Ecuaciones Diferenciales Homogéneas y de Coeficientes Constantes

Harold S. González I.

Facultad de Ingeniería

Universidad Ejemplo

Cálculo de Ecuaciones Diferenciales (2051)

Dr. María Pérez

28 de septiembre de 2025

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas y de Coeficientes Constantes

Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) modelan relaciones entre funciones y sus derivadas; son herramientas esenciales en matemáticas aplicadas e ingeniería para describir fenómenos dinámicos. En este documento nos centramos en dos clases ampliamente estudiadas: *ecuaciones diferenciales homogéneas* (principalmente de primer orden, resolubles por sustituciones tipo $y = ux$) y *ecuaciones lineales con coeficientes constantes* (a menudo de orden superior, tratadas mediante la ecuación o polinomio característico). El objetivo es ofrecer definiciones, métodos y ejemplos resueltos paso a paso que permitan comprender y aplicar estas técnicas en problemas reales.

El formato y la portada de este documento siguen las recomendaciones de la clase `apa7` para trabajos estudiantiles y las guías oficiales de la APA para trabajos de estudiantes.

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Definición y teoría

Una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

se dice *homogénea* si la función f puede expresarse como $f(x, y) = G\left(\frac{y}{x}\right)$ (o equivalente) —es decir, $f(tx, ty) = f(x, y)$ para todo $t \neq 0$. En la práctica esto significa que las variables se pueden agrupar por la razón y/x y se emplea la sustitución $y = ux$ (o $x = vy$) para reducir la EDO a una de variables separables (Kreyszig, 2011). Esta técnica y otras sustituciones están descritas en los manuales y notas de ODE contemporáneas. (American Psychological Association, 2020; Daniel A. Weiss, 2022)

Método de la sustitución $y = ux$

Sea la sustitución $y = u(x)\,x$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

Sustituyendo en la EDO original de la forma $\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{y}{x}\right)$ se obtiene una ecuación en u y x que suele ser separable o integrable. Véase la sección dedicada a sustituciones para más detalles. (American Psychological Association, 2020; Kreyszig, 2011)

Ejemplo resuelto (paso a paso)

Resolvamos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}. \tag{1}$$

Paso 1 (verificar homogeneidad). Observe que $\dfrac{x+y}{x} = 1 + \dfrac{y}{x}$, que depende sólo de y/x; por lo tanto la ecuación es homogénea de grado cero.

Paso 2 (sustitución). Tomamos $y = ux$, con $u = u(x)$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

Paso 3 (sustituir en la EDO). Reemplazando en (1):

$$u + x\frac{du}{dx} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + u.$$

Paso 4 (simplificar). Cancelamos u en ambos lados:

$$x\frac{du}{dx} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Paso 5 (integrar). Integrando respecto a x:

$$u(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

donde C es la constante de integración.

Paso 6 (volver a la variable original). Dado que $y = ux$,

$$y(x) = x\Big(\ln|x| + C\Big) = x\ln|x| + Cx.$$

Comentario: Esta solución es la familia general de soluciones derivada por la sustitución $y = ux$. El procedimiento mostrado es típico para EDOs homogéneas de primer orden. (Boyce & DiPrima, 2017; Kreyszig, 2011)

Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Definición y teoría

Una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes tiene la forma

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0,$$

donde los a_i son constantes. La técnica estándar para hallar la solución general consiste en proponer soluciones de la forma $y = e^{rt}$, obtener el polinomio característico

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0,$$

y analizar sus raíces (reales distintas, reales repetidas o complejas). Cada tipo de raíz genera una contribución particular a la solución general: exponentes reales dan e^{rt}, raíces repetidas generan factores polinomiales multiplicativos (como te^{rt}), y raíces complejas conjugadas $\alpha \pm i\beta$ producen soluciones combinando $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ y $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$. Este método está ampliamente explicado en textos clásicos de EDO. (Boyce & DiPrima, 2017; Daniel A. Weiss, 2022; Kreyszig, 2011)

Ejemplo resuelto (polinomio característico)

Consideremos la EDO de segundo orden

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \tag{2}$$

Paso 1 (suposición exponencial). Proponemos $y = e^{rt}$. Entonces $y' = re^{rt}$, $y'' = r^2 e^{rt}$. Sustituyendo:

$$r^2 e^{rt} - 3re^{rt} + 2e^{rt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (r^2 - 3r + 2)e^{rt} = 0.$$

Paso 2 (polinomio característico). Descartando la solución trivial $e^{rt} \neq 0$:

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

Paso 3 (resolver el polinomio). Factorizamos:

$$r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1,\ r_2 = 2.$$

Paso 4 (solución general). Como las raíces son reales y distintas, la solución general es

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t},$$

donde C_1, C_2 son constantes de integración.

Comentarios: Si las raíces hubieran sido iguales (repetidas), por ejemplo $r_1 = r_2 = r$, la solución general incluiría un factor polinomial t: $y = (C_1 + C_2 t)e^{rt}$. Si las raíces hubieran sido complejas $\alpha \pm i\beta$, la solución se escribiría con funciones seno y coseno moduladas por la exponencial $e^{\alpha t}$. Véanse desarrollos detallados en textos didácticos sobre ODE. (Boyce & DiPrima, 2017; Kreyszig, 2011)

Conclusión

En este documento se presentaron y resolvieron, con ejemplos, dos familias importantes de ecuaciones diferenciales: las homogéneas de primer orden (resolubles mediante sustituciones como $y = ux$) y las lineales con coeficientes constantes (resueltas por medio del polinomio característico). Ambos métodos son fundamentales en el análisis teórico y en aplicaciones prácticas de ingeniería —por ejemplo en circuitos eléctricos, sistemas mecánicos y modelos de crecimiento— y constituyen la base para técnicas más avanzadas (EDOs no lineales, sistemas de ecuaciones, ecuaciones en derivadas parciales, etc.). El procedimiento paso a paso mostrado ayuda a consolidar la comprensión y ofrece una plantilla reproducible para problemas similares.

Referencias

American Psychological Association. (2020). 7th Edition Student Paper Setup Guide. https://apastyle.apa.org/instructional-aids/student-paper-setup-guide.pdf

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley.

Daniel A. Weiss. (2022). The `apa7` LaTeX class — documentation and examples.

Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th). Wiley.