

# Inhaltsverzeichnis

|  |          |
|--|----------|
| Komplexe Zahlen . . . . .  | 2        |
| Polarkoordinaten . . . . .                                       | 3        |
| <b>Lineare Gleichungssysteme</b>                                 | <b>3</b> |
| Vereinfachte Schreibweise als Matrix: . . . . .                  | 3        |
| Umformen in ZNF: . . . . .                                       | 4        |
| Rang einer Matrix . . . . .                                      | 4        |
| <b>Matrix</b>  | <b>4</b> |
| Besondere Matrizen . . . . .                                     | 4        |
| Rechenoperationen . . . . .                                      | 6        |
| Elementarmatrizen . . . . .                                      | 8        |
| Rechenregeln Matrizen . . . . .                                  | 8        |
| Gruppen . . . . .  | 10       |
| Untergruppen . . . . .   | 10       |
| Von Elementen erzeugten Untergruppen . . . . .                   | 10       |
| Ordnung eines Elements . . . . .                                 | 11       |
| Sätze von Lagrange und Euler . . . . .                           | 11       |
| Die Restklassen modulo $n$ : . . . . .                           | 11       |
| Ringe . . . . .  | 12       |
| Einheitengruppe (= Gruppe der invertierbaren Elemente) . . . . . | 12       |
| Prime Restklassengruppen . . . . .                               | 12       |
| Euklidischer Algorithmus . . . . .                               | 12       |
| Erweiterte Euklidischer Algorithmus . . . . .                    | 13       |
| Berechnung . . . . .   | 13       |
| Eulersche $\varphi$ -Funktion: . . . . .                         | 13       |
| kleiner Satz von Fermat . . . . .                                | 13       |
| Das Pohlig Hellman Verfahren . . . . .                           | 13       |
| RSA-Verfahren: . . . . .   | 14       |
| Vektorräume . . . . .  | 14       |
| Körper . . . . .   | 14       |
| Sprechweisen und Regeln . . . . .                                | 14       |
| Untervektorräume . . . . .                                       | 15       |
| Linearkombinationen . . . . .                                    | 15       |
| Das Erzeugnis von $X$ . . . . .                                  | 15       |
| Lineare Unabhängigkeit: . . . . .                                | 15       |
| Basen von Vektorräumen . . . . .                                 | 16       |
| Merkregeln . . . . .   | 16       |
| Anwendung in Linearen Gleichungssystemen . . . . .               | 16       |
| Spaltenraum . . . . .  | 17       |
| Lineare codes . . . . .  | 17       |
| Wie läuft das Dekodieren ab? . . . . .                           | 18       |
| Hamming Gewicht und Abstand . . . . .                            | 18       |
| Lineare Codes (Fortsetzung) . . . . .                            | 18       |
| Die Kontrollmatrix (Parity Check Matrix) . . . . .               | 18       |
| Vorbereitung auf Determinante . . . . .                          | 19       |
| Die Determinante berechnen: . . . . .                            | 19       |
| Laplace'scher Entwicklungssatz: . . . . .                        | 20       |
| Determinante und elementare Zeilenumformungen . . . . .          | 20       |
| Blockdiagonalmatrizen . . . . .                                  | 20       |
| Skalarprodukt . . . . .  | 21       |
| Wichtige Skalarprodukte . . . . .                                | 21       |
| Orthogonalität . . . . .   | 22       |
| Normieren: . . . . .   | 22       |
| Orthogonale Zerlegung von Vektoren: . . . . .                    | 22       |
| Linearkombinationen bezüglich Orthonormalbasen: . . . . .        | 22       |
| Orthogonale Matrizen: . . . . .                                  | 22       |
| Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren . . . . .       | 23       |

## Komplexe Zahlen

Konstellation von  $\mathbb{C}$ :

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$(0, 1)^2 = -1$$

“imaginäre Einheit:”

$$(0, 1) = i$$

Andere Notation:

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2 = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + i \cdot b$$

$$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Addition:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

Multiplikation:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + i^2 bd + i(ad + bc) = ac - bd + i(ad + bc)$$

Begriffe:

$$Z = a + ib \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$$

$$a = \operatorname{Re}(Z)$$

$$b = \operatorname{Im}(Z)$$

wenn  $a = 0 \rightarrow Z$  rein imaginär

$$Z = a + ib \rightarrow \overline{Z} = a - ib$$

$\overline{Z}$  ist die zu  $Z$  konjugierte komplexe Zahl

Nützliches:

$$Z \cdot \overline{Z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2$$

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\overline{Z + W} = \overline{Z} + \overline{W}$$

$$\overline{Z \cdot W} = \overline{Z} \cdot \overline{W}$$

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{1}{2}(Z + \overline{Z})$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{1}{2i}(Z - \overline{Z})$$

Dreiecksungleichung:

$$Z, W \in \mathbb{C} \Rightarrow |Z + W| \leq |Z| + |W|$$

Invertieren: (komplexe Zahl aus Nenner raus bekommen)

