2019秋季学期《单变量微积分》期末试卷参考答案

一、求下列各题（每小题6分，共36分）

(1) 求不定积分 $\int \sin x \cdot \min\{\frac{1}{2}, x\}\,\mathrm{d}x$.

解：$\sin x \min\left\{\frac{1}{2}, x\right\} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x & x \geqslant \frac{1}{2} \\ x\sin x & x < \frac{1}{2} \end{cases}$. 故

$$\int \sin x \min\left\{\frac{1}{2}, x\right\} dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}\cos x + c_1 & x \geqslant \frac{1}{2} \\ -x\cos x + \sin x + c_2 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

由连续性知$-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} + c_1 = -\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{2} + c_2$. 故：

$$\int \sin x \min\left\{x, \frac{1}{2}\right\} dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}\cos x + \sin\frac{1}{2}, & x \geqslant \frac{1}{2} \\ -x\cos x + \sin x, & x < \frac{1}{2} \end{cases} + c$$

(2) 求广义积分 $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(4+x)}$.

解： $I \xlongequal{\sqrt{x}=t} \int_0^{+\infty} \frac{2tdt}{t(4+t^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\frac{t}{2}}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} = \arctan\dfrac{t}{2}\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2}$

(3) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$上连续， 且 $f(x) = \dfrac{x+1}{1+\cos^2 x} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$. 求$f(x)$.

解： 设$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = c$. 对题中条件两边积分得：$c = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x+1}{1+\cos^2 x} + 2\pi c$. 而$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x+1}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 0 + 2\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{2+\tan^2 x} = \sqrt{2}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sqrt{2}\pi$. 故$c = \frac{\sqrt{2}\pi}{1-2\pi}$, $f(x) = \frac{x+1}{1+\cos^2 x} + \frac{\sqrt{2}\pi}{1-2\pi}$.

(4) 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3}\,\mathrm{d}x$.

解：**I.** $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)'}{2(\sin x + \cos x)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4\sin^2(x+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cot(x+\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)^{-2} + c$

II. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{(\sin x + \cos x)^3}\csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{(1+\cot x)^3}\,\mathrm{d}(\cot x) \xlongequal{\cot x = u} -\int \frac{1}{(1+u)^3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(1+u)^{-2} + c = \frac{1}{2}(1+\cot x)^{-2} + c$

(5) 求$y'' + 2y' - 3y = e^x$的通解.

解： 特征方程$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1$. 故对应的齐次方程通解为$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$. 由于1是特征根，故可设原方程有$(ax+b)e^x$形式的特解$y^*$. 代入解得$y^* = \dfrac{xe^x}{4}$. 故原方程通解为$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x + \dfrac{xe^x}{4}$.

(6) 讨论数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$的绝对收敛与条件收敛性.

解：$(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}=\frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+\frac{1}{2}}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}$且$\left|(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}\right|\sim\frac{1}{2n^{p+\frac{1}{2}}}$. 故：

(1)当$p>\dfrac{1}{2}$时，级数绝对收敛.

(2)当$-\dfrac{1}{2}<p\leq\dfrac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+\frac{1}{2}}}$收敛，且$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$单调有界，由Abel判别法知，原级数收敛; 通项加绝对值后的级数显然发散，故$-\dfrac{1}{2}<p\leq\dfrac{1}{2}$时原级数条件收敛.

(3)当$p\leq-\dfrac{1}{2}$时，级数通项不趋于0，发散.

二、(12分) 已知曲线$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}\quad(0\leq t\leq 2\pi)$， $a>0$为常数.

(1)求曲线围成平面区域的面积.

(2)求此区域绕x轴旋转一周所得立体的体积.

解：(1).$S=4\int_0^a y\,\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t\,\mathrm{d}(a\cos^3 t)=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{3\pi a^2}{8}$.

(2).$V=2\int_0^a \pi y^2\,\mathrm{d}x=2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi a^2\sin^6 t\,\mathrm{d}(a\cos^3 t)=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{32\pi a^3}{105}$.

三、(12分) 求初值问题$\begin{cases}xy''+3y'=x\\ y(2)=\dfrac{3}{2}\\ y'(2)=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$的解.

解：设$p(x)=y'$，则方程变为$p'+\frac{3}{x}p=1$. 故$p=e^{-\int\frac{3}{x}dx}\left(\int 1\cdot e^{\int\frac{3}{x}dx}dx+c_1\right)=x^{-3}\left(\int x^3dx+c_1\right)=\dfrac{x}{4}+c_1x^{-3}$；代入$y'(2)=-\frac{1}{2}$得$c_1=-8$. 故$y=\dfrac{1}{8}x^2+4x^{-2}+c_2$. 代入$y(2)=\frac{3}{2}$ 得$c_2=0$. 故$y=\frac{1}{8}x^2+\dfrac{4}{x^2}$.

四、(10分) 将$f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$在$x=0$处展开成幂级数，并确定其收敛域.

解：$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad |x|<1$. 故

$$\int_0^x f'(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|<1$$

由$f(0)=\dfrac{\pi}{4}$知$f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. 收敛域为$[-1,1)$.

