概率论与数理统计

庄玮玮
weizh@ustc.edu.cn

安徽 合肥

2019 年 2 月

教材

陈希孺,《概率论与数理统计》,
中国科学技术大学出版社, 2009 年.

第一章　事件与概率

§1.6 加法公式

加法公式1: 对于事件A, B 有

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB).$$

证明: 利用$A\cup B=A+\overline{A}B$ 和$B=AB+\overline{A}B$ 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A\cup B) &= \mathrm{P}(A+\overline{A}B)\\
&= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(\overline{A}B)\\
&= \mathrm{P}(A)+[\mathrm{P}(\overline{A}B)+\mathrm{P}(AB)]-\mathrm{P}(AB)\\
&= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB).
\end{aligned}$$

§1.6 加法公式

加法公式1: 对于事件A, B 有

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB).$$

证明: 利用$A\cup B=A+\overline{A}B$ 和$B=AB+\overline{A}B$ 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B) &= \mathrm{P}(A+\overline{A}B)\\ &= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(\overline{A}B)\\ &= \mathrm{P}(A)+[\mathrm{P}(\overline{A}B)+\mathrm{P}(AB)]-\mathrm{P}(AB)\\ &= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB).\end{aligned}$$

§1.6 加法公式

例1.6.1 河流A与河流B是水库C的主要水源. 只要A, B之一不缺水, C就不缺水. 根据经验知道河流A, B不缺水的概率分别是0.7和0.9, 同时不缺水的概率是0.65. 计算水库C不缺水的概率.

解 用A, B分别表示河流A, B不缺水, 用C表示水库不缺水, 则$C = A \cup B$, $\mathrm{P}(A) = 0.7$, $\mathrm{P}(B) = 0.9$, $\mathrm{P}(AB) = 0.65$. 用加法公式1得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(C) &= \mathrm{P}(A \cup B) \\
&= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB) \\
&= 0.7 + 0.9 - 0.65 \\
&= 0.95.
\end{aligned}$$

§1.6 加法公式

例1.6.1 河流A 与河流B 是水库C 的主要水源. 只要A, B 之一不缺水, C 就不缺水. 根据经验知道河流A, B 不缺水的概率分别是0.7和0.9, 同时不缺水的概率是0.65. 计算水库C 不缺水的概率.

解 用A, B 分别表示河流A, B 不缺水, 用C 表示水库不缺水, 则$C = A \cup B$, $\mathrm{P}(A) = 0.7$, $\mathrm{P}(B) = 0.9$, $\mathrm{P}(AB) = 0.65$. 用加法公式 1 得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(C) &= \mathrm{P}(A \cup B) \\
&= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB) \\
&= 0.7 + 0.9 - 0.65 \\
&= 0.95.
\end{aligned}
$$

§1.6 加法公式

加法公式2: 对于事件A_1, A_2, A_3 有

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{3} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}(A_j) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} \mathrm{P}(A_iA_j) + \mathrm{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{3} A_j\Big).$$

解 由加法公式 1 和 $A_1(A_2\cup A_3) = (A_1A_2)\cup(A_1A_3)$, 得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(A_1\cup A_2\cup A_3)\\
&= \mathrm{P}(A_1\cup(A_2\cup A_3))\\
&= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2\cup A_3) - \mathrm{P}(A_1(A_2\cup A_3))\\
&= \mathrm{P}(A_1) + \big[\mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) - \mathrm{P}(A_2A_3)\big]\\
&\qquad - \big[\mathrm{P}(A_1A_2) + \mathrm{P}(A_1A_3) - \mathrm{P}(A_1A_2A_3)\big]\\
&= \sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}(A_j) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} \mathrm{P}(A_iA_j) + \mathrm{P}(A_1A_2A_3).
\end{aligned}$$

§1.6 加法公式

加法公式2: 对于事件A_1, A_2, A_3 有

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{j=1}^{3} A_j\right) = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}(A_j) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} \mathrm{P}(A_iA_j) + \mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{3} A_j\right).$$

解 由加法公式 1 和 $A_1(A_2 \cup A_3) = (A_1A_2) \cup (A_1A_3)$, 得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)\\
&= \mathrm{P}\big(A_1 \cup (A_2 \cup A_3)\big)\\
&= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2 \cup A_3) - \mathrm{P}(A_1(A_2 \cup A_3))\\
&= \mathrm{P}(A_1) + \big[\mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) - \mathrm{P}(A_2A_3)\big]\\
&\qquad - \big[\mathrm{P}(A_1A_2) + \mathrm{P}(A_1A_3) - \mathrm{P}(A_1A_2A_3)\big]\\
&= \sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}(A_j) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} \mathrm{P}(A_iA_j) + \mathrm{P}(A_1A_2A_3).
\end{aligned}$$

§1.6 加法公式

例1.6.2 下学期将为全班的m个学生开设三个讨论班. 如果每人独立地随机选修一个讨论班, 计算至少有一个讨论班没人选修的概率.

