Санкт – Петербургский политехнический университет Петра Великого

Физико-механический институт

Отчет по лабораторной работе №1 по Численным методам
Решение нелинейных уравнений методом бисекции и секущих

Выполнил студент

Группы 5030301/10002 Тугай В.В.

Преподаватель: К.Н. Козлов

Санкт-Петербург

2022

Исследования, проводимые в ходе работы:

1. Отделение корней.
2. Зависимость погрешности от числа вычислений функции (номера итерации).
3. Зависимость погрешности от заданной точности.
4. Зависимость использованного числа вычислений функции от заданной точности.
5. Зависимость относительной погрешности решения от возмущения исходных данных.
6. Сравнение с результатами fzero и roots из Matlab с различными вариантами параметров.

Вариант 21

Метод секущих

exp(-x^2)+1-x=0

x^4-6x^2+12x-8=0

sin(x)-exp(-1/x)=0

Отделение корней

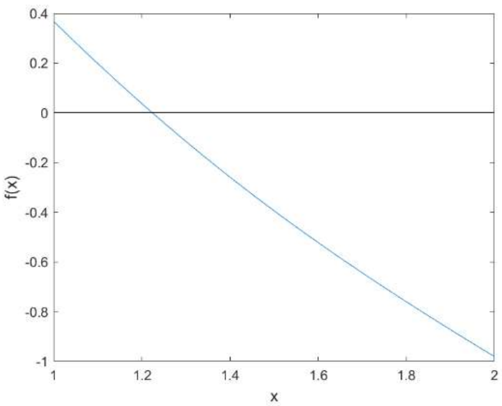

Рисунок 1.1
Функция 1

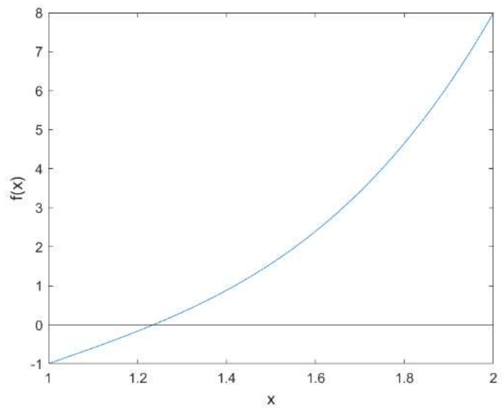

Рисунок 1.2
Функция 2

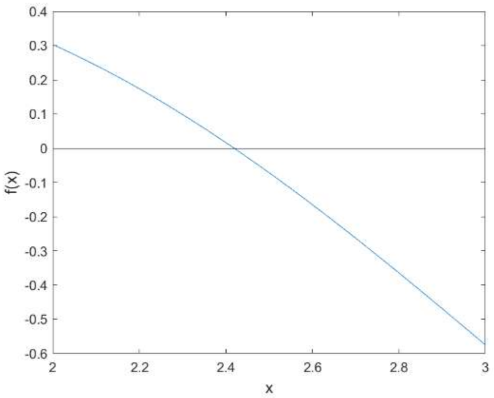

Рисунок 1.3
Функция 3

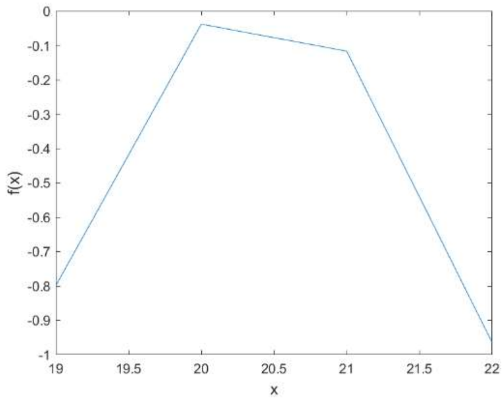

Рисунок 1.4
Функция 3 с маленьким шагом

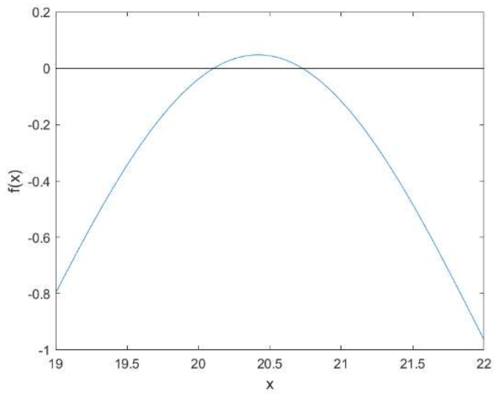

Рисунок 1.5
Функция 3 с большим шагом

Исходя из графиков третьей функции (рис. 1.4 и 1.5), с увеличением шага могут быть потеряны корни.

Теорема о верхней границе для алгебраического уравнения:

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$

$f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$

$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -6,\ a_3 = 12,\ a_4 = -8$

(+) корни: Для верхней границы:

$R^+_В = 1 + \sqrt[k]{B/a_0}$, $k = 2$ (индекс первого отриц. коэфф-та)

$B = 8$ (наиб. из абсолют. знач. отриц. коэфф-ов), $a_0 = 1$

$R^+_В = 1 + \sqrt{8} \approx \underline{3,83}$.

Для нижней границы:

$f_1\left(\frac{1}{x}\right) = -x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = -x^4 \cdot \frac{1}{x^4} + 6x^4 \cdot \frac{1}{x^2} - 12x^4 \cdot \frac{1}{x} + 8x^4 = 0$

$\Rightarrow 8x^4 - 12x^3 + 6x^4 - 1 = 0$

Здесь $k = 1$, $B = 12$, $a_0 = 8$. тогда

$R_1 = 1 + \frac{12}{8} = 2,5$; $R^+_Н = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{2,5} = \underline{0,4}$

