés sur les points O et O').
Par des arguments de géométrie différentielle pour la particule, on peut exprimer x_3 en fonction de x_1 et x_2 :

$$x_3 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2R} + \mathcal{O}(r^3) \tag{31}$$

qui est valable pour les petites valeurs de $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et où R est le rayon de la particule.

Pour le plan on à des rayon de courbure infini et donc, on obtient :

$$x_3^* = 0 \tag{32}$$

Les coordonnées x_1^*, x_2^* et x_3^* peuvent être exprimé en fonction de x_1, x_2 et x_3 :

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1 \\ x_2^* &= x_2 \\ x_3^* &= x_3 - a \end{aligned} \tag{33}$$

En prenant (32) et en remplaçant par les expressions de (33) on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} x_3^* &= 0 \\ \Leftrightarrow x_3 - a &= 0 \\ \Leftrightarrow x_3 &= a \end{aligned} \tag{34}$$

Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ dans le repère (O, x_1, x_2, x_3) nous pouvons réécrire l'équation (30) sous forme d'un système comme ceci :

$$\begin{cases} \mu(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})u_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \\ \mu(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})u_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \mu(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})u_3 - \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \tag{35}$$

Si on note U la vitesse sur la particule aux points O alors la condition de non-glissement s'écrit :

$$\begin{cases} u & = U \text{ sur la particule} \\ u & = 0 \text{ sur le plan} \end{cases} \tag{36}$$

tel que

$$\begin{cases} r = [x_1, x_2, -\frac{x_1^2+x_2^2}{2R} + \mathcal{O}(r^3)] \\ r' = [x_1, x_2, x_3] \end{cases} \tag{37}$$

avec x_3 donné par (34).

Pour des raisons physiques et pour avoir des calculs cohérents il faut définir deux zones : la zone extérieur définie par les coordonnées (x_1, x_2, x_3) , avec un champ (u, p) et une zone intérieur définie par $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$, avec un champ $(\tilde{u}, \tilde{p})$ à "l'échelle" quand $a \to 0$ que l'on définie comme cela :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} x_1 \\ \tilde{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} x_2 \\ \tilde{x}_3 = \frac{1}{a} x_3 \end{cases} \quad \text{et on à :} \begin{cases} u_1 = a^{k-\frac{1}{2}} \tilde{u}_1 \\ u_2 = a^{k-\frac{1}{2}} \tilde{u}_2 \\ u_3 = a^k \tilde{u}_3 \\ p = a^{k-2} \tilde{p} \end{cases} \tag{38}$$

Ainsi en utilisant (35) et (38) tel que :

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tilde{u}_0 + \mathcal{O}(a) \\ \tilde{p} = \tilde{p}_0 + \mathcal{O}(a) \end{cases} \tag{39}$$

On obtient (pour la première équation , les autres ont un calcul similaire) :

$$\mu(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2})u_1-\frac{\partial p}{\partial x_1}=0$$
$$\Leftrightarrow \mu[a^{k-\frac{3}{2}}(\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2^2})+a^{k-\frac{5}{2}}\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3^2}]-a^{k-\frac{5}{2}}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1}=0$$
$$\Leftrightarrow \mu[a(\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2^2})+\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3^2}]-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1}=0 \tag{40}$$
$$\Leftrightarrow \mu[\frac{\partial^2\tilde{u}_{0,1}}{\partial \tilde{x}_3^2}]-\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{x}_1}+\mathcal{O}(a)=0$$
$$\Leftrightarrow \mu\frac{\partial^2\tilde{u}_{0,1}}{\partial \tilde{x}_3^2}-\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{x}_1}=0$$

Ainsi, après calcul, le champ $(\tilde{u}_0,\tilde{p}_0)$ vérifie :

$$\begin{cases}\mu\frac{\partial^2\tilde{u}_{0,1}}{\partial\tilde{x}_3^2}-\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{x}_1}=0\\ \mu\frac{\partial^2\tilde{u}_{0,2}}{\partial\tilde{x}_3^2}-\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{x}_2}=0\\ \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{x}_3}=0\\ \frac{\partial\tilde{u}_{0,1}}{\partial\tilde{x}_1}+\frac{\partial\tilde{u}_{0,2}}{\partial\tilde{x}_2}+\frac{\partial\tilde{u}_{0,3}}{\partial\tilde{x}_3}=0\end{cases} \tag{41}$$