解 用A_i表示没有人选修第i个讨论班, 则$B=\bigcup_{j=1}^{3}A_j$表示至少有一个讨论班没被选修. 题目要求计算$\mathrm{P}(B)$. 容易计算出

$$\mathrm{P}(A_1)=\mathrm{P}(A_2)=\mathrm{P}(A_3)=\left(\frac{2}{3}\right)^m,$$

$$\mathrm{P}(A_1A_2)=\mathrm{P}(A_1A_3)=\mathrm{P}(A_2A_3)=\left(\frac{1}{3}\right)^m,$$

$$\mathrm{P}(A_1A_2A_3)=0.$$

§1.6 加法公式

例1.6.2 下学期将为全班的m 个学生开设三个讨论班. 如果每人独立地随机选修一个讨论班, 计算至少有一个讨论班没人选修的概率.

解 用A_i 表示没有人选修第i 个讨论班, 则$B=\bigcup_{j=1}^{3} A_j$ 表示至少有一个讨论班没被选修. 题目要求计算$\mathrm{P}(B)$. 容易计算出

$$\mathrm{P}(A_1)=\mathrm{P}(A_2)=\mathrm{P}(A_3)=\left(\frac{2}{3}\right)^m,$$

$$\mathrm{P}(A_1A_2)=\mathrm{P}(A_1A_3)=\mathrm{P}(A_2A_3)=\left(\frac{1}{3}\right)^m,$$

$$\mathrm{P}(A_1A_2A_3)=0.$$

§1.6 加法公式

根据加法公式2得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(B) &= \sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}(A_j) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} \mathrm{P}(A_iA_j) + \mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{3} A_j\right) \\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^m - C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^m \\
&= \frac{2^m-1}{3^{m-1}}.
\end{aligned}
$$

§1.6 加法公式

对于不同的m 容易计算出下面的结果:

m	4	6	8	10	12	14	16	18
$P(B)$	0.556	0.259	0.117	0.052	0.023	0.010	0.005	0.002

可以看出, 学生数$m \geqslant 10$ 时, 至少有一个讨论班没被选修的概率就很小了. 学生数$m > 10$ 时, 不大可能有讨论班不被选修.

§1.7 事件的独立性

一班的 n 个同学中有 k 个男生, 二班的 m 个同学中有 j 个男生. 在每个班任选一人, 试验有 nm 个等可能的结果. 用 A 表示一班选到的是男生, 用 B 表示二班选到的是男生, 则 AB 表示两个班选到的都是男生, 并且 $|AB| = kj$. 于是有

$$\mathrm{P}(AB) = \frac{kj}{nm} = \frac{k}{n} \cdot \frac{j}{m} = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

这里 A 是否发生和 B 是否发生是相互独立的, 公式

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

表达了这样的含义.

§1.7 事件的独立性

定义1.7.1 如果$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$，则称$A$，$B$ 相互独立，简称为**独立** (independent).

设A 是试验S_1 下的事件，B 是试验S_2 下的事件. 如果试验S_1 和试验S_2 是独立进行的，则A 的发生与否不影响B 的发生，于是A, B 独立.

定理1.7.1 A，B 独立当且仅当$\overline{A}$, B 独立.

证明 用$B=AB+\overline{A}B$ 得到$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(AB)+\mathrm{P}(\overline{A}B)$. 当$A$, B 独立，有

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{A}B) &= \mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\ &= (1-\mathrm{P}(A))\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B),\end{aligned}$$

即$\overline{A}$，B 独立. 如果$\overline{A}$, B 独立，则用刚证明的结论得到$A=\Omega-\overline{A}$, B独立.

