Vektorprodukt

nur im $\mathbb{R}^3$

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \Rightarrow a, b \perp a \times b$$

Orthogonale Projektion

Orthogonales Komplement

V ist ein euklidischer Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$U \leq V$

orthogonales Komplement zu U:

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u \ \forall u \in U\}$$

- $U^\perp \leq V$
- $U \cap U^\perp = \{0\}$
- $\exists_1$ Darstellung der Form $v = u + u^\perp \ \ \forall v \in V \mid u \in U, \ u^\perp \in U^\perp$

Bestimmung des orthogonalen Komplement

$U \leq V, \ dim(V) = n, \ dim(U) = r$

$U = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$

ergänze basis $B_u = \{a_1, \ldots, a_n\}$ zu Basis von V:

$$B_V = \{a_1 \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n\}$$

Bilde ONB $B = \{b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots, b_n\}$ von V wobei $\{b_1, \ldots, b_r\}$ ONB von U

$$U^\perp = \{b_{r+1}, \ldots, b_n\}$$

Orthogonale Projektion

$$P_U : \begin{cases} V & \rightarrow & U \\ v = u + u^{\perp} & \rightarrow & u \end{cases}$$

V euklidischer Vektorraum mit Untervektorraum $U \leq V$

$dim(V) = n$

$dim(U) = v$

noch machen ahh

Bestimme $u = P_u(v)$

Hinweis:

$v - u + u^{\perp}, w \in U$

$||v - w||^2 = ||v - u + u - w||^2 = \langle v - u + u - w, v - u + u - w \rangle$

$= \langle v - u, v - u \rangle + \langle u - w, u - w \rangle + \langle v - u, u - w \rangle + \langle u - w, v - u \rangle$

$= ||v - u||^2 + ||u - v||^2 + 2\langle v - u, u - w \rangle$

$u - w \in U,\ v - u \in U^{\perp}$

$\Rightarrow ||v - u||^2 + ||u - w||^2 \geq ||v - u||^2$

Irgendwas bestimmt falsch abgetippt

$\Rightarrow ||v - w|| \geq ||v - u|| \forall w \in U$

$u = min_{w \in U} ||v - w||$

Erhalte u als Lösung von $min||v - w||$ und dann den minimalen Abstand $||v - w|| = d$

Ausrechnen:

$V = \mathbb{R}^n$

$U \leq V$

$U = \langle b_1, \ldots, b_r \rangle$

Dann:

$u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r$

Bilde Matrix $A = (b_1, \ldots, b_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$

$$u = (b_1, \ldots, b_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} := x$$

$\rightarrow ||v-u|| = ||v-Ax|| = min!$

Das Lineare Ausgleichsproblem

Gegeben:

$A \in \mathbb{R}^{n \times r}, r \leq n, b \in \mathbb{R}^n$

Gsecht:

$x \in \mathbb{R}^r : ||b - Ax|| = min!$

Lösung:

Finde x als Lösung des LGS $A^T Ax = A^T b =$ Normalgleichung