Relativement aux variables (38) , (31) pour la particule s'écrit :

$$\tilde{x}_3=-\frac{\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2}{2R}+\mathcal{O}(\sqrt{a}) \tag{42}$$

Tandis que (34) s'écrit pour le plan s'écrit :

$$\tilde{x}_3=\frac{1}{a}*a=1 \tag{43}$$

Afin de résoudre (41) avec des conditions sur la particule et le plan on applique un changement de variable :

$$\begin{cases}\bar{x}_1=\tilde{x}_1\\ \bar{x}_2=\tilde{x}_2\\ \bar{x}_3=\tilde{x}_3+\frac{\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2}{2R}=h(\bar{x}_1,\bar{x}_2)+\mathcal{O}(\sqrt{a})\end{cases} \tag{44}$$

Où on définit h comme :

$h(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 1 + \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{2R}$

Avec nos nouvelles variables, l'expression (41) s'écrit :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}_{0,1}}{\partial \bar{x}_3^2} - \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \bar{x}_1} - \frac{\bar{x}_1}{R} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \bar{x}_3} = 0 \\ \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}_{0,2}}{\partial \bar{x}_3^2} - \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \bar{x}_2} - \frac{\bar{x}_2}{R} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \bar{x}_3} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \bar{x}_3} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}_{0,1}}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \tilde{u}_{0,2}}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \tilde{u}_{0,3}}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\bar{x}_1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_{0,1}}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\bar{x}_2}{R} \frac{\partial \tilde{u}_{0,2}}{\partial \bar{x}_3} = 0 \end{cases} \tag{45}$$

La condition de bord (36) appliquée à la particule (avec $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$) en utilisant nos nouvelles variables donne :

$$\begin{cases} \tilde{u}_{0,1} = a^{-k+\frac{1}{2}} U_1 + \mathcal{O}(a^2) \\ \tilde{u}_{0,2} = a^{-k+\frac{1}{2}} U_2 + \mathcal{O}(a^2) \\ \tilde{u}_{0,3} = a^{-k} U_3 \end{cases} \tag{46}$$

Pour le plan on aura :

$$\begin{cases} \tilde{u}_{0,1} = 0 \\ \tilde{u}_{0,2} = 0 \\ \tilde{u}_{0,3} = 0 \end{cases} \tag{47}$$

On sait que les équations sont linéaires (dépendance en U), on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0 &= \tilde{u}_A + \tilde{u}_B \\ \tilde{p}_0 &= \tilde{p}_A + \tilde{p}_B \end{aligned} \tag{48}$$

tel que les couples $(\tilde{u}_i, \tilde{p}_i), i = A, B$ vérifient (41) où :

- $(\tilde{u}_A, \tilde{p}_A)$ est l'écoulement résultant de U_3 et U_3'(vitesse de la particule et du plan)

• $(\tilde{u}_B, \tilde{p}_B)$ est l'écoulement résultant de U_i, U_i' (vitesse de la particule et du plan) pour $i = 1, 2$

On se concentre sur la partie "A" (k = 0) :

Les conditions de bord satisfont sur $\bar{x}_3 = 0$:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{A,1} = \tilde{u}_{A,2} = 0 \\ \tilde{u}_{A,3} = U_3 \end{cases} \tag{49}$$

Et sur $\bar{x}_3 = h(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ quand $a \to 0$:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{A,1} = \tilde{u}_{A,2} = 0 \\ \tilde{u}_{A,3} = 0 \end{cases} \tag{50}$$

Comme $(\tilde{u}_A, \tilde{p}_A)$ vérifie (45), alors on obtient en intégrant par rapport à $\bar{x}_3$:

$$\begin{cases} \tilde{p}_A = \tilde{p}_A(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \tilde{u}_{A,1} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_1}\bar{x}_3^2 + C_1\bar{x}_3 + C_2 \\ \tilde{u}_{A,2} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_2}\bar{x}_3^2 + C_3\bar{x}_3 + C_4 \end{cases} \tag{51}$$

Où les C_i sont les constantes d'intégration à déterminer.
Grâce aux conditions limite, on peut facilement déterminer ces constantes :

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_1}h(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ C_3 = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_2}h(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ C_2 = C_4 = 0 \end{cases} \tag{52}$$

