2019级《单变量微积分》期中试卷参考答案

一、

(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}\right]$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数.

解： $\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}-1<\left[\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}\right]\le\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}$ 且$\sin\frac{1}{n}>0$. （**3分**）

故

$$\sin\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}-1\right)=\cos\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}<\sin\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}\right]\le\sin\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}=\cos\frac{1}{n}.(\mathbf{6}\text{分})$$

由两边夹定理知， $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}\right]=1$.（ **7分**）

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n\sin(\pi\sqrt{n^2+2019})$.

解： $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n\sin(\pi\sqrt{n^2+2019})=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\left((\sqrt{n^2+2019}-n)\pi\right)$ （ **3分**）

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 2019\pi}{\sqrt{n^2+2019}+n}=\dfrac{2019\pi}{2}$. （ **7分**）

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$，其中$a,b,c>0$.

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n\ln\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}}$. （ **2分**）

而$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{a^x+b^x+c^x}\cdot\frac{1}{3}(a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c)=\frac{1}{3}\ln(abc)$. （ **6分**）

故$\lim\limits_{n\to\infty}e^{n\ln\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}}{x}}=\sqrt[3]{abc}$. （ **7分**）

(4) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{\sin x-x\cos x}$.

解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(e^{\tan x-x}-1)}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{\sin x-x\cos x}$ （ **4分**）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{\cos x-\cos x+x\sin x}=1$. （ **7分**）

(5) $f(x)=\sqrt{1+x^2}\cdot\cos x$. 求$f^{(4)}(0)$.

解：

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt{1+x^2}\cdot\cos x=\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^4+o(x^4)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)\\&=1+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}\right)x^4+o(x^4)\\&=1-\frac{1}{3}x^4+o(x^4).\quad(\mathbf{5}\text{分})\end{aligned}$$

故$f^{(4)}(0)=4!\cdot(-\frac{1}{3})=-8$. （ **7分**）

(6) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0; \\ x^3-3x^2, & x\le 0. \end{cases}$ 求$f'(x)$.

解： $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x>0; \\ 3x^2-6x, & x<0. \end{cases}$ (**5**分)

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x^2-6x)=0$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=0$

所以,$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x>0; \\ 3x^2-6x, & x\le 0. \end{cases}$ (**7**分)

二、

1. 设$y=f(x)$由参数方程

$$\begin{cases} x=t-\cos t, \\ y=\sin t \end{cases}$$

确定，求$f(x)$在参数$t=\pi$处的二阶导数.

解： $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos t dt}{(1+\sin t)dt}=\dfrac{\cos t}{1+\sin t}$ (**3 分**),

$f''(x)=\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\dfrac{d(\dfrac{\cos t}{1+\sin t})}{d(t-\cos t)}=\dfrac{-1}{(1+\sin t)^2}$ (**6 分**).

故$f''(x)|_{t=\pi}=-1$.(**7 分**)

2. 求由方程$\sin y+e^x-xy-1=0$决定的$(0,0)$附近的隐函数$y(x)$在$x=0$处的二阶导数.

解： 对$\sin y+e^x-xy-1=0$两边关于x求导得：$y'\cos y+e^x-(xy'+y)=0$，

故$y'=\dfrac{y-e^x}{\cos y-x}$, $y'(0)=-1$. (**3 分**).

再关于x求导得：$y''=\dfrac{(y'-e^x)(\cos y-x)-(y-e^x)\cdot(-y'\sin y-1)}{(\cos y-x)^2}$ (**6 分**).

代入$x=0,y=0,y'(0)=-1$可得 $y''(0)=-3$. (**7 分**)

三、$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)=f(b)=0, f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$. 证明: 存在$\xi\in(a,b)$使得 $f(\xi)=0$.

解： 不妨设$f'_+(a)>0, f'_-(b)>0$. 由$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$， $\exists\delta_1>0, s.t.\ a<x<a+\delta_1$时，$f(x)-f(a)=f(x)>0$ (**4 分**);

同理，$\exists\delta_2>0, s.t.\ b-\delta_2<x<b$ 时，$f(x)-f(b)=f(x)<0$ (**7 分**).

由连续函数介值定理知，$\exists \xi \in (a,b), s.t.\ \ f(\xi)=0$ （**10 分**）. $\square$

四、$x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 证明：$\sin x+\tan x>2x$.

解： 令$f(x)=\sin x+\tan x-2x$ （**2 分**）.

则$f(0)=0$，且当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2>\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}-2>0.(\textbf{6 分})$$

$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2})$连续，故$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2})$上严格单调增 （**8 分**）.

故$f(x)>f(0)=0$，即$\sin x+\tan x>2x$. （**10分**）

五、$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导，且$|f(x)|\le 1$, $f'(0)>1$. 证明：存在ξ使得$f''(\xi)+f(\xi)=0$.

解： 令$F(x)=f^2(x)+f'^2(x)$ （**2 分**）.

首先证明:$\exists b>0, s.t. F(b)<F(0)$.

