

二、(20分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为一列独立的随机变量, 且均服从  $U(0, 1)$  分布. 记

$$Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, \quad Z = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

(1) 试证明: 对任意常数  $0 < y, z < 1$ , 有

$$P(Y \leq y, Z \leq z) = \begin{cases} z^n - (z - y)^n, & y < z; \\ z^n, & y \geq z. \end{cases}$$

(2) 利用上述结果, 试求随机变量  $Y$  和  $Z$  的联合密度函数  $f(y, z)$ .

(3) 在  $Y = y$  条件下 ( $0 < y < 1$ ), 试求  $Z$  的条件密度函数  $f_{Z|Y}(z|y)$ .

(4) 试求  $Y$  和  $Z$  的协方差  $\text{Cov}(Y, Z)$ .

三、(15分) 设随机变量  $X, Y$  和  $Z$  相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布. 记

$$U = \frac{X}{X+Y}, \quad V = \frac{X+Y}{X+Y+Z}, \quad W = X+Y+Z.$$

(1) 计算随机向量  $(U, V, W)$  的联合密度函数.

(2) 随机变量  $U, V$  和  $W$  是否相互独立? 请证明你的结论.

四、(15分) 设某种元件的使用寿命  $T$  的分布函数为  $F(t) = \begin{cases} 1 - \exp\{-(\frac{t}{\theta})^m\}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$   
其中  $m > 0$  为已知参数, 而  $\theta > 0$  为未知参数. 随机取  $n$  个这种元件, 测得它们的使用寿命分别为  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . 记  $g(\theta) = \theta^m$ .

(1) 试求  $g(\theta)$  的极大似然估计  $\hat{g}(T_1, T_2, \dots, T_n)$ .

(2) 上述估计是否为无偏估计? 请证明你的结论.

五、(12分) 经大量调查, 已知一般健康成年男子每分钟脉搏的次数服从正态分布  $N(72, 6^2)$ . 现测得 16 例成年男子慢性铅中毒患者的脉搏平均 67 次/分钟, 标准差为 7 次/分钟. 问在显著性水平 0.05 下, 这群患者每分钟脉搏的次数(假设也服从正态分布)和正常人有无显著性差异? (要求对均值和方差都进行检验.)

六、(8分) 中国科学技术大学 2019 级本科新生入学考试中, 某学院两个班级的英语科目各档成绩(从低到高)人数如下表所示:

档次	I	II	III	IV	V	VI	合计
一班	8	27	10	6	8	6	65
二班	15	25	8	7	6	4	65

我们能否认为这两个班级的英语水平大致相当? 显著性水平设为  $\alpha = 0.05$ .

附录:

$$\Phi(1.645) = 0.95, \quad \Phi(1.96) = 0.975;$$

$$t_{15}(0.025) = 2.131, \quad t_{15}(0.05) = 1.753, \quad t_{16}(0.025) = 2.12, \quad t_{16}(0.05) = 1.746;$$

$$\chi_5^2(0.95) = 1.145, \quad \chi_5^2(0.05) = 11.071, \quad \chi_{15}^2(0.975) = 6.262, \quad \chi_{15}^2(0.025) = 27.488.$$