МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра МОЭВМ

ОТЧЕТ ПО НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Студент гр. 4304	____________________	Пестерев Д.О.
Руководитель	____________________	Бутусов Д.Н.

Санкт-Петербург

2019

ЗАДАНИЕ

НА НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКУЮ РАБОТУ

Студент Пестерев Д.О.

Группа 4304

Тема работы: Методы и алгоритмы идентификации нелинейных систем

Дата выдачи задания: 01.09.2020

Дата сдачи реферата: 27.12.2020

Дата защиты реферата: 27.12.2020

Студент ____________________ Пестерев Д.О.

Руководитель ____________________ Бутусов Д.Н.

АННОТАЦИЯ

В данной работе рассматриваются современное состояние области идентификации нелинейных динамических систем.

Приводится описание метода конструктивного получения системы дифференциальных полиномиальных уравнений, описывающих заданный набор многомерных данных.

SUMMARY

This paper discusses the current state of the field of identification of nonlinear dynamical systems.

A description is given of a method for constructively obtaining a system of differential polynomial equations describing a given set of multidimensional data.

Введение

Теория нелинейных динамических систем была разработана на основе работ, написанных Пуанкаре в конце 19 века. Несколько десятилетий назад эта теория распространилась на инженерную область благодаря тщательному анализу нелинейных эффектов, обнаруженных при исследовании реальных объектов.

Одной из серьезных научных проблем нелинейной динамики является построение математической модели изменения некоторой величины, основываясь на данных, полученных в результате измерения этой величины в ограниченный промежуток времени. Такая задача называется идентификацией системы.

Процесс идентификации динамической системы можно разделить на несколько этапов:

1. Определение наличия нелинейности в поведении исследуемой системы
2. Локализация нелинейности
3. Определение типа нелинейности
4. Выбор функционального типа нелинейности
5. Оценка параметров нелинейности модели и оценить их

Отдельно можно отметить проблему выбора математической модели. Распространенными моделями, используемыми при идентификации, являются:

1. Модель на основе рядов Вольтерры
2. Блочно-структурированные модели
3. Нейросетевые модели
4. NARMAX (модели на основе авторегрессивного скользящего среднего)
5. Модели пространства состояний
6. Стохастические нелинейные модели

Для уточнения коэффициентов выбранной модели или её структуры необходимо применить один из методов идентификации. За последние пятьдесят лет было получено множество методов таких как:

1. Применение байесовского вывода для структурных моделей
2. Анализ частотной области
3. Частотно-временной анализ
4. Модальные методы анализа
5. Метод черного ящика

Одним из новых перспективных методов идентификации нелинейных систем является метод, описанный в работе Керы и Хасегавы в 2016 году. Основываясь на алгоритмах из области алгебры, оптимизации и машинного обучения авторы создали способ, позволяющий с высокой точностью идентифицировать нелинейные полиномиальные системы из зашумленных временных рядов.

В данном методе для описания нелинейных динамических систем применяется аппарат дифференциальных уравнений. Система описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x,t) \\ \quad\dots \\ \dot{x}_n = f_2(x,t) \end{cases}$$

где n – размерность системы, f_i функция правой части, определяющая динамику системы, t – переменная времени.

Одним из ограничением данного метода является использование полиномиального базиса, то есть невозможность восстановления систем с другими типами нелинейности. Кроме того при данном типе идентификации требуются значения всех переменных состояния модели.

Решить последнее можно на основе так называемых теорем вложения: Уитни, Такенса и Зауэра-Йорка-Каскади, которые устанавливают соответствие между размерностью исходных данных и «оптимальной» размерностью, в которую их можно вложить.

Теоретические предпосылки

Рассмотрим модель нелинейной динамической системы, описываемой системой дифференциальных полиномиальных уравнений размерности n.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) \\ \quad \dots \\ \dot{x}_n = f_2(x) \end{cases}$$

Где $f_1, \dots, f_n$ – полиномы. Пусть $\mathcal{P}_{x_1,\dots,x_n}$ множество полиномов с переменными $x_1, \dots, x_n$. Моном является произведением переменных:

$$m = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$$

где $a_i \geq 0$. Степень монома определяется как $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Обозначим множество мономов с переменными $x_1, \dots, x_n$ $\mathcal{T}_{x_1,\dots,x_n}$. Любой полином является линейной комбинацией мономов

$$f = \sum_{i=1}^{M} c_i m_i$$

Где $m_i \in \mathcal{T}_{x_1,\dots,x_n}$. M количество мономов в f, $c_i \in \mathbb{R}$ коэффициенты при них. Произведение коэффициента и монома называется термом. Степень полинома определяется наибольшей степенью мономов.

В случае ограниченного количества известных точек существует бесконечное количество полиномов, удовлетворяющих ограничениям в каждой точке. Для конструктивного построения, удовлетворяющего полиномиального набора вводится понятие исчезающего идеала.

