МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Отчет по курсовому проекту
по курсу:
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

на тему:

Исследование нестационарного поля температур в плоской неограниченной пластине с использованием неявного метода конечных разностей

Работу выполнил:
студент группы 5030301/10002
Тугай В.В.

Преподаватель:
к.т.н., доц. Плетнев А.А.

Санкт-Петербург
2023

Содержание

Физическая постановка задачи

Плоская неограниченная пластина из бронзы толщиной 60 см испытывает конвективный теплообмен с окружающей средой (с обеих сторон пластины интенсивность конвективного теплообмена одинакова). В начальный момент времени температура пластины постоянна во всем сечении и равна 500 °С. Температура окружающей среды 130 °С. Найти распределение температуры пластины в зависимости от координаты и времени для трех значений коэффициента конвективной теплоотдачи:

$$\alpha_1 = 35 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}; \quad \alpha_2 = 400 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}; \quad \alpha_3 = 25000 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

T– температура пластины, К
T_w– температура на границе пластины, К
T_e– температура окружающей среды, К
T_0– начальная температура пластины, К
τ – время, с
x– координата, м
δ – толщина пластины, м
q– плотность теплового потока, Вт/м2
а – коэффициент конвективной теплоотдачи, Вт/(м2×К)

Материал пластины: бронза. Физические свойства материала и значения физический величин (Вариант-7):

p[1]=8600 кг/м^2

c[2]=380 Дж/(К·кг)

λ=110 Вт/(м·К)

δ=0.6 м

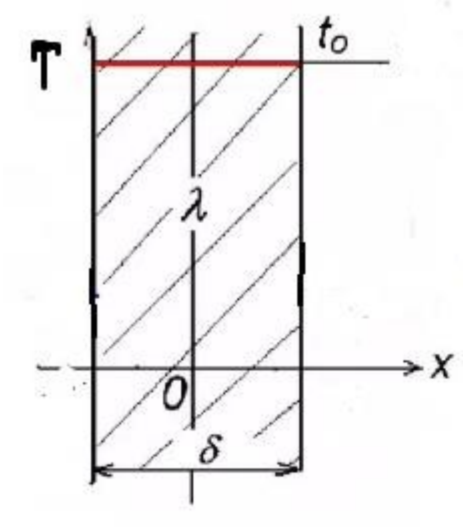
T_e=130 С°

T_0=500 С°

[1] http://ru.solverbook.com/spravochnik/ximiya/plotnost/plotnost-bronzy/

[2] http://thermalinfo.ru/eto-interesno/tablitsy-udelnoj-teploemkosti-veshhestv

Математическая постановка задачи



Начало координат – в центре пластины. Искомая функция – температура, которая зависит от двух переменных: координаты и времени

$$T = T(\tau, x)$$

Плотность теплового потока (закон Фурье) : $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$, или $q = -\lambda\, \mathrm{grad} T = -\lambda \nabla T$, где λ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К)

Начальное условие (НУ): $T(0, x) = T_0$ – однородный профиль температуры

Граничные условия (ГУ):

$\frac{\partial T}{\partial x}(\tau, 0) = 0$ – ГУ симметрии

$$q|_{x=\frac{\delta}{2}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=\frac{\delta}{2}} = \alpha(T_w - T_e) \text{ – ГУ 3-го рода}$$

Переход к безразмерным величинам:

$X = \frac{2x}{\delta}$ — безразмерная координата ($X \in [0,1]$)

$\theta = \frac{T - T_e}{T_0 - T_e}$ — безразмерная избыточная температура($\theta \in [0,1]$)

$Fo = \frac{\tau}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \frac{\lambda}{cp}$ — критерий Фурье (безразмерное время)

$Bi = \frac{\alpha\delta}{2\lambda}$ — число Био (безразмерный коэффициент теплоотдачи)

Уравнение теплопроводности в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}$$

НУ и ГУ в безразмерных величинах: $\begin{cases} \theta(0, X) = 1 \\ \frac{\partial \theta}{\partial X}(Fo; 0) = 0 \\ -\frac{\partial \theta}{\partial X}(Fo; 1) = Bi\theta \end{cases}$

Метод решения

Чтобы снять ограничение для явного метода конечных разностей $\Delta Fo \leq \frac{\Delta X^2}{2}$, аппроксимируем производную по X на «старшем» временном слое :

$$\frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta Fo} = \frac{\theta_{i+1}^{n+1} - 2\,\theta_i^{n+1} + \theta_{i-1}^{n+1}}{\Delta X^2} \qquad (1)$$

При записи и аппроксимации уравнения баланса тепла для граничных узлов нам необходимо использовать выражения для теплового потока на границах, заданные согласно граничным условиям, а именно:

ГУ на левой границе: $\frac{\partial\theta}{\partial X}(Fo; 0) = 0$

ГУ на правой границе: $-\frac{\partial\theta}{\partial X}(Fo; 1) = Bi\theta$

Тогда на левой границе (i=1) вместо (1) будем иметь сеточное уравнение

$$\frac{\theta_1^{n+1} - \theta_1^n}{\Delta Fo} = \frac{2}{\Delta X}\left(0 + \left(\frac{\theta_2^{n+1} + \theta_1^{n+1}}{\Delta X}\right)\right), \qquad (2)$$

а на правой границе (i=Im)

$$\frac{\theta_1^{n+1} - \theta_1^n}{\Delta Fo} = \frac{2}{\Delta X}\left(-\frac{\theta_{Im}^{n+1} - \theta_{Im-1}^{n+1}}{\Delta X} - Bi\theta_{Im}^{n+1}\right). \qquad (3)$$

Уравнение (3) отличается от (1) тем, что в нем содержатся сразу три неизвестных значения: θ_{i+1}^{n+1}, θ_i^{n+1}и θ_{i-1}^{n+1}, которые нельзя выразить только из одного уравнения.

Однако если записать совокупность сеточных уравнений для каждого узла (включая граничные), то мы получим замкнутую СЛАУ – систему линейных алгебраических уравнений, решением которой будут искомые значения θ_i^{n+1} (i = 1…Im) на «старшем» временном слое.

Применение неявной схемы свелось к тому, чтобы:

а) записать СЛАУ (т.е. из выражений (1), (2), (3) сформировать матрицу коэффициентов);

б) решить полученную СЛАУ.