Et donc on à :

$$\begin{cases} \tilde{p}_A = \tilde{p}_A(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \tilde{u}_{A,1} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_1}\bar{x}_3^2 - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_1}h(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\bar{x}_3 \\ \tilde{u}_{A,2} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_2}\bar{x}_3^2 - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_2}h(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\bar{x}_3 \end{cases} \tag{53}$$

Ainsi, en injectant les expressions qu'on a pour la dernière équation de (45) et en intégrant toujours par rapport à $\bar{x}_3$ on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{A,3} = &-\frac{1}{6\mu}(\frac{\partial^2 \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_2^2})\bar{x}_3^3 - \frac{1}{2}(\frac{\partial C_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial C_3}{\partial \bar{x}_2})\bar{x}_3^2 \\ &- \frac{1}{2\mu}(\frac{\bar{x}_1}{R}\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\bar{x}_2}{R}\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_2})\bar{x}_3^2 - (\frac{C_1}{R}\bar{x}_1 + \frac{C_3}{R}\bar{x}_2)\bar{x}_3 + C_5\end{aligned} \tag{54}$$

Où $C_5 = U_3$ grâce à (49).
On se place à $\bar{x}_3 = h(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, on a donc $\tilde{u}_{A,3} = U_3' = 0$ et :

$$\begin{aligned}-U_3 = &-\frac{1}{6\mu}(\frac{\partial^2 \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_2^2})h^3 - \frac{1}{2}(\frac{\partial C_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial C_3}{\partial \bar{x}_2})h^2 \\ &- \frac{1}{2\mu}(\frac{\bar{x}_1}{R}\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\bar{x}_2}{R}\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_2})h^2 - (\frac{C_1}{R}\bar{x}_1 + \frac{C_3}{R}\bar{x}_2)h\end{aligned} \tag{55}$$

En remplaçant C_1 et C_3 par leur expressions on se retrouve avec :

$$\begin{aligned}-U_3 &= \frac{1}{12\mu}h^3\Delta\tilde{p}_A + \frac{1}{4\mu}h^2(\nabla\tilde{p}_A \cdot \nabla h) \\ &= \frac{1}{12\mu}\nabla \cdot (h^3\nabla\tilde{p}_A)\end{aligned} \tag{56}$$

On pose $\lambda = \frac{1}{2R}$.
Et donc, on a $h = 1 + \lambda\bar{x}_1^2 + \lambda\bar{x}_2^2$, et on a :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1}\left[(1 + \lambda\bar{x}_1^2 + \lambda\bar{x}_2^2)^3\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_1}\right] + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2}\left[(1 + \lambda\bar{x}_1^2 + \lambda\bar{x}_2^2)^3\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \bar{x}_2}\right] = -12\mu U_3 \tag{57}$$

Comme on veut résoudre cette équation, on va poser :

$$\begin{cases}\bar{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\hat{r}\cos(\theta) \\ \bar{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\hat{r}\sin(\theta)\end{cases} \tag{58}$$

En injectant ces nouvelles variables on obtient pour (57) :

$$\lambda\left(\hat{r}^2\frac{\partial^2 \tilde{p}_A}{\partial \hat{r}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_A}{\partial \theta^2} + (\hat{r} + \frac{6\hat{r}^3}{1 + \hat{r}^2})\frac{\partial \tilde{p}_A}{\partial \hat{r}}\right) = \frac{-12\mu U_3\hat{r}^2}{(1 + \hat{r}^2)^3} \tag{59}$$

Cela revient à résoudre une EDO d'ordre deux avec second membre, et on trouve que la pression qui est solution de cette équation est :

$$\tilde{p}_A = \frac{3\mu U_3}{2\lambda(1 + \hat{r}^2)^2} + \mathcal{O}(\sqrt{a}) \tag{60}$$

Le terme en $\sqrt{a}$ vient du fait que pour les conditions de bord (49) et (50) ont une erreur d'ordre $\sqrt{a}$.