(−) корни: Для нижней границы:

$f_2(-x) = f(-x) = (-x)^4 - 6(-x)^2 + 12(-x) - 8 = 0$

$x^4 - 6x^2 - 12x - 8 = 0$

Здесь $k = 2$, $B = 12$, $a_0 = 1$

$R_2 = 1 + \sqrt[2]{12} \approx 4,46$; $R^-_Н = -R_2 = -4,46$

Для верхней границы:

$f_3(x) = -x^4 f_2\left(\frac{1}{x}\right) = -x^4 \cdot \frac{1}{x^4} + 6x^4 \cdot \frac{1}{x^2} + 12x^4 \cdot \frac{1}{x} + 8x^4 = 0$; $8x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 1$

здесь $k = 4$, $B = 1$, $a_0 = 8$. $R_3 = 1 + \sqrt[4]{\frac{1}{8}} \approx 1,59$; $R^-_В = -\frac{1}{R_3} \approx -0,63$

$\Rightarrow 0,4 \le x^+ \le 3,83$; $-4,46 \le x^- \le -0,63$; $-4,46 \le x \le 3,83$.

Методы бисекции и секущих на языке Fortran, структура программы

Метод бисекции заключается в нахождении корня функции с помощью поэтапного деления отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки, пополам. Выбирая такой отрезок [a,b], мы находим точку c и определяем знак функции в точке. Если он противоположен знаку функциив точке a, то корень находится на отрезке [a,c], иначе на [c,b] .Данная операция повторяется до того момента, покуда не будет достигнута желаемая точность ($|a-b|< \varepsilon$).

Метод секущих это модификация метода Ньютона, в котором производная заменена на секущую. Секущая — прямая, проходящая через две точки на графике функции. В данном методе процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений корню уравнения принимаются последовательные значения точек пересечения секущей с осью абсцисс. Положим, что у нас есть две точки, x0 и x1, в которых значения функции равны соответственно f(x0) и f(x1). Тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки, будет $\frac{y-f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)} = \frac{x-x_1}{x_1-x_0}$. Для точки пересечения с осью абсцисс получим уравнение $x = x_1 - \frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)} f(x_1)$. Метод работает и в случае, если начальные точки выбраны по одну и ту же сторону от корня (то есть, корня нет на отрезке между начальными приближениями). В качестве критерия остановки работы метода выбирают один из следующих: значение функции на данной итерации стало меньше заданного ε; $|x_k-x_{k-1}|< \varepsilon$.