五、(10分) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0(k=0,1,2,\cdots,m)$. 证明：$f(x)$在$[a,b]$上至少有$m+1$个零点.

证明：I. 当$f(x)\equiv 0$时，结论显然成立; 故假设$f(x)$不恒为0. 设$f(x)$在$[a,b]$上有n个"变号"零点$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$（即$x_i(1\leq i\leq n)$是零点且$f(x)$在x_i 两侧异号）.

由$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 可知$n\geq 1$. 令$g(x)=\prod\limits_{1\leq i\leq n}(x-x_i)\,f(x)$， 则$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒≥ 0或恒≤ 0. 若$n\leq m$，则由$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0(k=0,1,2\cdots m)$ 得

$$\int_a^b (x-x_1)\,(x-x_2)\cdots(x-x_n)\,f(x)\,\mathrm{d}x=0$$

这与$g(x)$在$[a,b]$ 上连续且恒≥ 0或恒≤ 0矛盾. 故$n\geq m+1$.

II. 归纳证明：$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0(k=0,1,2,\cdots,m)$时，$f(x)$在$(a,b)$上至少有$m+1$个不同零点.

1.$m=0$时，由积分中值定理知成立.

2.设$m=n-1$时，命题成立. 当$m=n$时，$f(x)$满足$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0(k=0,1,2,\cdots,n)$.
记$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则$F(a)=F(b)=0$. 同时，对$\forall 1\leq k\leq n-1$，

$$0=\int_a^b x^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b x^{k+1}\,\mathrm{d}F(x)=x^{k+1}\cdot F(x)|_a^b-(k+1)\int_a^b x^kF(x)\,\mathrm{d}x=-(k+1)\int_a^b x^kF(x)\,\mathrm{d}x$$

由归纳假设可知$F(x)$在(a,b)上有n个不同零点，加上端点a,b，共有$n+2$个不同零点，于是由Rolle中值定理，$f(x)=F'(x)$在(a,b)上有$n+1$个零点，归纳成立.

注：也可不断分部积分，利用$f(t)$的“各阶积分”在端点a,b处的值为0予以证明，与上面归纳法等价.

六、(10分) 证明：

(1). 两正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$的通项满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leq\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(2). 正项级数收敛的Gauss判别法：正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的通项满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o(\frac{1}{n\ln n})(n\to+\infty)$$

则当$\beta>1$时，级数收敛；$\beta<1$时，级数发散.

证明： (1).由已知可得$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leq\dfrac{a_n}{b_n}\leq\cdots\leq\dfrac{a_1}{b_1}$，故$a_{n+1}\leq\dfrac{a_1}{b_1}b_{n+1}$. 由比较判别法知，当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(2).当$\beta>1$时，取$\alpha\in(1,\beta)$并令$b_n=\frac{1}{n\ln^\alpha n}$. 由Cauchy积分判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛. 且

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{(n+1)\ln^\alpha(n+1)}{n\ln^\alpha n}=(1+\frac{1}{n})(1+\frac{\ln{(1+\frac{1}{n})}}{\ln n})^\alpha=1+\frac{1}{n}+\frac{\alpha}{n\ln n}+o(\frac{1}{n\ln n})$$

由$\alpha<\beta$知，当n充分大时，$\dfrac{b_n}{b_{n+1}}=1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\alpha}{n\ln n}+o(\dfrac{1}{n\ln n})<1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\beta}{n\ln n}+o(\dfrac{1}{n\ln n})=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

由(1)中结论知$\Big($(1)中条件可弱化为对充分大的n成立$\Big)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

当$\beta<1$时, 选$\alpha\in(\beta,1)$，并取$b_n=\frac{1}{n\ln^\alpha n}$. 类似可得$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$，进而$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则由(1)中结论知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^\alpha n}$收敛， 这与$\alpha<1$矛盾. 故$\beta<1$时，级数发散.

七. (10分)$f_0(x)$在$[0,b]$上连续，$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t(n\in\mathbb{N},x\in[0,b])$. 证明：

(1).函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[0,b]$上一致收敛.

(2).和函数为$S(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}f_0(t)\mathrm{d}t(x\in[0,b])$.

证明： 由$f_0(x)\in C[0,b]$知，$\exists M, s.t.|f(x)|<M(\forall x\in[0,b])$. 首先可归纳证明$|f_n(x)|<\dfrac{Mx^n}{n!}(x\in[0,b])$：$|f_{n+1}(x)|=|\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t|\le\int_0^x|f_n(t)|\mathrm{d}t\le\int_0^x\dfrac{Mt^n}{n!}\mathrm{d}t=\dfrac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$). 同时 $|f_n(x)|<\dfrac{Mx^n}{n!}\le\dfrac{Mb^n}{n!}(\forall x\in[0,b])$ 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{Mb^n}{n!}$ 收敛. 由Weierstrass判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[0,b]$上一致收敛.

(2) $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}f_{n-1}(x)+f_1'(x)=S(x)+f_0(x)$(可逐项求导的原因是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$在$[0,b]$上一致收敛)，且$S(0)=0$. 解关于$S(x)$的定解问题得

$$S(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}f_0(t)\mathrm{d}t$$