Сформируем СЛАУ:

Для формирования матрицы СЛАУ сеточное уравнение представим в виде

$$A_i\theta_{i+1}^{n+1} + B_i\theta_i^{n+1} + C_i\theta_{i-1}^{n+1} + D_i = 0. \qquad (4)$$

Легко видеть, что согласно (1) для внутренних узлов (i = 2…Im-1)

$$A_i = C_i = \frac{1}{\Delta X^2}\,, B_i = -\frac{1}{\Delta Fo} - \frac{2}{\Delta X^2}\,, D_i = \frac{\theta_i^n}{\Delta Fo}$$

Для левой границы из уравнения (2) имеем (*)

$$\mathrm{C}_1 = 0, \mathrm{A}_1 = \frac{2}{\Delta X^2}, \mathrm{B}_1 = -\frac{1}{\Delta Fo} - \frac{2}{\Delta X^2}, \mathrm{D}_1 = \frac{\theta_1^n}{\Delta Fo}$$

Для правой границы из уравнения (3) можно получить (**)

$$\mathrm{A}_{Im} = 0, \mathrm{C}_{Im} = \frac{2}{\Delta X^2}, \mathrm{B}_i = -\frac{1}{\Delta Fo} - \frac{2}{\Delta X^2} - \frac{2Bi}{\Delta X}, \mathrm{D}_{Im} = \frac{\theta_{Im}^n}{\Delta Fo}$$

Поскольку в МКР сетка имеет сквозную упорядоченную нумерацию узлов (в том же порядке будут располагаться и уравнения СЛАУ), то все ненулевые элементы матрицы коэффициентов [K] (см. выражение (4)), будут расположены на трех соседних диагоналях вдоль главной диагонали.

Решим СЛАУ методом векторной прогонки:

Для дальнейшего изложения перепишем уравнение (4) в виде

$$\mathrm{A}_n y_{n+1} + \mathrm{B}_n y_n + \mathrm{C}_n y_{n-1} + \mathrm{D}_n = 0. \tag{5}$$

Будем искать решение в виде $y_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n$ (6)

Понизим индекс на единицу $y_{n-1} = \alpha_{n-1} y_n + \beta_{n-1}$ (7)

После подстановки данных выражений в формулу (5) и перегруппировки получим

$$y_n = -\frac{A_n}{B_n + C_n\alpha_{n-1}}\ ;\ \ y_{n+1} - \frac{D_n + C_n\beta_{n-1}}{B_n + C_n\alpha_{n-1}} \tag{Δ}$$

Сравнивая (6) и (7):

$$\alpha_n = -\frac{A_n}{B_n + C_n\alpha_{n-1}}\ ;\ \ \beta_n = -\frac{D_n + C_n\beta_{n-1}}{B_n + C_n\alpha_{n-1}} \tag{8}$$

Это выражение (8) представляет собой рекуррентные отношения.
Т. к. на левой границе коэффициент $\mathrm{C}_1 = 0$ (см. (*)), получим

$$\alpha_1 = -\frac{A_1}{B_1}\ ;\ \ \beta_1 = -\frac{D_1}{B_1} \tag{9}$$

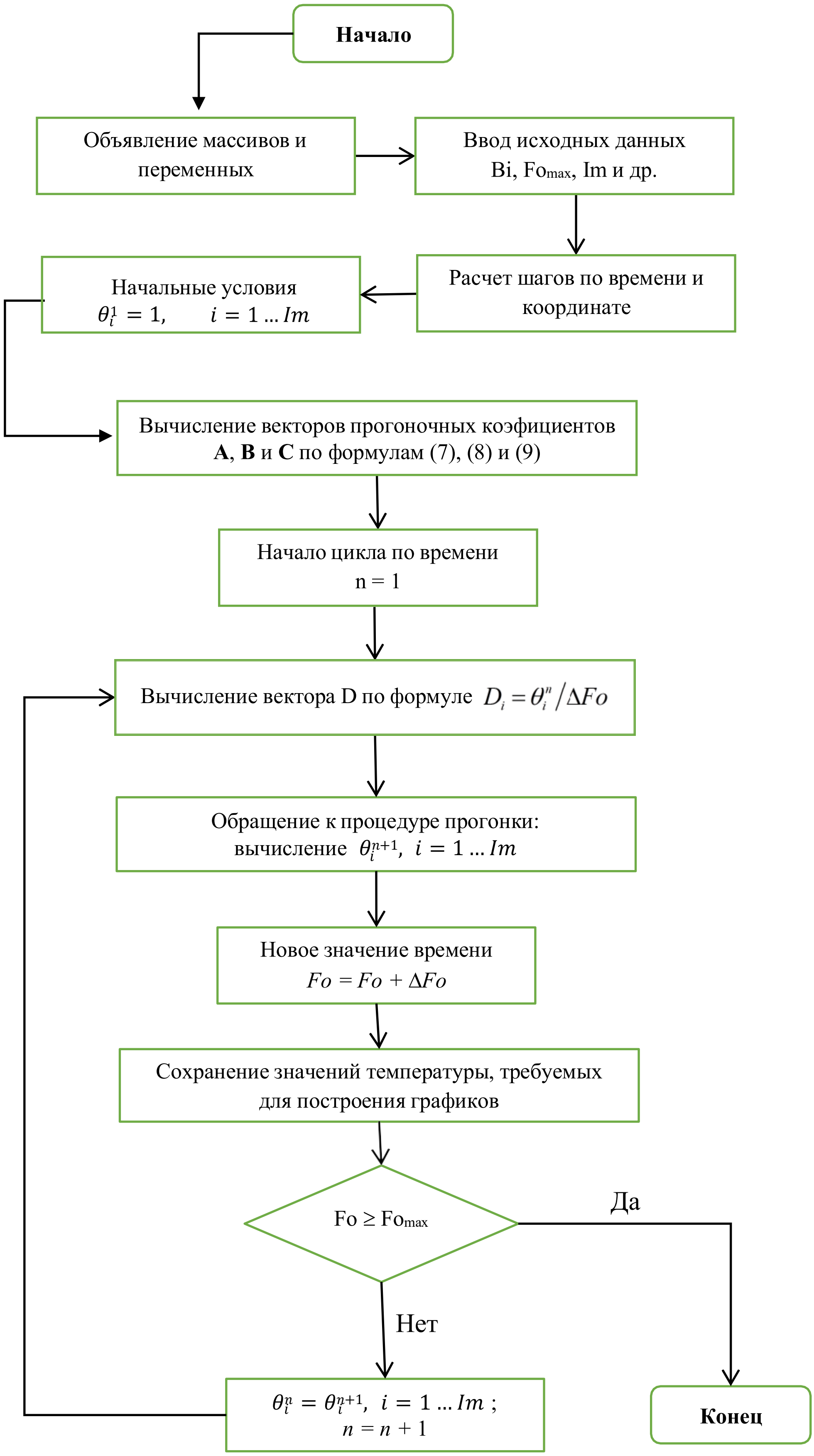
На правой границе коэффициент $A_{Im} = 0$ (см. (**)), поэтому из (Δ) получим

$$y_{Im} = -\frac{D_{Im} + C_{Im}\beta_{Im-1}}{B_{Im} + C_{Im}\alpha_{Im-1}} \tag{10}$$

