Serie 9

Aufgabe 1

Es seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $\mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgue-Mass versehen. Zeige:

(a) Gilt $f = g$ fast überall, so ist $f = g$ überall.

Beweis. Insbesondere $f - g$ ist stetig und fast überall gleich der Nullabbildung. Definiere

$$A := (f-g)^{-1}((-\infty, 0)) \cup (f-g)^{-1}((0,\infty)).$$

Da $f - g \equiv 0$ fast überall, gilt $m(A) = 0$. Andererseits ist A offen, da stetige Urbilder offener Mengen dies sind. Die einzige offene Menge in $\mathbb{R}^n$ mit Mass 0 ist die Nullmenge: Sobald wir einen offenen Ball mit positivem Radius in A zeichnen können, hat A positives Mass. Also ist $f - g \equiv 0$ überall. $\square$

(b) $\operatorname{ess\,sup} f = \sup f$.

Beweis. Definiere

$$M := \{a \in \mathbb{R} : f^{-1}((a,\infty)) = \emptyset\}$$

und stelle fest, dass

$$\sup f = \begin{cases} \inf M, & M \neq \emptyset, \\ \infty, & M = \emptyset. \end{cases}$$

Definiere S wie in Definition 6.4. Ist f stetig, so gilt mit der gleichen Logik wie unter 1(a), dass $m(f^{-1}((a,\infty))) = 0$ genau dann, wenn $f^{-1}((a,\infty)) = \emptyset$. Also $M = S$ und damit die Behauptung. $\square$

Aufgabe 2

Es sei $p \in [1,\infty]$. Für welche $r, s \in \mathbb{R}$ liegen folgende Funktionen in $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}_+)$:

(a) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(x) = x^r$.

Antwort. f ist klar stetig und positiv auf seinem Definitionsbereich.

<u>Fall 1: $p = \infty$</u>: Mit Aufgabe 1(b) gilt

$$\|x^r\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |x^r| = \sup x^r.$$

Für $r > 0$, gilt $\lim_{x\to\infty} x^r = \infty$, also $\sup x^r = \infty$. Für $r < 0$, gilt $\lim_{x\to 0} x^r = \infty$, also $\sup x^r = \infty$. Für $r = 0$, gilt $\sup x^r = \sup x^0 = 1$. Also

$$x^r \in \mathscr{L}_\infty(\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow r = 0.$$

<u>Fall 2: $p \in [1,\infty)$</u>: Es reicht, zu überprüfen, ob $\int_{\mathbb{R}_+} x^{rp} \,\mathrm{d}m < \infty$.

Für $rp = -1$ (d.h, $r = -1/p$) gilt

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^{-1} \,\mathrm{d}m = \ln(x)|_0^\infty = \infty.$$

Für $rp > -1$ (d.h., $r > -1/p$):

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^{rp} \,\mathrm{d}m = \frac{1}{rp+1} x^{rp+1}|_0^\infty = \underbrace{\frac{1}{rp+1}}_{>0} \lim_{x\to\infty} x^{rp+1} = \infty.$$

Für $rp < -1$ (d.h., $r < -1/p$):

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^{rp}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{rp+1} x^{rp+1}|_0^\infty = \underbrace{\frac{1}{rp+1}}_{<0} \left(\underbrace{\lim_{x\to\infty} x^{rp+1}}_{=0} - \underbrace{\lim_{x\to 0} x^{rp+1}}_{=\infty} \right) = \infty.$$

Also gilt für alle $p \neq \infty$, dass $x^r \notin \mathscr{L}_p(\mathbb{R}_+)$.

(b) $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} x^r, & 0 < x \leq 1, \\ x^s, & x > 1. \end{cases}$

Antwort. Fall 1: $p = \infty$: $1^r = 1 = 1^s$ für alle $s, r \in \mathbb{R}$, also ist g stetig. Damit $\operatorname{ess\,sup} g = \sup g < \infty$, muss $r \geq 0, s \leq 0$.