否则,$\forall x>0, F(x)\ge F(0)=f^2(0)+f'^2(0)=1+\delta$(由 $f'(0)>1$ 知，$\delta>0$). 于是有

$$f'^2(x)=F(x)-f^2(x)\ge F(0)-1=\delta, \Rightarrow |f'(x)|\ge\sqrt{\delta}(\forall x>0).$$

进而

$$|f(x)|=|f(0)+f'(\xi)x|\ge|f'(\xi)|x-|f(0)|\ge\sqrt{\delta}x-|f(0)|\to+\infty(x\to+\infty)$$

这与$|f(x)|\le 1$矛盾. （**6 分**）

同理，$\exists a<0, s.t. F(a)<F(0)$.

设$F(x)$在$[a,b]$上的最大值点为ξ, 则

$$F'(\xi)=2f'(\xi)\big(f(\xi)+f''(\xi)\big)=0.$$

又若$f'(\xi)=0$,则$F(\xi)=f^2(\xi)\ge F(0)=f^2(0)+f'^2(0)>1$，与$|f(x)|\le 1$矛盾，故$f'(\xi)\ne 0$. 于是$f(\xi)+f''(\xi)=0$. （**10 分**）

六. 实数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$b_n>0$. $c_n=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$. 证明：

1. 数列$\{c_n\}$收敛.

2. 若$\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=+\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

解： 1. 由于$b_i>0$，故数列$\{b_1+b_2+\cdots+b_n\}$单调递增. （**2 分**）

(I)它有上界时，由单调有界判别法，可知其收敛到$0<l<+\infty$. （**4 分**）

由Cauchy收敛准则知，$\forall\varepsilon>0,\exists N_1$，当$n>N_1$时，对$\forall p\in\mathbb{N}$有$b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}<\varepsilon$;

再由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$知，$\exists N_2$，当$n>N_2$时，$|a_n-a|<1$.

故当$n>\max\{N_1,N_2\}$时，对$\forall p\in\mathbb{N}$有:

$$\begin{aligned}&|(a_{n+1}-a)b_{n+1}+(a_{n+2}-a)b_{n+2}+\cdots+(a_{n+p}-a)b_{n+p}|\\ \le&|a_{n+1}-a|b_{n+1}+|a_{n+2}-a|b_{n+2}+\cdots+|a_{n+p}-a|b_{n+p}\quad.\ (\textbf{8 分})\\ <&b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}<\varepsilon\end{aligned}$$

由Cauchy收敛准则，知数列$\{(a_1-a)b_1+(a_2-a)b_2+\cdots+(a_n-a)b_n\}$收敛，设其收敛到$s$. 则

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1-a)b_1+(a_2-a)b_2+\cdots+(a_n-a)b_n+a(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{s}{l}+a.(\textbf{10 分})$$

(II)当$\{b_1+b_2+\cdots+b_n\}$无界时，$b_1+b_2+\cdots+b_n\to+\infty(n\to+\infty)$，此时即为（2）中问题.

2. 当$b_1+b_2+\cdots+b_n\to+\infty(n\to+\infty)$时，由Stolz定理可得$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}b_{n+1}}{b_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$. （**14 分**）

七. 数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=f(a_n)$, $a_n\neq0$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $f(x)=x+\alpha\cdot x^k+o\left(x^k\right)\quad(x\to0)$, 其中$k>1,\alpha\neq0$为 常数. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot a_n^{k-1}=\dfrac{1}{(1-k)\alpha}$.

解:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}^{k-1}}-\frac{1}{a_n^{k-1}}&=\frac{a_n^{k-1}-a_{n+1}^{k-1}}{a_n^{k-1}a_{n+1}^{k-1}}=\frac{a_n^{k-1}-\left(a_n+\alpha\cdot a_n^k+o\left(a_n^k\right)\right)^{k-1}}{a_n^{k-1}\left(a_n+\alpha\cdot a_n^k+o\left(a_n^k\right)\right)^{k-1}}\\&=\frac{a_n^{k-1}-\left(a_n^{k-1}+(k-1)\alpha a_n^{2k-2}+o\left(a_n^{2k-2}\right)\right)}{a_n^{k-1}\cdot\left(a_n^{k-1}+(k-1)\alpha a_n^{2k-2}+o\left(a_n^{2k-2}\right)\right)}\qquad(\textbf{5 分})\\&=\frac{(1-k)\alpha a_n^{2k-2}+o\left(a_n^{2k-2}\right)}{a_n^{2k-2}+o\left(a_n^{2k-2}\right)}\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^{k-1}}-\frac{1}{a_n^{k-1}}\right)=(1-k)\alpha\quad\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{i+1}^{k-1}}-\frac{1}{a_i^{k-1}}\right)=(1-k)\alpha(\textbf{8 分})$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_{n+1}^{k-1}}-\frac{1}{a_1^{k-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)a_{n+1}^{k-1}}=(1-k)\alpha.$$

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot a_n^{k-1}=\dfrac{1}{(1-k)\alpha}$.(**10 分**)

(注：若直接用Stolz定理，可考虑给6分)