Итак, окончательно алгоритм 3-точечной прогонки в компьютерной программе реализуется в виде двух последовательных циклов:

1. Прямой ход прогонки (в сторону возрастания n)
   1.1 Находим α_1 , β_1 по (9)
   1.2 В цикле n от 2 до Im-1 находим α_n , β_n по (8)
2. Обратный ход прогонки (в сторону убывания n)
   2.1 Находим y_{Im} по (10)
   2.2 В цикле по n от Im-1 до 1 находим y_n по (Δ)

Блок-схема вычислительной программы



Тестовый расчет

Для значений X=0, Fo=6, Bi=0.45 и Im=81, урезанная программа для тестирования (в ней осуществляется лишь расчет θ при заданных значениях X, Fo, Bi, Im) выдает значение θ=0.102; для X=0, Fo=3, Bi=0.5, Im=81: θ=0.297; для X=0, Fo=4, Bi=1.6, Im=81: θ=0.019; данные значения θ соответствуют значениям, полученным с помощью урезанной программы для нахождения θ методом Фурье (см. Приложение 2 и 6). Отсюда делаем вывод, что программа работает исправно.

Результат решения задачи

На рисунках 1 и 2 изображены зависимости температуры от времени при Im = 101 для трех разных сечений пластины (x=0; x=δ/4; x=δ/2) при Bi=0.0955 и Bi=68.2. На рисунках видно, что с увеличением значения параметра Bi уменьшается время, необходимое для достижения теплового равновесия. График зависимости температуры от времени для x=δ/2 испытывает резкий спад, а для x=δ/4 и x=0 графики асимптотически приближаемся к температуре, соответствующей состоянию теплового равновесия.

На рисунках 3, 4 и 5 изображены зависимости температуры от координаты при Im = 101 для трех разных временных точек ($t=0.1\cdot Fo_{max}$; $t=0.5\cdot Fo_{max}$; $t=0.9\cdot Fo_{max}$) при Bi=0.0955, Bi=1.091 и Bi=68.2. На рисунках видно, что с увеличением значения параметра Bi разница температуры между центром пластины и ее краем возрастает, и при приближении к точке времени Fo_{max} температура в точках пластины приближается к значениям температуры в момент теплового равновесия.

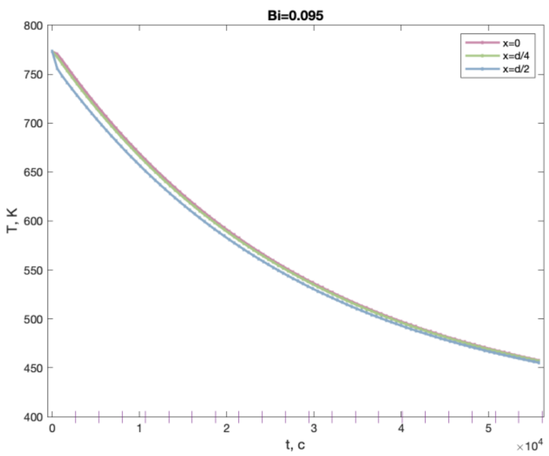


Рисунок 1
Зависимость температуры от времени при Bi=0.095
Im=101

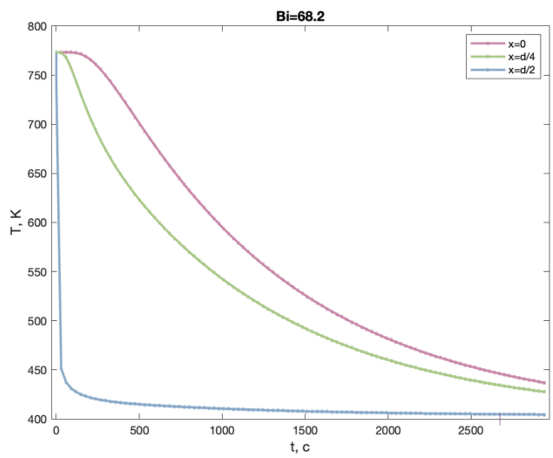


Рисунок 2
Зависимость температуры от времени при Bi=68.2
Im=101

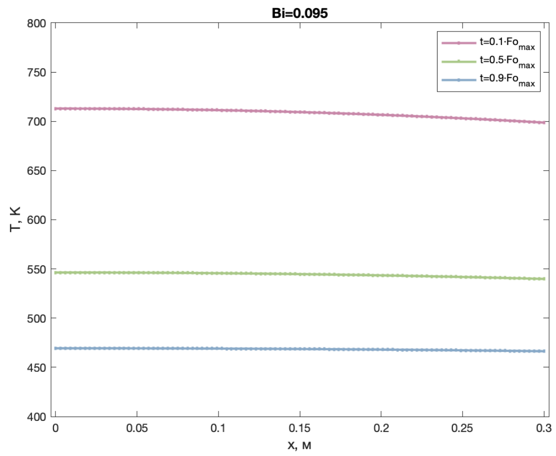


Рисунок 3
Зависимость температуры от
координаты при Bi=0.095
Fo_{max} = 55752 с
Im=101

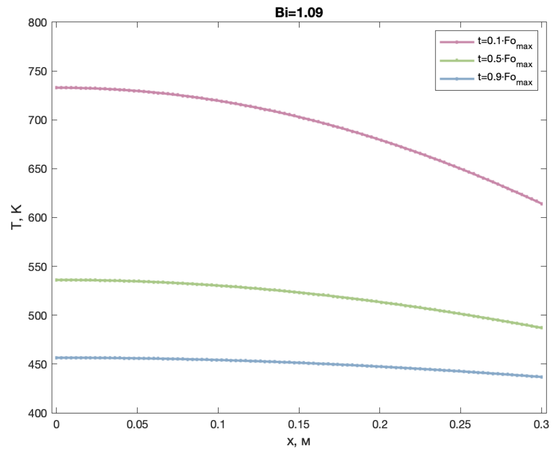


Рисунок 4
Зависимость температуры от
координаты при Bi=1.09
Fo_{max} = 7750 с
Im=101

