

Ricostruzione di immagini
○○○○○○○

Blur
○○○○○○○○○○

Noise
○○○

Modello discreto
○○○○

Image deblurring
○○○○○

Metodo ai minimi quadrati
○

Metodi di regolarizzazione
○○○○○○○○○○

Modello di formazione di immagini

November 16, 2020

Testi di riferimento:

- ▶ Deblurring Images, Matrices, Spectra and Filtering. P.C.Hansen, J.G.Nagy, D. P. O'Leary, SIAM
- ▶ Software: www.siam.org/books/fa03
- ▶ Introduction to inverse problems, M. Bertero, P. Boccacci, IOP, 1998

Il problema della ricostruzione di immagini

- ▶ Una immagine digitale è un array 2D che contiene informazioni su un oggetto che non è osservabile direttamente.
- ▶ Queste informazioni consistono usualmente in una rappresentazione degradata dell'oggetto originale.
- ▶ Si possono distinguere due sorgenti di degradazione:
 - ▶ il processo di formazione dell'immagine (blurring, processo deterministico);
 - ▶ il processo di misurazione dell'immagine (noise, processo statistico).

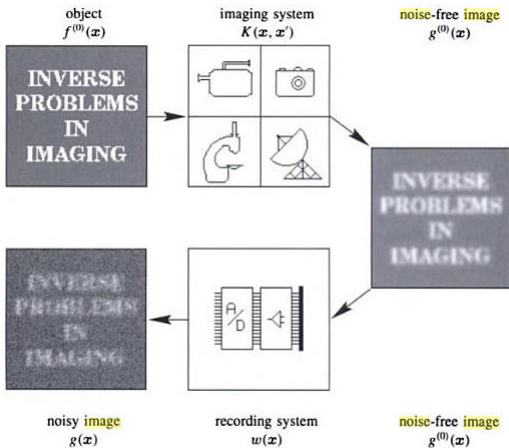


Figure 3.2. Schematic representation of the **formation** of the **noisy image g** .

Ricostruzione di immagini
○○●○○○

Blur
○○○○○○○○○

Noise
○○○

Modello discreto
○○○○

Image deblurring
○○○○○

Metodo ai minimi quadrati
○

Metodi di regolarizzazione
○○○○○○○○○

Dati:

- ▶ immagine acquisita, degradata da rumore e blurring
- ▶ qualche informazione sul blurring e il rumore

Obiettivo:

- ▶ ricostruire una buona approssimazione dell'oggetto reale



oggetto reale

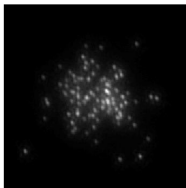


immagine acquisita



ricostruzione?