Программа lab1.f95 состоит из основного тела и двух модулей:

functions.mod - модуль, содержащий исследуемые функции, а также функция для внесения случайных возмущений в первый коэффициент полинома в пределах процента, заданного пользователем.

methods.mod - модуль, содержащий два заданных метода, которые в ходе работы выводят значения корня, отклонение от предыдущего значения и номер шага.

Основные переменные программы:

num - номер выбранной пользователем функции.

ranfluct – переменная, отвечающая за флуктуацию полинома. Если = 0, то флуктуация не вносится, иначе вносится случайное значение флуктуации в первый коэффициент полинома.

iterfluctcheck - переменная, определяющая действия с итоговыми значениями работы методов. Если iterfluctcheck=1, то сохраняются значения для каждой итерации в файл. Если iterfluctcheck=2, то сохраняется последний корень в переменную root для дальнейших действий.

По окончанию работы программы в папке graph будут созданы текстовые файлы для дальнейшей работы в Matlab.

Проверка на сходимость метода секущих:

$$x^4 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$$

$x_0 = 1$, $x_1 = 2$

$\exists\ f(x) = x^4 - 6x^2 + 12x - 8$, тогда $f(x_0) = 1 - 6 + 12 - 8 = -1$, $f(x_1) = 8$

Знаки функции для двух начальных точек различны.

$f'(x) = 4x^3 - 12x + 12$, $f''(x) = 12x^2 - 12$

Функция $f''(x)$ – парабола с вершиной $(0; -12)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ на отрезке $[1; 2]$ знак $f''(x)$ сохраняется.

Метод сходится

Ручной расчет корней с использованием заданных методов:

$$x^4 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$$

Метод бисекции: $a = 1$; $b = 2$; $\varepsilon = 0{,}1$

1. $c = \frac{a+b}{2} = 1{,}5$; $f(b) = 8$; $f(c) = 1{,}563$ $(b = c)$

$|a - b| = 1 > \varepsilon$

2. $a = 1$; $b = 1{,}5$; $c = 1{,}25$; $f(b) = 1{,}563$; $f(c) = 0{,}066$ $(b = c)$

$|a - b| = 0{,}5 > \varepsilon$

3. $a = 1$; $b = 1{,}25$; $c = 1{,}125$; $f(b) = 0{,}066$; $f(c) = -0{,}492$ $(a = c)$

$|a - b| = 0{,}25 > \varepsilon$

4. $a = 1{,}125$; $b = 1{,}25$; $c = 1{,}1875$; $f(b) = 0{,}066$; $f(c) = -0{,}222$ $(a = c)$

$|a - b| = 0{,}125 > \varepsilon$

5. $a = 1{,}1875$; $b = 1{,}25$; $c = 1{,}21875$; $f(b) = 0{,}066$; $f(c) = -0{,}081$ $(a = c)$

$|a - b| = 0{,}0625 < \varepsilon$

Метод секущих: $x_0 = 1$; $x_1 = 2$; $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$; $\varepsilon = 0{,}01$

1. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot (x_1 - x_0) = 2 - \frac{8}{8 - (-1)} \cdot (2 - 1) \approx 1{,}1111$

$|x_1 - x_2| \approx 0{,}8888 > \varepsilon$

2. $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot (x_2 - x_1) \approx 1{,}16829$

$|x_2 - x_3| \approx 0{,}05718 > \varepsilon$

3. $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2)} \cdot (x_3 - x_2) \approx 1{,}24054$

$|x_4 - x_3| = 0{,}08775 > \varepsilon$

4. $x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f(x_4) - f(x_3)} \cdot (x_4 - x_3) \approx 1{,}23588$

$|x_5 - x_4| \approx 0{,}00466 < \varepsilon$

Проведение исследований с помощью языка Matlab

Графики зависимости погрешности от числа итераций для первой, второй и третьей функций представлены ниже. Исходя из графиков (рис. 2.1 - 2.3) можно выявить, что абсолютная погрешность обратно пропорциональна числу вычислений для обоих методов. К тому же нахождение решения с помощью метода секущих происходит за меньшее количество итераций, из чего следует его большая эффективность в сравнении с методом бисекции.

