Санкт – Петербургский политехнический университет Петра Великого

Физико-механический институт

Отчет по лабораторной работе №3 по Численным методам
Решение СЛАУ прямым методом
Метод вращения

Выполнил студент

Группы 5030301/10002 Тугай В.В.

Преподаватель: К.Н. Козлов

Санкт-Петербург

2022

Исследования, проводимые в ходе работы:

1. Метод вращения
2. Структура программы
3. Зависимость точности от числа обусловленности
4. Зависимость времени выполнения от числа обусловленности
5. Зависимость относительной погрешности от возмущения

Вариант 21

Метод вращения

Ручной расчет для матрицы 3x3

Метод вращения

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$c_1 = 0{,}3162$

$s_1 = 0{,}9487$

$a_{11}^{(1)} = 3{,}612 \quad a_{12}^{(1)} = 2{,}53 \quad a_{13}^{(1)} = 1{,}897$

$a_{21}^{(1)} = 0 \quad a_{22}^{(1)} = -1{,}265 \quad a_{23}^{(1)} = -2{,}529$

$b_1^{(1)} = 7{,}589 \quad b_2^{(1)} = -3{,}795$

$$A = \begin{pmatrix} 3{,}612 & 2{,}53 & 1{,}897 \\ 0 & -1{,}265 & -2{,}529 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7{,}589 \\ -3{,}795 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$c_2 = 0{,}953$

$s_2 = 0{,}302$

$a_{11}^{(2)} = 3{,}316 \quad a_{12}^{(2)} = 3{,}618 \quad a_{13}^{(2)} = 2{,}714$

$a_{31}^{(1)} = 0 \quad a_{32}^{(1)} = 3{,}051 \quad a_{33}^{(1)} = 2{,}288$

$b_1^{(2)} = 9{,}648 \quad b_3^{(1)} = 5{,}339$

$$A = \begin{pmatrix} 3{,}316 & 3{,}618 & 2{,}714 \\ 0 & -1{,}265 & -2{,}529 \\ 0 & 3{,}051 & 2{,}288 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9{,}648 \\ -3{,}795 \\ 5{,}339 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1{,}265 & -2{,}529 \\ 3{,}051 & 2{,}288 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} -3{,}795 \\ 5{,}339 \end{pmatrix}$$

$c_1 = -0{,}383$

$s_1 = 0{,}924$

$a'_{11} = 3{,}303 \quad a'_{12} = 3{,}083$

$a'_{21} = 0 \quad a'_{22} = 1{,}461$

$b'_1 = 6{,}386 \quad b'_2 = 1{,}461$

Тогда: $A = \begin{pmatrix} 3{,}316 & 3{,}618 & 2{,}714 \\ 0 & 3{,}303 & 3{,}083 \\ 0 & 0 & 1{,}461 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 9{,}648 \\ 6{,}386 \\ 1{,}461 \end{pmatrix}$

$$x_3 = \frac{1{,}461}{1{,}461} = 1$$

$$x_2 = \frac{6{,}386 - 3{,}083 \cdot 1}{3{,}303} = 1$$

$$x_2 = \frac{9{,}648 - 3{,}618 \cdot 1 - 2{,}714 \cdot 1}{3{,}316} = 1$$

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, полученный ответ совпадает с известным

Метод вращения

Имеем систему: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases}$. Пусть c_1 и s_1 – ненулевые числа. Умножаем 1-е уравнение системы на c_1, 2-е на s_1 и складываем их. Этим уравнением заменяем 1-е уравнение системы. Далее 1-е уравнение начальной системы нужно умножить на s_1 2-е – на c_1 и итогом этого заменяем 2-е уравнение. Первые 2 уравнения заменяем на: $\begin{matrix} (c_1a_{11}+s_1a_{21})x_1+(c_1a_{12}+s_1a_{22})x_2+\ldots+(c_1a_{1n}+s_1a_{2n})x_n=c_1f_1+s_1f_2 \\ (-s_1a_{11}+c_1a_{21})x_1+(-s_1a_{12}+c_1a_{22})x_2+\ldots+(-s_1a_{1n}+c_1a_{2n})x_n=-s_1f_1+c_1f_2 \end{matrix}$