Ricostruzione di immagini

○○●○○○

Blur

○○○○○○○○○○

Noise

○○○

Modello discreto

○○○○

Image deblurring

○○○○○○

Metodo ai minimi quadrati

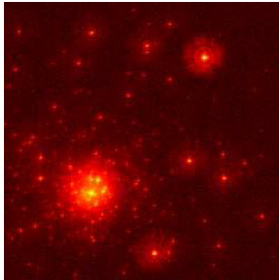
○

Metodi di regolarizzazione

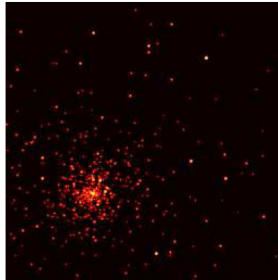
○○○○○○○○○○

Applicazioni: astronomia

Observed data



Restored data



Ricostruzione di immagini
○○○○●○○

Blur
○○○○○○○○○○

Noise
○○○

Modello discreto
○○○○

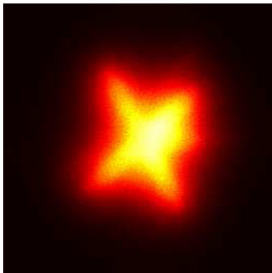
Image deblurring
○○○○○

Metodo ai minimi quadrati
○

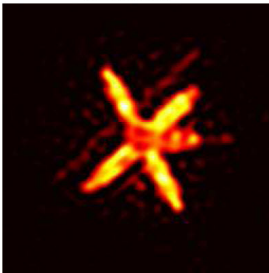
Metodi di regolarizzazione
○○○○○○○○○○

Applicazioni: osservazioni spaziali

Observed data



Restored data



Ricostruzione di immagini

○○○○○●○

Blur

○○○○○○○○○○

Noise

○○○

Modello discreto

○○○○

Image deblurring

○○○○○

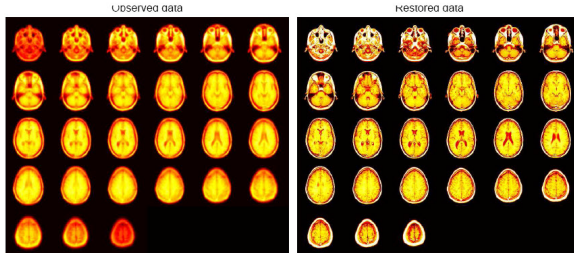
Metodo ai minimi quadrati

○

Metodi di regolarizzazione

○○○○○○○○○○

Applicazioni: imaging medico



Ricostruzione di immagini

○○○○○○●

Blur

○○○○○○○○○○

Noise

○○○

Modello discreto

○○○○

Image deblurring

○○○○○○

Metodo ai minimi quadrati

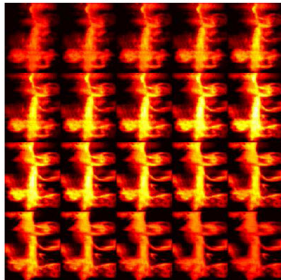
○

Metodi di regolarizzazione

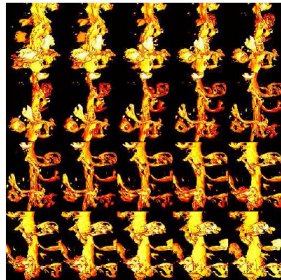
○○○○○○○○○○

Applicazioni: microscopia

Observed data



Restored data



Sistema di formazione dell'immagine

- ▶ Un sistema di formazione di immagini (camera digitale, telecamera, microscopio, telescopio ecc.) è un sistema fisico di trasmissione di segnali. In questo caso il segnale può essere una funzione di due variabili spaziali (immagini 2D).
- ▶ In svariate circostanze, il sistema di formazione di immagini può essere modellizzato come un **sistema lineare e continuo**. In tal caso, se si indica con (s, t) il vettore delle coordinate spaziali da cui dipendono le immagini (a due componenti, nel caso 2D), e se $x(s, t)$ è il segnale di ingresso del sistema (chiamato oggetto) e $g(u, v)$ il segnale d'uscita (chiamato immagine), allora la relazione tra oggetto ed immagine è data da:

$$g(u, v) = \int \int H(u, s, v, t) f(s, t) ds dt$$

dove $H(u, s, v, t)$ è la risposta in impulso del sistema (PSF).

Risposta in impulso del sistema

Una sorgente luminosa puntiforme localizzata nel punto (u_0, v_0) viene solitamente modellizzata mediante una distribuzione δ di Dirac concentrata in (u_0, v_0) ; se tale sorgente ha intensità (integrale) eguale a 1, allora:

$$f(u, v) = \delta(u - u_0, v - v_0)$$

e la sua immagine è data da

$$g(u, v) = H(u, u_0, v, v_0)$$

Risposta in impulso del sistema (2)

- ▶ Pertanto la risposta in impulso fornisce l'immagine di sorgenti puntiformi di intensità 1.
- ▶ Tali immagini non sono puntiformi ma piuttosto simili a piccole macchie.
- ▶ Per tale motivo, nel caso di sistemi di formazione di immagini la risposta in impulso viene detta point spread function (PSF), ossia "funzione di allargamento del punto".
- ▶ L'effetto della PSF sull'oggetto f viene detto **blurring** (annebbiamento o sfocamento) in quanto l'immagine g è una versione dell'oggetto f in cui i dettagli sono meno nitidi.

PSF

$$\mathcal{A}(X) = \mathcal{A} \left(\begin{array}{c} \text{Black square with a single white pixel} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{Blurred white pixel} \\ \text{Elliptical shape} \end{array} = B,$$

- ▶ l'oggetto X è detto **Single Pixel Image (SPI)**
- ▶ l'immagine B è detta **Point Spread Function (PSF)**