Pour n étant défini comme la normale à la particule, la force appliquée par le fluide sur la particule est donné par :

$$F_i = \int_{\mathbb{B}} \sigma_{ij} n_j dS \tag{61}$$

Où σ est le tenseur des contraintes tel que pour la partie "A" on note :

$$\sigma^A = \begin{pmatrix} a^k(-\frac{\tilde{p}}{a^2}) & \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{a}^3}) & \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{a}^3}) \\ \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{a}^3}) & a^k(-\frac{\tilde{p}}{a^2}) & \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{a}^3}) \\ \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{a}^3}) & \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{a}^3}) & a^k(-\frac{\tilde{p}}{a^2}) \end{pmatrix} \tag{62}$$

Pour évaluer (61) , la particule est divisé en deux aires S_ϵ et Σ_ϵ. L'aire S_ϵ est définie par la partie de la particule tel que le vecteur

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{63}$$

satisfait

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 \leq \epsilon^2 \tag{64}$$

où ϵ est une petite quantité indépendante de a.
Et la partie Σ_ϵ ne satisfait pas (64).
De plus (64) peut être transformé (grâce a nos changement de variables) en :

$$\lambda \bar{x}_1^2 + \lambda \bar{x}_2^2 \leq \frac{\epsilon^2}{a} \tag{65}$$

et ainsi

$$\hat{r} \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{a}} \tag{66}$$

La force donnée par (61) peut donc s'écrire :

$$F_i = \int_{S_\epsilon} \sigma_{ij} n_j dS + \int_{\Sigma_\epsilon} \sigma_{ij} n_j dS \tag{67}$$

Pour l'intégrale sur Σ_ϵ, ϵ étant indépendant de a, on a l'intégrale qui tend vers une quantité finie quand $a \to 0$ et devient nulle quand $\epsilon \to 0$.

On pose ensuite pour le calcul :

$$\begin{aligned}
n &= [\sqrt{a}\frac{\bar{x}_1}{R} + \mathcal{O}(a), \sqrt{a}\frac{\bar{x}_2}{R} + \mathcal{O}(a), 1 + \mathcal{O}(a)] \\
r &= [\sqrt{a}\bar{x}_1, \sqrt{a}\bar{x}_2, -a\frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{2R} + \mathcal{O}(\sqrt[3]{a})] \\
dS &= a d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 (1 + \mathcal{O}(a))
\end{aligned} \tag{68}$$

Ainsi, on peut donc calculer la partie dominante dans l'asymptotique $a << 1$ de la force (toujours avec k=0) ici c'est à dire (avec sommation indice répété) :

$$\begin{aligned}
(F_A)_3 &= \int_{S_\epsilon} \sigma_{3j}^A n_j dS \\
&= \frac{1}{a}\int_{S_\epsilon} (-\tilde{p}_A) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{a}})
\end{aligned} \tag{69}$$

Et en utilisant (58) on obtient :

$$(F_A)_3 = -\frac{1}{a}\frac{1}{\lambda}\int_{\hat{r}=0}^{\frac{\epsilon}{\sqrt{a}}}\int_{\theta=0}^{2\pi} \tilde{p}_A \hat{r} d\hat{r} d\theta + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{a}}) \tag{70}$$

En injectant la valeur de $\tilde{p}_A$ on a :

$$(F_A)_3 = 6\pi\frac{\mu}{a}\frac{(-U_3)}{2\lambda^2}\int_0^{\frac{\epsilon}{\sqrt{a}}} \frac{\hat{r}}{(1+\hat{r}^2)^2} d\hat{r} + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{a}}) \tag{71}$$

Quand $a \to 0$ l'intégrale suivante donne :

$$\int_0^\infty \frac{\hat{r}}{(1+\hat{r}^2)^2} d\hat{r} = \frac{1}{2} \tag{72}$$

Et donc finalement, on obtient :

$$(F_A)_3 = 3\pi\frac{\mu}{a}\frac{-U_3}{2\lambda^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{a}}) = -6\pi\frac{\mu R}{a} U_3 R \tag{73}$$

On se concentre maintenant sur la partie "B" (k = $\frac{1}{2}$) :

Les conditions de bord satisfont sur $\bar{x}_3 = 0$:

$$\begin{cases}
\tilde{u}_{B,1} = U_1 + \mathcal{O}(a) \\
\tilde{u}_{B,2} = U_2 + \mathcal{O}(a) \\
\tilde{u}_{B,3} = 0
\end{cases} \tag{74}$$

Et sur $\bar{x}_3 = h$ quand $a \to 0$:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{B,1} = 0 \\ \tilde{u}_{B,2} = 0 \\ \tilde{u}_{B,3} = 0 \end{cases} \tag{75}$$

