Skalarprodukt

$V \times V \to \mathbb{R}$, V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt Skalarprodukt wenn:

- **Bilinearität:** $\forall v, w, v', w' \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda v + v', w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$$

$$\langle v, \lambda w + w' \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$$

- **Symmetrie:** $\forall v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

- **Positive Definitheit:** $\forall v \in V$

$$\langle v, v \rangle \geq 0$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Wichtige Skalarprodukte

- **kanonisches/standard Skalarprodukt:**

$V = \mathbb{R}^n, v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle := v^T w$$

- **Skalarprodukt mit Matrix:** $A = \mathbb{R}^{n \times n}$, $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle v, w \rangle_A := v^T A w$$

$n = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\langle v, w \rangle_A = a \cdot {v_1}^2 + (b + c) \cdot v_1 \cdot v_2 + d \cdot {v_2}^2$$

- **Polynom Skalarprodukt:** $p, q \in \mathbb{R}[x]$

$$\langle p, q \rangle := \int_a^b p(x) \cdot q(x) dx$$

Begriffe:

- Euklidescher Vektorraum: $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt
- Länge/Betrag/Norm eines Vektors: $v \in V$

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

- Distanz/Abstand: $v, w \in V$

$$d(v, w) := ||v - w||$$

- Winkel $\forall v, w \in V\ ,\ v, w \neq 0$ mit Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\sphericalangle(v, w) := \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| \cdot ||w||} \in [0, \pi]$$