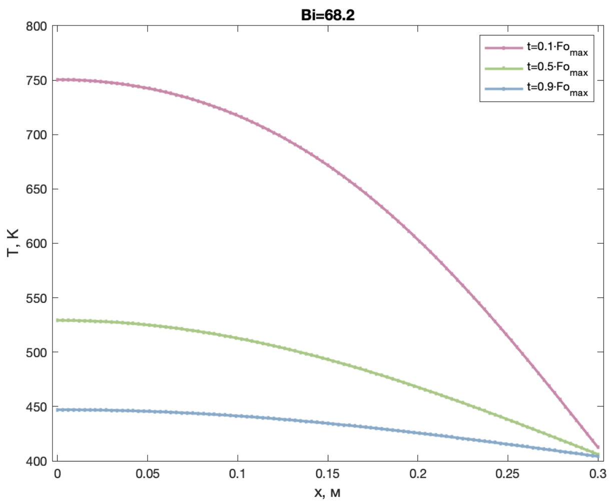


Рисунок 5
Зависимость температуры от
координаты при Bi=68.2
Fo_{max} = 2941 с
Im=101

Выводы

В ходе решения поставленной задачи был изучен метод конечных разностей. Решение задачи данным методом было реализовано на языке программирования Fortran (см. Приложение 1), результаты программы представлены в виде графиков с использованием пакета Matlab.

Для выявления влияния величины шага по времени на точность решения были проведены расчеты программой для нахождения аналитического решения методом Фурье (см. Приложение 3) при Bi=0.095, Fo=5 и X=0 (см. Приложение 4), а затем расчеты с помощью основной программы (см. Приложение 1) при Im=21, Bi=1.09, Fo=1.5, X=0 для ΔFo=dF, ΔFo=5dF, ΔFo=20dF, ΔFo=100dF, где dF – максимально допустимый шаг для явной схемы на той же сетке (см. Приложение 5). Получились следующие результаты (таблица 1):

Таблица 1

ΔFo	Fo	$\theta_{Bi=1.09}$	$\Delta\theta_{Bi=1.09}$	$\delta_{Bi=1.09}$, %
dF	1.49999999999999999999 999999999997708	0.3455782	-0.0000155	-0.0044883
5dF	1.50000000000000000000 000000000000404	0.3463809	0.0007871	0.2277771
20dF	1.49999999999999999999 999999999999904	0.3493703	0.0037765	1.0927731
100dF	1.50000000000000000000 000000000000019	0.3647810	0.0191872	5.5519619
Фурье	1.5	0.3455937	-	-

Из таблицы видно, что с увеличением значения dF растет и относительная погрешность.

Для сравнения явного и неявного методов были выявлены влияния величины шагов по координате и времени на точность результатов, для чего была использована программа для нахождения аналитического решения методом Фурье (см. Приложение 3). Были выбраны значения координаты X=0 и времени Fo=1 –(см. Приложение 4). Явный метод для различных Im выдал следующие результаты (таблица 2):

Таблица 2

Im	Fo	$\theta_{Bi=0.095}$	$\theta_{Bi=1.09}$	$\theta_{Bi=68.2}$	$\Delta\theta_{Bi=0.095}$	$\Delta\theta_{Bi=1.09}$	$\Delta\theta_{Bi=68.2}$	$\delta_{Bi=0.095}$, %	$\delta_{Bi=1.09}$, %	$\delta_{Bi=68.2}$, %
11	1.0000000000000000000000000000000000058	0.915731	0.470984	0.090433	0.010282	0.041391	0.025434	-1.1103	-8.078	-21.951
21	0.99999999999999999999999999999999986326	0.920733	0.491324	0.102635	0.005279	0.021051	0.013233	-0.5701	-4.1087	-11.421
41	1.0000000000000000000000000000000005970	0.923214	0.501677	0.109115	0.002799	0.010698	0.006752	-0.30227	-2.0879	-5.8272
81	1.0000000000000000000000000000000019356	0.924449	0.506904	0.112458	0.0015634	0.005461	0.003409	-0.16883	-1.06773	-2.9429
Фурье	1.0	0.92601	0.51237	0.11586	-	-	-	-	-	-

Погрешность менее 6% для всех трех Bi достигается при Im=41, что является приемлемой точностью. Если посмотреть на рисунки 1 и 2, то можно понять, с чем связана то, что погрешности для Bi=0.095 получились самыми маленькими – на этих рисунках фиолетовыми чертами отмечены целые числа Fo. Для Bi=0.095 изменения значений температур для всех трех сечений пластины менее 50 К, а для Bi=68.2 от 300 до 350. Т. е. с увеличением параметра Bi растет и скорость изменения температуры, с чем и может быть связана самая маленькая погрешность для Bi=0.095.

Теперь же рассмотрим результаты неявного метода (таблица 3):

Таблица 3

Im	Fo	$\theta_{Bi=0.095}$	$\theta_{Bi=1.09}$	$\theta_{Bi=68.2}$	$\Delta\theta_{Bi=0.095}$	$\Delta\theta_{Bi=1.09}$	$\Delta\theta_{Bi=68.2}$	$\delta_{Bi=0.095}$, %	$\delta_{Bi=1.09}$, %	$\delta_{Bi=68.2}$, %
11	1.0000000000000000000000000000000000058	0.925764	0.513042	0.117835	-0.0002482	0.00066638	0.0019671	0.0268	0.13006	1.6977
21	0.99999999999999999999999999999999986326	0.925702	0.512386	0.116361	-0.0003099	0.0000111	0.00049404	0.0335	0.00216	0.4264
41	1.0000000000000000000000000000000005970	0.925687	0.512222	0.115993	-0.0003253	-0.0001528	0.0001251	0.03514	0.02983	0.10801
81	1.0000000000000000000000000000000019356	0.925683	0.512182	0.115901	-0.0003292	-0.0001938	0.00003288	0.03555	0.0378	0.0283
Фурье	1.0	0.92601	0.51237	0.11586	-	-	-	-	-	-

Во всех случаях погрешность менее 2%, что является хорошей точностью. Выявить какую-либо зависимость погрешности от значений Bi или Im невозможно, т. к., например, для Bi=0.095 погрешность с увеличением Im растет, а для Bi=68.2 падает, хотя для Bi=1.09 сначала резко падает, затем увеличивается. Так же нельзя сказать, для какого Bi погрешность всегда наименьшая, потому что при Im=11 это Bi=0.095, а при Im=41 это уже Bi=68.2. Однако можно сказать, что минимальная погрешность достигается при Bi=68.2 и Im=81, а максимальная при Bi=68.2 и Im=11. Отсюда вывод: неявный метод оказывается более точным, но также тяжело предсказать как параметры Im и Bi повлияют на значение погрешности.