Fall 2: $p \in [1, \infty)$: Für $rp = -1$ gilt

$$\int_0^1 x^{-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0} \left(\ln(x)|_t^1\right) = \infty.$$

Für $rp < -1$:

$$\int_0^1 x^{rp}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{rp+1} \lim_{t\to 0} \left((x^{rp+1})|_t^1\right) = \infty.$$

Für $rp > -1$:

$$\int_0^1 x^{rp}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{rp+1} \left(x^{rp+1}\right)|_0^1 = \frac{1}{rp+1} < \infty.$$

Also $\int_0^1 x^{rp}\,\mathrm{d}x < \infty$ genau dann, wenn $rp > -1$, also für $r > -1/p$.

Für $sp = -1$ gilt

$$\int_1^\infty x^{-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left(\ln(x)|_1^t\right) = \infty.$$

Für $sp > -1$:

$$\int_1^\infty x^{sp}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{sp+1} \lim_{t\to\infty} \left((x^{sp+1})|_1^t\right) = \infty.$$

Für $sp < -1$:

$$\int_1^\infty x^{sp}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{sp+1} \lim_{t\to\infty} \left((x^{sp+1})|_1^t\right) = -\frac{1}{sp+1} < \infty.$$

$\int_1^\infty x^{sp}\,\mathrm{d}x < \infty$ genau dann, wenn $sp < -1$, also für $s < -1/p$.

Insgesamt $g \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}_+)$ genau dann, wenn $r > -1/p, s < -1/p$.

Aufgabe 3

Es seien $0 < p_1 < p_2 < \infty$. Beweise:

(a) Ist $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Massraum mit $\mu(X) < \infty$, so gilt $\mathscr{L}_{p_2}(\mu) \subset \mathscr{L}_{p_1}(\mu)$.

Beweis. Es gelte $f \in \mathscr{L}_{p_2}(\mu)$ Da $p_1 < p_2$, gilt $\frac{p_1}{p_2} + \frac{1}{r} = 1$ mit $r = \frac{p_2}{p_2 - p_1} > 1$. Mit Hölder folgt

$$\begin{aligned} \int_X |f|^{p_1}\,\mathrm{d}\mu &= \int_X 1|f|^{p_1}\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \left(\int_X 1^r\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/r} \cdot \left(\int_X |f|^{p_1 p_2/p_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{p_1/p_2} \\ &= (\mu(X))^{1/r} \cdot \left(\left(\int_X |f|^{p_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p_2}\right)^{p_1}. \end{aligned}$$

Wegen $f \in \mathscr{L}_{p_2}(\mu)$ gilt $\left(\int_X |f|^{p_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p_2} \in \mathbb{R}$, also $\left(\left(\int_X |f|^{p_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p_2}\right)^{p_1} \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung auch

$\mu(X) < \infty$. Insgesamt:

$$\int_X |f|^{p_1} \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Also $f \in \mathscr{L}_{p_1}$. $\square$

(b) Ist X eine abzählbare (endliche oder unendliche) Menge und μ das Zählmass auf X, so gilt $\mathscr{L}_{p_1}(\mu) \subset \mathscr{L}_{p_2}(\mu)$. Die Inklusion ist strikt, falls X abzählbar unendlich ist.

Beweis. Wenn f bzgl. des Zählmasses μ Lebesgue-integrierbar ist, gilt

$$\int_X |f|^r \, \mathrm{d}\mu = \sum_{x \in X} (|f(x)|)^r,$$

$r \in \mathbb{R}$. Für X endlich haben wir es mit einer endlichen, also konvergenten, Summe zu tun, vorausgesetzt, dass die Funktion nur endliche Werte annimmt. Daher:

$$\sum_{x \in X} (|f(x)|)^{p_1} \, \mathrm{d}\mu < \infty \Rightarrow |f(X)| < \infty \Rightarrow \sum_{x \in X} (|f(x)|)^{p_2} \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Im unendlichen Fall heisst

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)|^{p_1} < \infty,$$

dass diese Reihe absolut konvergiert. Also dürfen wir die Summanden so umordnen, dass $|f(x_k)|^{p_1} \geq |f(x_{k+1})|^{p_1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen der Konvergenz muss weiter ein $N \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $|f(x_k)|^{p_1} < 1$ für alle $k \geq N$. Da $p_2 > p_1$, gilt für solche k dann $|f(x_k)|^{p_2} \leq |f(x_k)|^{p_1}$. Also

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)|^{p_2} = \sum_{k=1}^{N-1} |f(x_k)|^{p_2} + \sum_{k=N}^{\infty} |f(x_k)|^{p_2}.$$

Der erste Teil ist endlich, also konvergent; der zweite Teil wird von der konvergenten Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} |f(x_k)|^{p_1}$ majorisiert und ist also auch konvergent. Somit $\mathscr{L}_{p_1}(\mu) \subset \mathscr{L}_{p_2}(\mu)$.

