Serie 10

Aufgabe 1

Es seien $X = Y = [0,1]$ und $\mu = \nu$ das Lebesgue-Mass auf $[0,1]$. Weiter seien $t_0 = 0, (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge mit $t_n \to 1, n \to \infty$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $\operatorname{supp} g_n \subset (t_{n-1}, t_n)$ und $\int_{[0,1]} g_n \,\mathrm{d}\mu = 1, n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass

$$\begin{aligned} f : X \times Y &\to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y), \end{aligned}$$

wohldefiniert ist und dass gilt

$$\int_X \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\mu \neq \int_Y \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\nu.$$

f ist wohldefiniert. Für ein $x \in [0,1]$ existiert höchstens ein von x abhängiges $n \in \mathbb{N}$, sodass $g_n(x) \neq 0$. Grund:

$$g_n(x) \neq 0 \Rightarrow x \in (t_{n-1}, t_n) \Rightarrow x \notin (t_{m-1}, t_m), m \neq n \Rightarrow g_m(x) = 0, m \neq n.$$

Für $(x,y) \in [0,1]^2$ gilt also

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y) = (g_{k_y}(x) - g_{k_y+1}(x)) g_{k_y}(y) < \infty$$

für ein von y abhängiges $k_y \in \mathbb{N}$. Also ist f wohldefiniert.

Integrationsreihenfolge. Für festes $y_0 \in [0,1]$ gilt

$$f(\cdot, y_0) = (g_k(\cdot) - g_{k+1}(\cdot)) g_k(y_0),$$

für ein $k \in \mathbb{N}$. Also

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y_0) \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x, y_0) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (g_k(x) - g_{k+1}(x)) g_k(y_0) \,\mathrm{d}x \\ &= g_k(y_0) \left(\int_0^1 g_k(x) \,\mathrm{d}x - \int_0^1 g_{k+1}(x) \,\mathrm{d}x \right) \\ &= g_k(y_0) \, (1 - 1) = 0, \end{aligned}$$

da $\int_0^1 g_n(x) \,\mathrm{d}x = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also

$$\int_Y \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_Y 0 \,\mathrm{d}y = 0.$$

Für festes $x_0 \in [0,1)$ (das Verhalten bei $x = 1$ wird das Integral nicht beeinflussen) ist die Summe im Integral endlich, weshalb sie mit dem Integral vertauscht.

$$\begin{aligned}
\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_Y \sum_{n=1}^{\infty}(g_n(x_0)-g_{n+1}(x_0))g_n(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_Y (g_n(x_0)-g_{n+1}(x_0))g_n(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(g_n(x_0)-g_{n+1}(x_0)) && [\int_Y g_n(y)\,\mathrm{d}y = 1] \\
&= g_1(x_0) - \underbrace{\lim_{n\to\infty} g_n(x_0)}_{=0} && [\text{teleskopische Summe}] \\
&= g_1(x_0).
\end{aligned}$$

Da $\int_X g_1(x)\,\mathrm{d}x = 1$, folgt

$$\int_X \int_Y f(x_y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_X g_1(x)\,\mathrm{d}x = 1 \neq 0 = \int_Y \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2

Es seien $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $K_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1\}$ die n-dimensionale Einheitskugel. Zeige:

$$\mathrm{vol}(K_n) = \begin{cases} \frac{2^{k+1}\pi^k}{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2k+1)}, & n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{\pi^k}{k!}, & n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis.

Verankerung: Für $n = 1$ ist die Einheitskugel gleich dem Intervall $[-1, 1]$. Dessen Volumen beträgt 2, was mit der Aussage übereinstimmt. Für $n = 2$ erhalten wir die Fläche des Einheitskreises, π.[1]

Induktionsschritt: Betrachte nun K_{n+1} für irgendein $n \in \mathbb{N}$. Für $K_{x_{n+1}}$ gilt

$$\begin{aligned}
K_{x_{n+1}} &= \{(x_i)_{i=1}^n : (x_i)_{i=1}^{n+1} \in K_{n+1}\} \\
&= \bigcup_{t\in[-1,1]} K_{x_{n+1},t},
\end{aligned}$$

wo

$$K_{x_{n+1},t} = \{(x_1,\dots,x_n) : \sum_{i=1}^n x_i^2 \le 1 - t^2\}$$

für $t \in [-1, 1]$. Für fixes $t \in [-1, 1]$ ist $K_{x_{n+1},t}$ eine n-dimensionale Einheitskugel, die um den Faktor $\sqrt{1-t^2}$ gestreckt wurde. Streckungen sind lineare Abbildungen, und die Determinante dieser Streckung beträgt $(1 - t^2)^{n/2}$. Somit erhalten wir

$$\mathrm{vol}(K_{x_{n+1},t}) = (1-t^2)^{n/2}\mathrm{vol}(K_n).$$

Mit Cavalieri folgt

$$\mathrm{vol}(K_{n+1}) = \mathrm{vol}(K_n)\underbrace{\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n/2}\,\mathrm{d}t}_{=:I_n}.$$