Приложение

1) Основная программа

```
module methods
contains


character(len=20) function str(k) !function for translating integer to string
    integer, intent(in) :: k
    write (str, *) k
    str = adjustl(str)

end function


subroutine sweep(Im,A,B,C,D,F)
implicit none
integer, intent(in):: Im
real*16, dimension(1:Im), intent(in):: A, B, C, D
real*16, dimension(1:Im), intent(out):: F
real*16, dimension(1:Im):: alpha, beta
real*16 :: k0
integer::i
!Прямой ход
alpha(1) = -A(1) / B(1)
beta(1) = -D(1) / B(1)
do i = 2, (Im-1)
    k0 = (B(i) + C(i)*alpha(i-1))
    alpha(i) = -A(i) / k0
    beta(i) = -(D(i) + C(i)*beta(i-1)) / k0
end do
!Обратный ход
F(Im) = -(D(Im) + C(Im)*beta(Im-1)) / (B(Im) + C(Im)*alpha(Im-1))
do i = (Im-1), 1, -1
    F(i) = alpha(i)*F(i+1) + beta(i)
end do

end subroutine


subroutine finit_differences(p, Te, T0, delta, alpha, lambda, cp, po, check,t_res)
implicit none
real*16 Te, T0, delta, lambda, cp, po, Bi, Fo, Fo_max, st, delt_X, delt_Fo,
one,delt_Fo_2,t_res
real*4 Bi_wr
integer :: i, j, n, alpha, p, p_Fo, Fo_points, popul, check, t_1
real*16, allocatable, dimension (:,:) ::tau_x
real*16, allocatable, dimension (:) :: points, AA,CC,BB,DD, O_n,T
integer, allocatable, dimension (:) :: points_dot

Bi=(alpha*delta)/(2*lambda)
write(*,*)Bi
if (Bi<=0.5) then !Fo_max based on Bi
    write(13,'(F5.3,$)') Bi
    write(*,'(F5.3)') Bi
```

```
elseif (Bi>=10) then
    write(13,'(F4.1,$)') Bi
    write(*,'(F4.1)') Bi
else
    write(13,'(F4.2,$)') Bi
    write(*,'(F4.2)') Bi
end if

if (Bi<1.25) then
    Fo_max=3.11*Bi**(-0.81)
elseif (Bi>20) then
    Fo_max=1.1
else
    Fo_max=2.76*Bi**(-0.31)
end if
write(*,'(A9,$)')'Fo_max= '
write(*,'(F12.6)')(Fo_max*cp*po*(delta**2))/(4*lambda)

allocate(points(6))
allocate(points_dot(6))
points(1)=0
points(2)=0.5 !delta/4
points(3)=1 !delta/2
points(4)=Fo_max*0.1 !(Fo_max*0.1*cp*po*(delta**2))/(4*lambda)
points(5)=Fo_max*0.5 !(Fo_max*0.5*cp*po*(delta**2))/(4*lambda)
points(6)=Fo_max*0.9 !(Fo_max*0.9*cp*po*(delta**2))/(4*lambda)

one=1
delt_X=one/(p-1)
delt_Fo_2=(delt_X**2)/2
delt_Fo=delt_Fo_2
if (check==1) delt_Fo=delt_Fo_2*1
if (check==2) delt_Fo=delt_Fo_2*5
if (check==3) delt_Fo=delt_Fo_2*20
if (check==4) delt_Fo=delt_Fo_2*100

p_Fo=int(Fo_max/delt_Fo)
write(13,*) p, p_Fo, alpha

allocate(O_n(p+1))
allocate(T(p+1))
allocate(tau_x(p_Fo+1,2))

allocate(AA(p),BB(p),CC(p),DD(p))

do i=2,p-1
    CC(i)=(1.0)/(delt_X**2)
    AA(i)=CC(i)
    BB(i) = - ((1.0)/(delt_Fo)) - ((2.0)/(delt_X**2))
end do
    CC(1)=0
    AA(1)=(2.0)/(delt_X**2)
    BB(1) = - ((1.0)/(delt_Fo)) - ((2.0)/(delt_X**2))
    CC(p)=(2.0)/(delt_X**2)
    AA(p)=0
```

```
    BB(p) = - ((1.0)/(delt_Fo)) - ((2.0)/(delt_X**2)) - ((2.0*Bi)/(delt_X))

st=0
popul=0
do i=1,p
    popul=popul+1
    O_n(i)=1
    T(i)=T0
    tau_x(i,2)=(st*delta)/2.0
    st=st+delt_X
    do j=1,3
        if ((points(j)>st-delt_x) .and. (points(j)<st+delt_x)) then
            points_dot(j)=popul
        end if
    end do
end do
tau_x(1,1)=0

if (check==0) then
    open(10,
file='bin/res/Im='//trim(str(p))//'/alpha'//trim(str(alpha))//'_temp_t.txt')
    open(101,
file='bin/res/Im='//trim(str(p))//'/alpha'//trim(str(alpha))//'_temp_x.txt')
    open(11, file='bin/res/Im='//trim(str(p))//'/alpha'//trim(str(alpha))//'_time.txt')
    open(21, file='bin/res/Im='//trim(str(p))//'/alpha'//trim(str(alpha))//'_coord.txt')
else
    open(10,
file='bin/res/Im='//trim(str(p))//'_def/alpha'//trim(str(alpha))//'_dFo'//trim(str(check
))//'_temp_t.txt')
    open(101,
file='bin/res/Im='//trim(str(p))//'_def/alpha'//trim(str(alpha))//'_dFo'//trim(str(check
))//'_temp_x.txt')
    open(11,
file='bin/res/Im='//trim(str(p))//'_def/alpha'//trim(str(alpha))//'_dFo'//trim(str(check
))//'_time.txt')
    open(21,
file='bin/res/Im='//trim(str(p))//'_def/alpha'//trim(str(alpha))//'_dFo'//trim(str(check
))//'_coord.txt')
end if

Fo=delt_Fo
n=0
tau_x(1,1)=0
do n=1,p_Fo+1 !time
    do i=4,6
        if ((points(i)>Fo-delt_fo) .and. (points(i)<Fo+delt_fo)) then
            points_dot(i)=n
        end if
    end do

    do i=1,p
        DD(i)=O_n(i)/delt_Fo
    end do

    call sweep(p,AA,BB,CC,DD,O_n)
```

```fortran
    do i=1,p
        T(i)=O_n(i)*(T0-Te)+Te
    end do
    tau_x(n+1,1)=(Fo*cp*po*(delta**2))/(4*lambda) !real time
    write(10,*) T(1), T(points_dot(2)), T(points_dot(3))
    write(10,*)

    do i=4,6
        if ((points(i)>Fo-delt_fo/2) .and. (points(i)<Fo+delt_fo/2)) then
            do j=1,p
                write(101,'(f18.10,$)') T(j)
            end do
            write(101,*)
        end if
    end do
    if ((abs(Fo-1.0)<=(delt_Fo/2.0)) .and. (check==0)) then
        t_1=n
        write(*,'(A10,$)')'For iter '
        write(*,'(i5,$)')t_1
        write(*,'(A11,$)')' and time '
        write(*,*) Fo, ':    T(0,Fo=1)=', O_n(1), (O_n(1)-t_res), ((O_n(1)-
t_res)/t_res)*100
    elseif ((abs(Fo-1.5)<=(delt_Fo/2.0)) .and. (check/=0)) then
        t_1=n
        write(*,'(A10,$)')'For iter '
        write(*,'(i5,$)')t_1
        write(*,'(A11,$)')' and time '
        write(*,*) Fo, ':    T(0,Fo=1.5)=', O_n(1), (O_n(1)-0.345593785639), ((O_n(1)-
0.345593785639)/0.345593785639)*100
    end if
    Fo=Fo+delt_Fo
    if (Fo>=Fo_max) exit
end do
do i=1,p_Fo
    write(11,*) tau_x(i,1)
end do
do i=1,p
    write(21,*) tau_x(i,2)
end do

write(20,*) 1, points_dot(2), points_dot(3), points_dot(4), points_dot(5), points_dot(6)
deallocate(points)
deallocate(points_dot)

close(10)
close(11)
close(101)
deallocate(O_n)
deallocate(T)
deallocate(tau_x)
deallocate(AA,BB,CC,DD)

end subroutine
```

```
end module

program main
use methods
implicit none

real*16 Te, T0, delta, lambda, cp, po, E, t_res,T_res_n(3)
integer, allocatable, dimension (:) :: alpha_n, p_n, tau_points
integer :: n, i, alpha, p, j, check, Fo_points

Te=130.0+273.15
T0=500.0+273.15
delta=0.6
lambda=110.0
cp=380.0
po=8600.0

allocate(p_n(5))! grid size
allocate(alpha_n(3))
allocate(tau_points(100))
alpha_n(1)=35
alpha_n(2)=400
alpha_n(3)=25000
p_n(1)=11
p_n(2)=21
p_n(3)=41
p_n(4)=81
p_n(5)=101

 T_res_n(1)= 0.926012747427353802229742345141718148
 T_res_n(2)= 0.512375769314193418196748998307030519
 T_res_n(3)= 0.115867936825182547473269331561302031

write(*,*)'start program'

write(*,*) 'Main + Research 2'
check=0
do i=1,5
    p=p_n(i)
    write(*,*)
'_______________________________________________________________________________________
__________________'
    write(*,'(a4,$)') ' Im='
    write(*,'(i3)') p
    write(*,*)
    open(13, file='bin/res/Im='//trim(str(p))//'/bi_iFORcoord_iFORtime_alpha.txt')
    open(20, file='bin/res/Im='//trim(str(p))//'/points.txt')
    do j=1,3
        alpha=alpha_n(j)
        t_res=T_res_n(j)
        write(*,'(A4,$)') ' Bi='
        call finit_differences(p, Te, T0, delta, alpha, lambda, cp, po,check,t_res)
        write(*,*)
    end do
    close(20)
```

```
    close(13)
    write(*,*) 'this Im done'
end do

write(*,*)
write(*,*) 'Research 1'
alpha=alpha_n(2)
do check=1,4
    p=21
    write(*,*)
'___________________________________________________________________________________________________________'
        write(*,'(a4,$)') ' Im='
        write(*,'(i3)') p
        write(*,*)
        write(*,'(a12,$)') ' num of dFo:'
        write(*,'(i3)') check
        write(*,*)
    open(13, file='bin/res/Im='//trim(str(p))//'_def/bi_iFORcoord_iFORtime_alpha.txt')
    open(20, file='bin/res/Im='//trim(str(p))//'_def/points.txt')
    write(*,'(A4,$)') ' Bi='
    call finit_differences(p, Te, T0, delta, alpha, lambda, cp, po,check,t_res)
    write(*,*)
    close(20)
    close(13)
end do
write(*,*) 'this res done'

open(29, file='bin/res/fo_points.txt')
do Fo_points=1,100
    tau_points(Fo_points)=(Fo_points*cp*po*(delta**2))/(4*lambda)
    write(29,*) Fo_points, tau_points(Fo_points), 400
end do
close(29)

write(*,*) 'end program'

end program
```

