Vektorräume

Körper

Ein Ring K $(K, +, \cdot)$ mit:

1. K ist kommutativ
2. $\exists$ Einselement $1 \;:\; 1 \cdot \lambda = \lambda = \lambda \cdot 1 \quad \forall \lambda \in K$
3. Jedes $\lambda \neq 0$ ist invertierbar $\Leftrightarrow\; K^{\times} = K \setminus \{0\}$

V heißt ein K-Vektorraum falls $\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall u, v, w \in V$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\; v + w \in V \;,\; \lambda \cdot v \in V \\ 2.\; u + (v + w) = (u + v) + w \\ 3.\; \exists 0 \in V \;:\; 0 + v = v \\ 4.\; \exists v' \in V \;:\; v + v' = 0 \\ 5.\; u + v = v + u \end{array}\right\} (V, +) \;:\; \text{abelsche Gruppe}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6.\; \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \\ 7.\; (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \\ 8.\; (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v) \\ 9.\; 1v = v \end{array}\right\} \quad \text{Verträglichkeitsgesetze}$$

Sprechweisen und Regeln

Vektor: Element eines Vektorraumes

Nullvektor: 0-Element des Vektorraumes

Entgegengesetzte Vektoren (Negative): $-v \quad \to w + (-v) = w - v$

$K = \mathbb{R}$: reeller Vektorraum

$K = \mathbb{C}$: komplexer Vektorraum

$\lambda \in K$: Skalare

3 Regeln:

$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \;\big|\, - (0v)$

$0 = 0 \cdot v$

$\lambda \cdot 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$

$0 = \lambda \cdot 0$

$\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0 \vee v = 0$

Untervektorräume

V sei ein K-Vektorraum

$U \subseteq$ heißt Untervektorraum, falls U wieder ein K-Vektorraum ist

d.h.

- $0 \in U$
- $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
- $\lambda \in K, u \in U \Rightarrow \lambda u \in U$