Ohne Beweis: $I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$. Daraus

$$I_n I_{n-1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1} I_{n-2} = \frac{2(n!)}{(n+1)(n!)} I_1 I_0 = \frac{4}{n+1} I_1.$$

Da $I_1 = \frac{\pi}{2}$, ist $I_n I_{n-1} = \frac{2\pi}{n+1}$. Daraus

$$\mathrm{vol}(K_{n+1}) = I_n \mathrm{vol}(K_n) = I_n I_{n-1}\mathrm{vol}(K_{n-1}) = \frac{2\pi}{n+1}\mathrm{vol}(K_{n-1}).$$

[1] Wir brauchen zwei Verankerungen, da wir beim Induktionsschritt die geraden und die ungeraden n separat behandeln.

Falls $n = 2k$, dann $n + 2 = 2(k + 1)$. Mit der Induktionsannahme folgt

$$\mathrm{vol}(K_{n+2}) = \frac{2\pi}{n+2}\mathrm{vol}(K_n) = \frac{\pi}{k+1} \cdot \frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Falls $n = 2k + 1$, dann $n + 2 = 2k + 3$. Mit der Induktionsannahme folgt

$$\mathrm{vol}(K_{n+2}) = \frac{2\pi}{n+2}\mathrm{vol}(K_n) = \frac{2\pi}{2k+3} \cdot \frac{2^{k+1}\pi^k}{(1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1))} = \frac{2^{k+2}\pi^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1) \cdot (2k+3)}.$$

□

Aufgabe 3

(a) Berechne das Volumen des 3d-Körpers, der durch Rotation der Fläche

$$\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in (0, 1], z \in [1, x^{-1}]\} \subset \mathbb{R}^3$$

um die z-Achse entsteht.

Antwort. Bezeichne den Körper, der so entsteht als R'. Die Nullmenge $\{(0, 0, z) : z \in [1, \infty)\}$ können wir R' noch hinzufügen, ohne sein Volumen zu ändern. Bezeiche das neue Objekt mit R. Wir stellen fest, dass R eine Überlagerung von Scheiben mit Radius z^{-1} ist, mit $z > 1$. Folglich

$$\mathrm{vol}(R) = \int_1^\infty \pi(z^{-1})^2 \,\mathrm{d}z = \pi \int_1^\infty z^{-2} = \pi.$$

(b) Berechne das Integral

$$\int_0^1 \int_x^1 \underbrace{y^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{y}\right)}_{=:f(x,y)} \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Antwort. Die Funktion f wird beim Integrieren nur für (x, y) im offenen Dreieck aufgespannt von den Eckpunkten $(0, 0), (1, 0)$ und $(1, 1)$ ausgewertet. Fubini greift (stetige Funktionen, endliches Intervall als Integrationsbereich) und wir können das Integral wie folgt umschreiben:

$$\int_0^1 \int_x^1 y^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{y}\right) \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 y^2 \int_0^y \sin\left(\frac{2\pi x}{y}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Wir bemerken, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{y}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{y}\right)\right) = \sin\left(\frac{2\pi x}{y}\right).$$

Also

$$\int_0^y \sin\left(\frac{2\pi x}{y}\right) = -\frac{y}{2\pi}(\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0.$$

Somit ist auch das gesuchte Integral gleich 0.

Aufgabe 4

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Beweise, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|x\|^2) \,\mathrm{d}x = \pi^{n/2}.$$

Beweis. Wir setzen hier $\int_0^\infty \exp(-x^2) \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ als bekannt voraus (oder `https://math.stackexchange.com/a/886561/830096`). Aus Symmetriegründen folgt die Behauptung für $n = 1$.

Per Induktion: Die Aussage gelte für $\mathbb{R}^n$. Betrachte nun $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Bemerke, dass $\exp(-\|x\|^2) > 0$ für alle x. Also greift der Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \exp(-\|x\|^2)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - x_{n+1}^2)\,\mathrm{d}(x_1, \ldots x_n) \right) \mathrm{d}x_{n+1} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)) \exp(-x_{n+1}^2)\,\mathrm{d}(x_1, \ldots x_n) \right) \mathrm{d}x_{n+1} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp(-x_{n+1}^2) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|(x_1, \ldots, x_n)\|^2)\,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \right)}_{=\pi^{n/2}} \mathrm{d}x_{n+1} \\
&= \pi^{n/2} \int_{\mathbb{R}} \exp(-x_{n+1}^2)\,\mathrm{d}x_{n+1} \\
&= \pi^{n/2}\pi^{1/2} = \pi^{(n+1)/2}.
\end{aligned}$$

□