Наложим два условие на s_1 и c_1 : $-s_1a_{11} + c_1a_{21}$ и ${c_1}^2 + {s_1}^2 = 1$. Отсюда получаем: $c_1 = \frac{a_{11}}{\sqrt{{a_{11}}^2+{a_{21}}^2}}, s_1 = \frac{a_{21}}{\sqrt{{a_{11}}^2+{a_{21}}^2}}$. После преобразования получаем систему:

$\begin{cases} {a_{11}}^{(1)}x_1 + {a_{12}}^{(1)}x_2 + \ldots + {a_{1n}}^{(1)}x_n = {f_1}^{(1)} \\ \qquad {a_{22}}^{(1)}x_2 + \ldots + {a_{2n}}^{(1)}x_n = {f_2}^{(1)} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = f_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases}$, где $\begin{matrix} {a_{1j}}^{(1)}=c_1a_{1j}+s_1a_{2j} \quad (j=\overline{1,n}), \ {f_1}^{(1)}=c_1f_1+s_1f_2 \\ {a_{1j}}^{(1)}=-s_1a_{1j}+c_1a_{2j} \quad (j=\overline{1,n}), \ {f_2}^{(1)}=-s_1f_1+c_1f_2 \end{matrix}$

Теперь 1-е уравнение системы заменяем полученным, результатом сложения итогов умножения 1-го и 3-го уравнений соответственно на: $c_2 = \frac{{a_{11}}^{(1)}}{\sqrt{({a_{11}}^{(1)})^2+{a_{31}}^2}}, s_2 = \frac{a_{31}}{\sqrt{({a_{11}}^{(1)})^2+{a_{31}}^2}}$

а 3-е – уравнением, которое получим после сложения результатов умножения уравнений соответственно на – s_1 и c_1. После преобразования получаем систему:

$\begin{cases} {a_{11}}^{(2)}x_1 + {a_{12}}^{(2)}x_2 + \cdots + {a_{1n}}^{(2)}x_n = {f_1}^{(2)} \\ \quad {a_{22}}^{(1)}x_2 + \ldots + {a_{2n}}^{(1)}x_n = {f_2}^{(1)} \\ \quad {a_{32}}^{(1)}x_2 + \cdots + {a_{3n}}^{(1)}x_n = {f_3}^{(1)} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \cdots + a_{4n}x_n = f_4 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases}$, где $\begin{matrix} {a_{1j}}^{(2)}=c_2{a_{1j}}^{(1)}+s_2a_{3j} \quad (j=\overline{1,n}), \ {f_1}^{(2)}=c_2{f_1}^{(1)}+s_2f_3 \\ {a_{3j}}^{(1)}=-s_2a_{1j}+c_2a_{3j} \quad (j=\overline{1,n}), \ {f_3}^{(1)}=-s_2f_1+c_2f_3 \end{matrix}$

Выполняя преобразование n-1 раз, получаем: $\begin{cases} {a_{11}}^{(n-1)}x_1 + {a_{12}}^{(n-1)}x_2 + \cdots + {a_{1n}}^{(n-1)}x_n = {f_1}^{(n-1)} \\ \qquad {a_{22}}^{(1)}x_2 + \ldots + {a_{2n}}^{(1)}x_n = {f_2}^{(1)} \\ \qquad {a_{32}}^{(1)}x_2 + \cdots + {a_{3n}}^{(1)}x_n = {f_3}^{(1)} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad {a_{n2}}^{(1)}x_2 + \cdots + {a_{nn}}^{(1)}x_n = {f_n}^{(1)} \end{cases}$

