Санкт – Петербургский политехнический университет Петра Великого

Физико-механический институт

Отчет по лабораторной работе №4 по Численным методам
Решение СЛАУ итерационным методом
Метод Якоби

Выполнил студент

Группы 5030301/10002 Тугай В.В.

Преподаватель: К.Н. Козлов

Санкт-Петербург

2022

Исследования, проводимые в ходе работы:

1. Ручной расчет
2. Метод Якоби
3. Структура программы
4. Зависимость точности от числа обусловленности
5. Зависимость времени выполнения от числа обусловленности
6. Зависимость относительной погрешности от возмущения
7. Зависимость погрешности от заданной точности
8. Требуемое число итераций от заданной точности
9. Уменьшение погрешности с ходом итерации

Вариант 21

Метод вращения

Ручной расчет для матрицы 4x4

Метод Якоби

$$A = \begin{pmatrix} 20,9 & 1,2 & 2,1 & 0,9 \\ 1,2 & 21,2 & 1,5 & 2,5 \\ 2,1 & 1,5 & 19,8 & 1,3 \\ 0,9 & 2,5 & 1,3 & 32,1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 21,7 \\ 27,46 \\ 28,76 \\ 49,72 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{20,9}(21,7 - 1,2x_2 - 2,1x_3 - 0,9x_4)$$

$$x_2 = \frac{1}{21,2}(27,46 - 1,2x_1 - 1,5x_3 - 2,5x_4)$$

$$x_3 = \frac{1}{19,8}(28,76 - 2,1x_1 - 1,5x_2 - 1,3x_4)$$

$$x_4 = \frac{1}{32,1}(49,72 - 0,9x_1 \; 2,5x_2 - 1,3x_3$$

Пусть $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1,04 \\ 1,3 \\ 1,45 \\ 1,55 \end{pmatrix}$; Итерации пока $\max\limits_{i=\overline{1,4}} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < 0,03$

$$(k=1) \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{15,7}{20,9} = 0,75 \\ x_2^{(1)} = \frac{20,162}{21,2} = 0,95 \\ x_3^{(1)} = \frac{22,61}{19,8} = 1,14 \\ x_4^{(1)} = \frac{14,55}{32,1} = 1,36 \end{cases}$$

(условия не выполняются)

$$(k=2) \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{16,942}{20,9} = 0,81 \\ x_2^{(2)} = \frac{21,46}{21,2} = 1,01 \\ x_3^{(3)} = \frac{23,99}{19,8} = 1,21 \\ x_4^{(4)} = \frac{45,188}{32,1} = 1,41 \end{cases}$$

(условия не выполняются)

$$(k=3) \begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{16,67}{20,9} = 0,79 \\ x_2^{(3)} = \frac{21,15}{21,2} = 0,99 \\ x_3^{(3)} = \frac{23,71}{19,8} = 1,19 \\ x_4^{(3)} = \frac{44,88}{32,1} = 1,39 \end{cases}$$

$$\max_{i=\overline{1,4}} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0,02 < 0,03$$

Тогда $X = \begin{pmatrix} 0,79 \\ 0,99 \\ 1,19 \\ 1,39 \end{pmatrix}$

Метод Якоби

Исходная матрица А должна обладать свойством диагонального преобладания, а диагональные коэффициенты не равны нулю. Имеем систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \quad Ax = b.$$

Решив 1-е уравнение системы относительно x_1 получим $x_1 = \frac{b_1-(a_{12}x_2+..+a_{1n}x_n)}{a_{11}}$. Таким образом, решаем 2-е уравнение относительно x_2 , n-е относительно x_n . В итоге приходим к эквивалентной системк, в которой диагональные элементы строки выражены через оставшиеся:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1-(a_{12}x_2+a_{13}x_3..+a_{1n}x_n)}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2-(a_{21}x_1+a_{23}x_3..+a_{1n}x_n)}{a_{22}} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = \frac{b_n-\left(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2..+a_{1(n-1)}x_{(n-1)}\right)}{a_{nn}} \end{cases}$$

Далее вводится начальное приближение - вектор $X^{(0)}=[\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \dots, \frac{b_n}{a_{nn}}]$. Затем, используя $X^{(1)}$, находится $X^{(2)}$, и так до $X^{(k)}$. Условием окончания является достижение заданной точности, т. е. $\max\limits_{i=1,k+1}\left|x_i{}^{(k+1)} - x_i{}^{(k)}\right| < \varepsilon$, где ε – заданная точность. Для хода итерации, равному k+1, имеем систему:

$$\begin{cases} x_1{}^{(k+1)} = \frac{b_1-\left(a_{12}x_2{}^{(k)}+a_{13}x_3{}^{(k)}..+a_{1n}x_n{}^{(k)}\right)}{a_{11}} \\ x_2{}^{(k+1)} = \frac{b_2-\left(a_{21}x_1{}^{(k)}+a_{23}x_3{}^{(k)}..+a_{1n}x_n{}^{(k)}\right)}{a_{22}} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n{}^{(k+1)} = \frac{b_n-\left(a_{n1}x_1{}^{(k)}+a_{n2}x_2{}^{(k)}..+a_{1(n-1)}x_{n-1}{}^{(k)}\right)}{a_{nn}} \end{cases}$$

