

Wstęp

Dokładność aproksymacji średniokwadratowej ciągłej, w bazie wielomianów ortogonalnych, dla wielomianów, jest ograniczona przez dwa istotne czynniki. Pierwszym z nich jest rozmiar bazy podprzestrzeni względem której dokonujemy aproksymacji, a drugim, dokładność kwadratury używanej do przybliżania iloczynu skalarnego, zdefiniowanego jako całka z iloczynu dwóch funkcji oraz odpowiedniej funkcji wagowej. Aby osiągnąć optymalną dokładność, dla jak największej przestrzeni funkcji aproksymowanych należy więc dobrać jak największy rozmiar podprzestrzeni aproksymującej, taki że zastosowana kwadratura w każdym kroku aproksymacji będzie dokładna. Zawarte w tym raporcie eksperymenty numeryczne będą poświęcone sprawdzeniu powyższych własności, a także znalezieniu optymalnego rozmiaru podprzestrzeni, dla którego wykonywana metoda aproksymacji będzie dokładna dla największej możliwej przestrzeni wielomianów.

Opis metody aproksymacji

Dana jest przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem $V = L_w^2(0, \infty)$, gdzie $w(x) = e^{-x}$, z iloczynem skalarnym zdefiniowanym jako

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x) dx. \quad (1)$$

Wtedy podprzestrzeń $D \subset V$, to przestrzeń rozpinana przez m wielomianów z bazy *Laguerre'a*, liczba m nazywana będzie rzędem aproksymacji. Zadaniem aproksymacji będzie znalezienie, dla funkcji $f \in V$, elementu optymalnego $f^* \in D$, takiego że

$$\|f - f^*\| = \inf_{g \in D} \|f - g\|.$$

Element optymalny f^* można zapisać jako kombinacja liniowa wielomianów L z bazy *Laguerre'a*

$$f^* = \sum_{i=1}^m \alpha_i L_i.$$

Zadanie znalezienia wartości α sprowadza się do rozwiązania układu równań normalnych postaci

$$G \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, L_1 \rangle \\ \langle f, L_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, L_m \rangle \end{bmatrix}, \text{ gdzie } G = \{\langle L_i, L_j \rangle\}_{i,j=1}^m. \quad (2)$$

Macierz G nazywamy macierzą Grama tego układu. Dla wielomianów *Laguerre'a* zachodzi

$$\langle L_i, L_j \rangle = \int_0^\infty e^{-x} L_i(x) L_j(x) dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ ((i-1)!)^2 & i = j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

więc G jest macierzą diagonalną, czyli rozwiązanie układu równań (2) jest postaci

$$\alpha_i = \frac{\langle f, L_i \rangle}{((i-1)!)^2}, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, m \quad \text{skąd} \quad f^* = \sum_{i=1}^m \frac{\langle f, L_i \rangle}{((i-1)!)^2} L_i.$$

Wartość iloczynu skalarnego (1), równa odpowiedniej całce z funkcją wagową $w(x) = e^{-x}$, przybliżana będzie przy pomocy 10-punktowej kwadratury *Gaussa-Laguerre'a* określonej wzorem

$$\langle f, g \rangle \approx \sum_{k=1}^{10} A_k f(x_k) g(x_k), \quad (3)$$

gdzie x_k to pierwiastki wielomianu *Laguerre'a* 10 stopnia, a A_k to współczynniki tej kwadratury.

Eksperymenty numeryczne

Weźmy dowolny wielomian n -tego stopnia, aby zapisać go w bazie wielomianów ortogonalnych *Laguerre'a* potrzebujemy co najmniej $m = n + 1$ rozmiar przestrzeni aproksymującej. Dla każdego rzędu mniejszego niż wspomniany, aproksymacja będzie niedokładna.

Spójrzmy teraz na metodę obliczania iloczynu skalarnego, opisaną wzorem (3). Jest to kwadratura 10-punktowa, oparta na węzłach będących pierwiastkami wielomianu ortogonalnego, więc zgodnie z teorią jest ona rzędu $r = 20$, co oznacza że zachowuje ona precyzję dla wielomianów stopnia co najwyżej $r - 1$. Z powyższych otrzymujemy, że dla aproksymacji rzędu m , wielomianu stopnia n , aby wynik był dokładny muszą one spełniać $m \geq n + 1$ oraz $m - 1 + n \leq r - 1$, mamy więc dla danego m

$$n \leq \min(m - 1, r - m), \text{ zatem } n \leq \frac{r - 1}{2}. \quad (4)$$

Oznacza, to że maksymalny stopień wielomianu n_{max} , dla którego aproksymacja będzie dokładna, wynosi $n_{max} = \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor$, a będzie on osiągnięty dla $m = \lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor$ lub dla $m = \lceil \frac{r+1}{2} \rceil$. Zgodnie z powyższym szacowaniem dla rozpatrywanej 10-punktowej kwadratury *Gaussa-Laguerre'a* liczba $n_{max} = 9$ dla $m = 10$ lub $m = 11$. Sprawdźmy teraz dokładność aproksymacji licząc dla węzłów x_1, x_2, \dots, x_k błąd średniokwadratowy δ według wzoru