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd+i(cb-ad)}{c^2+d^2}$$

## Polarkoordinaten

Form:  $Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

mit Radius  $r \in \mathbb{R}$  und Winkel  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$

Umrechnung:

- $Z = a + ib$
- 1.  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- 2.  $\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{a}{r}, b \geq 0 \\ -\arccos \frac{a}{r}, b < 0 \end{cases}$
- 3.  $Z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

- $\cos \varphi = \frac{a}{r}$
- $\sin \varphi = \frac{b}{r}$

Multiplikation:

$$Z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1))$$

$$Z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2))$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Potenzen:

$$Z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

$$Z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi))$$

Wurzeln:

$\sqrt[n]{Z}$  hat genau  $n$  Lösungen

$$Z_k = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos \frac{\varphi + 2\pi \cdot k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi \cdot k}{n})$$

mit  $n$  = "Wurzelexponent",

$r$  = "Radius",

$k$  = "k-te Lösung der Wurzel von 0 bis  $n - 1$ "

## Lineare Gleichungssysteme

**Vereinfachte Schreibweise als Matrix:**

$$\begin{array}{c}
 \text{lineares Gleichungssystem LGS} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1 & = & b_1 \\
 \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\
 a_{m1}x_n & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
 \end{array}
 \Rightarrow
 \underbrace{\left( \begin{array}{ccc|c}
 a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m
 \end{array} \right)}_{(A|b)} \Rightarrow \cdots
 \end{array}$$
  

$$\cdots \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c}
 * & \cdots & \cdots & * & * \\
 0 & * & \cdots & * & \vdots \\
 \vdots & 0 & * & * & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & *
 \end{array} \right) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{\left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & * & \cdots & * & * \\
 0 & 1 & * & * & * \\
 0 & 0 & 1 & * & * \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
 \end{array} \right)}_{\text{reduzierte Zeilenstufenform}}$$

\*: unbekannter Wert

\*: 0

\*: wenn  $\neq 0$  gibt es keine Lösung

### Umformen in ZNF:

Elementare Zeilenumformungen  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vertauschen zweier Zeilen} \\ \text{Multiplikation einer Zeile mit } \lambda \neq 0 \\ \text{Addition des } \lambda\text{-fachen einer Zeile zu einer anderen} \end{array} \right.$

### Rang einer Matrix

Matrix  $M$  auf ZSF bringen

$\Rightarrow$  Anzahl an nicht null Zeilen = Rang von  $M = rg(M)$

Das Kriterium für Lösbarkeit:

- Das System ist genau dann lösbar, wenn:  $rg(A) = rg(A|b)$
- ist das LGS lösbar, so gilt: Anzahl frei wählbaren Variablen =  $n - r$

$n$  = Anzahl der Variablen und  $r = rg(A)$

- ist das System  $(A|b)$  lösbar, so gilt:  $\exists_1 \text{ lsg} \Leftrightarrow n = r$

### Matrix

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} \right\} m \text{ Zeilen}$$

Stelle  $(i, j)$  :  $i$ -te Zeile |  $j$ -te Spalte

$$\underbrace{\begin{array}{ll} \mathbb{R}^{m \times n} &= \{(a_{ij})_{m,n} | a_{ij} \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \text{"reelle Matrix"} \\ \mathbb{C}^{m \times n} &= \{(a_{ij})_{m,n} | a_{ij} \in \mathbb{C}\} \Rightarrow \text{"komplexe Matrix"} \end{array}}_{\Rightarrow K(\text{körper})^{m \times n} = \{(a_{ij})_{m,n} | a_{ij} \in K\}}$$

$A = B \Leftrightarrow$  gleich viele Spalten UND gleich viele Zeilen UND gleiche Einträge an den gleichen Stellen

### Besondere Matrizen

- $m \times 1$  :  $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$  Spaltenvektor
- $1 \times n$  :  $Z = (z_1 \ \cdots \ z_n)$  Zeilenvektor
- $m \times n$  :  $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$  Nullmatrix
- $m = n$  : quadratische Matrix

$$\text{Diagonalmatrix: } \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Einheitsmatrix: } E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Obere } \Delta\text{-Matrix: } O = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}$$

$$\text{Untere } \Delta\text{-Matrix: } U = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n} = \left( \vec{S}_1, \quad \dots \quad \vec{S}_n \right) = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix}$$

## Rechenoperationen

Transponieren:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrix:  $A^T = A$

Addieren:

$$A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{m,n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$$

$$A = (a_{ij}) = -(-a_{ij}) = -(-A)$$

Skalare Multiplikation (Vervielfachen:)

$$A = (a_{ij})_{m,n} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

$$\lambda \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Multiplikation:

$$Z = (Z_1, \dots, Z_n) \quad , \quad S = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}$$

$$Z \cdot S = \sum_{i=1}^n Z_i S_i$$

$\Downarrow$

$$A = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n} \quad , \quad B = (S_1 \quad \cdots \quad S_p) \in \mathbb{K}^{n \times p}$$