Исчезающий идеал для множества точек X это множество всех полиномов, обнуляющихся на X, такой что

$$I(X) = \left\{ g \in \mathcal{P}_{x_1,\dots,x_n} \middle| g(x) = 0, \forall x \in X) \right\}$$

Следовательно, если для некоторого полинома $f \epsilon \mathcal{P}_{x_1,\dots,x_n}$ верно $V = f(X)$, то это верно и для любого полинома $f + gh$, где $g \in I(X), h \in \mathcal{P}_{x_1,\dots,x_n}$

В работе Лимбека 2013 года алгоритм Бухбергера-Мёллера был расширен до приближенного алгоритма Бухбергера-Мёллера. Приближенный алгоритм Бухбергера-Мёллера принимает на вход набор точек X, погрешность …, и мономиальное упорядочивание σ и возвращает приближенный граничный базис Gи его порядковый идеал O. «Приближенный» означает, что полином $g \in G$ удовлетворяет условию $\|g(X)\| \le \epsilon$. При $\epsilon = 0$ G становится точным граничным базисом. При этом можно получить различные ответы с различными мономиальными упорядочиваниями.

Приближенный алгоритм Бухбергера-Мёллера, вычисляющий приближенный граничный базис и его порядковый идеал:

Вход:

X – множество экспериментальных точек

ϵ – допустимое отклонение для линейной независимости

σ – мономиальное упорядочивание

Выход:

G – приближенный граничный базис

O – порядковый идеал

$d \coloneqq 1, O \coloneqq \{1\}, G \coloneqq \{\,\}, M \coloneqq (1, \dots, 1)^T \in R^{N\times 1}, N \coloneqq \#(X)$

$L \coloneqq \{t_1, \dots, t_l\}$ – все мономы степени 1, упорядоченные согласно σ

do

For $i \coloneqq 1$ to l

$A \coloneqq (eval_X(t_i), M)$

$B \coloneqq A^T A$

λ_{min}: = наименьшее собственное число B

if $\sqrt{\lambda_{min}} \le \epsilon$

$s \coloneqq (s_{n_{O+1}}, s_{n_O}, \dots, s_1)$ – норма собственного вектора, соответствующего собственному числу λ_{min}

$g \coloneqq s_{n_O} + t_i + s_{n_O} o_{n_O} + \dots + s_1 o_1$

$G = G \cup \{t_i\}$

else

$O = O \cup t_i$

$M \coloneqq A$

end

end

$d \coloneqq d + 1$

$L \coloneqq \{t_1, \dots, t_l\}$ – все мономы степени d в ∂O, упорядоченные согласно σ

while L={}

После получения граничного базиса применяет процедура L-1 регуляризации для составления наиболее близкой полиномиальной системы, удовлетворяющей условиям. После получения граничного базиса применяет процедура L-1 регуляризации для составления наиболее близкой полиномиальной системы, удовлетворяющей условиям.

Алгоритм получения наиболее близкой полиномиальной системы:

Вход:

h - интерполирующий полином

X – множество экспериментальных точек

V – целевой вектор

η – допустимое отклонение для интерполяции

Выход:

h_{red} – усеченный интерполирующий полином

$h_{tmp} = h$

$T \coloneqq \{t_1, \dots, t_l\}$

$N \coloneqq \#(X)$

do

$h_{red} = h_{tmp}$

$t_{min} = argmin\|eval_X(t)\|, t \in T$

$T \coloneqq T - t_{min}$

$l \coloneqq l - 1$

$c^* = (c_1, \dots, c_l)^T \coloneqq argmin\|V - eval_X(t_1, \dots, t_l)c\|,$

$h_{tmp} := (t_1, \dots, t_l)\ c^* = c_1 t_1 + \dots + c_l t_l$

`while` $\frac{1}{N}\left\|V - h_{tmp}(X)\right\| > \eta$

Конечным результатом является полиномиальная системе, удовлетворяющая критерию аппроксимации с заданной точностью.

Заключение

В ходе научно-исследовательской работы было исследовано современное состояние области идентификации нелинейных динамических систем. Был рассмотрен алгоритм для идентификации системы, описываемой системой дифференциальных уравнений полиномиального вида.

Список использованных источников:

1. Kera H., Hasegawa Y. Noise-tolerant algebraic method for reconstruction of nonlinear dynamical systems //Nonlinear Dynamics. – 2016. – Т. 85. – №. 1. – С. 675-692.
2. Limbeck J. Computation of approximate border bases and applications. – 2013.
3. Noël J. P., Kerschen G. 10 years of advances in nonlinear system identification in structural dynamics: a review //Proceedings of ISMA 2016-International Conference on Noise and Vibration Engineering. – 2016.