日期:　　/

①. 例 3.17. 的反例.

$X \sim N(0,1)$　$Z = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{cases}$　X 与 Z 独立.

XZ 与 X 不相关但不独立.

证: $EXZX = EX^2EZ = 0 = EXZ \times EX = 0$

$\therefore XZ$ 与 X 不相关

但是 XZ 与 X 不独立

当 $a \neq 0$ 时　$P(XZ \le a, X \le a) \neq P(XZ \le a) \times P(X \le a)$

② 证明 $\bar{X}$ 与 $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 独立.　X_i i.i.d $\sim N(\mu, \sigma^2)$

$X_1 \cdots X_n$ 的联合分布函数

$f(x_1 \cdots x_n) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + n\mu^2\right]$

构造正交矩阵 A，其第一行元素均为 $\frac{1}{\sqrt{n}}$

令 $\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

因为是正交变换　所以 $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 且 $|A|=1$

同时注意到 $Y_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \sqrt{n}\,\bar{X}$

日期: /

$\therefore$ $Y_1 \cdots Y_n$ 的联合密度函数为

$$(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2\mu\sqrt{n}\,y_1+n\mu^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y_1-\sqrt{n}\mu)^2}{2\sigma^2}}\times\prod_{i=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}}$$

由变量可分离知 $Y_1 \cdots Y_n$ 独立 且

$Y_1 \sim N(\sqrt{n}\mu, \sigma^2)$ $\quad Y_i \sim N(0,\sigma^2)\ i=2,\cdots,n$

$\therefore$ Y_1 与 $Y_2^2+\cdots+Y_n^2$ 独立

$$\sum_{i=2}^{n}Y_i^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-Y_1^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2}{n}=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$\therefore$ $\bar{X}$ 与 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

③

例 2.5.5 如果某设备在任何长为 t 的时间 $[0,t]$ 内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布，则相继两次故障之间的时间间隔 T 服从参数为 λ 的指数分布.

解 设 $N(t) \sim P(\lambda t)$，即

$$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \qquad k=0,1,\cdots.$$

注意到两次故障之间的时间间隔 T 是非负随机变量，且事件 $\{T\geqslant t\}$ 说明此设备在 $[0,t]$ 内没有发生故障，即 $\{T\geqslant t\}=\{N(t)=0\}$，由此我们得

当 $t<0$ 时，有 $F_T(t)=P(T\leqslant t)=0$；

当 $t\geqslant 0$ 时，有

$$F_T(t)=P(T\leqslant t)=1-P(T>t)=1-P(N(t)=0)=1-e^{-\lambda t},$$

所以 $T \sim Exp(\lambda)$，即相继两次故障之间的时间间隔 T 服从参数为 λ 的指数分布，图 2.5.5 示意其间关系.

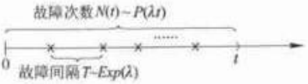

图 2.5.5 故障次数与故障间隔之间的关系