Serie 1, Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton. Zeige, dass f messbar ist.

Beweis. Wir gehen o.B.d.A. von einer monoton wachsenden Funktion aus. Die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ setzt sich zusammen aus offenen Intervallen der Form $(a, b), a < b$. Es reicht also, zu zeigen, dass Urbilder offener Intervalle unter f offen sind. Sei dazu ein $(a, b) \subset \mathbb{R}$ vorgegeben. Definiere

$$p = \sup\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq a\}$$

und

$$q = \inf\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq b\}.$$

Wegen der Monotonie von f, gilt $p \leq q$. Weiter gilt (nur) für alle $t \in (p, q)$: $f(p) \leq a < f(t) < b \leq f(q)$, also ist $f^{-1}((a, b)) = (p, q)$, somit offen. Falls $f^{-1}((a, b))$ leer ist oder die Form $(-\infty, q), (-\infty, \infty), (p, \infty)$ hat, ist $f^{-1}((a, b))$ ebenfalls offen. Also ist f messbar. $\square$