Sistemi spazio invarianti

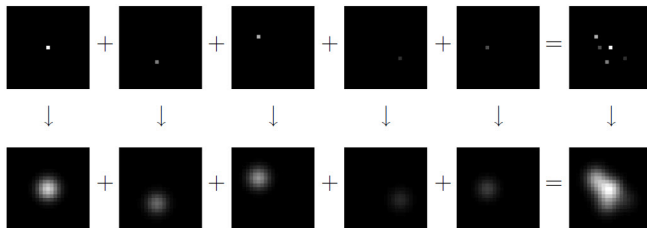
- Svatiati sistemi di formazione di immagini godono della proprietà (a volte approssimata, ma comunque molto utile) che la forma dell'immagine di un punto luminoso non dipende dalla posizione del punto. Tali sistemi, che sono anche detti **spazio invarianti**, sono evidentemente sistemi invarianti per traslazioni.
- In tale caso si ha:

$$H(u, s, v, t) = K(u - s, v - t)$$

ed il nome point spread function viene attribuito alla funzione K ; essa è l'immagine di una sorgente puntiforme di intensità unitaria, posta al centro del campo dell'immagine.

Sistemi spazio invarianti (2)

Spazio invarianza dell'operatore $H \Rightarrow$ la PSF è la stessa per ogni posizione del pixel non nullo nella SPI



- ▶ Prima riga: Immagini SPI
- ▶ Seconda riga: immagini PSF

L'operatore H lineare e spazio invariante è **completamente descritto** dalla sua azione su una SPI, cioè **da una PSF**

Modello matematico di formazione dell'immagine

Il modello matematico di formazione dell'immagine diventa pertanto

$$g(u, v) = \int \int K(u - s, v - t) f(s, t) ds dt \quad (1)$$

g pertanto è il prodotto di convoluzione di f e K

Esempi

La PSF può essere costruita a partire da osservazioni (sperimentale) oppure da una funzione.

horizontal
motion blur



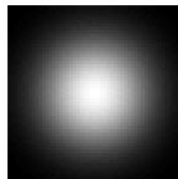
vertical
motion blur



out-of-focus
blur



Gaussian
blur



Esempi (2)

- ▶ Immagini sfocate (out-of-focus blur):

$$h_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & \text{se } (i-k)^2 + (j-l)^2 \leq r^2 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove (k, l) è il centro di H e r è il raggio dello sfocamento

- ▶ Turbolenza atmosferica (funzione gaussiana):

$$h_{i,j} = \exp \left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} i-k \\ j-l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s_1^2 & \rho^2 \\ \rho^2 & s_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i-k \\ j-l \end{bmatrix} \right)$$

dove (k, l) è il centro di H e i parametri s_1 , s_2 e ρ determinano l'ampiezza e l'orientamento della PSF.

Esempi (3)

► Telescopio astronomico (Moffat function):

$$h_{i,j} = \left(1 + \begin{bmatrix} i - k \\ j - l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s_1^2 & \rho^2 \\ \rho^2 & s_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i - k \\ j - l \end{bmatrix} \right)^{-\beta}$$

dove (k, l) è il centro di H e i parametri s_1 , s_2 e ρ determinano l'ampiezza e l'orientamento della PSF. Il parametro positivo β controlla il decadimento della PSF.

► Spostamento orizzontale o verticale

Distorce un punto in una linea; se la linea interessa r pixel, lungo i quali la luce è distribuita, allora la grandezza di ciascun elemento non nullo nella PSF è r^{-1} .

Noise

- ▶ Nel modello continuo precedentemente introdotto, $g(u, v)$ è la distribuzione spaziale, nel piano immagine, della grandezza fisica (qualunque sia il suo significato) che rappresenta l'immagine dell'oggetto incognito $f(s, t)$.
- ▶ Tale grandezza fisica è sostanzialmente un segnale analogico che deve essere convertito in un segnale digitale per ogni successiva elaborazione.
- ▶ Tale conversione viene solitamente effettuata mediante una CCD camera (CCD = coupled charged device) che è sostanzialmente un array di sensori. Ogni sensore fornisce una misura locale del valore dell'immagine $g(u, v)$.

Esempio: i CCD (dispositivi a scorrimento di carica)

In molti casi $\text{img}(x,y)$ può essere considerato il segnale fisico che arriva sulla superficie del sensore 2D, per esempio l'intensità luminosa.

Il C.C.D. (Charge Copuled Device, *Dispositivo a scorrimento di carica*) è un componente elettronico composto da materiali semiconduttori, come il silicio, sensibili alla luce.

