Lineare Codes (Fortsetzung)

$d(c, c'') \leq d(c, c') + d(c', c'')$

Es sei $C \in K^n$ ein Code:

$$\begin{array}{r|l} d(C) = 2e+1 & d(C) = 2e+2 \\ & \\ C \text{ ist } e\text{-fehlerkorrigierend} & C \text{ ist } e\text{-fehlerkorrigierend} \\ & C \text{ ist } (e+1)\text{-fehlererkennend} \end{array}$$

Die Kontrollmatrix (Parity Check Matrix)

$G = \begin{pmatrix} E_k \\ A \end{pmatrix} \in K^{n \times k}$

$P = \begin{pmatrix} -A & E_{n-k} \end{pmatrix} \in K^{(n-1) \times n}$

Es gilt:

$$P \cdot G = 0$$

Damit:

- $Pc = 0 \forall c \in C$
- $dim(C) = dim(\text{Lösungsraum } Px = 0) = n - (n-k) = k$

$$C = \text{"Lösungsmenge } Px = 0\text{"}$$

Vorbereitung auf Determinante

Die symmetrische Gruppe:

Menge aller Permutationen (=Bijektionen) von $\{1, 2, \ldots, n\}$

$S_n = \left\{ \sigma : I_n \to I_n \middle| \sigma \text{ bijektiv} \right\}$

$\left| S_n \right| = n!$

Verknüpfung: Komposition (Hintereinanderausführung):

$f \circ g = f(g(x))$

Das Signum (Vorzeichen) einer Permutation:

Wir nennen (j, i) einen Fehlstand der Permutation σ, falls

$$i < j, \text{ aber } \sigma(i) > \sigma(j)$$

Hat σ f Fehlstände, so setze $sgm(\sigma) = (-1)^f$

Es gilt:

$f = \#$Fehlstände von $\sigma \leftarrow$ ist ein Homomorphismus:

$sgm(\sigma \circ \tau) = sgm(\sigma) \cdot sgm(\tau) \quad \forall \sigma, \tau \in S_n$

$sgm(\sigma \circ \tau) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j-i}$

$$\begin{aligned} sgm(\sigma \circ \tau) &= \textstyle\prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j-i} \\ &= \underbrace{\prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)}}_{sgm(\sigma)} \cdot \underbrace{\prod_{i<j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j-i}}_{sgm(\tau)} \end{aligned}$$

Die Determinante:

Für jede quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}, K körper$, heißt

$$|A| = det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgm(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \sigma(i)$$

die Determinante von A (Leibniz'sche Formel).

Weiter:

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \sigma(i)$$