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} Z_1 \cdot S_1 & Z_1 \cdot S_2 & \cdots & Z_1 S_p \\ Z_2 \cdot S_1 & Z_2 \cdot S_2 & \cdots & Z_2 S_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_m \cdot S_1 & Z_m \cdot S_2 & \cdots & Z_m \cdot S_p \end{pmatrix} \in K^{m \times p}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A \leftarrow$  keine Kommutativität

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_k$$

$$A^0 := E_n$$

Invertieren:

$$A \in K^{n \times n} \quad , \quad B = A^{-1}$$

$$A \cdot B = E_n = B \cdot A$$

Nicht jede Matrix invertierbar!

$$B = \begin{pmatrix} \vec{S}_1 & \dots & \vec{S}_n \end{pmatrix} \quad , \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = A \cdot \begin{pmatrix} \vec{S}_1 & \dots & \vec{S}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{S}_1 & \dots & A\vec{S}_n \end{pmatrix} = (e_1 \quad \dots \quad e_n) = E_n$$

löse so:

$$(A|E_n) \Rightarrow \dots \text{el. ZUF} \dots \Rightarrow (E_n|A^{-1})$$

## Elementarmatrizen

Permutationsmatrizen (Vertauschen von Zeilen):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplikation einer Zeile mit  $\lambda \neq 0$ :

$$D_k(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

Addition des  $\lambda$ -fachen der  $l$ -ten Zeile zur  $k$ -ten Zeile:

$$N_{kl}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \lambda \text{ an der } k\text{-ten Zeile und } l\text{-ten Spalte}$$

## Rechenregeln Matrizen

Addition:

$$\begin{array}{l|l} A + B = B + A & \text{Kommutativität} \\ (A + B) + C = (A + B) + C & \text{Assoziativität} \\ (\mu \cdot \lambda)A = \mu(\lambda \cdot A) & \\ 0 + A = A = A + 0 & \text{Neutrales Element} \\ E_n A = A & \\ \forall A \exists B : A + B = 0 & \text{Inverses Element} \\ B = -A & \\ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B & \text{Distributivitat} \end{array}$$

Transposition:

$$\begin{array}{l|l} (A + B)^T = A^T + B^T & \text{Summe} \\ (\lambda A)^T = \lambda A^T & \text{Skalarmultiplikation} \\ (A^T)^T = A & \text{Zweifache Transposition} \\ (AB)^T = B^T A^T & \text{Produkt} \\ (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} & \text{Inverses} \end{array}$$

Multiplikation:



|  |                   |
|--|-------------------|
| $\exists A, B : AB \neq BA$              | nicht kommutativ! |
| $(AB)C = A(BC)$                          | Assoziativität    |
| $\exists E \in E_n : EA = A$             | Neutrales Element |
| $A(B + C) = AB + AC$                     | Distributivität   |
| $(B + C)A = BA + CA$                     |                   |
| $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ | Inverses          |

## Gruppen

$G$  nichtleere Menge mit innerer Verknüpfung  $\cdot$

$$\cdot : G \times G \rightarrow G$$

$(G, \cdot)$  heißt Gruppe, wenn:

$$\left. \begin{array}{l} \forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \exists e \in G : e \cdot a = a = a \cdot e \quad \forall a \in G \\ \forall a \in G \exists b \in G : a \cdot b = e = b \cdot a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Assoziativgesetz} \\ \text{neutrales Element} \\ \text{inverses Element} \end{array}$$

$G$  nennt man abelsch (=kommutativ) falls:

$$\bullet \quad ab = ba \quad \forall a, b \in G$$

## Untergruppen

$(G, \cdot)$  sei eine Gruppe mit neutralem Element  $e$

$U \subseteq G$  mit:

$$\left. \begin{array}{l} e \in U \\ u, v \in U \Rightarrow u \cdot v \in U \\ u \in U \Rightarrow u^{-1} \in U \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{neutrales Element} \\ \text{abgeschlossen} \\ \text{inverses Element} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U \text{ ist Untergruppe} \\ U \leq G \end{array} \right.$$

## Von Elementen erzeugten Untergruppen

$$\langle a \rangle = \{a^k \mid a \in G, k \in \mathbb{Z}\}$$

- $e \in \langle a \rangle$
- $a^k, a^l \in \langle a \rangle \Rightarrow a^k \cdot a^l = a^{k+l} \in \langle a \rangle$
- $a^k a^{-k} = a^0 = e$

## Ordnung eines Elements

$(G, \cdot)$  Gruppe  $\rightarrow a \in G$

$$\rightarrow O(a) = |\langle a \rangle| = \begin{cases} n \in \mathbb{N}, & \# \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$O(a)$  = kleinste Zahl  $n$  mit  $a^n = e$

$$\langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$$

$$O(a) = n$$

Satz über die Ordnung von Gruppenelementen:

Es sei  $G$  eine Gruppe mit neutralem Element  $e$ , und es sei  $a \in G$ :

(a) Falls  $O(a) = \infty$ , dann:  $a^i \neq a^j$ ,  $i \neq j$ .