§1.7 事件的独立性

定义1.7.1 如果$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$，则称$A$，$B$ 相互独立，简称为独立 (independent).

设A 是试验S_1 下的事件，B 是试验S_2 下的事件. 如果试验S_1 和试验S_2 是独立进行的，则A 的发生与否不影响B 的发生，于是A, B 独立.

定理1.7.1 A，B 独立当且仅当$\overline{A}$, B 独立.

证明 用$B=AB+\overline{A}B$ 得到$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(AB)+\mathrm{P}(\overline{A}B)$. 当$A$, B 独立，有

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{A}B) &= \mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\ &= (1-\mathrm{P}(A))\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B),\end{aligned}$$

即$\overline{A}$，B 独立. 如果$\overline{A}$, B 独立，则用刚证明的结论得到$A=\Omega-\overline{A}$, B独立.

§1.7 事件的独立性

定义1.7.1 如果$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$，则称$A$，$B$ 相互独立，简称为独立 (independent).

设A 是试验S_1 下的事件，B 是试验S_2 下的事件. 如果试验S_1 和试验S_2 是独立进行的，则A 的发生与否不影响B 的发生，于是A, B 独立.

定理1.7.1 A，B 独立当且仅当$\overline{A}$, B 独立.

证明 用$B=AB+\overline{A}B$ 得到$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(AB)+\mathrm{P}(\overline{A}B)$. 当$A$, B 独立，有

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{A}B) &= \mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\ &= (1-\mathrm{P}(A))\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B),\end{aligned}$$

即$\overline{A}$，B 独立. 如果$\overline{A}$, B 独立，则用刚证明的结论得到$A=\Omega-\overline{A}$, B独立.

§1.7 事件的独立性

定义1.7.2

(1) 称事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 如果对任何$1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$, 有

$$\mathrm{P}(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k}) = \mathrm{P}(A_{j_1})\mathrm{P}(A_{j_2})\cdots\mathrm{P}(A_{j_k}).$$

(2) 称事件$A_1, A_2, \cdots$ 相互独立, 如果对任何$n \geqslant 2$, 事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立. 这时也称$\{A_n\}$ 是独立事件列.

从定义1.7.2 知道: 要事件A, B, C 相互独立, 不仅需要两两独立, 还需要$\mathrm{P}(ABC) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$. 下面的例子说明事件$A, B, C$ 两两独立还不能保证他们相互独立.

§1.7 事件的独立性

例1.7.1 在带有标号的质地相同的4个球中任取一个, 用A, B, C 分别表示得到1或2号, 1或3号, 1或4号球. 则$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = 1/2$, 并且$AB = AC = BC$ 都表示得到1号球. 于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(AB) &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}, \\
\mathrm{P}(AC) &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C) = \frac{1}{4}, \\
\mathrm{P}(BC) &= \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

说明A, B, C 两两独立. 因为ABC 也表示得到1号球, 故

$$\mathrm{P}(ABC) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C).$$

说明A, B, C 不相互独立.

§1.7 事件的独立性

容易理解，如果$S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是n 个独立进行的试验，A_i 是试验S_i 下的事件，则$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立。如果$S_1, S_2, \cdots$ 是一列独立进行的试验，A_i 是试验S_i 下的事件，则$A_1, A_2, \cdots$ 相互独立.

例1.7.2 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则有如下的结果:

(1) 对$1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$, $A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_k}$ 相互独立;
(2) 用B_i表示A_i 或$\overline{A}_i$，则$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 相互独立;
(3) $(A_1A_2), A_3, \cdots, A_n$ 相互独立;
(4) $(A_1 \cup A_2), A_3, \cdots, A_n$ 相互独立.

证明留给大家.

§1.7 事件的独立性

容易理解，如果S_1，S_2，$\cdots$，S_n 是n 个独立进行的试验，A_i 是试验S_i 下的事件，则A_1，A_2，$\cdots$，A_n 相互独立．如果S_1，S_2，$\cdots$ 是一列独立进行的试验，A_i 是试验S_i 下的事件，则A_1，A_2，$\cdots$ 相互独立．

例1.7.2 设A_1，A_2，$\cdots$ ，A_n 相互独立，则有如下的结果：

(1) 对$1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$，$A_{j_1}$，$A_{j_2}$，$\cdots$ ，A_{j_k} 相互独立；
(2) 用B_i表示A_i 或$\overline{A}_i$，则B_1，B_2，$\cdots$ ，B_n 相互独立；
(3) (A_1A_2)，A_3，$\cdots$ ，A_n 相互独立；
(4) $(A_1 \cup A_2)$，A_3，$\cdots$ ，A_n 相互独立．

