Serie 11

Aufgabe 1

(a) Zeige folgende Aussagen für die Fouriertransformationen für $f, g \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{R}^n$:

(i) $(\tau_\alpha f)\widehat{} = e_{-\alpha}\widehat{f}$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{n/2}(\tau_\alpha f)\widehat{} &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_\alpha f)(x) e^{-i\langle x, \cdot\rangle} \,\mathrm{d}x && \text{[Definition Fourier]}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\alpha) e^{-i\langle x, \cdot\rangle} \,\mathrm{d}x && [\text{Definition } \tau_\alpha]\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i\langle u+\alpha, \cdot\rangle} \,\mathrm{d}u && [u = x-\alpha]\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i\langle u, \cdot\rangle - i\langle \alpha, \cdot\rangle} \,\mathrm{d}u && \text{[Skalarprodukt bilinear]}\\
&= e^{-i\langle \alpha, \cdot\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i\langle u, \cdot\rangle} \,\mathrm{d}u\\
&= e^{i\langle -\alpha, \cdot\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \cdot\rangle} \,\mathrm{d}x && \text{[Skalarprodukt bilinear]}\\
&= (2\pi)^{n/2} e_{-\alpha}(\cdot)\widehat{f}. && [\text{Definition Fourier, } e_{-\alpha}].
\end{aligned}$$

□

(ii) $(e_\alpha f)\widehat{} = \tau_\alpha \widehat{f}$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{n/2}\widehat{e_\alpha f} &= \int_{\mathbb{R}^n} (e_\alpha f)(x) e^{-i\langle x, \cdot\rangle} \,\mathrm{d}x && \text{[Definition Fourier]}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \cdot\rangle + i\langle x, \alpha\rangle} \,\mathrm{d}x && [\text{Definition } e_\alpha(x)]\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \cdot\rangle - i\langle x, -\alpha\rangle} \,\mathrm{d}x && \text{[Skalarprodukt bilinear]}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \cdot - \alpha\rangle} \,\mathrm{d}x\\
&= (2\pi)^{n/2} \tau_\alpha \widehat{f}. && [\text{Definition Fourier, } \tau_\alpha]
\end{aligned}$$

□

(iii) $\left(\overline{f^\vee}\right)\widehat{} = \overline{\widehat{f}}$.

Beweis. Die komplexe Konjugation und das Integral vertauschen, also

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-n/2}\overline{\widehat{f}} &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\cdot\rangle}\,\mathrm{d}x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\overline{e^{-i\langle x,\cdot\rangle}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{Re}(f(x)) - i\mathrm{Im}(f(x)))\,e^{i\langle x,\cdot\rangle}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{Re}(f(x)) - i\mathrm{Im}(f(x)))\,e^{-i\langle -x,\cdot\rangle}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{Re}(f(-x)) - i\mathrm{Im}(f(-x)))\,e^{-i\langle x,\cdot\rangle}\,\mathrm{d}x \qquad [T(x) = -x, |\det(T)| = 1] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)}e^{-i\langle x,\cdot\rangle}\,\mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^{-n/2}\widehat{\overline{f^{\vee}}}.
\end{aligned}$$

□

(iv) $\lambda > 0, h(x) := f(\frac{x}{\lambda}), x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \widehat{h}(\xi) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda\xi), \xi \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Für $T(x) := x/\lambda$ gilt $|\det T| = \lambda^{-n}$. Somit:

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{n/2}\widehat{h}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x)e^{-i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(T(x))e^{-i\lambda\langle T(x),t\rangle}\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\lambda t\rangle}\,\mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^{n/2}\lambda^n\widehat{f}(\lambda t).
\end{aligned}$$

□

(v) Es gilt $\widehat{f}g, f\widehat{g} \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}g\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{g}\,\mathrm{d}x$.

Beweis. $\widehat{f}, \widehat{g}$ sind beschränkt (Bemerkung 8.3) und stetig, also $\widehat{f}g, f\widehat{g} \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Mit Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-i\langle y,x\rangle}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x)e^{-i\langle y,x\rangle}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\widehat{f}(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

(b) Es seien $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n), y \in \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(y) = \|f - \tau_y f\|_1$. Zeige: $g(0) = 0$, $g \in \mathscr{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. $\underline{g(0) = 0}$:

$$\begin{aligned}
g(y)(x) &= \|f(x) - \tau_y f(x)\|_1 \\
&= |f(x) - f(x-y)|.
\end{aligned}$$

Also $g(0)(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

$\underline{g \in \mathscr{L}_\infty(\mathbb{R}^n)}$: (???)

□

Aufgabe 2

Berechne die Fouriertransformierten folgender Funktionen und verifiziere an mindestens einem Beispiel die Ungleichung $\|\widehat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_1$:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-\lambda|x|}$, für eine Konstante $\lambda > 0$.