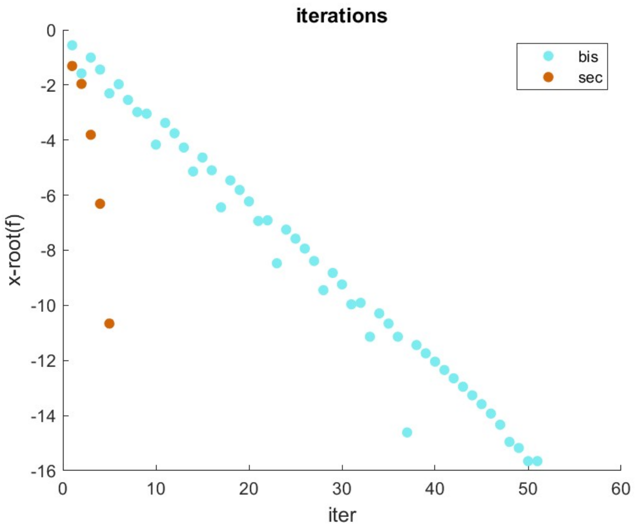

Рисунок 2.1
Функция 1

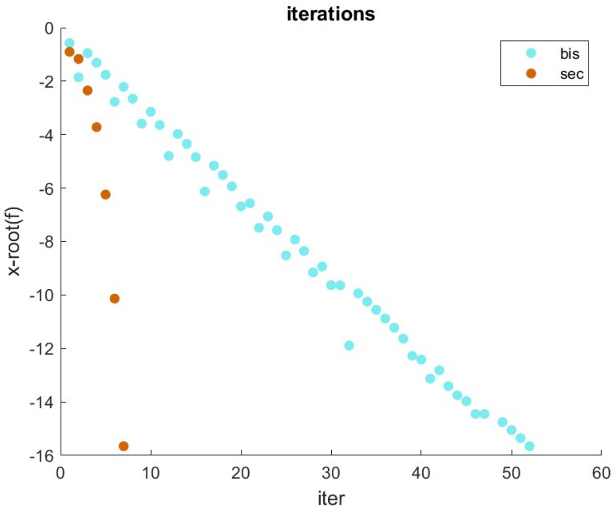

Рисунок 2.2
Функция 2

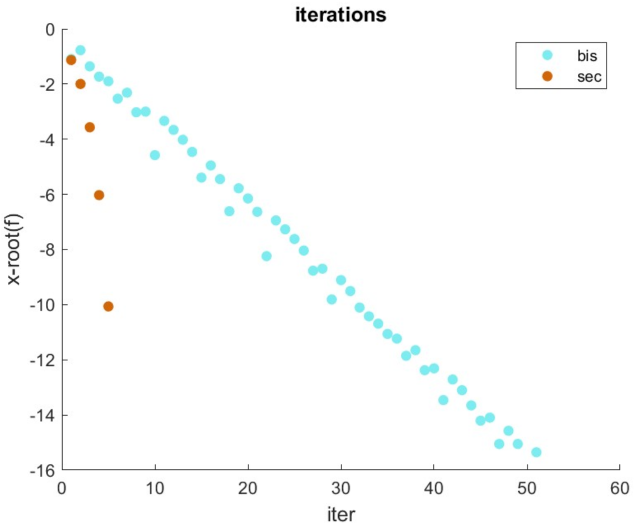

Рисунок 2.3
Функция 3

Графики зависимости погрешности от заданной точности для первой, второй и третьей функций представлены ниже. Исходя из графиков (рис. 3.1 - 3.3)можно выявить, что абсолютная погрешность обратно пропорциональна точности (увеличение точности=уменьшению ε). Суть биссектрисы – значения абсолютной погрешности, находящиеся под ней, меньше заданной точности. Существование факта того, что некоторые точки для метода бисекции не соответствуют линейной зависимости связано с тем, что нахождение корня происходит посредством деления отрезков пополам, таким образом приближение к этому самому корню для метода бисекции происходит скачкообразно.