证明留给大家．

§1.7 事件的独立性

例1.7.3 在有50个人参加的登山活动中，假设每个人意外受伤的概率是1%，每个人是否意外受伤是相互独立的.
(a) 计算50个人都没有意外受伤的概率;
(b) 计算至少有一个人意外受伤的概率;
(c) 为保证不发生意外受伤的概率大于90%，应如何控制参加人数?

解 记$n=50$. 用A_j 表示第j 个人没有意外受伤，则$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，$\mathrm{P}(A_j)=1-0.01=0.99$.
(a) $B=\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ 表示没人意外受伤，并且有

$$\mathrm{P}(B)=\prod_{j=1}^{n}\mathrm{P}(A_j)=0.99^n\approx 60.5\%.$$

§1.7 事件的独立性

例1.7.3 在有50个人参加的登山活动中，假设每个人意外受伤的概率是1%，每个人是否意外受伤是相互独立的.

(a) 计算50个人都没有意外受伤的概率;

(b) 计算至少有一个人意外受伤的概率;

(c) 为保证不发生意外受伤的概率大于90%，应如何控制参加人数?

解 记$n=50$. 用A_j 表示第j 个人没有意外受伤，则$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，$\mathrm{P}(A_j)=1-0.01=0.99$.

(a) $B=\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ 表示没人意外受伤，并且有

$$\mathrm{P}(B)=\prod_{j=1}^{n}\mathrm{P}(A_j)=0.99^n\approx 60.5\%.$$

§1.7 事件的独立性

(b) $\overline{B}$ 表示至少有一人意外受伤,

$$\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \approx 1 - 0.605 = 39.5\%.$$

(c) 如果队员人数为m 时可以满足要求, 则有

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_j\right) = \prod_{j=1}^{m} \mathrm{P}\left(A_j\right) = 0.99^m \geqslant 0.90.$$

取对数后得到$m \ln 0.99 \geqslant \ln 0.90$, 于是解出

$$m \leqslant \frac{\ln 0.90}{\ln 0.99} \approx 10.48.$$

所以应当控制参加人数在10 人之内.

例1.7.3告诉我们, 在组织有多人参加的活动时, 必须要求每个人都有很高的安全可靠性. 再看下面的例子.

§1.7 事件的独立性

(b) $\overline{B}$ 表示至少有一人意外受伤，

$$\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \approx 1 - 0.605 = 39.5\%.$$

(c) 如果队员人数为m 时可以满足要求，则有

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_j\right) = \prod_{j=1}^{m} \mathrm{P}\left(A_j\right) = 0.99^m \geqslant 0.90.$$

取对数后得到$m \ln 0.99 \geqslant \ln 0.90$，于是解出

$$m \leqslant \frac{\ln 0.90}{\ln 0.99} \approx 10.48.$$

所以应当控制参加人数在10 人之内.

例1.7.3告诉我们，在组织有多人参加的活动时，必须要求每个人都有很高的安全可靠性. 再看下面的例子.

§1.7 事件的独立性

例1.7.4 春节燃放烟花爆竹是延续了两千余年的民族传统，早已成为我国悠久历史文化的一部分. 但是燃放烟花爆竹也常常引发意外，造成惨剧. 假设每次燃放烟花爆竹引发火警的概率是十万分之一，如果春节期间北京有100万人次燃放烟花爆竹，计算没有引发火警的概率.

解 设$n=10^6$. 用A_j 表示第j 次燃放没有引发火警，则$B=\bigcap_{j=1}^n A_j$ 表示春节期间燃放烟花爆竹没有引发火警. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，$\mathrm{P}(A_j)=1-10^{-5}$.

$$\mathrm{P}(B)=\prod_{j=1}^{n}\mathrm{P}(A_j)=(1-10^{-5})^n\approx 4.54\times 10^{-5}.$$

也就是说不引发火警几乎是不可能的.

§1.7 事件的独立性

例1.7.4 春节燃放烟花爆竹是延续了两千余年的民族传统, 早已成为我国悠久历史文化的一部分. 但是燃放烟花爆竹也常常引发意外, 造成惨剧. 假设每次燃放烟花爆竹引发火警的概率是十万分之一, 如果春节期间北京有100万人次燃放烟花爆竹, 计算没有引发火警的概率.