Par les mêmes techniques que dans la partie "A" , on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_B &= \tilde{p}_B(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \tilde{u}_{B,1} &= \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \tilde{p}_B}{\partial \bar{x}_1}\bar{x}_3^2 + A\bar{x}_3 + U_1 \\ \tilde{u}_{B,2} &= \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \tilde{p}_B}{\partial \bar{x}_2}\bar{x}_3^2 + B\bar{x}_3 + U_2 \\ \tilde{u}_{B,3} &= -\frac{1}{6\mu}(\frac{\partial^2 \tilde{p}_B}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_B}{\partial \bar{x}_2^2})\bar{x}_3^3 - \frac{1}{2}(\frac{\partial A}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial B}{\partial \bar{x}_2})\bar{x}_3^2 - \frac{1}{2\mu}(\frac{\bar{x}_1}{R}\frac{\partial \tilde{p}_B}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\bar{x}_2}{R}\frac{\partial \tilde{p}_B}{\partial \bar{x}_2}) \\ &\quad - (\frac{A}{R}\bar{x}_1 + \frac{B}{R}\bar{x}_2)\bar{x}_3 \end{aligned} \tag{76}$$

Avec

$$\begin{cases} A = \frac{-U_1}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \tilde{p}_B}{\partial \bar{x}_1}h \\ B = \frac{-U_2}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \tilde{p}_B}{\partial \bar{x}_2}h \end{cases} \tag{77}$$

En injectant la valeur de $\tilde{u}_{B,3}$ dans (75) on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{12\mu}h^3\Delta\tilde{p}_B + \frac{1}{4\mu}h^2(\nabla\tilde{p}_B \cdot \nabla h) = &\bar{x}_1\frac{-U_1}{R} + \bar{x}_2\frac{-U_2}{R} \\ &- \frac{-U_1}{2}\frac{\partial h}{\partial \bar{x}_1} - \frac{-U_2}{2}\frac{\partial h}{\partial \bar{x}_2} \end{aligned} \tag{78}$$

Qu'on peut réécrire :

$$\frac{1}{\mu}\nabla \cdot (h^3 \nabla \tilde{p}_B) = q^T \cdot \bar{x} \tag{79}$$

Avec

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \tag{80}$$

Et :

$$q = 12 \begin{pmatrix} \frac{-U_1}{2R} \\ \frac{-U_2}{2R} \end{pmatrix} \tag{81}$$

Qu'on peut réécrire comme (avec $h = 1 + \lambda\bar{x}_1^2 + \lambda\bar{x}_2^2$) :

$$\frac{1}{\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{x}_1}\left[(1+\lambda\bar{x}_1^2+\lambda\bar{x}_2^2)^3\frac{\partial\tilde{p}_B}{\partial\bar{x}_1}\right]+\frac{\partial}{\partial\bar{x}_2}\left[(1+\lambda\bar{x}_1^2+\lambda\bar{x}_2^2)^3\frac{\partial\tilde{p}_B}{\partial\bar{x}_2}\right]\right\}=q_1\bar{x}_1+q_2\bar{x}_2 \tag{82}$$

Ou encore, en utilisant (58) :

$$\lambda\left(\hat{r}^2\frac{\partial^2\tilde{p}_B}{\partial\hat{r}^2}+\frac{\partial^2\tilde{p}_B}{\partial\theta^2}+\hat{r}\frac{\partial\tilde{p}_B}{\partial\hat{r}}+\frac{6\hat{r}^3}{1+\hat{r}^2}\frac{\partial\tilde{p}_B}{\partial\hat{r}}\right)=\frac{\mu\hat{r}^3}{(1+\hat{r}^2)^3}\left(\frac{q_1\cos\theta}{\sqrt{\lambda}}+\frac{q_2\sin\theta}{\sqrt{\lambda}}\right) \tag{83}$$

Pour des très grandes valeur de $\hat{r}$ on a pour (83) :

$$\lambda\left(\hat{r}^2\frac{\partial^2\tilde{p}_B}{\partial\hat{r}^2}+\frac{\partial^2\tilde{p}_B}{\partial\theta^2}+7\hat{r}\frac{\partial\tilde{p}_B}{\partial\hat{r}}\right)=\frac{\mu}{\hat{r}^3}\left(\frac{q_1\cos\theta}{\sqrt{\lambda}}+\frac{q_2\sin\theta}{\sqrt{\lambda}}\right) \tag{84}$$

