Serie 8

Bemerkung: Meine Lösung für 1(c) stimmte nicht ganz, weshalb ich sie hier auslasse.

Exercise 1

(a) Show that the Dirichlet function is both Lebesgue-measurable and Lebesgue-integrable (i.e., $D \in \mathcal{L}_1([0,1])$) but not Riemann-integrable.

Beweis. D is Lebesgue-measurable: Let $U \subset \mathbb{R}$ be open. If $\{0,1\} \not\subset U$, then $f^{-1}(U) = \emptyset \in \mathfrak{B}$. If $\{0,1\} \subset U$, then $f^{-1}(U) = [0,1] \in \mathfrak{B}$. If $0 \notin U, 1 \in U$, then $f^{-1}(U) = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, viz., a countable union of closed sets, hence $f^{-1}(U) \in \mathfrak{B}$. If $0 \in U, 1 \notin U$, then $f^{-1}(U) = ([0,1] \cap \mathbb{Q})^c \cap [0,1]$, which is in $\mathfrak{B}$ by virtue of its complement's being in $\mathfrak{B}$.

D is Lebesgue-integrable: D is non-zero in a countable number of points. Countable sets have Lebesgue-measure zero. Measure zero sets don't affect Lebesgue integrals. So $\int_{[0,1]} D \, \mathrm{d}m = 0 < \infty$. Hence $D \in \mathcal{L}_1([0,1])$.

D isn't Riemann-integrable: Any interval in a partition of $[0,1]$ contains both rational and irrational numbers, so the upper Darboux sums are always 1 and the lower ones are always 0. $\square$

(b) Show that D can be made Riemann-integrable by tweaking its definition on a measure zero set.

Beweis. See (a): $D = [0]$. (Equivalence class of zero function.) $\square$

(c) Is there any bounded function $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ that is Lebesgue-measurable but not Riemann-integrable and that can't be made Riemann-integrable by tweaking its definition on a measure zero set?

Die charakteristische Funktion einer 'fetten' Cantor-Menge würde funktionieren. Google 'fat Cantor set' :)

Exercise 2

Compute the following Lebesgue integrals:

$$(a) \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} \, \mathrm{d}x, \quad (b) \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \, \mathrm{d}x.$$

Solution Note that

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \underbrace{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} \chi_{[0,n]}(x)}_{=:f_n(x)} \, \mathrm{d}x$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \chi_{[0,n]}(x)}_{=:g_n(x)} \, \mathrm{d}x.$$

We will claim that the sequences $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}, (g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ are both dominated by $h(x) := e^{-x/2}$ and then leverage the dominated convergence theorem. But first:

Lemma. *For all $x > -n$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$.*

Beweis. Using Bernoulli's inequality, we obtain:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}} &= \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right) \\
&= \left(\frac{(n+1+x)n}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right) \\
&= \left(1-\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right) \\
&\geq \left(1-\frac{x}{n+x}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right) \\
&= 1+\frac{(n+x)x-xn-x^2}{n(n+x)} = 1.
\end{aligned}$$

□

Claim 1: $f_n(x) \leq e^{-x/2}$: For $x \in \mathbb{R} \setminus [0,n)$, $f_n(x) = 0$, whereas $e^{-x/2} > 0$ for all x. For $x \in [0,n)$, observe that

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} \overset{!}{\leq} e^{-x/2}$$

is equivalent to

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \overset{!}{\leq} e^{-x} = \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k.$$

Since $-x > -n$, the lemma applies, so $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ increases monotonically with n, which proves the claim.

