$rg(A) = \text{Zeilenrang} = \text{Spaltenrang}\ \forall A \in K^{m\times n}$

Spaltenraum

$A = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$

$$\begin{aligned}
\langle s_1, \dots, s_n \rangle &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i \;\middle|\; \lambda_i \in K \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \right\} \\
&= \{ A \cdot x \mid x \in K^n \}
\end{aligned}$$

$Ax = 0$: $(A|0) \to ZSF$

$$\left.\begin{array}{c} \text{Lösungsraum von } A \cdot x = 0 \\ Kern(A) \\ ker(A) \end{array}\right\} \leq K^n$$

$$dim(Kern(A)) = n - rg(A)$$

Lineare codes

datenübertragung: Bits $\to x_1, x_2, x_3, \dots$

Strom von Bits über gestörten Kanal

$p \approx 10^{-6}$ falsches Bit wird übertragen

$$G = \text{Generatormatrix}$$

$$G = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \quad \text{Wiederholungsmatrix}$$

$$G = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right) \quad \text{Parity-Check Matrix}$$

Die Menge $C := \left\{ G \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in K^k \right\} \leq K$

heißt (n,k)-Code:

$$\begin{aligned} n &= \text{Länge} \\ n-k &= \text{Redundanz} \\ \\ dim(C) &= k \\ \tfrac{k}{n} &= \text{Informationsrate} \\ rg(G) &= k \end{aligned}$$

Wie läuft das Dekodieren ab?

1. Fall $c' \in C$:

$$\text{Dekodiere}: G \cdot x = c' \quad \Rightarrow \quad x \in k^k$$

2. Fall: $c' \notin C$:

Suche c'', das sich von c' möglichst wenig unterscheidet:

$\exists_1 c''$	$\exists c''_1, \ldots c''_n \, : \, c''_1, \ldots, c''_n$ paarweise disjunkt
nächstes c' an c''wählen und wie in Fall 1 dekodieren	Nachricht neu senden lassen

Hamming Gewicht und Abstand

Für $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^n$ ist das Hamming-Gewicht:

$$w(c) = \left|\left\{i \in \{1, \ldots, n\} \middle| c_i \neq 0\right\}\right|$$

Für $c, c' \in K^n$ ist der Hamming-Abstand:

$$d(c, c') = w(c - c') = \left|\left\{i \in \{a, \ldots, n\} \middle| c_i \neq c'{}_i\right\}\right.$$

Für $C \subseteq K^n$ gilt:

$$d(C) = min\left\{d(c, c') \middle| c, c' \in C,\ c \neq c'\right\}$$