

中国科学技术大学数学科学学院  
2017 ~ 2018 学年第 1 学期期终考试试卷

■A卷      □B卷

课程名称 单变量微积分      课程编号 001512

考试时间 2018年1月12日      考试形式 闭卷

姓 名 \_\_\_\_\_ 学 号 \_\_\_\_\_ 学 院 \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、求下列各题 (每小题 6 分, 共 30 分)

(1) 计算积分  $\int \max\{1, x^2\} dx$ .

(2) 求不定积分  $I = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx$ .

(3) 求不定积分  $I = \int \frac{dx}{1+x^3}$ .

(4) 试求曲线  $y = x^2$  与直线  $y = a^2$  以及  $y$  轴所围成的平面图形绕  $y$  轴旋转一周所成的旋转体的体积 ( $0 \leq x \leq a$ ).

(5) 求解方程  $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ .

二、(本题 10 分)

设  $y(x)$  是由  $x - \int_1^{x+y} e^{-t^2} dt = 0$  确定的函数. 试求导数值  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ .

三、(本题 12 分) 设对任意正数  $\theta$ , 积分  $\int_{\theta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  收敛, 其中  $f(x)$  为连续函数,  $f(0) = A$ . 试证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = A \ln \frac{\beta}{\alpha}, \quad (\alpha, \beta > 0).$$

四、(本题 12 分) 计算定积分  $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$ .

五、(本题 12 分) 求初值问题.

$$\begin{cases} yy'' - (y')^2 = y^4, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

六、(本题 12 分) 设  $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ , 其中  $f(x)$  是已知的连续函数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$  ( $A$  为常数).

(1) (8分) 求  $\varphi'(x)$ ;

(2) (4分) 讨论  $\varphi'(x)$  在  $x = 0$  处的连续性.

七、(本题 12 分) 设  $f(t)$  在  $(-\infty, +\infty)$  是连续正值函数, 且  $f(-t) = f(t)$ , 设  $g(x) = \int_{-a}^a |x-t|f(t) dt, -a \leq x \leq a, a > 0$ .

(1) (4分) 求证  $g'(x)$  是严格单调递增的;

(2) (4分) 求出  $g(x)$  的最小值点;

(3) (4分) 当  $g(x)$  的最小值等于  $f(a) - a^2 - 1$  时, 求  $f(t)$ .