(b) Falls  $O(a) \in \mathbb{N}$ , so gilt:  $O(a) = u$  = kleinste natürliche Zahl, für die  $a^u = e$  gilt.

$$a^s = e \Leftrightarrow O(a) \mid s$$

## Sätze von Lagrange und Euler

Satz von Lagrange:

$G$  sei eine endliche Gruppe,  $U \leq G$

Dann:

$$|U| \mid |G|$$

Satz von Euler:

$$a^{|G|} = e \quad \forall a \in G$$

## Die Restklassen modulo n:

Gegeben:  $n \in \mathbb{N}$

Betrachte: wähle  $a \in \mathbb{Z}$

$$\bar{a} = \{a + nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

Wir schließen  $a, b \in \mathbb{Z}$ :

$a \equiv b \pmod{n}$ , falls  $a, b$  den gleichen Rest bei Div durch  $n$  haben:

Es gilt:

$$\left. \begin{array}{l} a = qn + r \\ b = \tilde{q}n + r \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - b = (q - \tilde{q})n \\ \Leftrightarrow n \mid (a - b) \\ \Leftrightarrow a + n\mathbb{Z} = b + n\mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b} \end{array} \right.$$

Menge der Restklassen  $\rightarrow \mathbb{Z} \mid n\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \mid n = \mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$

$$|\mathbb{Z}_n| = n$$

Addition:

$$\bar{k}, \bar{l} \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \overline{\bar{k}} = \bar{l} = \overline{\bar{k} + \bar{l}}$$

## Ringe

Eine Menge  $R$  mit zwei Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  heißt ein Ring falls gilt:

- $(R, +)$  ist abelsche Gruppe
- $\cdot$  ist assoziativ
- Distributivgesetze  $a(b + c) = ab + ac$  und  $(a + b)c = ac + bc \forall a, b, c \in R$
- $\exists$  Einselement:  $1 \in R: 1 \cdot a = a = a \cdot 1 \quad \forall a \in R$

## Einheitengruppe (= Gruppe der invertierbaren Elemente)

Gegeben: Ring  $(R, +, \cdot)$

$$R^\times = \{a \in R \mid a \text{ ist invertierbar}\} = \{a \in R \mid \exists b \in R : ab = 1 = ba\}$$

$R^\times$  ist die Einheitengruppe von  $R$

## Prime Restklassengruppen

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_n^\times &= \{\bar{a} \text{ ist invertierbar}\} \\ &= \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n \mid \exists j \in \mathbb{Z}_n : \bar{a}j = 1\} \\ &= \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(a, n) = 1\} \end{aligned}$$

$$a, b \text{ sind relativ prim/teilerfremd} \Leftrightarrow \text{ggT}(a, b) = 1$$

$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  ist Körper  $\Leftrightarrow n \in (\mathbb{P})$

$$\begin{aligned} \bar{a} \text{ invertierbar} &\Leftrightarrow \exists \bar{b} \in \mathbb{Z}_n && : \bar{a}\bar{b} = \bar{1} \\ &\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{Z} && : (a + n\mathbb{Z})(b + n\mathbb{Z}) = 1 + n\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{Z} && : n \mid ab - 1 \\ &\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{Z} \exists x \in \mathbb{Z} && : ab - 1 = nx \\ &\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{Z} \exists x \in \mathbb{Z} && : ab - nx = 1 \\ &\Rightarrow && \text{ggT}(a, n) = 1 \end{aligned}$$

## Euklidischer Algorithmus

$$a_1 = a, a_2 = b \mid b > 0$$

Sukzessive Division mit Rest:

$$\begin{array}{rclcl} a_1 & = & q_1 a_2 & + & a_3, \quad 0 < a_3 < a_2 \\ a_2 & = & q_2 a_3 & + & a_4, \quad 0 < a_4 < a_3 \\ \vdots & = & \vdots & + & \vdots \\ a_{n-2} & = & q_{n-2} a_{n-1} & + & a_n, \quad 0 < a_n < a_{n-1} \\ a_{n-1} & = & q_{n-1} a_n & + & 0 \quad \nwarrow \underline{a_n = \text{ggT}(a_1, a_2)} \end{array}$$

$$\exists r, s \in \mathbb{Z} : ra + sb = a_n \quad \Leftarrow \text{erweiterter euklidischer Algorithmus}$$

## Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Der Erweiterter Euklidischer Algorithmus findet zwei weitere Zahlen  $s, t \in \mathbb{Z}$  die eine Linearkombination bilden, die folgende Gleichung erfüllt:

$$s \cdot a + t \cdot b = \text{ggT}(a, b)$$

### Berechnung

Bei dem Erweiterten Euklidischen Algorithmus wird die bisherige Folge  $r_x$  um drei weitere  $(q_x, s_x, t_x)$  erweitert, welche mit der folgenden Formeln bestimmt werden

$$\begin{aligned} q_{x+1} &:= \left\lfloor \frac{r_{x-1}}{r_x} \right\rfloor \\ r_{x+1} &:= \begin{cases} a & \text{wenn } x = 0, \\ b & \text{wenn } x = 1 \\ r_{x-1} - q_x \cdot r_x & \end{cases} \\ s_{x+1} &:= \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0, \\ 0 & \text{wenn } x = 1 \\ s_{x-1} - q_x \cdot s_x & \end{cases} \\ t_{x+1} &:= \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = 0, \\ 1 & \text{wenn } x = 1 \\ t_{x-1} - q_x \cdot t_x & \end{cases} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \text{ggT}(a, b) &= r_n \\ &= s_n \cdot a + t_n \cdot b \quad \text{mit } r_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

