Linearkombinationen

$v_1, \ldots, v_n \in V\ ,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$

wenn gilt:

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V$$

ist v eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$

Das Erzeugnis von X

Geg.: V : K-Vektorraum $\quad x \subseteq V$

$$\begin{aligned} Setze: \langle X \rangle &= lin(X) = span(X) \\ &= \left\{ \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \in K,\ v_i \in X,\ n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= K v_1 + \ldots + K v_n \\ &= \text{Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus } X \\ &= \text{Erzeugnis von } X \\ &= \text{lineare Hülle von } X \end{aligned}$$

- $\langle X \rangle \leq V \ \leftrightarrow\ \langle X \rangle$ ist ein Untervektorraum von V

Definition:

$X = \emptyset \to \langle \emptyset \rangle = \{0\}$

Lineare Unabhängigkeit:

Geg.: K-Vektorraum V

$v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen linear unabhängig, falls:

$\forall T \subsetneq \{v_1, \ldots, v_n\} \ \Rightarrow\ \langle T \rangle \subsetneq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \leftarrow$ "keins unnötig"

Das Kriterium für lineare Unabhängigkeit:

Gegeben: $v_1, \ldots, v_n \in V\ ,\ 0_v \in V$

Ansatz:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_v$$

Falls:

$$\exists_1 \text{Lsg.} \ \Rightarrow v_1, \ldots, v_n \text{ linear unabhängig}$$