2) Урезанная программа для тестирования

```
module methods_test
contains

character(len=20) function str(k) !function for translating integer to string
    integer, intent(in) :: k
    write (str, *) k
    str = adjustl(str)

end function


subroutine sweep(Im,A,B,C,D,F)
implicit none
integer, intent(in):: Im
real*16, dimension(1:Im), intent(in):: A, B, C, D
```

```fortran
real*16, dimension(1:Im), intent(out):: F
real*16, dimension(1:Im):: alpha, beta
real*16 :: k0
integer::i
!Прямой ход
alpha(1) = -A(1) / B(1)
beta(1) = -D(1) / B(1)
do i = 2, (Im-1)
    k0 = (B(i) + C(i)*alpha(i-1))
    alpha(i) = -A(i) / k0
    beta(i) = -(D(i) + C(i)*beta(i-1)) / k0
end do
!Обратный ход
F(Im) = -(D(Im) + C(Im)*beta(Im-1)) / (B(Im) + C(Im)*alpha(Im-1))
do i = (Im-1), 1, -1
    F(i) = alpha(i)*F(i+1) + beta(i)
end do

end subroutine


subroutine finit_differences(X, Fo_final, Bi, p)
implicit none
real*16 Bi, Fo, Fo_final, delt_X, delt_Fo, one, X
integer :: i, j, n,p, x_i, Fo_i
real*16, allocatable, dimension (:) :: AA,CC,BB,DD, O_n

one=1
delt_X=one/(p-1)
delt_Fo=(delt_X**2)/2

allocate(O_n(p+1))

do i=1,p
    O_n(i)=1
end do

allocate(AA(p),BB(p),CC(p),DD(p))

do i=2,p-1
    CC(i)=(1.0)/(delt_X**2)
    AA(i)=CC(i)
    BB(i) = - ((1.0)/(delt_Fo)) - ((2.0)/(delt_X**2))
end do
    CC(1)=0
    AA(1)=(2.0)/(delt_X**2)
    BB(1) = - ((1.0)/(delt_Fo)) - ((2.0)/(delt_X**2))
    CC(p)=(2.0)/(delt_X**2)
    AA(p)=0
    BB(p) = - ((1.0)/(delt_Fo)) - ((2.0)/(delt_X**2)) - ((2.0*Bi)/(delt_X))




Fo=delt_Fo
```

```
Fo_i=0
do n=1,100000 !time

    do i=1,p
        DD(i)=O_n(i)/delt_Fo
    end do

    call sweep(p,AA,BB,CC,DD,O_n)

    Fo=Fo+delt_Fo
    if (Fo>Fo_final) exit
end do
if (X==0) then
    x_i=1
elseif (X==1) then
    x_i=p
end if
write(*,'(A13,$)')'Your theta = '
write(*,*) O_n(x_i)

end subroutine

end module

program main
use methods_test
implicit none
real*16 X, Fo, Bi
integer p

X=0
p=81
Fo=4.0
Bi=1.6

call finit_differences(X, Fo, Bi, p)

end program
```