### Eulersche $\varphi$ -Funktion:

Man nennt  $\varphi(n) = \#\{a \in \{1, \dots, n\} \mid \text{ggT}(a, n) = 1\}$

$$\varphi(n) = |\mathbb{Z}_n^\times|$$

$$\varphi(p) = p - 1 \quad \forall p \in \mathbb{P}$$

### kleiner Satz von Fermat

Es sei  $p \in \mathbb{P}$  dann gilt:  $\forall a \in \mathbb{Z} : a^p \equiv a \pmod{p}$

### Das Pohlig Hellman Verfahren

$$p = (\text{gro\ss e}) \text{ Primzahl} \parallel \mathcal{N} = \text{Klartext} \mid \mathcal{N} \in \mathbb{Z}_p^\times \parallel e, d = \text{Schl\"ussel}$$

Wähle  $e \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(e, p-1) = 1$

Bestimme  $d$  mit:

$$\begin{aligned} ed &\equiv 1 \pmod{p-1} \\ ed &= 1 + r(p-1) \\ 1 &= ed - r(p-1) \\ &\Rightarrow \text{euklidischer Algorithmus} \end{aligned}$$

Verschl\"usseln:

$$\mathcal{C} = \mathcal{N}^e$$

Entschl\"usseln:

$$\mathcal{C}^d = (\mathcal{N}^e)^d = \mathcal{N}^{ed} = \mathcal{N}^{1+r(p-1)} = \mathcal{N}^1 \cdot (\mathcal{N}^{(p-1)})^r \stackrel{\text{Satz von Euler - Fermat}}{=} \mathcal{N}$$

Wähle  $p$  am besten mit  $\frac{p-1}{2}$  auch prim  $\leftarrow$  sichere Primzahl

## RSA-Verfahren:

Vorbereitung des Empfängers (Erzeugers der Schlüssel):

1. wähle große  $p, q \in \mathbb{P} : p \neq q$  und  $p \pm 1, q \pm 1$  müssen große Primteiler haben
2. setze  $n = p \cdot q$
3.  $\left| \mathbb{Z}_n^\times \right| = \left| \{a \in \{1, \dots, n\} \mid \text{ggT}(a, n) = 1\} \right| = \varphi(n) = \varphi(p \cdot q) = (p-1)(q-1)$
4. wähle  $e \in \{1, \dots, n\} : \text{ggT}(e, \varphi(n)) = 1$
5. berechne  $d : e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
6. veröffentliche Schlüssel  $(n, e)$

Verschlüsselung des Senders:

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{N}^e \pmod{n}$$

Entschlüsselung des Empfängers:

$$\mathcal{N} \equiv \mathcal{C}^d \pmod{n}$$

## Vektorräume

### Körper

Ein Ring  $K$  ( $K, +, \cdot$ ) mit:

1.  $K$  ist kommutativ
2.  $\exists$  Einselement  $1 : 1 \cdot \lambda = \lambda = \lambda \cdot 1 \quad \forall \lambda \in K$
3. Jedes  $\lambda \neq 0$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow K^\times = K \setminus \{0\}$

$V$  heißt ein  $K$ -Vektorraum falls  $\forall \lambda, \mu \in K, \forall u, v, w \in V :$

$$\left. \begin{array}{l} 1. v + w \in V, \lambda \cdot v \in V \\ 2. u + (v + w) = (u + v) + w \\ 3. \exists 0 \in V : 0 + v = v \\ 4. \exists v' \in V : v + v' = 0 \\ 5. u + v = v + u \end{array} \right\} (V, +) : \text{abelsche Gruppe}$$
$$\left. \begin{array}{l} 6. \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \\ 7. (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \\ 8. (\lambda \mu)v = \lambda(\mu v) \\ 9. 1v = v \end{array} \right\} \text{Verträglichkeitsgesetze}$$

### Sprechweisen und Regeln

Vektor: Element eines Vektorraumes

Nullvektor: 0-Element des Vektorraumes

Entgegengesetzte Vektoren (Negative):  $-v \rightarrow w + (-v) = w - v$

$K = \mathbb{R}$ : reeller Vektorraum

$K = \mathbb{C}$ : komplexer Vektorraum

$\lambda \in K$ : Skalare

3 Regeln:

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \quad | - (0v)$$

$$0 = 0 \cdot v$$

$$\lambda \cdot 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$$

$$0 = \lambda \cdot 0$$

$$\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0 \vee v = 0$$

### Untervektorräume

$V$  sei ein  $K$ -Vektorraum

$U \subseteq V$  heißt Untervektorraum, falls  $U$  wieder ein  $K$ -Vektorraum ist

d.h.

