

**Ecuaciones Diferenciales Homogéneas y Coeficientes Lineales:
Aplicaciones en Ingeniería de Sistemas**

Autor 1 y Autor 2

Programa de Ingeniería de Sistemas, Facultad de Ingeniería, Universidad de la Sabana

Programa de Ingeniería de Sistemas, Facultad de Ingeniería, Universidad de la Sabana

Resumen

Las ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes lineales constituyen una herramienta fundamental en el modelado matemático de sistemas dinámicos. Este documento presenta una revisión teórica y aplicada de estos conceptos, enfatizando su relevancia en el ámbito de la Ingeniería de Sistemas. Se abordan métodos de solución analíticos y se ilustran aplicaciones prácticas en control automático, redes de comunicación y simulación de procesos. Los ejemplos resueltos demuestran la utilidad de estas ecuaciones para describir comportamientos temporales en sistemas complejos.

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas y Coeficientes Lineales: Aplicaciones en Ingeniería de Sistemas

Introducción

Las ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes lineales representan una clase fundamental de ecuaciones que modelan fenómenos dinámicos en múltiples disciplinas de la ingeniería. En el contexto de la Ingeniería de Sistemas, estas ecuaciones son particularmente relevantes para describir y analizar el comportamiento temporal de sistemas complejos, desde redes de computadoras hasta procesos de manufactura automatizada.

La importancia de estas ecuaciones radica en su capacidad para capturar relaciones causa-efecto en sistemas donde las tasas de cambio dependen linealmente del estado actual. Por ejemplo, en sistemas de control automático, las ecuaciones diferenciales homogéneas permiten modelar la respuesta temporal de controladores PID, la dinámica de sistemas mecánicos amortiguados o la propagación de señales en redes de comunicación.

En el ámbito de la simulación de procesos, estas ecuaciones permiten predecir el comportamiento de sistemas bajo diferentes condiciones iniciales, facilitando la optimización de parámetros y la identificación de posibles fallos antes de la implementación física. La capacidad de resolver analíticamente estas ecuaciones proporciona una ventaja significativa en términos de comprensión del sistema y predicción de su comportamiento a largo plazo.

Desarrollo

Conceptos Fundamentales

Una ecuación diferencial homogénea con coeficientes lineales es una ecuación de la forma

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

donde a_0, a_1, \dots, a_n son coeficientes constantes y y es una función de x .

Ecuaciones de Segundo Orden

Para el caso particular de ecuaciones de segundo orden, la forma general es:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

La solución se obtiene mediante la ecuación característica:

$$ar^2 + br + c = 0$$

Las raíces de esta ecuación determinan la forma de la solución general:

- **Raíces reales distintas** ($b^2 - 4ac > 0$)

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

- **Raíces reales repetidas** ($b^2 - 4ac = 0$)

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$$

- **Raíces complejas conjugadas** ($b^2 - 4ac < 0$)

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

Aplicación en Sistemas de Control

En sistemas de control automático, las ecuaciones diferenciales homogéneas modelan la respuesta natural de sistemas de segundo orden. Consideremos un sistema masa-resorte-amortiguador:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

donde m es la masa, c es el coeficiente de amortiguamiento, y k es la constante del resorte.

La solución de esta ecuación describe el comportamiento transitorio del sistema, crucial para determinar estabilidad y tiempo de respuesta en sistemas de control.

Análisis de Redes de Comunicación

En el modelado de redes de comunicación, las ecuaciones diferenciales homogéneas describen la dinámica de colas y la propagación de señales. Para un sistema de cola M/M/1, la ecuación de estado puede formularse como:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t)$$

En estado estacionario, esta ecuación se simplifica a un sistema homogéneo que permite analizar la estabilidad de la red.

Ejercicios

Ejercicio 1: Sistema Masa-Resorte-Amortiguador

Resolver la ecuación diferencial que modela un sistema masa-resorte-amortiguador con $m = 2$ kg, $c = 8$ Ns/m, y $k = 32$ N/m, con condiciones iniciales $x(0) = 0,1$ m y $x'(0) = 0$ m/s.