Claim 2: $g_n(x) \leq e^{-x/2}$: For $x \in \mathbb{R} \setminus [0,n)$, $g_n(x) = 0$, whereas $e^{-x/2} > 0$ for all x. For $x \in [0,n)$, observe that

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \overset{!}{\leq} e^{-x/2}$$

is equivalent to

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \overset{!}{\leq} e^{3x/2} = e^{x/2}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k.$$

Since $x \geq 0 > -n$ and the lemma applies, and since $e^{x/2} \geq 1$ for all $x \geq 0$, the last inequality is indeed true. Hence, $e^{-x/2}$ dominates $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Claim 3: $\int_0^\infty e^{-x/2}\,\mathrm{d}x < \infty$: We note that $-2e^{-x/2}$ is the antiderivative of $e^{-x/2}$, so

$$\int_0^\infty e^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} -2e^{-t/2} + 2 = 2 < \infty.$$

Claim 4: $\lim_{n\to\infty} f_n(x), \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ both exist for all $x \in \mathbb{R}$: Specifically,

$$f_n(x) \to \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-x}e^{x/2} = e^{-x/2}, & x \geq 0, \end{cases}, \quad n \to \infty.$$

and

$$g_n(x) \to \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{x}e^{-2} = e^{-x}, & x \geq 0, \end{cases}, \quad n \to \infty.$$

Hence we may apply the dominated convergence theorem, which gives us

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x/2}\,\mathrm{d}x = 2,$$

as already computed above. Similarly,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} -e^{-t} + 1 = 1.$$

Aufgabe 3

Es seien $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$ stetige Funktionen mit $f_n(x) \to 0, n \to \infty$, für alle $x \in [0,1]$. Zeige, dass für $\varphi : [0,1] \to [0,\infty], \varphi := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, gilt:

(a) φ Lebesgue-integrierbar $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \,\mathrm{d}x = 0$.

Beweis. Es gilt $\varphi \in \mathscr{L}_1([0,1])$, $\varphi \geq 0$, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Mit Satz 3.4 (majorisierte Konvergenz) folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \,\mathrm{d}m = \int_{[0,1]} 0 \,\mathrm{d}m = 0.$$

Da f_n für alle n stetig und folglich Riemann-integrierbar ist, gilt weiter

$$\int_{[0,1]} f_n \,\mathrm{d}m = \int_0^1 f_n(x) \,\mathrm{d}x$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und mithin die Behauptung. □

(b) Existiert eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben, sodass φ nicht Lebesgue-integrierbar ist, aber dennoch $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \,\mathrm{d}x = 0$ gilt?

Antwort. Ja. Betrachte die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$, der Funktionsgraph von f_n aussieht wie ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe $h_n = 2(n+1)$ und mit dem Interval $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ als Basis (entsprechend: Breite $b_n = \frac{1}{n^2+n}$); anderswo gilt $f_n(x) = 0$. Diese f_n sind stetig.

Für jedes f_n gilt dann:

$$\int_0^1 f_n(x) \,\mathrm{d}x = \frac{h_n \cdot b_n}{2} = \frac{n+1}{n^2+n} = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty.$$

Da $\left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right] \cap \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] = \{1/m\}$ für $m = n+1$ und $f(1/n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, kann man zum Berechnen von $\int_{[0,1]} \varphi \,\mathrm{d}m$ die Integrale der einzelnen f_n addieren:

$$\int_{[0,1]} \varphi \,\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty, n \to \infty.$$

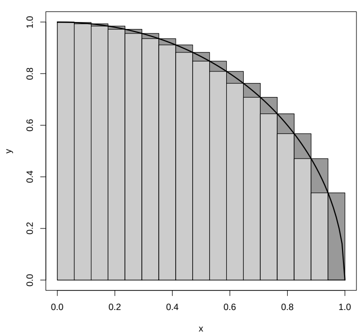
Somit gilt $\varphi \notin \mathscr{L}_1([0,1])$.

Aufgabe 4

Berechne das Lebesgue-Mass der Menge $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

Lösung Ich bin nicht dazu gekommen, es ganz auszuformulieren, aber von der Idee her:

1. $m(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\})$ mit Rechtecken der Breite $1/n$ von unten und von oben approximieren, $n \to \infty$:



2. Feststellen, dass dies das Riemannintegral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x$ ergibt.

3. Tun, als ob man $\sqrt{1-x^2}$ aus dem Stegreif integrieren kann, und dabei $\pi/4$ als Lösung erhalten.
4. Symmetrie/Translationsinvarianz: $\rightsquigarrow m(K) = \pi$.