Par des méthode de résolution d'EDP d'ordre 2 avec second membre, la solution $\tilde{p}_B$ qui vérifie (84) est :

$$\tilde{p}_B=-\frac{1}{2}\frac{\mu}{\hat{r}^3}\left\{\frac{q_1}{5\lambda\sqrt{\lambda}}\cos\theta+\frac{q_2}{5\lambda\sqrt{\lambda}}\sin\theta\right\}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\hat{r}^2}\right)+\mathcal{O}(\sqrt{a}) \tag{85}$$

Les termes $\mathcal{O}(\frac{1}{\hat{r}^2})$ et $\mathcal{O}(\sqrt{a})$ viennent des conditions aux bords et de l'approximation fait ci-dessus.
Comme fait pour la partie "A" , on calcule la partie dominante dans l'asymptotique $a << 1$ (avec sommation indice répété) avec pour matrice σ :

$$\sigma^B=\begin{pmatrix} a^k(-\frac{\tilde{p}}{a^2}) & \mathcal{O}(\frac{a^k}{a}) & a^k(\frac{\mu}{\sqrt[3]{a}}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3}) \\ \mathcal{O}(\frac{a^k}{a}) & a^k(-\frac{\tilde{p}}{a^2}) & a^k(\frac{\mu}{\sqrt[3]{a}}\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3}) \\ a^k(\frac{\mu}{\sqrt[3]{a}}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3}) & a^k(\frac{\mu}{\sqrt[3]{a}}\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3}) & a^k(-\frac{\tilde{p}}{a^2}) \end{pmatrix} \tag{86}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}(F_B)_1&=\int_{S_\epsilon}\sigma^B_{1j}n_j dS\\ &=\int_{S_\epsilon}\left(-\frac{\tilde{x}_1\tilde{p}_B}{R}+\mu\frac{\partial\tilde{u}_{B,1}}{\partial\tilde{x}_3}\right)d\tilde{x}_1d\tilde{x}_2+f(\epsilon)+\mathcal{O}(\sqrt{a})\end{aligned} \tag{87}$$

En injectant la valeur de $\tilde{u}_{B,1}$ on obtient :

$$\begin{aligned}(F_B)_1=&\int_{S_\epsilon}\left[-\frac{\tilde{p}_B}{R}\bar{x}_1+\frac{\mu(-U_1)}{h}-\frac{h}{2}\left(\frac{\partial\tilde{p}_B}{\partial\bar{x}_1}\right)\right]d\bar{x}_1d\bar{x}_2\\ &+f(\epsilon)+\mathcal{O}(\sqrt{a})\end{aligned} \tag{88}$$

On calcule cette intégrale en faisant le changement de variable pour avoir $\hat{r}$ et θ, et en se souvenant que :

$$0 \leq \hat{r} \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{a}} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{89}$$

Ainsi on obtient :

$$(F_B)_1 = \frac{\pi\mu}{2}\int_0^{\frac{\epsilon}{\sqrt{a}}} [\frac{1}{\hat{r}R}\left\{\frac{q_1}{5\lambda^2}\right\} - \frac{4U_1\hat{r}}{1+\hat{r}^2} - \frac{1+\hat{r}^2}{\hat{r}^3}\left\{\frac{q_1}{5\lambda}\right\}]\frac{1}{\lambda}d\hat{r} + f(\epsilon) + \mathcal{O}(\sqrt{a}) \tag{90}$$

Qui donne après calcul :

$$\begin{aligned}(F_B)_1 =& -\mu\ln(a)\frac{\pi}{4\lambda}\left[\frac{q_1}{5\lambda} - 4U_1\right] + \mathcal{O}(a^0)\\ =& -\mu\ln(a)\frac{\pi R}{2}[-\frac{12}{5}U_1 - 4U_1]\\ =& -\mu|\ln(a)|\frac{32\pi R}{10}U_1\end{aligned} \tag{91}$$

Ainsi on se retrouve avec les deux forces qui nous intéressent :

$$\begin{aligned}(F_A)_3 &= -6\pi\frac{\mu R}{a}U_3R\\ (F_B)_1 &= -\mu|\ln(a)|\frac{32\pi R}{10}U_1\end{aligned} \tag{92}$$

Ainsi s'achève le mémoire, nous aurions voulu comprendre dans le détail le déplacement de la particule (en faisant la somme des forces, en trouvant la distance "d" minimale qu'il peut y avoir et autre), mais par manque de temps, nous n'avons pu faire que le calcul des deux composantes qu'on cherchait.