Serie 6

Aufgabe 1

Zeige, dass das Achsenkreuz in $\mathbb{R}^2$ Lebesgue-Mass Null hat.

Beweis. Für das Achsenkreuz $A \subset \mathbb{R}^2$ gilt

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{\{(x,0) : n \leq x < n+1\}}_{=:V_n} \cup \underbrace{\{(x,0) : -n \leq x < -n+1\}}_{=:V_{-n}} \cup \underbrace{\{(0,y) : n \leq y < n+1\}}_{=:W_n} \cup \underbrace{\{(0,y) : -n \leq y < -n+1\}}_{=:W_{-n}} \right).$$

V_n ist eine 2-Zelle mit $a_1 = n, b_1 = n+1, a_2 = b_2 = 0$; W_n ist eine 2-Zelle mit $a_2 = n, b_2 = n+1, a_1 = b_1 = 0$; $n \in \mathbb{N}$. Also vol $V_n =$ vol $W_n = 0$. Analog: vol $V_{-n} =$ vol $W_{-n} = 0$. Folglich $\mathrm{vol}(V_n \cup V_{-n} \cup W_n \cup W_{-n}) = 0$. Folglich $m(A) = \mathrm{vol}(\bigcup_{n=0}^{\infty}(V_n \cup V_{-n} \cup W_n \cup W_{-n}) = 0$. □

Aufgabe 2

Es sei m das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$. Zeige:

(a) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

ist stetig, messbar und Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar bzgl. m, und das Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}m$ ist nicht definiert.

Beweis. f ist stetig: Klar für $x \neq 0$. Für $x = 0$, verwende L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \cos(x) = 1 = f(0).$$

Also f stetig bei $x = 0$.

f ist messbar: $U \subset \mathbb{R}$ offen, dann $f^{-1}(U)$ offen, da f stetig ist. Offene Mengen sind Borelmengen. Also ist f messbar.

f ist Riemann-integrierbar: Für $t \in \mathbb{R}$ finden wir durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{t} f(x) \,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\cos(x)}{x} \right]_{\pi/2}^{t} - \int_{\pi/2}^{t} \frac{\cos(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\cos(t)}{t} - \int_{\pi/2}^{t} \frac{\cos(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Da $\cos(x) \in [-1, 1]$ gilt einerseits

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{t} f(x) \,\mathrm{d}x &\geq -\frac{\cos(t)}{t} - \int_{\pi/2}^{t} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\cos(t)}{t} + \frac{1}{t} - \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\int_{\pi/2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \leq -\frac{\cos(t)}{t} - \frac{1}{t} + \frac{2}{\pi}.$$

Folglich:

$$\left|\lim_{t\to\infty}\int_{\pi/2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{\pi} < \infty.$$

Weiter $|\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x| < \infty$, da f stetig ist. Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right) < \infty,$$

ist f Riemann-integrierbar.

f ist nicht Lebesgue-integrierbar bzgl. m: Für stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall stimmen das Rieman- und das Lebesgue-Integral überein: $\int_{[0,t]} |f|\,\mathrm{d}m = \int_0^t |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Berechne für $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{k\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \mathrm{d}x + \cdots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x + \cdots + \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Da $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{k\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir eine Reihe von Integralen, die durch die harmonische Reihe minorisiert wird und folglich divergiert. Folglich $f \notin L_1(\mathbb{R})$. Folglich ist das Lebesgue-Integral von f über $\mathbb{R}$ bzgl. m nicht definiert (siehe Def. 3.1). □

(b) Die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar bzgl. m, aber nicht Riemann-integrierbar. Bestimme ausserdem $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{d}m$.

Beweis. $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist nicht Riemann-integrierbar: Jedes Intervall von $[0,1]$ enthält sowohl rationale als irrationale Zahlen. Also

$$\underline{S}(\chi_{\mathbb{Q}}, P) = 0, \quad \overline{S}(\chi_{\mathbb{Q}}, P) = 1$$

für jede Partition P von $[0,1]$. Also ist $\chi_{\mathbb{Q}}$ nicht einmal auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar.