解 设$n=10^6$. 用A_j 表示第j 次燃放没有引发火警,则$B=\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ 表示春节期间燃放烟花爆竹没有引发火警. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, $\mathrm{P}(A_j)=1-10^{-5}$.

$$\mathrm{P}(B)=\prod_{j=1}^{n}\mathrm{P}(A_j)=(1-10^{-5})^n\approx 4.54\times 10^{-5}.$$

也就是说不引发火警几乎是不可能的.

§1.7 事件的独立性

据报道：2005年春节期间，从腊月三十下午5时至正月初五下午3时，北京市共接报火警818起，其中烟花爆竹引发的火灾282起，除夕夜接报火警444起，因燃放烟花引起的火情172起. 市卫生局统计，因燃放烟花爆竹致伤到28家重点医院救治的有307人，4人因燃放烟花爆竹死亡.

从例1.7.4 可以看出，如果事件A 发生的概率是很小的正数ε，比如小于0.01，则在一次试验中A 一般不会发生. 但是对A 进行独立重复试验时，总会遇到A 发生. 这一现象被称为小概率原则.

§1.7 事件的独立性

据报道：2005年春节期间，从腊月三十下午5时至正月初五下午3时，北京市共接报火警818起，其中烟花爆竹引发的火灾282起，除夕夜接报火警444起，因燃放烟花引起的火情172起．市卫生局统计，因燃放烟花爆竹致伤到28家重点医院救治的有307人，4人因燃放烟花爆竹死亡．

从例1.7.4 可以看出，如果事件A 发生的概率是很小的正数ε，比如小于0.01，则在一次试验中A 一般不会发生．但是对A 进行独立重复试验时，总会遇到A 发生．这一现象被称为小概率原则．

§1.8 条件概率和乘法公式

例1.8.1　在一副扑克的52张中任取一张，已知抽到草花的条件下，求抽到的是草花5的概率.

解　设A=抽到草花，B=抽到草花5. 用w_j 表示草花j，则

$$A=\{w_j\mid 1\leqslant j\leqslant 13\},\quad B=\{w_5\}.$$

已知A 发生后试验的样本空间发生了变化，新的样本空间就是A. A 的样本点具有等可能性，B 是A 的子集，$|A|=13$, $|B|=1$. 用$\mathrm{P}(B|A)$ 表示要求的概率时，按照古典概率模型的定义，

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{|B|}{|A|}=\frac{1}{13}.$$

§1.8 条件概率和乘法公式

例1.8.1 在一副扑克的52张中任取一张, 已知抽到草花的条件下, 求抽到的是草花5的概率.

解 设A=抽到草花, B=抽到草花5. 用w_j 表示草花j, 则

$$A=\{w_j \mid 1\leqslant j\leqslant 13\},\quad B=\{w_5\}.$$

已知A 发生后试验的样本空间发生了变化,新的样本空间就是A. A 的样本点具有等可能性, B 是A 的子集, $|A|=13$, $|B|=1$. 用$\mathrm{P}(B|A)$ 表示要求的概率时, 按照古典概率模型的定义,

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{|B|}{|A|}=\frac{1}{13}.$$

§1.8 条件概率和乘法公式

设A，B 是事件，以后总用$P(B|A)$ 表示已知A 发生的条件下，B 发生的条件概率，简称为条件概率(conditional probability). 下面是条件概率的计算公式.

条件概率公式: 如果$\mathrm{P}(A)>0$，则

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)}$$

例1.8.2 新同事家有两个年龄不同的小孩. 假设男女孩的出生率相同.

(a) 已知老大是男孩的条件下，计算老二是男孩的概率;

(b) 已知至少有1个男孩的条件下，计算两个都是男孩的概率.