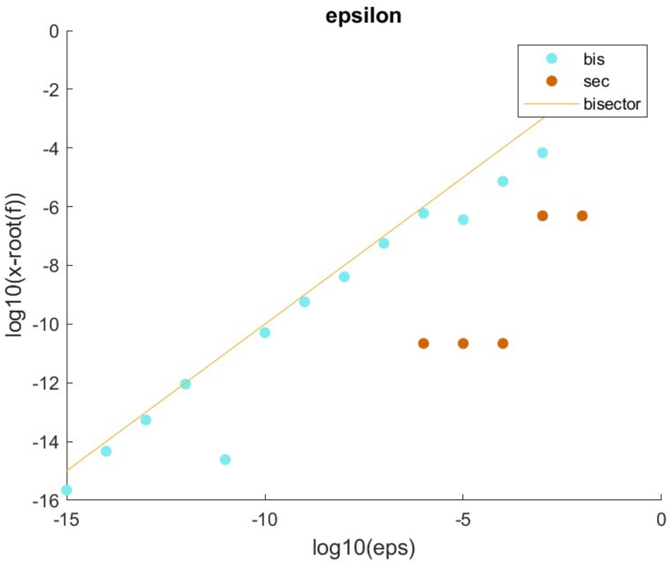

Рисунок 3.1
Функция 1

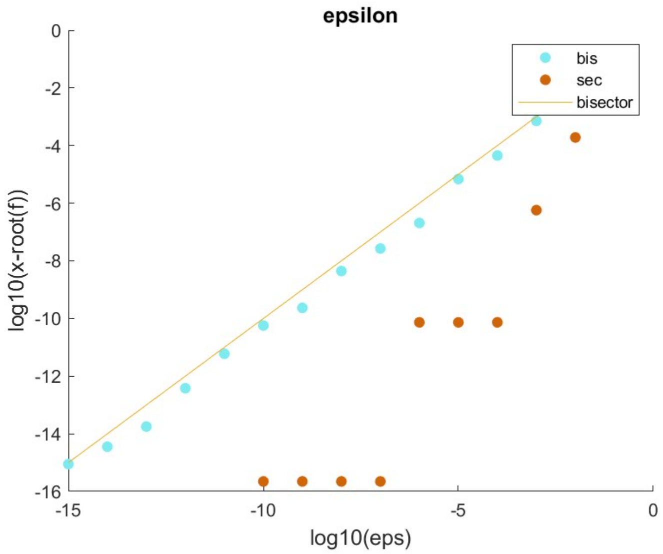

Рисунок 3.2
Функция 2

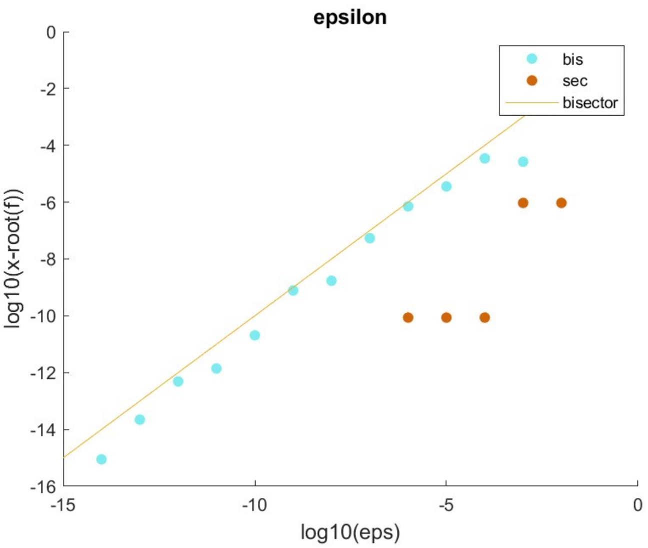

Рисунок 3.3
Функция 3

Графики зависимости использованного числа вычислений функции от заданной точности для первой, второй и третьей функций представлены ниже. Исходя из графиков (рис. 4.1 - 4.3) можно выявить, что для метода бисекции количество вычислений прямо пропорционально точности. Количество вычислений в методе секущих постепенно растет с увеличением задаваемой точности.