$\chi_{\mathbb{Q}}$ ist Lebesgue-integrierbar; $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{d}m$: $\mathbb{Q}$ ist eine abzählbare Vereinigung von Punkten. Punkte in $\mathbb{R}$ haben Lebesgue-Mass 0 (1-Zelle mit $a = b$). Also ist $\mathbb{Q}$ eine Nullmenge bzgl. m. Nullmengen sind beim Lebesgue-Integral unerheblich. Also $\int_{\mathbb{R}} |\chi_{\mathbb{Q}}|\,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}m = 0 < \infty$. Also $\chi_{\mathbb{Q}} \in L_1(\mathbb{R})$. □

Aufgabe 3

Die Cantor-Menge in $\mathbb{R}$ ist definiert als

$$T := \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n} : x_n \in \{0,2\}\right\}.$$

Beweise:

(a) $T = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, wobei

$$M_n := \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n} : x_j \in \{0,2\}, j < n, x_n = 1, (x_j)_{j=n+1}^{\infty} \neq \{0\}, \{2\}\right\}, n \in \mathbb{N}$$

ist.

Beweis. $t \in T \Rightarrow t \in [0,1]$ ist klar. Falls $m \in M_n$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$, dann ist in der Ternärdarstellung von m mindestens eine 1 notwendig. T besteht jedoch gerade aus Zahlen ohne 1 in (einer möglichen) Ternärdarstellung. Also $m \notin T$. □

(b) T ist abgeschlossen.

Beweis. Jedes M_n ist eine Vereinigung von 2^{n-1} offenen Intervallen (je mit Länge $1/3^n$) und ist folglich offen. Also ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty}$ offen. Wegen Teil (a) ist T^c offen in $\mathbb{R}$. Also ist T abgeschlossen. □

(c) T ist überabzählbar. Zeige dazu, dass die Abbildung

$$\varphi : T \to [0,1],$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}, y_j := \frac{x_j}{2}, j \in \mathbb{N},$$

wohldefiniert und surjektiv ist.

Beweis. Die Abbildung φ ist wohldefiniert: Die Ternärdarstellung von $t \in T$, mit $x_n \in \{0,2\}$, ist eindeutig. Grund: Angenommen, $t \in T$ hätte zwei unterschiedliche Ternärdarstellungen mit $x_n, y_n \in \{0,2\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine erste Stelle k, wo sich diese unterscheiden. Also würde gelten

$$\frac{0}{3^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = \frac{2}{3^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}$$

mit $x_n, y_n \in \{0,2\}$ für alle $n \geq k+1$. Das ist äquivalent zu

$$2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{3^{k+n}}.$$

Wegen $x_n - y_n \leq 2$ gilt aber

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{3^{k+n}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 2\left(\frac{1}{1-1/3} - 1\right) = 1.$$

Widerspruch.

Folglich ist $\varphi(t)$ für $t \in T$ eindeutig. Für jedes $t \in T$ gilt:

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{0}{2^i} \leq \varphi(t) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Also ist φ wohldefiniert.

$\varphi(T) = [0,1]$: Alle Zahlen im Intervall $[0,1]$ haben genau eine Binärdarstellung, die als regulärer Ausdruck $(0.(0|1)^*)_2$ geschrieben werden kann, d.h., $[0,1] \ni x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}$, $b_i \in \{0,1\}, i \geq 1$. Für jede solche Binärdarstellung gibt es ein $t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2b_i}{3^i}$ mit $2b_i \in \{0,2\}$, also $t \in T$. Also $\varphi(T) = [0,1]$. Da $[0,1]$ überabzählbar ist, ist T dies auch. □

Aufgabe 4

Berechne $m(T)$ für die Cantor-Menge T aus Aufgabe 3 und das Lebesgue-Mass m auf $\mathbb{R}$.

Lösung. Aus Aufgabe 3: vol $M_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Da $M_k \cap M_\ell = \emptyset, k \neq \ell$, gilt

$$\text{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2/3} - 1\right) = 1.$$

Wegen $T = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$, folgt $m(T) = \text{vol}\, T = 1 - 1 = 0$.