- $0 \in U$
- $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
- $\lambda \in K, u \in U \Rightarrow \lambda u \in U$

### Linearkombinationen

$v_1, \dots, v_n \in V, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

wenn gilt:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in V$$

ist  $v$  eine Linearkombination von  $v_1, \dots, v_n$

### Das Erzeugnis von $X$

Geg.:  $V : K$ -Vektorraum  $X \subseteq V$

$$\begin{aligned} \text{Setze : } \langle X \rangle &= \text{lin}(X) = \text{span}(X) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in K, v_i \in X, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= Kv_1 + \dots + Kv_n \\ &= \text{Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus } X \\ &= \text{Erzeugnis von } X \\ &= \text{lineare Hülle von } X \end{aligned}$$

- $\langle X \rangle \leq V \iff \langle X \rangle$  ist ein Untervektorraum von  $V$

Definition:

$$X = \emptyset \rightarrow \langle \emptyset \rangle = \{0\}$$

### Lineare Unabhängigkeit:

Geg.:  $K$ -Vektorraum  $V$

$v_1, \dots, v_n \in V$  heißen linear unabhängig, falls:

$$\forall T \subsetneq \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow \langle T \rangle \subsetneq \langle v_1, \dots, v_n \rangle \leftarrow \text{"keins unnötig"}$$

Das Kriterium für lineare Unabhängigkeit:

Gegeben:  $v_1, \dots, v_n \in V, 0_v \in V$

Ansatz:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_v$$

Falls:

$$\exists_1 \text{Lsg.} \Rightarrow v_1, \dots, v_n \text{ linear unabhängig}$$

## Basen von Vektorräumen

Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, so nennt man  $B \subseteq V$  eine Basis von  $V$ , falls:

- $B$  linear unabhängig
- $B$  erzeugt  $V$

## Merkregeln

- Jeder  $K$ -Vektorraum hat eine Basis
- $B \subseteq V$  ist eine Basis von  $V \Leftrightarrow B$  ist eine maximal-linear-unabhängige Teilmenge von  $V$   
 $\Leftrightarrow B$  ist minimales Erzeugendensystem von  $V$
- Jede linear unabhängige Menge von  $V$  kann man zu einer Basis ergänzen
- Jedes Erzeugendensystem von  $V$  kann zu einer Basis verkürzt werden
- Ist  $B$  eine Basis von  $V$ , so kann jedes  $v \in V$  als genau eine Weise bzgl.  $B$  dargestellt werden:

$$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$$

- Je zwei Basen von  $V$  haben die gleiche Mächtigkeit :  $B_1, B_2$  Basen von  $V \Rightarrow |B_1| = |B_2|$
- Die Dimension eines Vektorraumes  $V$ :

Wähle Basis  $B$  von  $V$

$$\dim(V) = |B| = \begin{cases} n \\ \infty \end{cases}$$

- Ist  $V$  ein Vektorraum der Dimension  $n$ :  $\dim(V) = n$ :

Dann:

- Jede linear unabhängige Menge mit  $n$  Elementen ist eine Basis
- Jedes Erzeugendensystem mit  $n$  Elementen ist eine Basis
- Mehr als  $n$  Vektoren sind immer linear abhängig
- $U \subseteq V \Rightarrow \dim(U) \leq \dim(V)$
- $U \subseteq V \wedge \dim(U) = \dim(V) \Rightarrow U = V$
- $\dim(\mathbb{R}[x]_n) = n + 1$

## Anwendung in Linearen Gleichungssystemen

$$A \in K^{m \times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

$$S_A = \langle s_1, \dots, s_n \rangle = \text{Spaltenraum von } A \quad \left| \quad Z_A = \langle z_1, \dots, z_m \rangle = \text{Zeilenraum von } A \right.$$
$$\dim(S_A) = \text{Spaltenrang von } A \quad \left| \quad \dim(Z_A) = \text{Zeilenrang von } A \right.$$

$$\text{rg}(A) = \text{Zeilenrang} = \text{Spaltenrang} \quad \forall A \in K^{m \times n}$$



## Spaltenraum

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

$$\begin{aligned} \langle s_1, \dots, s_n \rangle &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i \mid \lambda_i \in K \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \right\} \\ &= \{ A \cdot x \mid x \in K^n \} \end{aligned}$$

$$Ax = 0: (A|0) \rightarrow ZSF$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Lösungsraum von } A \cdot x = 0 \\ \text{Kern}(A) \\ \text{ker}(A) \end{array} \right\} \leq K^n$$

$$\dim(\text{Kern}(A)) = n - \text{rg}(A)$$

## Lineare codes

datenübertragung: Bits  $\rightarrow x_1, x_2, x_3, \dots$

Strom von Bits über gestörten Kanal

$p \approx 10^{-6}$  falsches Bit wird übertragen

$G$  = Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Wiederholungsmatrix}$$
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Parity-Check Matrix}$$

$$\text{Die Menge } C := \left\{ G \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in K^k \right\} \leq K$$

heißt  $(n, k)$ -Code:

$$\begin{aligned} n &= \text{Länge} \\ n - k &= \text{Redundanz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim(C) &= k \\ \frac{k}{n} &= \text{Informationsrate} \\ \text{rg}(G) &= k \end{aligned}$$

