Rechenregeln

Addition:

$A + B = B + A$	Kommutativität
$(A + B) + C = (A + B) + C$	Assoziativität
$(\mu \cdot \lambda)A = \mu(\lambda \cdot A)$	
$0 + A = A = A = 0$	Neutrales Element
$E_n A = A$	
$\forall A \exists B : A + B = 0$	Inverses Element
$B = -A$	
$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$	Distributivität

Transposition:

$(A + B)^T = A^T + B^T$	Summe
$(\lambda A)^T = \lambda A^T$	Skalarmultiplikation
$(A^T)^T = A$	Zweifache Transposition
$(AB)^T = B^T A^T$	Produkt
$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$	Inverses

Multiplikation:

$\exists A, B : AB \neq BA$	nicht kommutativ!
$(AB)C = A(BC)$	Assoziativität
$\exists E \in E_n : EA = A$	Neutrales Element
$A(B + C) = AB + AC$	Distributivität
$(B + C)A = BA + CA$	
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$	Inverses

Gruppen

G nichtleere Menge mit innerer Verknüpfung $*$

$* : G \times G \to G$

$(G, *)$ heißt Gruppe, wenn:

$$\left.\begin{array}{r} \forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \exists e \in G : e \cdot a = a = a \cdot e \quad \forall a \in G \\ \forall a \in G \exists b \in G : a \cdot b = e = b \cdot a \end{array}\right\| \begin{array}{l} \text{Assoziativgesetz} \\ \text{neutrales Element} \\ \text{inverses Element} \end{array}$$

G nennt man abisch (=kommutativ) falls:

- $ab = ba \quad \forall a, b \in G$

Untergruppen

$(G, \cdot)$ sei eine Gruppe mit neutralem Element e

$U \subseteq G$ mit:

$$\left.\begin{array}{r} e \in U \\ u, v \in U \Rightarrow u \cdot v \in U \\ u \in U \Rightarrow u^{-1} \in U \end{array}\right\| \begin{array}{l} \text{neutrales Element} \\ \text{abgeschlossen} \\ \text{inverses Element} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U \text{ ist Untergruppe} \\ U \leq G \end{cases}$$

Von Elementen erzeugten Untergruppen

$(G, \cdot) \quad \rightarrow \quad a \in G$

$\langle a \rangle = \{a^k | k \in \mathbb{Z}\} \quad \rightarrow \quad$ alle Vielfachen von a

- $e \in \langle a \rangle$
- $a^k, a^l \in \langle a \rangle$
- $\Rightarrow a^k \cdot a^l = a^{k+l} \in \langle a \rangle$
- $a^k \to a^{-k} \to a^k a^{-k} = a^0$

Ordnung eines Elements

$(G, \cdot)$ Gruppe $\rightarrow a \in G$

$\rightarrow O(a) = |\langle a \rangle| = \begin{cases} n \in \mathbb{N}, & \#\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \infty, & sonst. \end{cases}$

Angenommen: $\exists i \neq j : a^i = a^j$, o.E. $j > i$

Dann: $a^{j-i} = e$, $j - i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists$ kleinste Zahl n mit $a^n = e$

Dann: $m \in \mathbb{Z} \rightarrow$ Div m durch n mit Rest

$m = qn + r | q \in \mathbb{Z}$, $r \in 0, \ldots, n-1$

$\rightarrow a^m = a^{qn+r} = a^{qn} \cdot a^r = (a^n)^q \cdot a^r = a^r \in \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$

$< a >= \{e, a, \ldots, a^{n-1}\}$

$O(a) = n$

Satz über die Ordnung von Gruppenelementen:

Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element e, und es sei $a \in G$:

(a) Falls $O(a) = \infty$, dann: $a^i \neq a^j$, $i \neq j$.

(b) Falls $O(a) \in \mathbb{N}$, so gillt: $O(a) = u =$ kleinste natürliche Zahl, für die $a^n = e$ gilt.

Weiter:

I $\langle a \rangle = \{e, a, \ldots, a^{n-1}\}$

II Für $s \in \mathbb{N}_0$:

- $a^s = e \Leftrightarrow n | s$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$c|a \leftarrow$ c ist ein Teiler von a

$\exists b \in \mathbb{Z} : bc = a$