Eigentwerte, Eigenvektoren

$$Av = \lambda v$$

$\Rightarrow v \in V \setminus \{0\}$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$

$$Eig_A(\lambda) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \lambda v\} \leq V$$
$$geo(\lambda) = dim(Eig_A(\lambda)) = \text{geometrische Vielfachheit}$$

Diagonalisieren von Matrizen

Sei $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis.

$$Ab_1 = \lambda_1 b_1 \ , \ldots , \ Ab_n = \lambda_n b_n$$

$\Rightarrow D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ist Diagonalform zu A

$\Rightarrow B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ist A diagonalisierende Matrix

Charakteristisches Polynom

$$\chi_A = det(A - xE_n) = (\lambda_1 - x)^{\nu_1} \cdots (\lambda_r - x)^{\nu_r}$$

- $\lambda_1, \lambda_r =$ sind alle Eigenwerte von A
- $alg(\lambda_i) = \nu_i =$ algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ_i

$$1 \leq geo(\lambda_i) \leq alg(\lambda_i)$$

Vorgehen

bestimme das charakteristische Polynom zu A und dessen Linearfaktoren

$$\chi_A = (\lambda_1 - x)^{\nu_1} \cdots (\lambda_r - x)^{\nu_r}$$

Es muss gelten: $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \nu_i = n$

1. bestimme das charakteristische Polynom zu A und dessen Linearfaktoren

   $$\chi_A = (\lambda_1 - x)^{\nu_1} \cdots (\lambda_r - x)^{\nu_r}$$

   Es muss gelten: $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \nu_i = n$

2. bestimme zu jedem Eigenwert den Eigenraum

$$Eig_A(\lambda_i) = ker(A - \lambda_i E_n) = \langle B_i \rangle$$

   $geo(\lambda_i) = |B_i|$
   Es muss gelten: $alg(\lambda_i) = geo(\lambda_i)$

3. $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_r \Rightarrow B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n) = B^{-1}AB$$