

lineare Abbildung

V, W K -Vektorräume

Eine Abbildung $f : v \rightarrow w$ heißt Homomorphismus

falls gilt: $\forall \lambda \in K \forall v, w \in V$:

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda v) &= \lambda f(v) \\ f(v + w) &= f(v) + f(w) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow f(\lambda v + w) = \lambda f(v) + f(w)$$

- $f : v \rightarrow w$ linear, $f : w \rightarrow u$ linear $\Rightarrow g \circ f$ linear
- $f : v \rightarrow w$ linear $\Rightarrow f(0) = 0$
- $f : v \rightarrow w$ linear und bijektiv $\Rightarrow f^{-1} : w \rightarrow v$

Bild und Kern

$f : V \rightarrow W$ linear.

$$\begin{array}{lcl|lcl} \ker(f) & = & \{v \in V \mid f(v) = 0\} & \leq V & \dim(\ker(f)) & = & \text{def}(f) \\ \text{Bild}(f) & = & \{f(v) \mid v \in V\} & \leq W & \dim(\text{Bild}(f)) & = & \text{rg}(f) \end{array}$$

Dimensionsformel

$f : v \rightarrow w$ linear

$$\dim(V) = \text{def}(f) + \text{rg}(f)$$

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$$

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ surjektiv} \Leftrightarrow f \text{ bijektiv}$$

Koordinatenvektoren

V endliche dimensionaler K -Vektorraum mit Basis (v_1, \dots, v_n)

geordnete Basis

$v \in V \Rightarrow \exists_1$ Darstellung

$$v = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n}_{v_1, \dots, v_n} \rightarrow V_{\text{Basis}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$