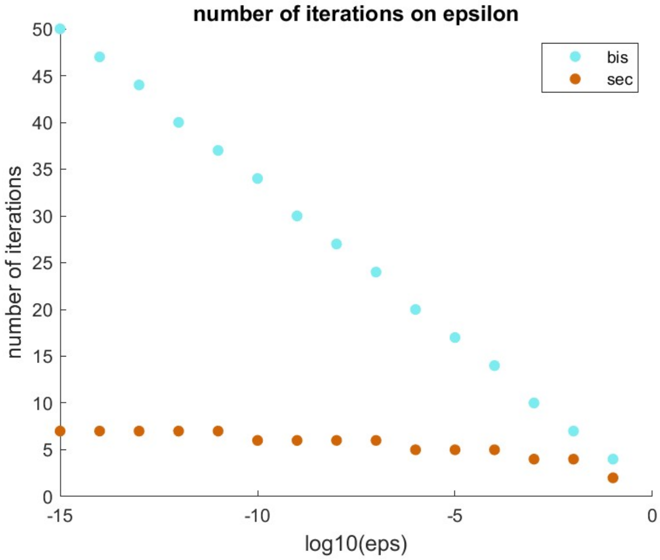

Рисунок 4.1
Функция 1

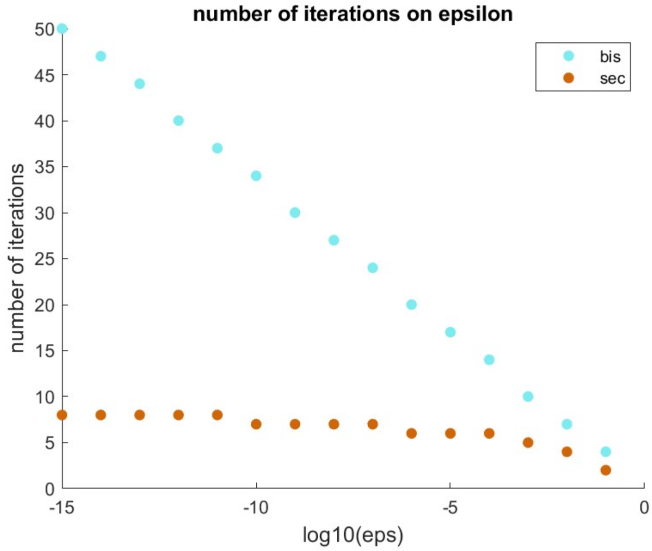

Рисунок 4.2
Функция 2

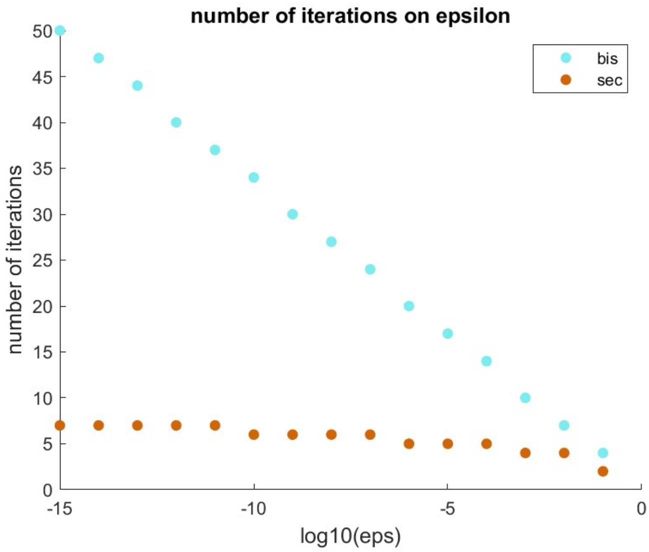

Рисунок 4.3
Функция 3

График зависимости погрешности от заданной флуктуации использованного числа вычислений функции от заданной точности второй функции представлен ниже. Исходя из графика (рис. 5) можно выявить, что для метода секущих относительная погрешность прямо пропорциональна вносимому в функцию возмущению, а для метода бисекции вне зависимости от значений флуктуации точность остается приемлемой.