Далее, по этому же алгоритму преобразуем матрицу: $\begin{cases} {a_{22}}^{(1)}x_2 + \ldots + {a_{2n}}^{(1)}x_n = {f_2}^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ {a_{n2}}^{(1)}x_2 + \cdots + {a_{nn}}^{(1)}x_n = {f_n}^{(1)} \end{cases}$

В итоге *m-1* этапов прямого хода система приведется к треугольному виду:

$$\begin{cases} {a_{11}}^{(n-1)}x_1 + {a_{12}}^{(n-1)}x_2 + \cdots + {a_{1n}}^{(n-1)}x_n = {f_1}^{(n-1)} \\ \qquad {a_{22}}^{(n-2)}x_2 + \ldots + {a_{2n}}^{(n-2)}x_n = {f_2}^{(n-2)} \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad {a_{nn}}^{(1)}x_n = {f_n}^{(1)} \end{cases}$$

Вычисляем значения неизвестных, начиная с последнего: $x_n = \frac{f_n{}^{(1)}}{a_{nn}{}^{(1)}}$,

$$x_i = \frac{f_i{}^{(n-i)} - \left(\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}{}^{(n-i)} x_k\right)}{a_{ii}{}^{(n-i)}};$$

Структура программы

Программа matrix.m нужна для создания файлов, в которых будет записана матрица 10x10 с числом обусловленности от 1 до 100000, и в дальнейшем именно эти файлы будет считывать программа lab3.f95.

Программа lab3.f95 состоит из основного тела и двух модулей:

set_matrix.mod - модуль, содержащий функции для внесения случайных возмущений в наибольший элемент матрицы, или же в вектор правой части в пределах процента, заданного пользователем.

method.mod - модуль, содержащий подпрограмму с реализацией метода, а также функцию для перевода натуральных чисел в строку для более удобной записи данных в файлы, которые будут созданы по окончанию программы.

Зависимость точности от числа обусловленности

На рисунке 1 изображен график зависимости точности в логарифмических осях от числа обусловленности матрицы А. Как можно увидеть по рисунку, с увеличением числа обусловленности растет и ошибка, что соответствует представлениям о смысле этой характеристики матрицы.

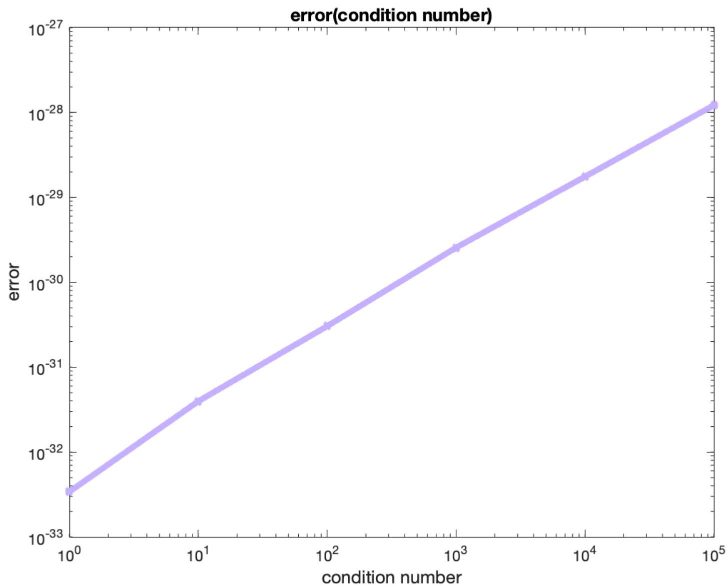

Рисунок 1
Зависимость точности от
числа обусловленности

Зависимость времени выполнения от числа обусловленности

На рисунке 2 изображен график зависимости времени выполнения программы в логарифмических осях от числа обусловленности матрицы А. Как можно увидеть по рисунку, время уменьшается с увеличением числа обусловленности.