3) Программа для нахождения значений аналитического решения

```
module functions_temp_find
contains

real*16 Function f(Mu, Bi) result(res)
real*16 :: Mu, Bi
res=(cos(Mu))/(sin(Mu))-(Mu/Bi)
end function

real*16 Function A_f(Mu) result(res)
real*16 :: Mu
res=(2*sin(Mu))/(Mu+sin(Mu)*cos(Mu))
end function

real*16 Function O_f(Mu, A, Fo, X) result(res)
real*16 :: Mu, A, Fo, X
```

```
res=A*exp( (-1)*Fo*(Mu**2))*cos(Mu*X)
end function

end module

module methods_temp_find
contains

real*16 Function bis(n, E, Bi) result(res)
use functions_temp_find
real*16 :: E, a_Mu, b_Mu, c_Mu, f1, f2, check, pi=3.1415926535897932, Bi, delt, n_r
integer :: n, i

n_r=real(n, 16)
a_Mu=pi*(n_r-1)
b_Mu=pi*(n_r-0.5)
f1=f(b_Mu, Bi)
do i=1,1000
    c_Mu=(a_Mu+b_Mu)/2.0
    f2=f(c_Mu, Bi)
    check=f1*f2
    if (check>0) then
        b_Mu=c_Mu
        f1=f2
    elseif (check<0) then
        a_Mu=c_Mu
    elseif (check==0) then
        a_Mu=c_Mu
        b_Mu=c_Mu
    end if
    delt=abs(a_Mu-b_Mu)
    if (delt<E) exit
end do
res=c_Mu
end function

subroutine Fourier(X, Fo, Bi, E)
use functions_temp_find
implicit none
real*16 O, Bi, Mu, A, Fo, X, E, O_n, check,te,t0
integer :: i, n

n=0
O=0
O_n=0
check=1
do i=1,1000
    n=n+1
    Mu=bis(n, E, Bi)
    A=A_f(Mu)
    O_n=O_f(Mu, A, Fo, X)
    O=O+O_n
    check=abs(O)
    if (check<E) exit
end do
```

```
Te=130.0+273.15
T0=500.0+273.15
write(*,*)'T=', O

end subroutine

end module

program main
use functions_temp_find
use methods_temp_find
implicit none
real*16 X, Fo, Bi, E

write(*,*)'Fo=1'
X=0
Fo=1.0
Bi=0.095
call Fourier(X, Fo, Bi, E)

Bi=1.09
call Fourier(X, Fo, Bi, E)

Bi=68.2
call Fourier(X, Fo, Bi, E)

write(*,*)'Fo=1.5'
X=0
Fo=1.5
Bi=0.095
call Fourier(X, Fo, Bi, E)

Bi=1.09
call Fourier(X, Fo, Bi, E)

Bi=68.2
call Fourier(X, Fo, Bi, E)

end program
```

4) Вывод программы для нахождения значений аналитического решения

```
Fo=1
 T=  0.926012747427353802229742345141718148
 T=  0.512375769314193418196748998307030519
 T=  0.115867936825182547473269331561302031
 Fo=1.5
 T=  0.884352382654567618325153560153664267
 T=  0.345593785639343570197473485001033289
 T=   3.49578492264228096670207494924388298E-0002
```