### Wie läuft das Dekodieren ab?

1. Fall  $c' \in C$ :

$$\text{Dekodiere : } G \cdot x = c' \Rightarrow x \in k^k$$

2. Fall:  $c' \notin C$ :

Suche  $c''$ , das sich von  $c'$  möglichst wenig unterscheidet:

$$\begin{array}{l|l} \exists_1 c'' & \exists c''_1, \dots, c''_n : c''_1, \dots, c''_n \text{ paarweise disjunkt} \\ \text{nächstes } c' \text{ an } c'' \text{ wählen und wie in Fall 1 dekodieren} & \text{Nachricht neu senden lassen} \end{array}$$

### Hamming Gewicht und Abstand

Für  $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^n$  ist das Hamming-Gewicht:

$$w(c) = \left| \left\{ i \in \{1, \dots, n\} \mid c_i \neq 0 \right\} \right|$$

Für  $c, c' \in K^n$  ist der Hamming-Abstand:

$$d(c, c') = w(c - c') = \left| \left\{ i \in \{1, \dots, n\} \mid c_i \neq c'_i \right\} \right|$$

Für  $C \subseteq K^n$  gilt:

$$\begin{array}{l|l} d(C) = \min \{ d(c, c') & c, c' \in C, c \neq c' \} \\ d(C) = \min \{ w(c) & c \in C \setminus \{0\} \} \end{array}$$

### Lineare Codes (Fortsetzung)

$$d(c, c'') \leq d(c, c') + d(c', c'')$$

Es sei  $C \in K^n$  ein Code:

$$\begin{array}{l|l} d(C) = 2e + 1 & d(C) = 2e + 2 \\ C \text{ ist } e\text{-fehlerkorrigierend} & \begin{array}{l} C \text{ ist } e\text{-fehlerkorrigierend} \\ C \text{ ist } (e + 1)\text{-fehlererkennend} \end{array} \end{array}$$

### Die Kontrollmatrix (Parity Check Matrix)

$$G = \begin{pmatrix} E_k \\ A \end{pmatrix} \in K^{n \times k}$$

$$P = (-A \quad E_{n-k}) \in K^{(n-1) \times n}$$

Es gilt:

$$P \cdot G = 0$$

Damit:

- $Pc = 0 \forall c \in C$
- $\dim(C) = \dim(\text{Lösungsraum } Px = 0) = n - (n - k) = k$

$$C = \text{"Lösungsmenge } Px = 0\text{"}$$

## Vorbereitung auf Determinante

Die symmetrische Gruppe:

Menge aller Permutationen (=Bijektionen) von  $\{1, 2, \dots, n\} = I_n$

$$S_n = \left\{ \sigma : I_n \rightarrow I_n \mid \sigma \text{ bijektiv} \right\}$$

$$|S_n| = n!$$

Verknüpfung: Komposition (Hintereinanderausführung):

$$f \circ g = f(g(x))$$

Das Signum (Vorzeichen) einer Permutation:

Wir nennen  $(j, i)$  einen Fehlstand der Permutation  $\sigma$ , falls

$$i < j, \text{ aber } \sigma(i) > \sigma(j)$$

Hat  $\sigma$   $f$  Fehlstände, so setze  $sgm(\sigma) = (-1)^f$

Es gilt:

$f = \# \text{Fehlstände von } \sigma \leftarrow$  ist ein Homomorphismus:

$$sgm(\sigma \circ \tau) = sgm(\sigma) \cdot sgm(\tau) \quad \forall \sigma, \tau \in S_n$$

$$\begin{aligned} sgm(\sigma \circ \tau) &= \prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} \\ &= \underbrace{\prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)}}_{sgm(\sigma)} \cdot \underbrace{\prod_{i < j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}}_{sgm(\tau)} \end{aligned}$$

## Die Determinante berechnen:

Für jede quadratische Matrix  $A \in K^{n \times n}$ ,  $K$  Körper, heißt

$$|A| = \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgm(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

die Determinante von  $A$  (Leibniz'sche Formel).

$$\left( \text{Permanente von } A = per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right)$$

- $\left| \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \right| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \leftarrow$  gilt auch für obere- und untere-  $\Delta$ -Matrizen
- $\det(A) = \det(A^T) \quad \forall A \in K^{n \times n}$

- Determinantenmultiplikationssatz:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \forall A, B \in K^{n \times n}$$

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(A^k) = \det(A)^k$

### Laplace'scher Entwicklungssatz:

Vorab:

Streichungsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \rightarrow A_{1,1} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2,m} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}}_{A_{i,j} \rightarrow \text{Zeile } i \text{ und Spalte } j \text{ weglassen}}$$

$$A = (a_{i,j}) \rightarrow \det(A) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot \det(A_{i,j}) \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot \det(A_{i,j}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Entwicklung nach } i\text{-ter Zeile} \\ \text{Entwicklung nach } j\text{-ter Spalte} \end{array}$$