Структура программы

Программа matrix.m нужна для создания файлов, в которых будет записана матрица 10x10 с числом обусловленности от 10 до 10^6, и в дальнейшем именно эти файлы будет считывать программа lab4.f95. Так же данная программа создает файлы size.txt и cond.txt, в которых записаны размер матриц и числа обусловленности соответственно. Программа lab4.f95 считывает эти файлы и задает переменную и массив: переменная содержит размер исходных матриц, а массив – числа обусловленностей.

Сама же программа lab4.f95 состоит из основного тела и двух модулей:

set_matrix.mod - модуль, содержащий функции для внесения случайных возмущений в наибольший элемент матрицы, или же в вектор правой части в пределах процента, заданного пользователем.

method.mod - модуль, содержащий подпрограмму с реализацией метода, а также функцию для перевода натуральных чисел в строку для более удобной записи данных в файлы, которые будут созданы по окончанию программы.

Зависимость точности от числа обусловленности

На рисунке 1 изображен график зависимости точности в логарифмических осях от числа обусловленности матрицы А. Как можно увидеть по рисунку, с увеличением числа обусловленности растет и ошибка, что соответствует представлениям о смысле этой характеристики матрицы.

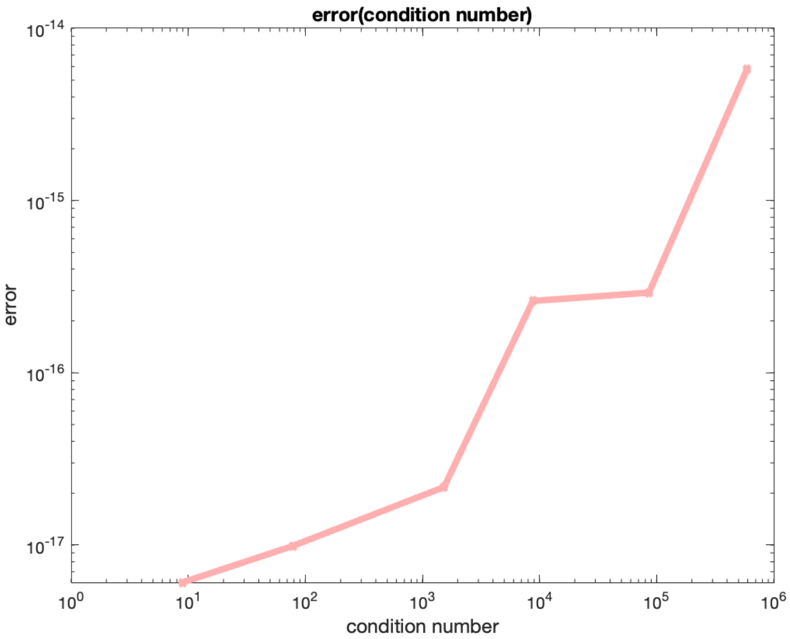

Рисунок 1
Зависимость точности от
числа обусловленности

Зависимость времени выполнения от числа обусловленности

На рисунке 2 изображен график зависимости времени выполнения программы в логарифмических осях от числа обусловленности матрицы A. Как можно увидеть по рисунку, время уменьшается с увеличением числа обусловленности.