I CCD contengono una griglia di elementi sensibili (buche di potenziale) su un unico chip di silicio. Questi elementi convertono la luce incidente in cariche elettriche che, fino alla fase di lettura, rimangono intrappolate nell'elemento. Queste cariche possono essere misurate e convertite in numeri (digitali) che indicano quanta luce ha colpito il singolo elemento.

Ricostruzione di immagini
○○○○○○○

Blur
○○○○○○○○○

Noise
○○●

Modello discreto
○○○○

Image deblurring
○○○○○

Metodo ai minimi quadrati
○

Metodi di regolarizzazione
○○○○○○○○○

Esempio (cont.)

Come si forma l'immagine sul sensore CCD? Immaginiamo che il nostro telescopio/ccd sia puntato su una galassia o nebulosa, i fotoni provenienti da essa si accumuleranno come elettroni su un certo numero di pixel; supponiamo inoltre che i diversi livelli di luminosità dell'immagine siano rappresentati da ciascun pixel da un numero, ad esempio 1-8 dove 1 è il nero del fondo cielo mentre 8 il bianco del nucleo della galassia; i valori intermedi sono i vari toni di grigio. A questo punto avremo un' immagine che rappresenta la galassia in forma discreta, fatta da vari quadratini (pixel) a ciascuno dei quali è associata una certa brillantezza.

Cerchiamo un modello matematico discreto di formazione dell'immagine.

Consideriamo che:

1. Un primo effetto del sistema di sensori è la trasformazione dell'immagine continua in un'immagine discreta (immagine digitale). Pertanto è opportuno sostituire il modello continuo, precedentemente introdotto, con il corrispondente modello discreto. Ciò implica la **discretizzazione del prodotto di convoluzione** introdotto in (1).
2. Il secondo effetto è che ogni sensore non fornisce un valore esatto di g , che indicheremo con g_0 , ma un suo valore approssimato dovuto all'**effetto del noise**.

Tuttavia, prima di fornire una descrizione del noise, è opportuno introdurre la discretizzazione del problema.

- ▶ Cerchiamo di ottenere una versione discreta dell'equazione (1)
- ▶ Per semplificare la notazione, consideriamo inizialmente il caso 1D
- ▶ Vogliamo quindi discretizzare il prodotto di convoluzione

$$g(u) = \int K(u-s)f(s)ds \quad (2)$$

- ▶ Se $f(s)$ è discretizzata in $[-S, S]$ negli N punti:

$$s_{n'} = -S + n'\delta_s, \quad n' = 0, \dots, N-1, \quad \delta_s = \frac{2S}{N}$$

allora approssimando il prodotto di convoluzione (2) con la formula dei trapezi si ottiene l'approssimazione $\tilde{g}(u)$ del prodotto esatto $g(u) = (K * f)(u)$:

$$\tilde{g}(u) = \sum_{n'=0}^{N-1} K(u-s_{n'})f(s_{n'})\delta_s$$

Descrizione del noise

- Il valore dell'immagine nel pixel (n, m) fornito dal rivelatore non coincide con $g(n, m)$ a causa di svariati fenomeni che vanno sotto il nome di noise. Tali fenomeni hanno carattere aleatorio.
- Il noise di lettura è un noise addittivo; in altri termini si può scrivere:

$$g(n, m) = g_{\text{exact}}(n, m) + w(n, m)$$

$$g = g_{\text{exact}} + w$$

- In genere il modello più accreditato per il noise di lettura è quello del **noise Gaussiano bianco**

Modello di formazione-registrazione dell'immagine

$$g = K * f + w \quad (3)$$

dove f è l'oggetto incognito.

- ▶ Pertanto si vede che, se si considera questa come un'equazione avente come incognita l'oggetto f , risulta indispensabile conoscere la PSF K del sistema di formazione di immagini.
- ▶ D'altra parte non è pensabile conoscere il termine di noise w , dato che questo è la realizzazione di un processo aleatorio.
- ▶ **Pertanto un problema di ricostruzione di immagini è il problema di determinare una stima di un oggetto incognito f essendo data la sua immagine e la PSF dello strumento utilizzato**

- Nel seguito si indicherà con A la matrice definita dal prodotto di convoluzione con la PSF K ; si porrà quindi:

$$g = K * f + w = Af + w \quad (4)$$

- Una soluzione del problema di ricostruzione di immagini è ottenuta considerando il problema di minimo non vincolato:

$$\min_f \frac{1}{2} \|Af - g\|_2^2$$

Questo problema è solitamente mal condizionato!

