Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V Dann:

$$_B- := \begin{cases} V & \longrightarrow & K^n \\ \\ \underbrace{v}_{v=\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

ist linear.

Idee:

$$\left.\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & {}_BV \\ f & \longrightarrow & M(f) \end{array}\right\} \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & f(v) \\ {}_BV & \longrightarrow & M(f)_{_BV} \end{array}$$

Darstellungsmatrizen

$f : V \to W$ linear

Basen: $B = (b_1, \dots, b_n) \quad C = (c_1, \dots, c_m)$

Man nennt man

$$_CM(f)_B = \Big(_{C}f(b_1) \dots {}_{C}f(b_n)\Big) \in K^{m \times n}$$

die Darstellungsmatrix von f bezüglich B und C

$$_BV = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} {}_CM(f)_B \cdot {}_B\,V &= \lambda_1 \cdot {}_{C}f(b_1) + \ldots + \lambda_n \cdot {}_{C}f(b_n) \\ &= {}_{C}\Big(\lambda_1 f(b_1) + \ldots + \lambda_n (b_n)\Big) \\ &= {}_{C}f(v) \end{aligned}$$

Basistransformation

Vektorräume V, W, U

Basen $B = (b_1 \dots b_n), C = (c_1 \dots c_m), D = (d_1 \dots d_r)$

lineare Abbildungen $f, g, g \circ f$

Darstellungsmatrizen zu den linearen Abbildungen: $_CM(f)_B, {}_DM(g \circ f)_B, {}_DM(g)_C$

$$_DM(g \circ f)_B = {}_DM(g)_C \cdot {}_CM(f)_B$$

Basistransformationsformel

$f : V \to W$ linear

$B = (b_1 \dots b_n), C = (c_1 \dots c_n)$

${}_C M(f)_B$

$B' = ({b_1}' \dots {b_n}''), C' = ({c_1}' \dots {c_n}')$

$${}_{C'} M(f)_{B'} = {}_{C'} M(id)_C \cdot {}_C M(f)_B \cdot {}_B M(f)_{B'}$$

Spezialfall:

$f : K^n \to K^n,\ f(v) = A \cdot v$

$${}_B M(f)_B = B^{-1} A B$$