Serie 2, Aufgabe 2

Sei $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und μ das Zählmass auf $\mathbb{N}$, d.h.,

$$\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty],$$
$$A \mapsto \begin{cases} \#A, & A \text{ endlich}, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeige, dass $(\mathbb{N}, \mathcal{M}, \mu)$ ein Massraum ist, und bestimme alle messbaren Funktionen $\mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Beweis. Kontrolliere die Axiome aus Definition 2.1.

(i) Sind $A_k, k \in \mathbb{N}$ disjunkt und alle abzählbar, so ist

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \#(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \#A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit A_j unendlich, dann ist auch die Vereinigung der A_ks unendlich, somit

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \infty = \infty + \sum_{k=1, k\neq j}^{\infty} \mu(A_k).$$

(ii) $\{1\} \in \mathcal{M}$. $\mu(\{1\}) = 1 < \infty$. □

Sei nun $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$, dann ist jedes Urbild von $W \subset \overline{\mathbb{R}}$ in der Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Also ist f messbar. Also sind alle solchen Funktionen messbar.

(b) Sind die Funktionen $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) = e^{-x}$, und $g : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}, g(x) = (-1)^x$, bezüglich μ messbar (sic.)?

Funktionen sind bzgl. σ-Algebren messbar oder nicht, nicht bzgl. Masse.

Die Frage ergibt also keinen Sinn.