

Rechenregeln Matrizen

Addition:

$A + B = B + A$	Kommutativität
$(A + B) + C = (A + B) + C$	Assoziativität
$(\mu \cdot \lambda)A = \mu(\lambda \cdot A)$	
$0 + A = A = A = 0$	Neutrales Element
$E_n A = A$	
$\forall A \exists B : A + B = 0$	Inverses Element
$B = -A$	
$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$	Distributivität

Transposition:

$(A + B)^T = A^T + B^T$	Summe
$(\lambda A)^T = \lambda A^T$	Skalarmultiplikation
$(A^T)^T = A$	Zweifache Transposition
$(AB)^T = B^T A^T$	Produkt
$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$	Inverses

Multiplikation:

$\exists A, B : AB \neq BA$	nicht kommutativ!
$(AB)C = A(BC)$	Assoziativität
$\exists E \in E_n : EA = A$	Neutrales Element
$A(B + C) = AB + AC$	Distributivität
$(B + C)A = BA + CA$	
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$	Inverses

Gruppen

G nichtleere Menge mit innerer Verknüpfung \cdot

$$\cdot : G \times G \rightarrow G$$

(G, \cdot) heißt Gruppe, wenn:

$$\left. \begin{array}{l} \forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \exists e \in G : e \cdot a = a = a \cdot e \quad \forall a \in G \\ \forall a \in G \exists b \in G : a \cdot b = e = b \cdot a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Assoziativgesetz} \\ \text{neutrales Element} \\ \text{inverses Element} \end{array}$$

G nennt man abelsch (=kommutativ) falls:

$$\bullet \quad ab = ba \quad \forall a, b \in G$$

Untergruppen

(G, \cdot) sei eine Gruppe mit neutralem Element e

$U \subseteq G$ mit:

$$\left. \begin{array}{l} e \in U \\ u, v \in U \Rightarrow u \cdot v \in U \\ u \in U \Rightarrow u^{-1} \in U \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{neutrales Element} \\ \text{abgeschlossen} \\ \text{inverses Element} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U \text{ ist Untergruppe} \\ U \leq G \end{array} \right.$$

Von Elementen erzeugten Untergruppen

$$\langle a \rangle = \{a^k \mid a \in G, k \in \mathbb{Z}\}$$

- $e \in \langle a \rangle$
- $a^k, a^l \in \langle a \rangle \Rightarrow a^k \cdot a^l = a^{k+l} \in \langle a \rangle$
- $a^k a^{-k} = a^0 = e$

Ordnung eines Elements

(G, \cdot) Gruppe $\rightarrow a \in G$

$$\rightarrow O(a) = |\langle a \rangle| = \begin{cases} n \in \mathbb{N}, & \# \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$O(a)$ = kleinste Zahl n mit $a^n = e$

$$\langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$$

$$O(a) = n$$

Satz über die Ordnung von Gruppenelementen:

Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element e , und es sei $a \in G$:

- (a) Falls $O(a) = \infty$, dann: $a^i \neq a^j$, $i \neq j$.
- (b) Falls $O(a) \in \mathbb{N}$, so gilt: $O(a) = u =$ kleinste natürliche Zahl, für die $a^u = e$ gilt.

$$a^s = e \Leftrightarrow O(a) \mid s$$