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f^*(x_i))^2}.$$

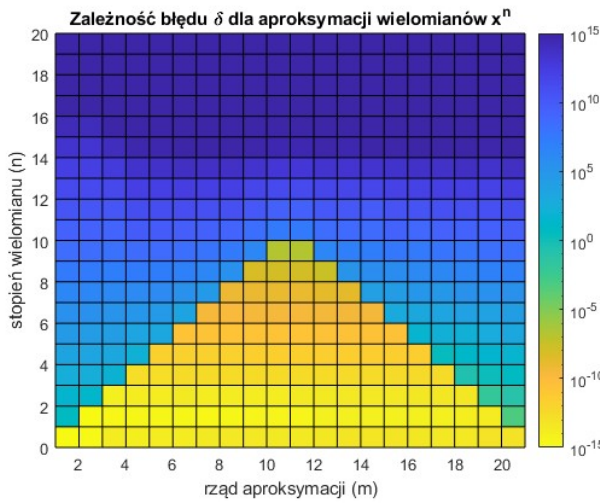
Zależności δ otrzymane poprzez tablicowanie funkcji i jej przybliżenia w 200 punktach z przedziału $[0, 10]$ dla wielomianów postaci x^n , przedstawione w tabeli 1 oraz w tabeli 2, potwierdzają powyższe twierdzenia. Aby sprawdzić zależność (4) pozostaje jeszcze zbadać dokładność dla pozostałych rzędów aproksymacji. W tym celu na rysunku 1 przedstawiona została zależność błędu średniokwadratowego δ dla kolejnych wartości rzędu aproksymacji m oraz odpowiednich stopni wielomianów x^n , wyliczona analogicznie do przykładu z tabeli 1 i tabeli 2. W celu uogólnienia doświadczenia wyliczone zostaną również zależności dla aproksymacji przy użyciu 40-punktowej kwadratury *Gaussa-Laguerre'a* rzędu $r = 80$. Przeprowadzone eksperymenty numeryczne potwierdzają zaproponowany maksymalny stopień wielomianu n_{max} , dla którego aproksymacja będzie dokładna, a także optymalny rząd aproksymacji m , dla którego ten stopień jest osiągnięty.

$w(x)$	δ
1	$6.843874 \cdot 10^{-16}$
x	$8.135403 \cdot 10^{-17}$
x^2	$7.065689 \cdot 10^{-16}$
x^5	$1.480505 \cdot 10^{-13}$
x^8	$5.877490 \cdot 10^{-10}$
x^9	$7.849059 \cdot 10^{-9}$
x^{10}	$1.393012 \cdot 10^6$

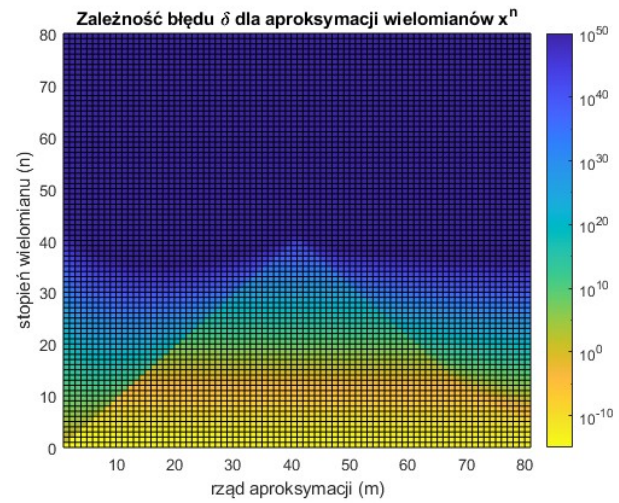
Tabela 1: Błąd aproksymacji rzędu $m = 10$ wielomianów $w(x)$.

$w(x)$	δ
1	$7.611306 \cdot 10^{-16}$
x	$8.011168 \cdot 10^{-17}$
x^2	$7.092405 \cdot 10^{-16}$
x^5	$1.032398 \cdot 10^{-13}$
x^8	$4.169785 \cdot 10^{-10}$
x^9	$3.251660 \cdot 10^{-9}$
x^{10}	$1.393012 \cdot 10^6$

Tabela 2: Błąd aproksymacji rzędu $m = 11$ wielomianów $w(x)$.



(a) Zastosowanie kwadratury rzędu $r = 20$



(b) Zastosowanie kwadratury rzędu $r = 80$

Rysunek 1: Błąd średniokwadratowy aproksymacji wielomianów postaci x^n , w zależności od rzędu aproksymacji m oraz stopnia wielomianu n . Tablicowanie wartości funkcji i jej przybliżeń w 200 punktach z przedziału $[0, 1]$.