§1.8 条件概率和乘法公式

设A，B 是事件，以后总用$P(B|A)$ 表示已知A 发生的条件下，B 发生的条件概率，简称为条件概率(conditional probability)．下面是条件概率的计算公式．

条件概率公式：　如果$\mathrm{P}\left(A\right)>0$，则

$$\mathrm{P}\left(B|A\right)=\frac{\mathrm{P}\left(AB\right)}{\mathrm{P}\left(A\right)}$$

例1.8.2　新同事家有两个年龄不同的小孩．假设男女孩的出生率相同．

(a)　已知老大是男孩的条件下，计算老二是男孩的概率；

(b)　已知至少有1个男孩的条件下，计算两个都是男孩的概率．

§1.8 条件概率和乘法公式

解　用A_1, A_2 分别表示老大、老二是男孩, 则$\overline{A}_1, \overline{A}_2$ 分别表示老大、老二是女孩. 样本空间$\Omega = \{A_1A_2, \overline{A}_1\overline{A}_2, A_1\overline{A}_2, \overline{A}_1A_2\}$ 由
4个等可能样本点组成.

(a)　因为A_1, A_2 独立, 所以

$$\mathrm{P}(A_2|A_1) = \frac{\mathrm{P}(A_2A_1)}{\mathrm{P}(A_1)} = \frac{\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_1)}{\mathrm{P}(A_1)} = \mathrm{P}(A_2) = \frac{1}{2}.$$

(b)　事件$C = \{A_1A_2, A_1\overline{A}_2, \overline{A}_1A_2\}$ 表示至少有一个是男孩, $D = \{A_1A_2\}$ 表示两个都是男孩. 要计算的概率是

$$\mathrm{P}(D|C) = \frac{|D|}{|C|} = \frac{1}{3}.$$

§1.8 条件概率和乘法公式

解 用A_1, A_2 分别表示老大、老二是男孩, 则$\overline{A}_1, \overline{A}_2$ 分别表示老大、老二是女孩. 样本空间$\Omega = \{A_1A_2, \overline{A}_1\overline{A}_2, A_1\overline{A}_2, \overline{A}_1A_2\}$ 由
4个等可能样本点组成.

(a) 因为A_1, A_2 独立, 所以

$$\mathrm{P}(A_2|A_1) = \frac{\mathrm{P}(A_2A_1)}{\mathrm{P}(A_1)} = \frac{\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_1)}{\mathrm{P}(A_1)} = \mathrm{P}(A_2) = \frac{1}{2}.$$

(b) 事件$C = \{A_1A_2, A_1\overline{A}_2, \overline{A}_1A_2\}$ 表示至少有一个是男孩, $D = \{A_1A_2\}$ 表示两个都是男孩. 要计算的概率是

$$\mathrm{P}(D|C) = \frac{|D|}{|C|} = \frac{1}{3}.$$

§1.8 条件概率和乘法公式

例1.8.3 将一副扑克牌的52张随机均分给四家，设$A=$东家得到6张草花，$B=$西家得到3张草花，求$\mathrm{P}(B|A)$.

解 四家各有13张牌，已知A发生后，A的13张牌已固定，余下的39张牌在另三家中的分派是等可能的．由于余下的39张牌中恰有7张草花，所以

$$\mathrm{P}(B|A)=C_7^3C_{39-7}^{10}/C_{39}^{13}\approx 0.278.$$

§1.8 条件概率和乘法公式

例1.8.3　将一副扑克牌的52张随机均分给四家，设$A=$东家得到6张草花，$B=$西家得到3张草花，求$\mathrm{P}(B|A)$.

解　四家各有13张牌，已知A发生后，A的13张牌已固定，余下的39张牌在另三家中的分派是等可能的．由于余下的39张牌中恰有7张草花，所以

$$\mathrm{P}(B|A)=C_7^3C_{39-7}^{10}/C_{39}^{13}\approx 0.278.$$

§1.8 条件概率和乘法公式

乘法公式: 设$\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则

(1) $\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$;

(2) $\mathrm{P}(A_1A_2\cdots A_n)=\mathrm{P}(A_1)P(A_2|A_1)\cdots\mathrm{P}(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

证明 (1) 将条件概率公式$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(AB)/\mathrm{P}(A)$ 代入就得到结果. 对(2)式右边每个因子使用条件概率公式得到

$$
\begin{aligned}
& P(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\cdots\mathrm{P}(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \\
= & \frac{\mathrm{P}(A_1)}{1}\frac{\mathrm{P}(A_1A_2)}{\mathrm{P}(A_1)}\frac{\mathrm{P}(A_1A_2A_3)}{\mathrm{P}(A_2A_1)}\cdots\frac{\mathrm{P}(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)}{\mathrm{P}(A_1A_2\cdots A_{n-1})} \\
= & \mathrm{P}(A_1A_2\cdots A_n).
\end{aligned}
$$