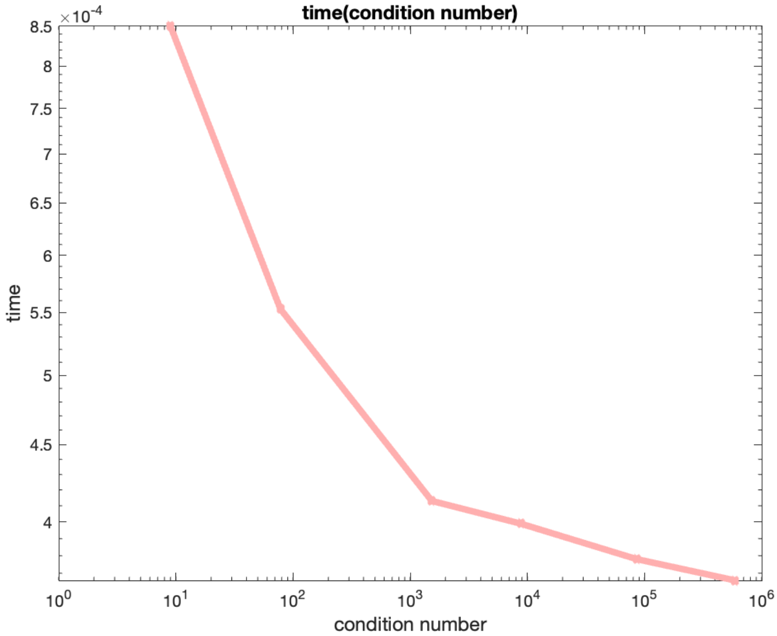

Рисунок 2
Зависимость времени от
числа обусловленности

Зависимость относительной погрешности от возмущения

На рисунках 3–4 изображены графики зависимости относительной погрешности от возмущения наибольшего элемента матрицы A на рисунке 3, и возмущения вектора B на рисунке 4. Погрешность для вектора B самая высокая, достигает 35%. Погрешность для матрицы A не превышает 3.5%.

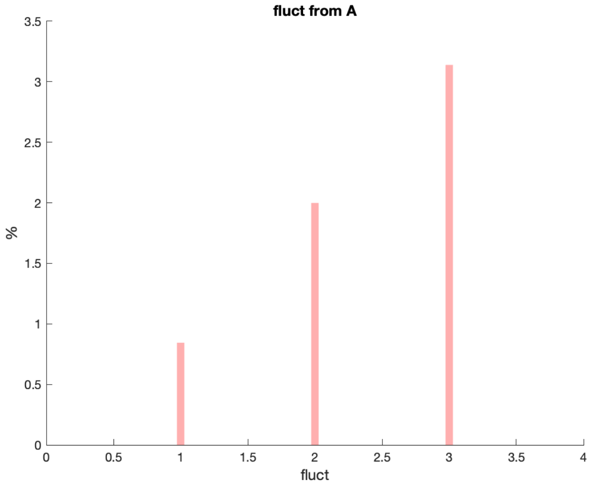

Рисунок 3
Зависимость относительно погрешность от возмущений для матрицы A

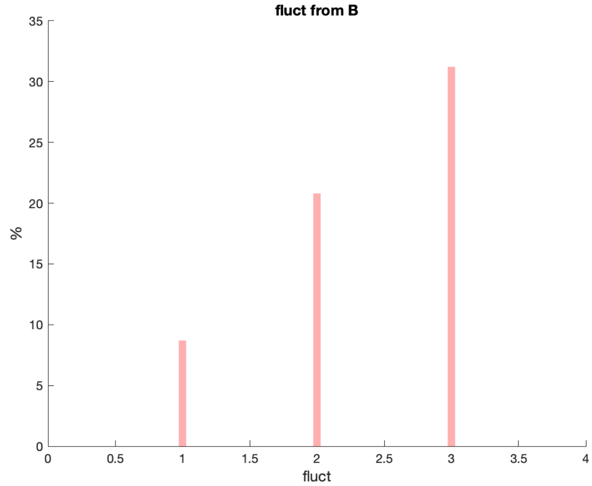

Рисунок 4
Зависимость относительной погрешность от возмущений для вектора B

Зависимость погрешности от заданной точности

На рисунке 5 изображен график зависимости погрешности в логарифмических осях от заданной точности. Как можно увидеть по рисунку, с уменьшением значения заданной точности уменьшается и ошибка на выходе, что соответствует смысле изменения данного параметра.

