Lineare Gleichungssysteme

Vereinfachte Schreibweise als Matrix:

$$\overbrace{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1 & = & b_1 \\ \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_n & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}}^{linearesGleichungssystem\ LGS} \Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)}_{(A|b)} \Rightarrow \cdots$$

$$\cdots \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \color{orange}{*} & \color{orange}{\cdots} & \color{orange}{\cdots} & \color{orange}{*} & \color{orange}{*} \\ 0 & \color{orange}{*} & \color{orange}{\cdots} & \color{orange}{*} & \color{orange}{\vdots} \\ \color{cyan}{\vdots} & 0 & \color{orange}{*} & \color{orange}{*} & \color{orange}{\vdots} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{orange}{\vdots} \\ 0 & 0 & \color{cyan}{\cdots} & 0 & \color{purple}{\star} \end{array}\right) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \overbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \color{orange}{*} & \color{orange}{\cdots} & \color{orange}{*} & \color{orange}{*} \\ 0 & 1 & \color{orange}{*} & \color{orange}{*} & \color{orange}{*} \\ 0 & 0 & 1 & \color{orange}{*} & \color{orange}{*} \\ \color{cyan}{\vdots} & \color{cyan}{\vdots} & \color{cyan}{\ddots} & \color{orange}{\vdots} & \color{orange}{\vdots} \\ 0 & 0 & \color{cyan}{\cdots} & 0 & 0 \end{array}\right)}^{reduzierteZeilenstufenform}$$

$\color{orange}{*}$: unbekannter Wert

$\color{cyan}{*}$: 0

$\color{purple}{\star}$: wenn $\neq 0$ gibt es keine Lösung

Umformen in ZNF:

$$\text{Elementare Zeilenumformungen} \begin{cases} \text{Vertauschen zweier Zeilen} \\ \text{Multiplikation einer Zeile mit } \lambda \neq 0 \\ \text{Addition des } \lambda\text{-fachen eines Zeile zu einer anderen} \end{cases}$$

Rang einer Matrix

Matrix M auf ZSF bringen

$\Rightarrow$ Anzahl an nicht null Zeilen = Rang von $M = rg(M)$

Das Kriterium für Lösbarkeit:

- Das System ist genau dann lösbar, wenn: $rg(A) = rg(A|b)$
- ist das LGS lösbar, so gilt: Anzahl frei wählbaren Vraiablen $= n - r$

$n =$ Anzahl der variablen und $r = rg(A)$

- ist das System (A|b) lösbar, so gilt: $\exists_1$ lsg $\Leftrightarrow n = r$