Anwendungen

Orthogonale Projektion bestimmen

Bestimme orthogonale Projektion von $u = P_U(v)$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \;\; U = \langle b_1, b_2, \cdots, b_r \rangle \,, \;\; A = (b_1, b_2, \ldots, b_r) \in \mathbb{R}^{n\times r}$

$x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times 1}$

$$\begin{gathered} A^T A x = A^T v \\ \Downarrow \\ \left(\begin{array}{c|c} A^T A & A^T v \end{array} \right) \\ \Downarrow \\ \left(\begin{array}{c|c} E_r & x \end{array} \right) \\ \Downarrow \\ u = A \cdot x \\ u = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 + b_2 + \ldots + \lambda_r \cdot b_r \end{gathered}$$

$d = ||v - u||$

Lösen Überbestimmter linearer Gleichungssysteme

$Ax = b$ nicht lösbar mit mehr Gleichungen als Unbekannten

Ersatzlösung: $||b - Ax|| = min$

$$\begin{array}{rcl} ||b - Ax|| & = & min \\ & \Downarrow & \\ A^T A x & = & A^T b \\ & \vdots & \end{array}$$

Methode der kleinsten Quadrate

Gegeben: “Punktwolke”

Gesucht: besste Aproximation durch Ausgleichsfuntion

Basisfunktionen: $f_1, f_2, \ldots, f_r$ bestimmt durch Anwender

Bsp.:

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 \quad \rightarrow \quad f_1(x) = 1,\; f_2(x) = x,\; f_3(x) = x^2$$

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_r$$

Dann minimiere:

$$(y_1 - f(t_1))^2 + \ldots + (y_n - f(t_n))^2 = min$$

$$A = \begin{pmatrix} f_1(t_1) & \cdots & f_r(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(t_n) & \cdots & f_r(t_n) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}$$

$$f = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r$$

$$||b - Ax|| = min$$

$$A^T Ax = Ab$$

$$\vdots$$