Basen von Vektorräumen

Ist V ein K-Vektorraum, so nennt man $B \leq V$ eine Basis von V, falls:

- B linear unabhängig
- B erzeugt V

Merkregeln

- Jeder K-Vektorraum hat eine Basis
- $$\begin{aligned} B \leq V \text{ ist eine Basis von } V \quad &\Leftrightarrow B \text{ ist eine maixmal-linear-unabhängige Teilmenge von } V \\ &\Leftrightarrow B \text{ ist minimales Erzeugendensystem von } V \end{aligned}$$
- Jede linear unabhängige Menge von V kann man zu einer Basis ergänzen
- Jedes Erzeugendensystem von V kann zu einer Basis verkürzt werden
- Ist B eine Basis von V, so kann jedes $v \in V$ als genau eine Weise bzgl. B dargestellt werden:
$$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$$
- Je zwei Basen von V haben die gleiche Mächtigkeit : B_1, B_2 Basen von $V \Rightarrow |B_1| = |B_2|$

- Die Dimension eines Vektorraumes V:

Wähle Basis B von V

$$dim(V) = |B| = \begin{cases} n \\ \infty \end{cases}$$

- Ist V ein Vektorraum der Dimension n: $dim(V) = n$:

Dann:

- Jede linear unabhängige Menge mit n Elementen ist eine Basis
- Jedes Erzeugendensystem mit n Elementen ist eine Basis
- Mehr als n Vektoren sind immer linear abhängig

- $U \leq V \Rightarrow dim(U) \leq dim(V)$
- $U \leq V \wedge dim(U) = dim(V) \Rightarrow U = V$
- $dim(\mathbb{R}[x]_n) = n + 1$

Anwendung in Linearen Gleichungssystemen

$$A \in K^{m\times n} = (a(ij)) = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

$S_A = \langle s_1, \dots, s_n \rangle =$ Spaltenraum von A	$Z_A = \langle z_1, \dots, z_m \rangle =$ Zeilenraum von A
$dim(S_A) =$ Spaltenrang von A	$dim(Z_A) =$ Zeilenrang von A