5) Вывод основной программы

```
start program
 Main + Research 2
```

```
________________________________________________________________________________
_______________
 Im= 11

 Bi=   9.545454924756830388849431818181817740E-0002
0.095
 Fo_max= 55751.558487
 For iter   200  and time    1.00000000000000000000000000000000058       :    T(0,Fo=1)=
0.925764528538175588010240507104157348        -2.482259021320291772594928958426524530E-
0004  -2.680588371399481063868265227501025530E-0002

 Bi=   1.09090913425792347301136363636363645
1.09
 Fo_max=  7749.675765
 For iter   200  and time    1.00000000000000000000000000000000058       :    T(0,Fo=1)=
0.513042156576282358060017501707569670         6.663845769232272006425017075696699330E-
0004  0.130057784411410596683672823990412390

 Bi=   68.1818208911202170632102272727272671
68.2
 Fo_max=  2941.200297
 For iter   200  and time    1.00000000000000000000000000000000058       :    T(0,Fo=1)=
0.117835061746644106369247362719973707         1.967126625584688644637987719973707170E-
0003   1.69773166625384717087153730566316071

 this Im done

________________________________________________________________________________
_______________
 Im= 21

 Bi=   9.545454924756830388849431818181817740E-0002
0.095
 Fo_max= 55751.558487
 For iter   800  and time   0.999999999999999999999999999999986326       :    T(0,Fo=1)=
0.925702801711941502528604929568917351        -3.099527283661146588950704310826488250E-
0004  -3.347175585647883725072224873954463350E-0002

 Bi=   1.09090913425792347301136363636363645
1.09
 Fo_max=  7749.675765
 For iter   800  and time   0.999999999999999999999999999999986326       :    T(0,Fo=1)=
0.512386872355251442036927530643766552         1.110035589231117755253064376655204090E-
0005   2.166448239540307860369609978160183070E-0003

 Bi=   68.1818208911202170632102272727272671
68.2
 Fo_max=  2941.200297
 For iter   800  and time   0.999999999999999999999999999999986326       :    T(0,Fo=1)=
0.116361976279990501941767736609164783         4.940411589310842171583616091647825300E-
0004  0.426382983708916068801547007715967603

 this Im done
```

```
________________________________________________________________________________________________________________

 Im= 41

 Bi=   9.545454924756830388849431818181774E-0002
0.095
 Fo_max= 55751.558487
 For iter  3200  and time    1.00000000000000000000000000000005970       :    T(0,Fo=1)=
0.925687367184326494056602649740878269        -3.25387255981123130897350259121731268E-
0004  -3.51385285376323783525935588538278387E-0002

 Bi=   1.090909134257923473011363636363645
1.09
 Fo_max=  7749.675765
 For iter  3200  and time    1.00000000000000000000000000000005970       :    T(0,Fo=1)=
0.512222911206710381084042315902740137        -1.52860792648749775332684097259862730E-
0004  -2.98337277057942096620151319605437336E-0002

 Bi=   68.1818208911202170632102272727272671
68.2
 Fo_max=  2941.200297
 For iter  3200  and time    1.00000000000000000000000000000005970       :    T(0,Fo=1)=
0.115993080218246844452239515575667228         1.25145097187426727630140575667228215E-
0004  0.108006669020790336006096714122020877

 this Im done


________________________________________________________________________________________________________________

 Im= 81

 Bi=   9.545454924756830388849431818181774E-0002
0.095
 Fo_max= 55751.558487
 For iter 12800  and time    1.00000000000000000000000000000019356       :    T(0,Fo=1)=
0.925683508401558838586680861283510178        -3.29246038748778600819138716489822209E-
0004  -3.55552379996945678782021425741006162E-0002

 Bi=   1.090909134257923473011363636363645
1.09
 Fo_max=  7749.675765
 For iter 12800  and time    1.00000000000000000000000000000019356       :    T(0,Fo=1)=
0.512181912214759217249954010117763898        -1.93859784599913609420989882236101698E-
0004  -3.78354706046007353517693282851912496E-0002

 Bi=   68.1818208911202170632102272727272671
68.2
 Fo_max=  2941.200297
 For iter 12800  and time    1.00000000000000000000000000000019356       :    T(0,Fo=1)=
0.115900817647546991555443152946039561         3.2882526487573830833779460395611273E-
0005   2.83793151687893610395402328808430012E-0002

 this Im done
```

```
————————————————————————————————————————————————————————————————————————————————————————————
 Im=101

 Bi=   9.545454924756830388849431818181817741E-0002
0.095
 Fo_max= 55751.558487
 For iter 20000  and time   0.99999999999999999999999999999981896       :    T(0,Fo=1)=
0.92568304534373451620729243604174767 1        -3.29709096573100980207563958252328688E-
0004  -3.56052435554606174155036971197211723E-0002

 Bi=   1.09090913425792347301136363636363645
1.09
 Fo_max=  7749.675765
 For iter 20000  and time   0.99999999999999999999999999999981896       :    T(0,Fo=1)=
0.51217699210205209100393882862613274 8        -1.98779897307039855436171373867252270E-
0004  -3.87957253582412724362528932988909051E-0002

 Bi=   68.1818208911202170632102272727272671
68.2
 Fo_max=  2941.200297
 For iter 20000  and time   0.99999999999999999999999999999981896       :    T(0,Fo=1)=
0.11588974510592766318785767312580197 6         2.18099848682454632482981258019760512E-
0005   1.88231410574964318528772139013155884E-0002

 this Im done

 Research 1

————————————————————————————————————————————————————————————————————————————————————————————
 Im= 21

 num of dFo:  1

 Bi=   1.09090913425792347301136363636363645
1.09
 Fo_max=  7749.675765
 For iter  1200  and time    1.49999999999999999999999999999997708       :
T(0,Fo=1.5)=  0.34557826885696444286074460231112004 0        -
1.55114221951030376928976888799599623E-0005  -4.48833951310507078273614548210110387E-
0003

————————————————————————————————————————————————————————————————————————————————————————————
 Im= 21

 num of dFo:  2

 Bi=   1.09090913425792347301136363636363645
1.09
 Fo_max=  7749.675765
```

```
 For iter   240  and time    1.50000000000000000000000000000000404       :
T(0,Fo=1.5)=  0.346380964016712253581520972519537350
7.87183737552707683083472519537349574E-0004  0.227777171486375120959006400463019391



______________________________________________________________________________________________
_________________
 Im= 21

 num of dFo:  3

 Bi=   1.09090913425792347301136363636363645
1.09
 Fo_max=  7749.675765
 For iter    60  and time    1.49999999999999999999999999999999904       :
T(0,Fo=1.5)=  0.349370336476047863430545261224651378
3.77655619688831753210776122465137829E-0003   1.09277319569748530812644182483526204



______________________________________________________________________________________________
_________________
 Im= 21

 num of dFo:  4

 Bi=   1.09090913425792347301136363636363645
1.09
 Fo_max=  7749.675765
 For iter    12  and time    1.50000000000000000000000000000000019       :
T(0,Fo=1.5)=  0.364781015423486140680957569339846389
1.91872351443265947825200693398463887E-0002   5.55196193890635504071138160740339321

 this res done
 end program
```

6) Вывод урезанной программы для метода Фурье

```
Input X: 0
Input Fo: 6
Input Bi: 0.45
 O=  0.102553513049214762797759192916365133

Input X: 0
Input Fo: 3
Input Bi: 0.5
 O=  0.297449345355111229166080552273732902

Input X: 0
Input Fo: 4
Input Bi: 1.6
 O=   1.98441311715528375238824378099299295E-0002
```