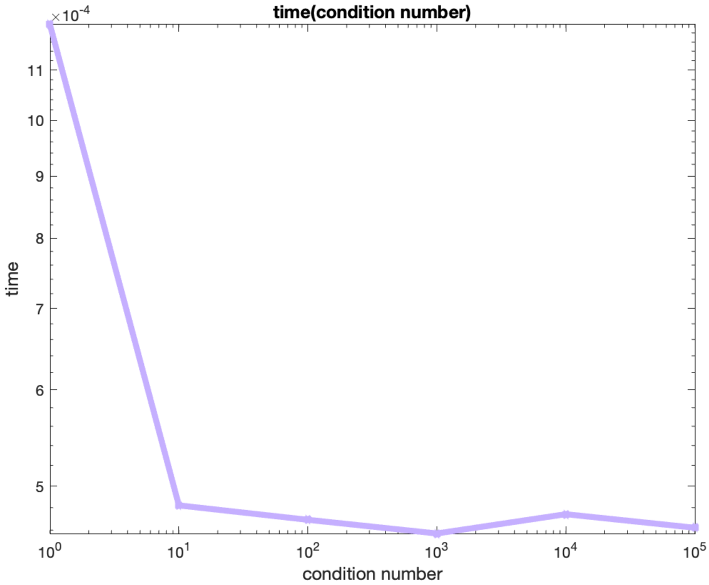

Рисунок 2
Зависимость времени от
числа обусловленности

Зависимость относительной погрешности от возмущения

На рисунках 3–4 изображены графики зависимости относительной погрешности от возмущения наибольшего элемента матрицы A на рисунке 3, и возмущения вектора B на рисунке 4. Погрешность для вектора B самая высокая, но не превышает 45%. Погрешность для матрицы A не превышает 3,5%.

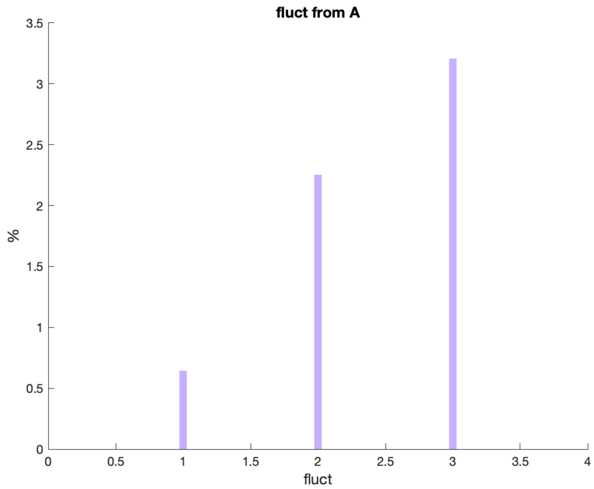

Рисунок 3
Зависимость относительно погрешность
от возмущений для матрицы A

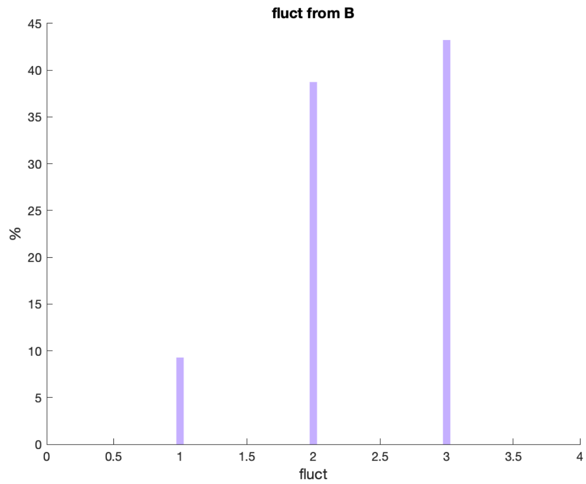

Рисунок 4
Зависимость относительной погрешность
от возмущений для вектора B

Вывод

В ходе проделанной лабораторной работы нами был исследован метод вращения для решения систем линейных уравнений. Этот метод были реализован на языке Fortran, затем по полученным результатам с помощью пакета Matlab были построены графики зависимостей.