Orthogonalität

$v \perp w \mid v, w \in V$ falls:

$$\langle v, w \rangle = 0$$

$B \subseteq V$

$$\underbrace{\overbrace{b_i \perp b_j \ \forall i \neq j \quad \wedge \quad b_i, b_j \in B}^{\text{Orthogonalsystem}} \ \wedge \ ||b_i|| = 1 \ \forall b_i \in B}_{\text{Ortholnormalsystem}}$$

Falls B eine Basis von V ist: **Orthogonalbasis/Orthonormalbasis**

Normieren:

$v \in V \setminus \{0\}$

$$\hat{v} = \frac{1}{||v||} \cdot v$$

Orthogonale Zerlegung von Vektoren:

$v, a \ \neq 0 | \ v, a \in V$

gesucht: $v_a, v_{a^\perp} | v = v_a + v_{a^\perp} \wedge v_a \perp v_{a^\perp}$

$$v_a = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a$$

$$v_{a^\perp} = v - v_a$$

Linearkombinationen bezüglich Orthonormalbasen:

$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ist ONB von V

Linearkombination zu $v \in V$ finden:

$$\lambda_i = \langle b_i, v \rangle \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Orthogonale Matrizen:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal falls: $A^T A = E_n$

A sei orthogonal:

- $A^{-1} = A^T$
- $A^T A = AA^T = E_n$
- $det(A) = \pm 1$
- Zeilen bzw. Spalten von A bilden eine ONB des $\mathbb{R}^n$
- $||Av|| = ||v||$

Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren

Basis $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ eines euklidischen Vektorraumes V

$b_1 = \frac{1}{||a_1||} \cdot a_1$

$b_2 = \frac{1}{||c_2||} \cdot c_2$ mit $c_2 = a_2 - \langle a_2, b_1 \rangle \cdot b_1$

$b_3 = \frac{1}{||c_3||} \cdot c_3$ mit $c_3 = a_3 - \langle a_3, b_2 \rangle \cdot b_2 - \langle a_3, b_1 \rangle \cdot b_1$

$b_n = \frac{1}{||c_n||} \cdot c_n$ mit $c_n = a_n - \langle a_n, b_1 \rangle \cdot b_1 - \dots - \langle a_n, b_{n-1} \rangle \cdot b_{n-1}$

allgemein:

$$b_{k+1} = \frac{1}{||c_{k+1}||} \cdot c_{k+1} \text{ mit } c_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle a_{k+1}, b_i \rangle \cdot b_i$$