### Determinante und elementare Zeilenumformungen

$P_{i,j}$  = Permutationsmatrix

$$\det(P_{i,j} \cdot A) = \det(P_{i,j}) \cdot \det(A) = -\det(A)$$

$D_i(\lambda)$  = Multiplikation einer Zeile mit  $\lambda$

$$\det(D_i(\lambda) \cdot A) = \det(D_i(\lambda)) \cdot \det(A) = \lambda \cdot \det(A)$$

$N_{i,j}(\lambda)$  = Addition des  $\lambda$ -fachen der  $j$ -ten Zeile zur  $i$ -ten Zeile

$$\det(N_{i,j}(\lambda) \cdot A) = \det(N_{i,j}(\lambda)) \cdot \det(A) = \det(A)$$

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A) \quad \forall A \in K^{n \times n}$$

### Blockdiagonalmatrizen

$$A, B \text{ quadratisch} \rightarrow \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ invertierbar } \forall A \in K^{n \times n}$$

## Skalarprodukt

$V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  heißt Skalarprodukt wenn:

- **Bilinearität:**  $\forall v, w, v', w' \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda v + v', w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$$

$$\langle v, \lambda w + w' \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$$

- **Symmetrie:**  $\forall v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

- **Positive Definitheit:**  $\forall v \in V$

$$\langle v, v \rangle \geq 0$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

### Wichtige Skalarprodukte

- **kanonisches/standard Skalarprodukt:**

$V = \mathbb{R}^n, v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle := v^T w$$

- **Skalarprodukt mit Matrix:**  $A = \mathbb{R}^{n \times n}, v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle v, w \rangle_A := v^T A w$$

$$n = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle_A = a \cdot v_1^2 + (b + c) \cdot v_1 \cdot v_2 + d \cdot v_2^2$$

- **Polynom Skalarprodukt:**  $p, q \in \mathbb{R}[x]$

$$\langle p, q \rangle := \int_a^b p(x) \cdot q(x) dx$$

### Begriffe:

- Euklidischer Vektorraum:  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt
- Länge/Betrag/Norm eines Vektors:  $v \in V$

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

- Distanz/Abstand:  $v, w \in V$

$$d(v, w) := ||v - w||$$

- Winkel  $\forall v, w \in V, v, w \neq 0$  mit Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\angle(v, w) := \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| \cdot ||w||} \in [0, \pi]$$

## Orthogonalität

$v \perp w \mid v, w \in V$  falls:

$$\langle v, w \rangle = 0$$

$B \subseteq V$

$$\underbrace{b_i \perp b_j \ \forall i \neq j \ \wedge \ b_i, b_j \in B}_{\text{Orthogonalsystem}} \ \wedge \ \underbrace{\|b_i\| = 1 \ \forall b_i \in B}_{\text{Orthonormalsystem}}$$

Falls  $B$  eine Basis von  $V$  ist: **Orthogonalbasis/Orthonormalbasis**

## Normieren:

$v \in V \setminus \{0\}$

$$\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} \cdot v$$

## Orthogonale Zerlegung von Vektoren:

$v, a \neq 0 \mid v, a \in V$

gesucht:  $v_a, v_{a^\perp} \mid v = v_a + v_{a^\perp} \wedge v_a \perp v_{a^\perp}$

$$v_a = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a$$

$$v_{a^\perp} = v - v_a$$

## Linearkombinationen bezüglich Orthonormalbasen:

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$  ist ONB von  $V$

Linearkombination zu  $v \in V$  finden:

$$\lambda_i = \langle b_i, v \rangle \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

## Orthogonale Matrizen:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt orthogonal falls:  $A^T A = E_n$

$A$  sei orthogonal:

- $A^{-1} = A^T$
- $A^T A = A A^T = E_n$
- $\det(A) = \pm 1$
- Zeilen bzw. Spalten von  $A$  bilden eine ONB des  $\mathbb{R}^n$
- $\|Av\| = \|v\|$

### Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren

Basis  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  eines euklidischen Vektorraumes  $V$

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1$$

$$b_2 = \frac{1}{\|c_2\|} \cdot c_2 \text{ mit } c_2 = a_2 - \langle a_2, b_1 \rangle \cdot b_1$$

$$b_3 = \frac{1}{\|c_3\|} \cdot c_3 \text{ mit } c_3 = a_3 - \langle a_3, b_2 \rangle \cdot b_2 - \langle a_3, b_1 \rangle \cdot b_1$$

$$b_n = \frac{1}{\|c_n\|} \cdot c_n \text{ mit } c_n = a_n - \langle a_n, b_1 \rangle \cdot b_1 - \dots - \langle a_n, b_{n-1} \rangle \cdot b_{n-1}$$

allgemein:

$$b_{k+1} = \frac{1}{\|c_{k+1}\|} \cdot c_{k+1} \text{ mit } c_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle a_{k+1}, b_i \rangle \cdot b_i$$