Solución: La ecuación diferencial es:

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 32x = 0$$

Simplificando:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

La ecuación característica es:

$$r^2 + 4r + 16 = 0$$

Las raíces son: $r = -2 \pm 2\sqrt{3}i$

La solución general es:

$$x(t) = e^{-2t}(C_1 \cos(2\sqrt{3}t) + C_2 \sin(2\sqrt{3}t))$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$x(0) = C_1 = 0,1$$

$$x'(0) = -2C_1 + 2\sqrt{3}C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{0,2}{2\sqrt{3}} = \frac{0,1}{\sqrt{3}}$$

La solución particular es:

$$x(t) = e^{-2t} \left(0,1 \cos(2\sqrt{3}t) + \frac{0,1}{\sqrt{3}} \sin(2\sqrt{3}t) \right)$$

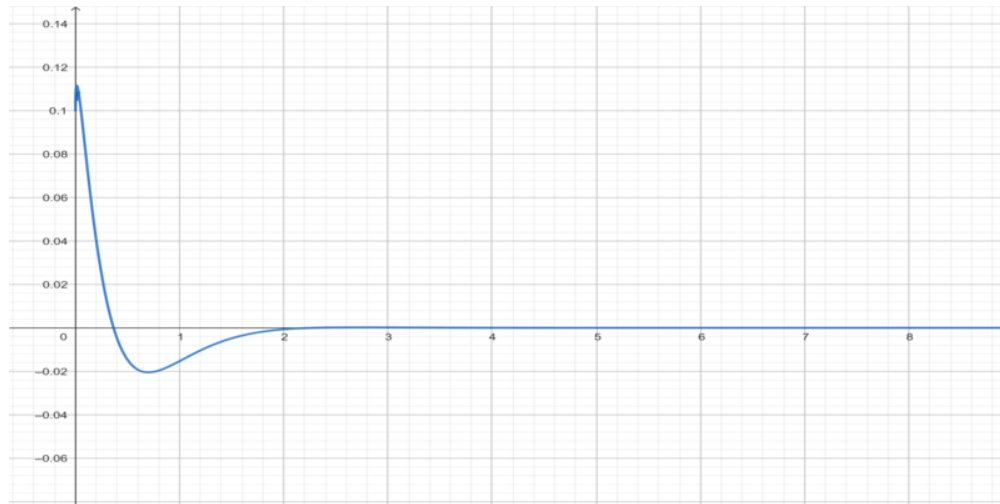


Figura 1

Respuesta temporal del sistema masa-resorte-amortiguador obtenida con GeoGebra

Ejercicio 2: Circuito RLC en Serie

Un circuito RLC en serie tiene $R = 100 \, \Omega$, $L = 0,5 \, \text{H}$, y $C = 10 \, \mu\text{F}$. Determinar la corriente $i(t)$ si la fuente de voltaje se retira repentinamente y $i(0) = 0,1 \, \text{A}$, $\frac{di}{dt}(0) = 0$.

Solución: La ecuación del circuito es:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

Sustituyendo valores:

$$0,5 \frac{d^2 i}{dt^2} + 100 \frac{di}{dt} + 10^5 i = 0$$

La ecuación característica es:

$$0,5r^2 + 100r + 10^5 = 0$$

Las raíces son: $r = -100 \pm 400i$

La solución es:

$$i(t) = e^{-100t}(C_1 \cos(400t) + C_2 \sin(400t))$$

Aplicando condiciones iniciales:

$$i(0) = C_1 = 0,1$$

$$\frac{di}{dt}(0) = -100C_1 + 400C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0,025$$

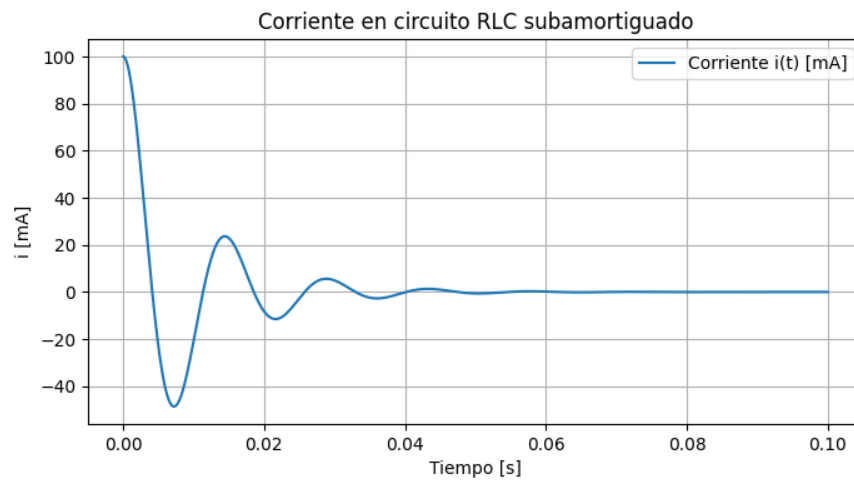


Figura 2

Corriente en el circuito RLC obtenida mediante simulación en Python

Ejercicio 3: Sistema de Control de Nivel

Un tanque de almacenamiento tiene una dinámica descrita por:

$$A \frac{dh}{dt} = -kh$$

donde $A = 5 \text{ m}^2$ es el área transversal y $k = 0,5 \text{ m}^2/\text{s}$ es el coeficiente de salida.