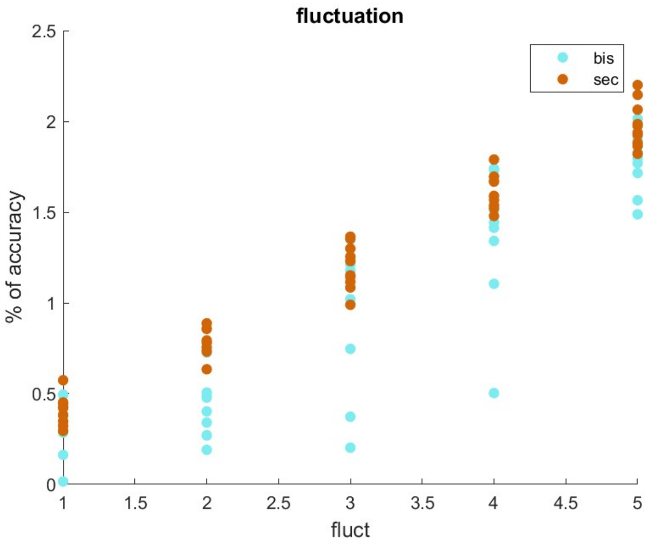

Рисунок 5
Функция 2

Функция fzero(x_0) вычисляет корень функции около заданной точки x_0:

```
Search for an interval around 2.5 containing a sign change:
 Func-count    a          f(a)             b             f(b)        Procedure
    1             2.5      23.5625           2.5       23.5625     initial interval
    3         2.42929      20.5699       2.57071       26.8702     search
    5             2.4      19.4176           2.6       28.3376     search
    7         2.35858      17.8714       2.64142       30.5144     search
    9             2.3      15.8441           2.7       33.8041     search
   11         2.21716      13.2761       2.78284       38.9017     search
   13             2.1      10.1881           2.9       47.0681     search
   15         1.93431      6.76171       3.06569       60.7281     search
   17             1.7       3.4121           3.3       84.8521     search
   19         1.36863      0.69335       3.63137       130.348     search
   20             0.9      -1.4039       3.63137       130.348     search

Search for a zero in the interval [0.9, 3.63137]:
 Func-count    x          f(x)             Procedure
   20             0.9      -1.4039         initial
   21        0.929104     -1.28498         interpolation
   22         1.24053    0.0211145         interpolation
   23         1.23549  -0.00271746         interpolation
   24         1.23607  -8.15893e-06        interpolation
   25         1.23607  -2.94875e-12        interpolation
   26         1.23607            0         interpolation

Zero found in the interval [0.9, 3.63137]
1.2360679774997898050514777423814
```

Данная функция будет исправно работать лишь в том случае, если заданная пользователем функция меняет знак вблизи заданной точки, иначе корень не будет найден, и выведется ошибка:

```
Exiting fzero: aborting search for an interval containing a sign change
    because NaN or Inf function value encountered during search.
(Function value at 1.62109e+77 is Inf.)
Check function or try again with a different starting value.
NaN
```

Функция roots(p) возвращает корни полинома p, представленного в виде вектора-столбца:

```
>> g=roots([1,0,-6,12,-8])

g =

  -3.2361 + 0.0000i
   1.0000 + 1.0000i
   1.0000 - 1.0000i
   1.2361 + 0.0000i
```

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были исследованы методы бисекции и секущих. Реализация данных методов осуществлялась на языке Fortran, и далее полученные результаты обрабатывались с помощью языка Matlab, в котором были построены графики зависимостей для каждого из пункта исследований, в котором это было необходимо. В качестве выполнения последнего пункта исследований нами были освоены функции fzero и roots.