Problema test

Un problema test è costituito dai seguenti dati:

- ▶ f_{exact} oggetto esatto da ricostruire;
- ▶ g immagine con rumore e blur;
- ▶ K immagine della PSF.

Nei problemi reali f_{exact} non è noto e sono dati g e K

Costruire un problema test

- ▶ leggere f_{exact} da un file;
- ▶ calcolare la psf K ;
- ▶ calcolare l'immagine sfuocata g_{blur} facendo la convoluzione tra K e f_{exact} :

$$g_{\text{blur}} = K * f_{\text{exact}};$$

- ▶ creare l'array rumore w ;
- ▶ aggiungere il rumore w a g_{blur} :

$$g_{\text{blur+noise}} = g_{\text{blur}} + w$$

- ▶ $g := g_{\text{blur+noise}}$

$PSNR = 20 \log_{10} \frac{\max_{ij} g(i,j)}{\frac{1}{M*N} \|w\|}$ (dB) dove $M * N$ è il numero di pixels dell'immagine.

- ▶ I prodotti matrice-vettore quando A è circolante possono essere fatti efficientemente nello spazio di Fourier; infatti:

$$y = Ax = F^* \Lambda Fx$$

- ▶ Cioè:

$$y = \text{ifft}(\lambda \cdot \text{fft}(x))$$

dove

$$\lambda = \text{fft}(a_1) = \text{fft}(\text{fftshift}(K_0 \dots K_{N-1}))$$

- ▶ E' poi necessaria l'istruzione $y = \text{real}(y)$ perchè fft e ifft implicano calcoli con numeri complessi. Poichè A e x sono reali anche y , in aritmetica esatta, è reale. Tuttavia, a causa degli errori di arrotondamento il vettore y calcolato contiene numeri con una piccola parte complessa che è rimossa con l'istruzione `real`

Il problema della ricostruzione di immagini

- Un problema di ricostruzione di immagini può essere ricondotto ad un problema di deconvoluzione. Tale problema è **mal posto**, nel senso che la sua soluzione può non esistere, non essere unica e non dipendere con continuità dai dati.
- Un primo approccio è fornito da una riformulazione come **problema ai minimi quadrati**. Tuttavia la soluzione risulta ancora numericamente instabile.
- Questa difficoltà può essere aggirata mediante i **metodi di regolarizzazione**.

Ricostruzione di immagini

○○○○○○○

Blur

○○○○○○○○○○

Noise

○○○

Modello discreto

○○○○

Image deblurring

○○○○○●

Metodo ai minimi quadrati

○

Metodi di regolarizzazione

○○○○○○○○○○



- Il problema di ricostruzione di immagini consiste nel determinare un oggetto f tale che

$$Af = g \quad (5)$$

essendo note g e A

(A è la matrice circolante a blocchi definita dalla convoluzione ciclica di f con K).

- Si tratta quindi di studiare la o le soluzioni di questo sistema lineare e capire se forniscono un'approssimazione ragionevole dell'**oggetto incognito f^*** .

Metodo ai minimi quadrati

- Si dice **soluzione ai minimi quadrati del problema di ricostruzione di immagini**, ogni oggetto f che risolve il problema di minimo

$$\min_f \|Af - g\|^2 \quad (6)$$

- La soluzione del problema ai minimi quadrati **non è stabile rispetto al noise**; una piccola perturbazione dei dati dovuta al noise è sufficiente ad alterare completamente la soluzione e quindi a renderla priva di qualunque significato fisico.

Metodi di regolarizzazione

- ▶ Lo studio dei precedenti problemi variazionali introduce il concetto di **metodo di regolarizzazione**, introdotto dal matematico russo A. Tikhonov.
- ▶ Per un problema variazionale che, come la minimizzazione del funzionale ai minimi quadrati, soffre di patologie quali la non unicità del minimo e/o la sua instabilità rispetto al noise, la regolarizzazione consiste nell'aggiunta di un funzionale di “penalizzazione”, detto **funzionale di regolarizzazione**, moltiplicato per un parametro positivo, detto **parametro di regolarizzazione**, in modo tale che il funzionale modificato abbia uno ed un solo punto di minimo che sia meno sensibile all'effetto del noise.