Resolver para $h(t)$ con $h(0) = 2 \text{ m}$.

Solución: La ecuación se simplifica a:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{k}{A}h = 0$$

Esta es una ecuación de primer orden homogénea con solución:

$$h(t) = h(0)e^{-\frac{k}{A}t} = 2e^{-0,1t}$$

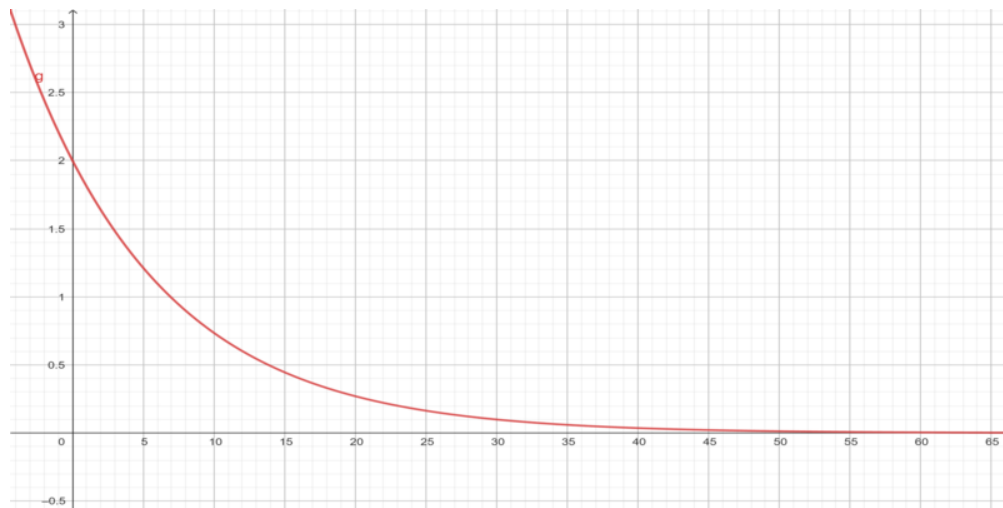


Figura 3

Nivel del tanque versus tiempo, simulado en GeoGebra

Ejercicio 4: Modelo de Población con Migración

La población de una ciudad cambia según:

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda P$$

con $\lambda = 0,05 \text{ año}^{-1}$ y $P(0) = 100,000$. Determinar cuando la población se reduce a la mitad.

Solución: La solución es:

$$P(t) = 100,000e^{-0,05t}$$

Para $P(t) = 50,000$:

$$50,000 = 100,000e^{-0,05t} \Rightarrow t = \frac{\ln(0,5)}{-0,05} \approx 13,86 \text{ años}$$

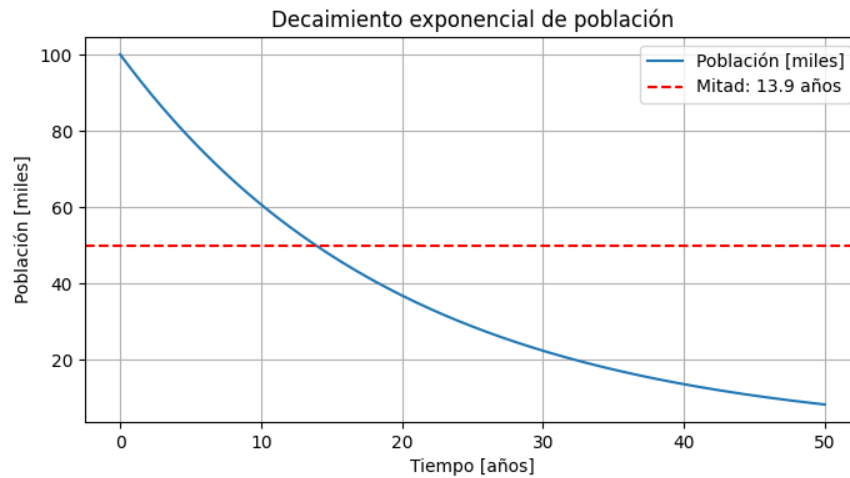


Figura 4

Decaimiento exponencial de la población modelado en Python

Ejercicio 5: Sistema de Segundo Orden Sobreamortiguado

Resolver:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 8y = 0$$

con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

Solución: La ecuación característica es:

$$r^2 + 6r + 8 = 0$$

Las raíces son: $r_1 = -2$, $r_2 = -4$

La solución general es:

$$y(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-4t}$$

Aplicando condiciones iniciales:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0) = -2C_1 - 4C_2 = 0$$

