

Matrix

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \Bigg\} m \text{ Zeilen}$$

Stelle (i, j) : i -te Zeile | j -te Spalte

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^{m \times n} & = \{(a_{ij})_{m,n} | a_{ij} \in \mathbb{R}\} \Rightarrow & \text{"reelle Matrix"} \\ \mathbb{C}^{m \times n} & = \{(a_{ij})_{m,n} | a_{ij} \in \mathbb{C}\} \Rightarrow & \text{"komplexe Matrix"} \end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Rightarrow K(\text{k\"orper})^{m \times n} = \{(a_{ij})_{m,n} | a_{ij} \in K\}}$$

$A = B \Leftrightarrow$ gleich viele Spalten | gleich viele Zeilen | gleiche Einträge an den gleichen Stellen

Besondere Matrizen

- $m \times 1$: $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$ Spaltenvektor
- $1 \times n$: $Z = (Z_1 \ \cdots \ Z_n)$ Zeilenvektor
- $m \times n$: $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ Nullmatrix
- $m = n$: quadratische Matrix

$$\text{Diagonalmatrix: } \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Einheitsmatrix: } E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Obere } \Delta\text{-Matrix: } O = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$$

$$\text{Untere } \Delta\text{-Matrix: } U = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n} = \left(\vec{S}_1, \quad \cdots \quad \vec{S}_n \right) = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix}$$

Rechenoperationen

Transponieren:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrix: $A^T = A$

Addieren:

$$A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{m,n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$$

$$A = (a_{ij}) = -(-a_{ij}) = -(-A)$$

Skalare Multiplikation (Vervielfachen:)

$$A = (a_{ij})_{m,n} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

$$\lambda \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Multiplikation:

$$Z = (Z_1, \dots, Z_n) \quad , \quad S = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}$$

$$Z \cdot S = \sum_{i=1}^n Z_i S_i$$

$$A = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n} \quad , \quad B = (S_1 \quad \cdots \quad S_p) \in \mathbb{K}^{n \times p}$$

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} Z_1 \cdot S_1 & Z_1 \cdot S_2 & \cdots & Z_1 S_p \\ Z_2 \cdot S_1 & Z_2 \cdot S_2 & \cdots & Z_2 S_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_m \cdot S_1 & Z_m \cdot S_2 & \cdots & Z_m \cdot S_p \end{pmatrix} \in K^{m \times p}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A \leftarrow$ keine Kommutativität

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_k$$

$$A^0 := E_n$$

Invertieren:

$$A \in K^{n \times n} \quad , \quad B = A^{-1}$$

$$A \cdot B = E_n = B \cdot A$$

Nicht jede Matrix invertierbar!

$$B = \begin{pmatrix} \vec{S}_1 & \dots & \vec{S}_n \end{pmatrix} \quad , \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = A \cdot \begin{pmatrix} \vec{S}_1 & \dots & \vec{S}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{S}_1 & \dots & A\vec{S}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = E_n$$

löse so:

$$(A|E_n) \Rightarrow \dots \text{el. ZUF} \dots \Rightarrow (E_n|A^{-1})$$

Elementarmatrizen

Permutationsmatrizen (Vertauschen von Zeilen):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$:

$$D_k(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

Addition des λ -fachen der l -ten Zeile zur k -ten Zeile:

$$N_{kl}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \lambda \text{ an der } k\text{-ten Zeile und } l\text{-ten Spalte}$$