Lösung.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|x|}e^{-ixt}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}e^{-ixt}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}e^{-ixt}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}(\cos(xt) - i\sin(xt))\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}(\cos(xt) - i\sin(xt))\,\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

$\underline{\int e^{\lambda x}\cos(xt)\,\mathrm{d}x (=: \star)}$: Berechnung durch partielle Integration mit $f = \cos(xt), g' = e^{\lambda x}$, d.h., $f' = -t\sin(xt), g = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$. Daraus:

$$\star = \frac{1}{\lambda}\left(\cos(xt)e^{\lambda x} + t\int \sin(tx)e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x\right)$$

Mit partieller Integration mit $f = \sin(tx), f' = t\cos(tx), g' = e^{\lambda x}, g = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$:

$$\star = \frac{1}{\lambda}\cos(xt)e^{\lambda x} + \frac{t}{\lambda^2}\sin(tx)e^{\lambda x} - \left(\frac{t}{\lambda}\right)^2 \star.$$

Daraus:

$$\star = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}\left(\frac{1}{\lambda}\cos(xt)e^{\lambda x} + \frac{t}{\lambda^2}\sin(tx)e^{\lambda x}\right).$$

Folglich:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}\cos(xt)\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}.$$

$\underline{\int e^{\lambda x}\sin(xt)\,\mathrm{d}x (=: \star)}$: Berechnung mit partieller Integration mit $f = \sin(xt), f' = t\cos(xt), g' = e^{\lambda x}, g = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$:

$$\star = \frac{1}{\lambda}\left(\sin(xt)e^{\lambda x} - t\int \cos(tx)e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x\right).$$

Jetzt mit $f = \cos(xt), f' = -t\sin(xt), g' = e^{\lambda x}, g = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$:

$$\star = \frac{1}{\lambda}\sin(xt)e^{\lambda x} - \frac{t}{\lambda^2}\cos(xt)e^{\lambda x} - \left(\frac{t}{\lambda}\right)^2 \star.$$

Daraus:

$$\star = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}\left(\frac{1}{\lambda}\sin(xt)e^{\lambda x} - \frac{t}{\lambda^2}\cos(xt)e^{\lambda x}\right).$$

Folglich:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}\sin(xt)\,\mathrm{d}x = \frac{-t}{\lambda^2+t^2}.$$

<u>Analog:</u>

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}\sin(xt)\,\mathrm{d}x = \frac{t}{\lambda^2+t^2},$$
$$\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda}\cos(xt)\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}.$$

Die Gesamtlösung:

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\lambda^2+t^2)}(\lambda + it + \lambda - it) = \frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}(\lambda^2+t^2)}.$$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1x_2, & \text{falls } |x_1|, |x_2| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Lösung (b). Mit Fubini:

$$\begin{aligned}\widehat{g}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-1,1]^2} x_1x_2e^{-ix_1t_1}e^{-ix_2t_2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} x_1e^{-ix_1t_1}\left(\int_{-1}^{1} x_2e^{-ix_2t_2}\,\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x_2e^{-ix_2t_2}\,\mathrm{d}x_2 &= \int_{-1}^{1} x_2(\cos(x_2t_2) - i\sin(x_2t_2))\,\mathrm{d}x_2 \\ &= \int_{-1}^{1} x_2\cos(x_2t_2)\,\mathrm{d}x_2 - i\int_{-1}^{1} x_2\sin(x_2t_2)\,\mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

Durch partielle Integration (mit Computer) findet man

$$\int_{-1}^{1} x_2\cos(x_2t_2)\,\mathrm{d}x_2 = 0$$

und

$$\int_{-1}^{1} x_2\sin(x_2t_2)\,\mathrm{d}x_2 = \frac{2(\sin(t_2) - t_2\cos(t_2))}{t_2^2}.$$

Also

$$\begin{aligned}\widehat{g}(t_1, t_2) &= \frac{-2i(\sin(t_2) - t_2\cos(t_2))}{2\pi t_2^2}\int_{-1}^{1} x_1e^{-ix_1t_1}\,\mathrm{d}x_1. \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2i(\sin(t_2) - t_2\cos(t_2))}{t_2^2}\right)\left(\frac{-2i(\sin(t_1) - t_1\cos(t_1))}{t_1^2}\right) \\ &= -\frac{2}{\pi(t_1t_2)^2}(\sin(t_1) - t_1\cos(t_1))(\sin(t_2) - t_2\cos(t_2)).\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Zeige $\widehat{f} = f$ für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) := e^{-\|x\|^2/2}$.

Lösung. Für $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definiere $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Definiere $\widetilde{t} \in \mathbb{R}^{n-1}$ analog für $t \in \mathbb{R}^n$. Dann

$$\begin{aligned}\widehat{f}(t) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2/2}e^{-i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}x \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\widetilde{x}\|^2/2}e^{-x_n^2/2}e^{-i\langle\widetilde{x},\widetilde{t}\rangle}e^{-i\langle x_n,t_n\rangle}\,\mathrm{d}x \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\|\widetilde{x}\|^2/2}e^{-i\langle\widetilde{x},\widetilde{t}\rangle}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2/2}e^{-ix_nt_n}\,\mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}\widetilde{x}.\end{aligned}$$

Klügere Menschen können jetzt wohl zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2/2}e^{-ix_nt_n}\,\mathrm{d}x_n = \sqrt{2\pi}e^{-x_n^2/2}.$$

Induktiv würde dann

$$\widehat{f}(t) = (2\pi)^{-n/2}\sqrt{(2\pi)}^n e^{-x_1^2/2} \cdot \dots \cdot e^{-x_n^2/2} = e^{-\|x\|^2/2}$$

folgen.

Aufgabe 4

Es seien $1 \le p < \infty, f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n)$ und $\{\varphi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ ein glättender Kern mit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeige:

(a) $\varphi(\cdot - y) \cdot f(\cdot) \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n), y \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(c) $\operatorname{supp}(\varphi * f) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(\varphi)$.

(d) Falls $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, dann konvergiert $\varphi_\varepsilon * f$ gleichmässig gegen f für $\varepsilon \to 0$.

(???)