§1.8 条件概率和乘法公式

乘法公式: 设$\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则

(1) $\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$;

(2) $\mathrm{P}(A_1A_2\cdots A_n)=\mathrm{P}(A_1)P(A_2|A_1)\cdots\mathrm{P}(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

证明 (1) 将条件概率公式$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(AB)/\mathrm{P}(A)$ 代入就得到结果. 对(2)式右边每个因子使用条件概率公式得到

$$
\begin{aligned}
& P(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\cdots\mathrm{P}(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \\
= \quad & \frac{\mathrm{P}(A_1)}{1}\frac{\mathrm{P}(A_1A_2)}{\mathrm{P}(A_1)}\frac{\mathrm{P}(A_1A_2A_3)}{\mathrm{P}(A_2A_1)}\cdots\frac{\mathrm{P}(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)}{\mathrm{P}(A_1A_2\cdots A_{n-1})} \\
= \quad & \mathrm{P}(A_1A_2\cdots A_n).
\end{aligned}
$$

§1.8 条件概率和乘法公式

例1.8.4 学生甲在毕业时向两个相互无关的用人单位递交了求职信. 根据经验, 他被第一个单位录用的概率为0.4, 被第二个单位录用的概率是0.5. 现在知道他至少被某个单位录用了, 计算他也被另一单位录用的概率.

解 用A_1, A_2 分别表示他被第1, 第2个单位录用, 则A_1, A_2 独立, $\mathrm{P}(A_1)=0.4$, $\mathrm{P}(A_2)=0.5$. 已知至少被某个单位录用等价于已知$B=A_1\cup A_2$ 发生. 用C 表示被另一单位录用, 则已知B 时$C=A_1A_2$. 要计算的概率是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(C|B) &= \mathrm{P}(A_1A_2|A_1\cup A_2)=\frac{\mathrm{P}(A_1A_2)}{\mathrm{P}(A_1\cup A_2)}\\
&= \frac{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)}{\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)-\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)}\\
&= \frac{0.4\times 0.5}{0.4+0.5-0.2}\\
&= \frac{2}{7}.
\end{aligned}
$$

§1.8 条件概率和乘法公式

例1.8.4 学生甲在毕业时向两个相互无关的用人单位递交了求职信. 根据经验, 他被第一个单位录用的概率为0.4, 被第二个单位录用的概率是0.5. 现在知道他至少被某个单位录用了, 计算他也被另一单位录用的概率.

解 用A_1, A_2 分别表示他被第1, 第2个单位录用, 则A_1, A_2 独立, $\mathrm{P}(A_1) = 0.4$, $\mathrm{P}(A_2) = 0.5$. 已知至少被某个单位录用等价于已知$B = A_1 \cup A_2$ 发生. 用C 表示被另一单位录用, 则已知B 时$C = A_1A_2$. 要计算的概率是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(C|B) &= \mathrm{P}(A_1A_2|A_1 \cup A_2) = \frac{\mathrm{P}(A_1A_2)}{\mathrm{P}(A_1 \cup A_2)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)}{\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)} \\
&= \frac{0.4 \times 0.5}{0.4 + 0.5 - 0.2} \\
&= \frac{2}{7}.
\end{aligned}
$$

§1.8 条件概率和乘法公式

设A 是试验S_1 下的事件, B 是试验S_2 下的事件. 如果试验S_1 和试验S_2 是独立进行的, 则A 的发生与否不影响B 的发生. 用公式表述出来就是$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$. 因此$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$ 也表示A, B 独立.

例1.8.5 如果$\mathrm{P}(A)>0$, 则$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 和$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$ 等价.

证明 当$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 成立, 有

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B).$$

当$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$, 用乘法公式得到$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

§1.8 条件概率和乘法公式

设A 是试验S_1 下的事件, B 是试验S_2 下的事件. 如果试验S_1 和试验S_2 是独立进行的, 则A 的发生与否不影响B 的发生. 用公式表述出来就是$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$. 因此$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$ 也表示A, B 独立.

例1.8.5 如果$\mathrm{P}(A)>0$, 则$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 和$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$ 等价.

