Zadanie egzaminacyjne z RPiS 3

Mikołaj Drozd 339139

09.05.2024

1 Cel zadania

Mamy dany rozkład wykładniczy Exp(λ), którego gęstość określona jest wzorem:

$$\text{f(x)=}\lambda e^{-\lambda x}$$

Musimy wyznaczyć MGF tego rozkładu, następnie oszacować $P(X \geqslant \lambda a)$ za pomocą nierówności Markova, Chebysheva i Chernoffa przy założeniu, że X $\sim$ Exp(λ). Ostatnim krokiem będzie sporządzenie tabeli zawierającej wartości dokładne oraz oszacowania dla k=9, m=3, λ=13 oraz a $\in \{3, 4, 6, 10\}$.

2 Wyznaczenie MGF

$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} f_X(x)dx = \lambda \int_0^\infty e^{x(t-\lambda)}dx = \lambda \int_0^\infty e^s \frac{1}{t-\lambda} ds = \frac{\lambda}{t-\lambda} \int_0^\infty e^s ds = \frac{\lambda}{t-\lambda} e^{x(t-\lambda)}|_0^\infty$

Rozpatrzmy przypadki:
a) $t < \lambda$, wtedy całka jest zbieżna
b) $t = \lambda$, wtedy całka jest rozbieżna, ponieważ w mianowniku mamy 0
c) $t > \lambda$, wtedy całka jest również rozbieżna, ponieważ dążymy do nieskończoności

Zatem dla $t < \lambda$ mamy $M_X(t) = \frac{\lambda}{t-\lambda}[0-1] = -\frac{\lambda}{t-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

3 Oszacowania Markova, Chebysheva i Chernoffa

3.1 Markov

$P(X \geqslant \lambda a) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda a} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\lambda a} = \frac{1}{\lambda^2 a}$

3.2 Chebyshev

$P(|X - \frac{1}{\lambda}| \geqslant b) \leqslant \frac{V(X)}{b^2}$
$P(|X|) \geqslant b + \frac{1}{\lambda}) \leqslant \frac{V(X)}{b^2}$
$\lambda a = b + \frac{1}{\lambda}$
$b = \lambda a - \frac{1}{\lambda}$

Zatem:
$P(X \geqslant \lambda a) \leqslant \frac{V(X)}{(\lambda a - \frac{1}{\lambda})^2} = \frac{\frac{1}{\lambda^2}}{(\lambda a - \frac{1}{\lambda})^2} = \frac{\frac{1}{\lambda^2}}{\lambda^2 a^2 - 2a + \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda^4 a^2 - 2a\lambda^2 + 1}$

3.3 Chernoff

$P(X \geqslant \lambda a) \leqslant e^{-\lambda a t} M_X(t) = e^{-\lambda a t} \frac{\lambda}{\lambda - t} = f(t)$

4 Wartości dokładne i oszacowania

Wartość dokładna:
$P(X \geqslant \lambda a) = 1 - P(X < \lambda a) = 1 - (1 - e^{-\lambda^2 a}) = e^{-\lambda^2 a} = e^{-169a}$

Wartość oszacowania Markova:
$P(X \geqslant \lambda a) \leqslant \frac{1}{\lambda^2 a} = \frac{1}{169a}$

Wartość oszacowania Chebysheva:
$P(X \geqslant \lambda a) \leqslant \frac{1}{28561a^2 - 169a + 1}$

Wartość oszacowania Chernoffa (szukamy minimum wyznaczonej wyżej funkcji):
$(e^{-\lambda a t} \frac{\lambda}{\lambda - t})' = 0$
$e^{-\lambda a t}(-\lambda a) \frac{\lambda}{\lambda - t} + e^{-\lambda a t} \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} = 0$
$-\lambda a + \frac{1}{\lambda - t} = 0$
Stąd $t = \lambda - \frac{1}{\lambda a} = 4 - \frac{1}{4a}$
Czyli $P(X \geqslant \lambda a) \leqslant e^{-\lambda a (13 - \frac{1}{13a})} \frac{\lambda}{\lambda - (13 - \frac{1}{13a})} = \frac{13}{\frac{1}{13a} e^{13a(13 - \frac{1}{13a})}}$

Tabela (wartości w przybliżeniu):

wartość\a	3	4	6	10
dokładna	e^{-507}	e^{-676}	e^{-1014}	e^{-1690}
Markov	$\frac{1}{507}$	$\frac{1}{676}$	$\frac{1}{1014}$	$\frac{1}{1690}$
Chebyshev	$\frac{1}{256543}$	$\frac{1}{456301}$	$\frac{1}{1027183}$	$\frac{1}{2854411}$
Chernoff	$\frac{507}{e^{506}}$	$\frac{676}{e^{675}}$	$\frac{1014}{e^{1013}}$	$\frac{1690}{e^{1689}}$