Betrachten wir jedoch zu vorgegebenem p_1 und $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{C}, \\ x_k &\mapsto k^{-1/p_1}, \end{aligned}$$

so stellen wir fest, dass für $p_2 > p_1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)|^{p_2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p_2/p_1}} < \infty,$$

da $p_2/p_1 > 1$ (allgemeine harmonische Reihe). Jedoch

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)|^{p_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

was gegen ∞ divergiert. Also ist die obige Inklusion strikt. $\square$

(c) Es sei $X = [0, \infty)$ versehen mit dem Lebesgue-Mass. Es gilt sowohl $\mathscr{L}_{p_1}(X) \setminus \mathscr{L}_{p_2}(X) \neq \emptyset$ als auch $\mathscr{L}_{p_2}(X) \setminus \mathscr{L}_{p_1}(X) \neq \emptyset$.

Beweis. Seien $0 < p_1 < p_2 < \infty$ vorgegeben. Definiere die fallende Treppenfunktion $f : X \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = k^{-p_1}$ für $x \in [k-1, k), k = 1, 2, \dots$.[1] Dann

$$\int_X (f)^{p_1} \, \mathrm{d}m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty.$$

Aber

$$\int_X (f)^{p_2} \, \mathrm{d}m = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots < \infty,$$

[1] Gemeint ist: $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p_1}} \chi_{[k-1,k)}$.

da $r := p_2 - p_1 > 1$ (allgemeine harmonische Reihe). Also $f \in \mathscr{L}_{p_2}(X) \setminus \mathscr{L}_{p_1}(X)$.

Definiere nun

$$\begin{aligned} g : X &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \begin{cases} x^{-1/p_2}, & x \in (0,1), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann

$$\int_0^\infty (g(x))^{p_2} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 1/x \, \mathrm{d}x = \infty,$$

aber

$$\int_0^\infty (g(x))^{p_1} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-p_1/p_2} \, \mathrm{d}x = \frac{p_2}{p_2 - p_1} < \infty.$$

Also $g \in \mathscr{L}_{p_1}(X) \setminus \mathscr{L}_{p_2}(X)$. □

Aufgabe 4

Es seien $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Zeige, dass die Funktion

$$\begin{aligned} F : [a,b] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \int_{[a,x]} f \, \mathrm{d}m, \end{aligned}$$

absolutstetig ist.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $|f| \in \mathscr{L}_1([a,b])$ und $|f| \geq 0$, existiert mit Aufgabe 3.4 ein $\delta > 0$, sodass für alle $A \in \mathfrak{M}$ mit $m(A) < \delta$ gilt, dass $\int_A |f| \, \mathrm{d}m < \varepsilon$. Sei nun $a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \cdots \leq a_n < \beta_n \leq b$ eine Partition von $[a,b]$ mit der Eigenschaft, dass $A := \bigsqcup_{j=1}^n [\alpha_j, \beta_j]$, $m(A) < \delta$. Das heisst nichts anderes als $\sum_{j=1}^n \beta_j - \alpha_j < \delta$. Man stellt nun fest:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left| \int_{[a,\beta_j]} f \, \mathrm{d}m - \int_{[a,\alpha_j]} f \, \mathrm{d}m \right| &= \sum_{j=1}^n \left| \int_{[\alpha_j,\beta_j]} f \, \mathrm{d}m \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{[\alpha_j,\beta_j]} |f| \, \mathrm{d}m \\ &= \int_A |f| \, \mathrm{d}m < \varepsilon. \end{aligned}$$

□