中 国 科 学 技 术 大 学

2012—2013 学年上学期期中考试

考试时间： 2012 年 11 月 3 日 8:30-11:00　　考试地点： 5303

考试科目： 数学分析 (B3)　　得分 ________

学生所在系： ________　　学号 ____________　　姓名 ________

除第一题之外所有题的解答要求具备详细的论理过程.

问题一 (6 分) 称映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为 压缩映射, 是指存在正数 $0<\delta<1$, 对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$, 都有 $|f(x)-f(y)|\le\delta|x-y|$. 将 " $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 不是压缩映射" 表述成为严格的量词形式.

问题二 (18 分) 叙述 Cantor 集合 C 的定义，并证明： C 中任意点均是 C 的极限点，且 C 为不可数集合.

问题三 (24 分) 称实直线 $\mathbf{R}$ 上的非空子集 A 为 开集, 是指：任给 A 中的点 x, 存在包含 x 的开区间 I, 使得 $I\subset A$. 以下给定非空开集 A.

2A. 任给 $x\in A$, 记集合 Γ_x 为所有包含 x 且含于 A 的开区间的集合. 证明 Γ_x 中存在最大开区间，记作 I_x. 也就是说，存在 $I_x\in\Gamma_x$, 对于任意 $I\in\Gamma_x$, 都有 $I\subset I_x$. 称 I_x 为 A 的 构成开区间.

2B. 记 $\mathscr{A}:=\{I_x : x\in A\}$ 为 A 的所有构成开区间的集合. 证明： $\mathscr{A}$ 中任意两个不同的开区间不相交.

2C. 证明 $\mathscr{A}$ 为至多可数集合，并且

$$A=\bigcup_{I\in\mathscr{A}} I.$$

2D. 设 $\mathscr{B}$ 为一些非空开区间构成的集合，并且 $\mathscr{B}$ 中任意两个不同的开区间不相交. 证明：如果 $\cup_{J\in\mathscr{B}} J = A$, 则 $\mathscr{B}=\mathscr{A}$.

注意：因为以上给出开集结构定理的另一个证明，解答中不允许使用开集结构定理.

问题四 (16 分) 设 x 为正实数. 证明存在收敛于 x 的有理数 Cauchy 列 $\{r_n\}$, 使得每个 r_n 都不是整数，并且对所有的 n 成立 $r_n < r_{n+1}$.

问题五 (20 分) 设 f 是实直线 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，且 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4A. 证明 $|f|$ 可以取到最大值，即存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得对所有 $x \in \mathbf{R}$ 成立 $|f(x)| \le |f(x_0)|$.

4B. 证明 f 一致连续.

问题六 (8 分) 设 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 连续.

5A. 证明 $f([0,1])$ 为闭区间或者一个点.

5B. 证明 $f\big((0,1)\big)$ 为开区间，闭区间，半开半闭区间或者一个点.

问题七 (8 分) 构造有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的一个排列 $r_1, r_2, \cdots$, 使得集合

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{1}{n}, r_n + \frac{1}{n} \right)$$

不等于整个实直线 $\mathbf{R}$.

略解及评分标准

1. 只有两种分数：满分 6 分与零分．表述方式之一是：任给自然数 $1/n$, 存在 x_n, y_n 使得 $|f(x_n)-f(y_n)|>(1-\frac{1}{n})|x_n-y_n|$.

2. 每问 6 分．它是作业题，解答略．

3. 每问 6 分．

3A. 设 $L_x:=\{y\in\mathbf{R}: y<x,\quad (y,x]\subset A\}$. 记 $\ell_x:=\inf L_x$. 类似定义 $R_x:=\{y\in\mathbf{R}: y>x,\quad [x,y)\subset A\}$. 记 $r_x:=\inf L_x$. 那么由定义可以得知 $I_x=(\ell_x, r_x)$.

3B. 设 $I_x\cap I_y$ 包含点 z, 那么 $I_x=I_y=I_z$.