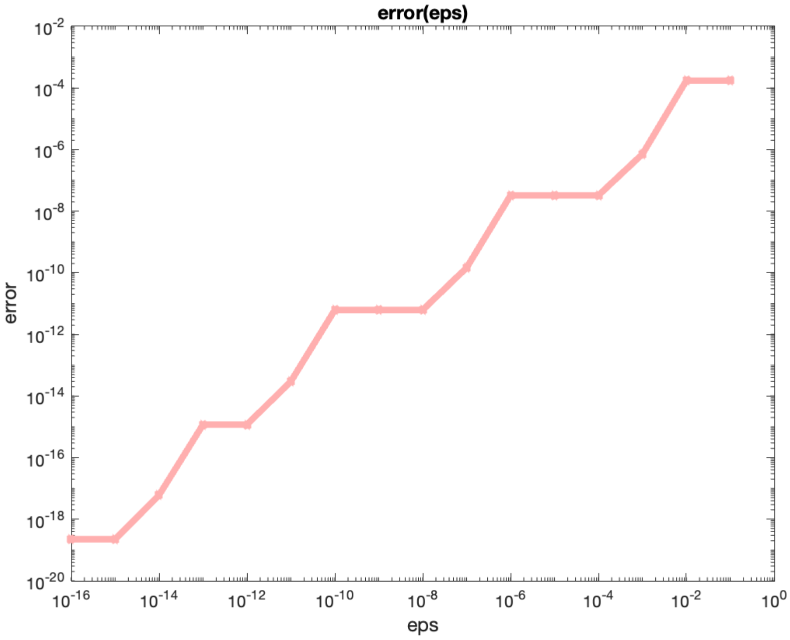

Рисунок 5
Зависимость погрешности от
заданной точности

Требуемое число итераций от заданной точности

На рисунке 6 изображен график зависимости требуемого числа итераций от заданной точности. Как можно увидеть по рисунку, с уменьшением значения заданной точности увеличивается количество итераций, что является логичным для итерационных методов.

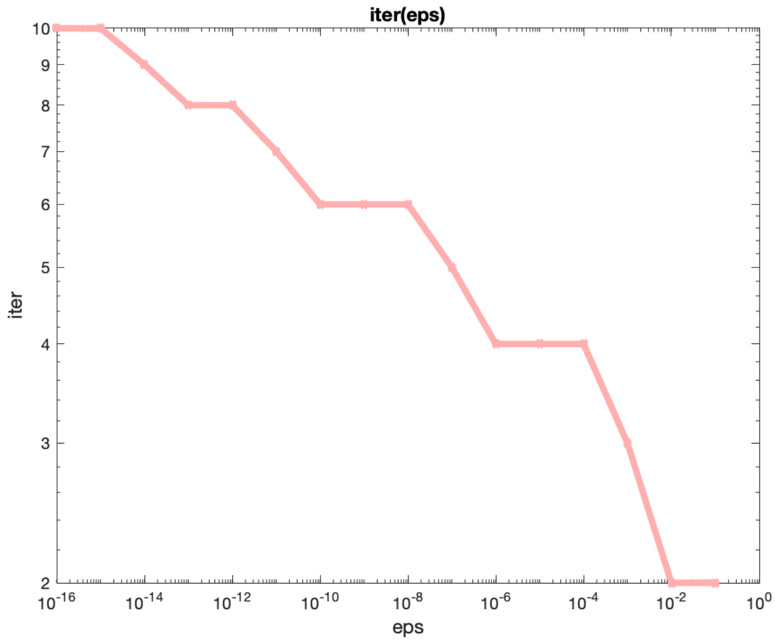

Рисунок 6
Зависимость требуемого числа
итераций от заданной точности

Уменьшение погрешности с ходом итерации

На рисунке 7 изображен график зависимости погрешности от хода итераций. Как можно увидеть по рисунку, с каждым шагом итерации уменьшается и погрешность вычислений, что свидетельствует о правильном ходе программы.

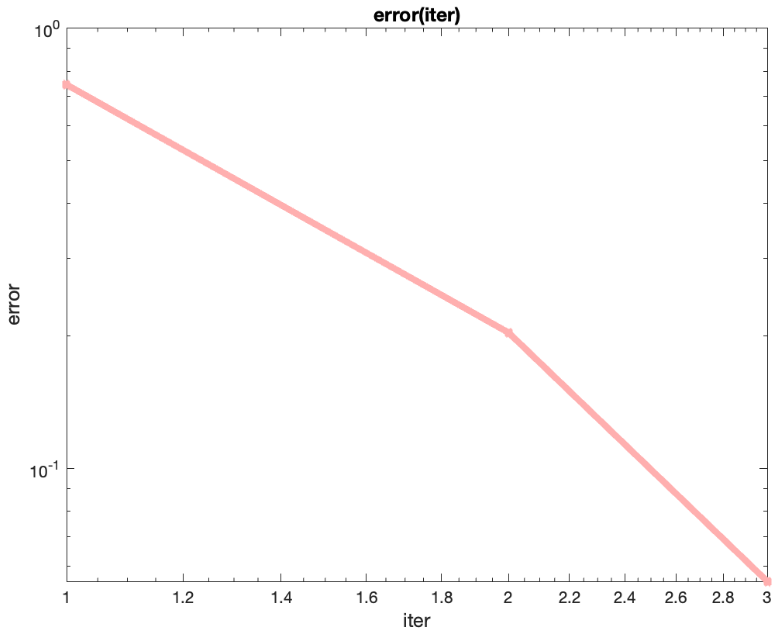

Рисунок 7
Зависимость погрешности
от хода итерации

Вывод

В ходе проделанной лабораторной работы нами был исследован метод Якоби для решения систем линейных уравнений. Этот метод были реализован на языке Fortran, затем по полученнымрезультатам с помощью пакета Matlab были построены графики зависимостей.