

## Vektorprodukt

nur im  $\mathbb{R}^3$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \Rightarrow a, b \perp a \times b$$

## Orthogonale Projektion

### Orthogonales Komplement

$V$  ist ein euklidischer Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$U \leq V$$

orthogonales Komplement zu  $U$ :

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u \ \forall u \in U\}$$

- $U^\perp \leq V$
- $U \cap U^\perp = \{0\}$
- $\exists_1$  Darstellung der Form  $v = u + u^\perp \ \forall v \in V \mid u \in U, u^\perp \in U^\perp$

### Bestimmung des orthogonalen Komplement

$$U \leq V, \dim(V) = n, \dim(U) = r$$

$$U = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$$

ergänze basis  $B_u = \{a_1, \dots, a_r\}$  zu Basis von  $V$ :

$$B_V = \{a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_n\}$$

Bilde ONB  $B = \{b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n\}$  von  $V$  wobei  $\{b_1, \dots, b_r\}$  ONB von  $U$

$$U^\perp = \{b_{r+1}, \dots, b_n\}$$

### Orthogonale Projektiona

$$P_U : \begin{cases} V & \rightarrow U \\ v = u + u^\perp & \rightarrow u \end{cases}$$

$V$  euklidischer Vektorraum mit Untervektorraum  $U \leq V$

$$\dim(V) = n$$

$$\dim(U) = v$$

noch machen ahh

Bestimme  $u = P_u(v)$

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= \|\overbrace{v - u}^{=u^\perp} + u - w\|^2 \\ &= \langle u^\perp + (u - w), u^\perp + (u - w) \rangle \\ &= \|u^\perp\|^2 + \|u - w\|^2 + 2\langle u^\perp, u - w \rangle \\ &\geq \|u^\perp\| = \|v - u\| \end{aligned}$$

$$\text{Bestimme } u \in U \mid \|v - u\| = \min$$

### Ausrechnen:

$$V = \mathbb{R}^n, U \leq V, U = \langle b_1, \dots, b_r \rangle \mid b_i \in \mathbb{R}^n$$

$$u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_r b_r$$

$$\text{Bilde Matrix } A = (b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$$

$$u = (b_1, \dots, b_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}}_{=:x}$$

$$\rightarrow \|v - u\| = \|v - Ax\| = \min$$

### Das Lineare Ausgleichsproblem

$$\text{Gegeben: } A \in \mathbb{R}^{n \times r}, r \leq n, b \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Gesucht: } x \in \mathbb{R}^r : \|b - Ax\| = \min$$

Lösung: Finde  $x$  als Lösung des LGS  $A^T A x = A^T b = \text{Normalgleichung}$