3C. 显然 $\{I_x: x\in A\}$ 是 A 的开区间覆盖．从每个 $\mathscr{A}$ 中的开区间中取出一个有理数得到 $\mathscr{A}$ 到 $\mathbf{Q}$ 的映射，由于 $\mathscr{A}$ 中开区间两两不交，此映射为单射．

3D. 先证明 A 的每个构成区间 I(即每个 $\mathscr{A}$ 的元素) 都含于 $\mathscr{B}$. 取 $x\in A$ 使得 $I=I_x$. 在 $\mathscr{B}$ 中存在唯一的开区间 $J=(a,b)$ 包含 x, 其中 $-\infty\le a<b\le+\infty$. 由于 $J\subset A$ 且 $a\notin A$, 那么 $a=\ell_x$. 类似可证 $b=r_x$. 所以 $J=I_x$. 可以类似证明每个 $\mathscr{B}$ 的元素都是 A 的构成区间．所以 $\mathscr{A}=\mathscr{B}$.

4. 对 x 分整数 (4 分) 与非整数 (6 分) 两种情形讨论，利用有理数的稠密性可证．细节略去．

5. 每问 10 分．

5A. 注意 $|f|$ 为 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 (2 分).

若 $\sup|f|=0$, 则 $|f|$ 恒为零，命题成立 (2 分).

下面设 $\sup|f|>0$. 取 $\{x_n\}$ 使得 $|f(x_n)|\to\sup|f|$. 那么 $\{x_n\}$ 为有界数列．事实上，若有子列 $\{x'_n\}: |x'_n|\to+\infty$, 那么 $|f(x'_n)|\to 0$. 矛盾．取 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{y_n\}$, 极限为 $y\in\mathbf{R}$. (4 分)

由 $|f|$ 连续，得 $|f(y)|=\lim|f(y_n)|=\sup|f|$.(2 分)

5B. 任给 $\epsilon>0$, 存在 N, 当 $|x|\ge N$ 时， $|f(x)|<\epsilon/2$. 由于 f 在闭区间 $[-1-N,1+N]$ 上一致连续，存在 $0<\delta<1$ 使得任给 $x,y\in[-1-N,1+N]$ 且 $|x-y|<\delta$ 时， $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. 那么任给 x,y 属于实直线，且 $|x-y|<\delta<1$.

Case 1. 设 $|x|,|y|$ 均大于等于 N, 那么 $|f(x)-f(y)|\le|f(x)|+|f(y)|<2\cdot\frac{\epsilon}{2}$. (5 分)

Case 2. 设 $|x|,|y|$ 有一个小于 N, 那么 x,y 都属于 $[-1-N,1+N]$. 得到 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. (5 分)

6A. 课堂讲过的例子． (5 分)

6B. 若 f 不为常数，则 $f(0,1)$ 是以 $\inf f(0,1), \sup f(0,1)$ 为端点的区间. 端点可以不属于 $f(0,1)$. (5 分)

7. 先把 $[0,1]$ 的所有有理数排成一列 $r_2, r_3, r_5, r_6, r_7, r_8, r_{10}, \cdots$, 但是把所有下标为 m^2 的位置留出来，再把将 $[0,1]$ 之外的所有有理数依次排到第 $1,4,9,16,\cdots$ 项. 这样得到 $\mathbf{Q}$ 的一个排列 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ 满足条件.

方法一：由于 $\bigcup_{1\le n<\infty,\, n\neq m^2}, \left(r_n - \frac{1}{n}, r_n + \frac{1}{n}\right)$ 包含于 $[-1,2]$, 并且 $\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(r_{m^2} - \frac{1}{m^2}, r_{m^2} + \frac{1}{m^2}\right)$ 的 Lebesgue 测度不超过 $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m^2} < 4$. 所以整个集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(r_n - \frac{1}{n}, r_n + \frac{1}{n}\right)$ 的测度小于 7, 不可能等于 $\mathbf{R}$.

方法二：假设 $\mathbf{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(r_n - \frac{1}{n}, r_n + \frac{1}{n}\right)$. 那么任取长度等于 4 的闭区间 I, 并且 I 与 $[-1,2]$ 不交. 存在有限个自然数 $n_1 < n_2 < \cdots n_k$:

$$I \subset \left(r_{n_1} - \frac{1}{n_1}, r_{n_1} - \frac{1}{n_1}\right) \bigcup \cdots \bigcup \left(r_{n_k} - \frac{1}{n_k}, r_{n_k} - \frac{1}{n_k}\right).$$

因为对于非完全平方数 n, 开区间 $(r_n - \frac{1}{n}, r_n + \frac{1}{n})$ 与 I 不交，可以不妨设 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 都是完全平方数. 由上面的包含关系，得到

$$4 > \frac{2}{n_1^2} + \cdots + \frac{2}{n_k^2} \geq 4.$$

矛盾！