Resolviendo: $C_1 = 2$, $C_2 = -1$

La solución es:

$$y(t) = 2e^{-2t} - e^{-4t}$$

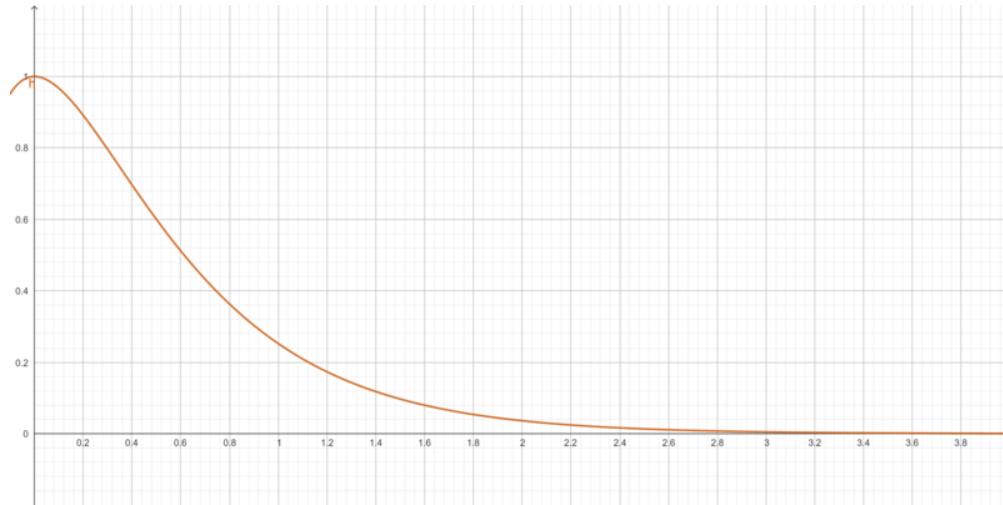


Figura 5

Respuesta sobreamortiguada del sistema de segundo orden, simulado en GeoGebra

Conclusión

Las ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes lineales constituyen una herramienta matemática fundamental para el análisis y diseño de sistemas en Ingeniería de Sistemas. A través de este documento, hemos explorado cómo estas ecuaciones permiten modelar comportamientos dinámicos en diversos contextos, desde sistemas mecánicos y circuitos eléctricos hasta procesos de control y redes de comunicación.

La capacidad de obtener soluciones analíticas para estos sistemas proporciona una ventaja significativa en términos de comprensión y predicción del comportamiento a largo plazo. Los métodos presentados, basados en la resolución de ecuaciones características, ofrecen un enfoque sistemático para analizar la estabilidad, la respuesta transitoria y el comportamiento en estado estacionario de sistemas dinámicos.

Las aplicaciones prácticas demuestran la relevancia de estos conceptos en la resolución de problemas reales de ingeniería. Desde el diseño de sistemas de control automático hasta el análisis de redes de computadoras, las ecuaciones diferenciales homogéneas proporcionan un lenguaje matemático unificado para describir fenómenos temporales complejos.

Referencias

Referencias

- [1] Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2021). *Elementary differential equations and boundary value problems* (12th ed.). John Wiley & Sons.
- [2] Zill, D. G. (2020). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (11^a ed.). Cengage Learning.
- [3] Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2018). *Fundamentals of differential equations* (9th ed.). Pearson.
- [4] Ogata, K. (2010). *Modern control engineering* (5th ed.). Prentice Hall.
- [5] Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2017). *Modern control systems* (13th ed.). Pearson.

Recursos y Material Complementario

Enlaces de Interés

- Simulaciones de Sistemas Dinámicos: <https://phet.colorado.edu/es/>
- Calculadora de Ecuaciones Diferenciales: <https://www.wolframalpha.com/>
- Tutoriales de GeoGebra: <https://www.geogebra.org/>
- Documentación de Python para Cálculo Científico:
<https://docs.scipy.org/doc/scipy/>

Software Utilizado

- **GeoGebra:** Software de matemática dinámica para visualización
- **Python con NumPy:** Para solución numérica y gráficos
- **MATLAB/Octave:** Alternativa para simulación de sistemas

Repositorios de Código

- Ejemplos de este documento: <https://github.com/Stirven0/EDOs-Homogeneas>
- Juego didactico:
<https://wayground.com/admin/quiz/68d99f45fc749bfe6872e611>
- **Scripts de Python:** Código para generar las gráficas mostradas
- **Archivos de GeoGebra:** Simulaciones interactivas