lineare Abbildung

V, W K-Vektorräume

Eine Abbildung $f : v \to w$ heißt Homomorphismus

falls gilt: $\forall \lambda \in K\ \forall v, w \in V$:

$$\left.\begin{array}{rcl} f(\lambda v) & = & \lambda f(v) \\ f(v+w) & = & f(v) + f(w) \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(\lambda v + w) = \lambda f(v) + f(w)$$

- $f : v \to w$ linear, $f : w \to u$ linear $\Rightarrow g \circ f$ linear
- $f : v \to w$ linear $\Rightarrow f(0) = 0$
- $f : v \to w$ linear und bijektiv $\Rightarrow f^{-1} : w \to v$

Bild und Kern

$f : V \to W$ linear.

$$\begin{array}{rclc|rcl} ker(f) & = & \{v \in V \mid f(v) = 0\} & \leq V & dim(ker(f)) & = & def(f) \\ Bild(f) & = & \{f(v) \mid v \in V\} & \leq W & dim(Bild(f)) & = & rg(f) \end{array}$$

Dimensionsformel

$f : v \to w$ linear

$$dim(V) = def(f) + rg(f)$$

$$f \text{ injektiv } \Leftrightarrow ker(f) = \{0\}$$

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ surjektiv } \Leftrightarrow f \text{ bijektiv}$$

Koordinatenvektoren

V endlich dimensionaler K-Vektorraum mit geordneter Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$

$v \in V \Rightarrow \exists_1$ Darstellung

$$v = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n}_{v_1, \ldots, v_n} \to_B v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$