Serie 1, Aufgabe 4

Gibt es abzählbar unendliche σ-Algebren?

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra und nimm an, dass $\mathcal{M}$ nicht nur die leere Menge enthält. Zunächst bemerken wir, dass für $A_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt, dass $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$. Der Grund ist dieser:

- Alle A_i^c gehören zu $\mathcal{M}$ (Definition 1.3).
- Also gehört $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$ zu $\mathcal{M}$ (Definition 1.3).
- Mit De Morgan gilt:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c .$$

- Also gehört auch $\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ zu $\mathcal{M}$.

Daher enthält $\mathcal{M}$ eine Untermenge D von paarweise disjunkten, nicht-leeren Mengen: Fange an mit $\mathcal{M}$ und wirf alle Mengen heraus, die mit einer anderen Menge überlappen. Da sowohl der Schnitt beider Mengen als auch das Komplement dieses Schnitts in $\mathcal{M}$ vorhanden ist, können alle Elemente von $\mathcal{M}$ durch das Vereinigen der Mengen aus D rekonstruiert werden. Ausserdem gehören alle Vereinigungen der Mengen aus D auch zu $\mathcal{M}$, da alle Mengen aus D auch zur σ-Algebra $\mathcal{M}$ gehören. Folglich hat $\mathcal{M}$ die gleiche Mächtigkeit wie die Potenzmenge von D. Wenn D endlich ist, ist $\mathcal{P}(D)$ endlich. Wenn D aber unendlich (sei es abzählbar oder überabzählbar) ist, ist $\mathcal{P}(D)$ überabzählbar. Folglich gibt es keine abzählbar unendliche σ-Algebra. $\square$