- ▶ Nei metodi di regolarizzazione il problema di ricostruzione di immagini viene riformulato come un problema di minimo non vincolato

$$\min_f \mathcal{F}(f, g) + \lambda \Phi(f) \quad (7)$$

dove

- ▶ $\Phi(f)$ è il termine di regolarizzazione
- ▶ $\mathcal{F}(f, g)$ è il termine di consistenza coi dati
- ▶ λ è il parametro di regolarizzazione

- ▶ Le soluzioni regolarizzate formano una famiglia ad un parametro di soluzioni approssimate del problema di ricostruzione di immagini. Al variare del parametro di regolarizzazione queste soluzioni descrivono una traiettoria nello spazio di tutti i possibili oggetti.
- ▶ Per valori piccoli del parametro di regolarizzazione si ha una soluzione che è molto sensibile al noise ma che ben riproduce i dati; al contrario, per valori grandi del parametro di regolarizzazione si ha una soluzione che è molto stabile ma che mal riproduce i dati.
- ▶ Il problema è dunque trovare un valore di che permetta un compromesso tra stabilità della soluzione e rappresentazione dei dati.

Principio della discrepanza

- Un criterio di scelta del parametro di regolarizzazione è il **principio della discrepanza di Morozov** che sceglie λ in modo tale che la corrispondente soluzione regolarizzata soddisfi la relazione

$$\|Af_\lambda - g\| = \tau \|g\|, \quad \tau > 1 \quad (8)$$

Metodo di Tikhonov

Nel metodo di Tikhonov

- ▶ $\mathcal{F}(f, g) = \|Af - g\|^2$
- ▶ $\Phi(f) = \|Df\|^2$, D è la matrice identità o la discretizzazione di un operatore differenziale

Regolarizzazione con altre norme

- Vi sono molte altre possibili scelte del termine di regolarizzazione. Un modo per generalizzare la regolarizzazione è utilizzare altre norme :

$$\Phi(f) = \|Df\|_p^p$$

dove $\|\cdot\|_p$ è la norma p definita da

$$\|z\|_p = (|z_1|^p + \dots + |z_n|^p)^{1/p}$$

- Solitamente si sceglie $1 \leq p \leq 2$ perchè $p > 2$ porta a immagini troppo regolari con pochi dettagli.

- ▶ Anche se questo può sembrare un piccolo cambiamento, la soluzione è molto diversa.
- ▶ La ragione è che il termine di regolarizzazione $\|Df\|_p^p$ con $p < 2$ penalizza gli elementi di D grandi in modulo meno della norma 2 e più è piccolo p minore è questa penalizzazione.
- ▶ Se si utilizza $p = 2$, allora il termine di regolarizzazione $\|Df\|_2^2$ penalizza drammaticamente gli elementi di D grandi in modulo; questo equivale a richiedere che le derivate parziali della soluzione siano piccole ovunque nell'immagine. Pertanto, questo approccio favorisce soluzioni molto regolari (smooth).

Ricostruzione di immagini
○○○○○○○

Blur
○○○○○○○○○○

Noise
○○○

Modello discreto
○○○○

Image deblurring
○○○○○

Metodo ai minimi quadrati
○

Metodi di regolarizzazione
○○○○○○●○○

- ▶ Se si utilizza un termine di regolarizzazione $\|Df\|_p^p$ con p vicino ad uno, allora si permette alle derivate parziali di essere più grandi in certe regioni limitate dell'immagine. Questo consente di ricostruire meglio i bordi e le discontinuità nell'immagine.
- ▶ Tuttavia, il problema di minimo corrispondente è molto più difficile da risolvere.

Metodo di regolarizzazione mediante la Variazione Totale

- ▶ Il funzionale di **Variazione Totale** è definito come

$$\Phi_{TV}(f) = \int_{\Omega} |\nabla f(x, y)| dx dy$$

dove

- ▶ $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T$
 - ▶ $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- ▶ Equivalentemente è definito come

$$\Phi_{TV}(f) = \|\nabla f(x, y)\|_1$$

- Il problema di ricostruzione di immagini mediante il funzionale di Variazione Totale è allora formulato come il problema di minimizzazione non lineare

$$\min_f \|Af - g\|^2 + \lambda \Phi_{TV}(f)$$

- Le maggiori difficoltà nella risoluzione di tale problema sono legate alla non differenziabilità della norma 1
- Una strategia comune consiste nel considerare il problema modificato

$$\min_f \|Af - g\|^2 + \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sqrt{\nabla |f_{i,j}|^2 + \varepsilon}$$

dove ε è una costante positiva piccola.