证明 当$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 成立, 有

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B).$$

当$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$, 用乘法公式得到$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

§1.8 条件概率和乘法公式

设A 是试验S_1 下的事件, B 是试验S_2 下的事件. 如果试验S_1 和试验S_2 是独立进行的, 则A 的发生与否不影响B 的发生. 用公式表述出来就是$\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)$. 因此$\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)$ 也表示A, B 独立.

例1.8.5 如果$\mathrm{P}(A) > 0$, 则$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 和$\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)$ 等价.

证明 当$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 成立, 有

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)} = \mathrm{P}(B).$$

当$\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)$, 用乘法公式得到$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

§1.9 全概率公式

对于任何事件A, B, 利用概率的可加性得到

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(AB + \overline{A}B) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(\overline{A}B).$$

再用乘法公式得到

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) + \mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B|\overline{A}).$$

该公式被称为全概率公式. 这是一个常用的重要公式.

§1.9 全概率公式

例1.9.1 李教授7:30出发去参加8:30开始的论文答辩会. 根据以往的经验, 他骑自行车迟到的概率是0.05, 乘出租车迟到的概率是0.50. 他出发时首选自行车, 发现自行车有故障时再选择出租车. 设自行车有故障的概率是0.01. 计算他迟到的概率.

解 用B 表示他迟到, 用A 表示自行车有故障. 则$\mathrm{P}(B|A)$ 是乘出租车迟到的概率, $\mathrm{P}(B|\overline{A})$ 是骑自行车迟到的概率. 根据题意

$$\mathrm{P}(A)=0.01,\ \mathrm{P}(B|\overline{A})=0.05,\ \mathrm{P}(B|A)=0.50.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B|\overline{A})\\ &= 0.01\times 0.50+(1-0.01)\times 0.05\\ &= 0.054\,5.\end{aligned}$$

§1.9 全概率公式

例1.9.1 李教授7:30出发去参加8:30开始的论文答辩会. 根据以往的经验, 他骑自行车迟到的概率是0.05, 乘出租车迟到的概率是0.50. 他出发时首选自行车, 发现自行车有故障时再选择出租车. 设自行车有故障的概率是0.01. 计算他迟到的概率.

解 用B 表示他迟到, 用A 表示自行车有故障. 则$\mathrm{P}(B|A)$ 是乘出租车迟到的概率, $\mathrm{P}(B|\overline{A})$ 是骑自行车迟到的概率. 根据题意

$$\mathrm{P}(A)=0.01,\ \mathrm{P}(B|\overline{A})=0.05,\ \mathrm{P}(B|A)=0.50.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B|\overline{A})\\ &= 0.01\times 0.50+(1-0.01)\times 0.05\\ &= 0.0545.\end{aligned}$$

§1.9 全概率公式

例1.9.2 (敏感问题调查) 在调查服用过兴奋剂的运动员在全体运动员中所占的比例p 时, 如果采用直接的问卷方式, 被调查者一般不会回答真相. 为得到实际的p 同时又不侵犯个人隐私, 调查人员先请被调查者在心目中任意选定一个整数(不说出). 然后请他在下面的问卷中选择回答“是”或“否”.

当你选的最后一位数是奇数, 请回答: 你选的是奇数吗?
当你选的最后一位数是偶数, 请回答: 你服用过兴奋剂吗?

因为回答只在“是”或“否”中选一个, 所以没有人知道被调查者回答的是哪个问题, 更不知道他是否服用过兴奋剂. 假设运动员们随机地选定数字, 并且能按要求回答问题, 当回答“是”的概率为p_1时, 求p.

§1.9 全概率公式

解 对任一个运动员，用B 表示他回答“是”，用A 表示他选到奇数，则$\mathrm{P}(A)=0.5$, $\mathrm{P}(\overline{A})=0.5, \mathrm{P}(B|A)=1, \mathrm{P}(B|\overline{A})=p$. 利用全概率公式得到

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathrm{P}(B) \\ &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B|\overline{A}) \\ &= 0.5+0.5p. \end{aligned}$$

于是得到

$$p=2p_1-1.$$

实际问题中， p_1 是未知的，需要经过调查得到. 假定调查了n 个运动员，其中有k 个回答“是”，则可以用$\hat{p}_1=k/n$ 估计p_1，于是可以用

$$\hat{p}=2k/n-1$$

估计p.

§1.9 全概率公式

如果调查了200个运动员，其中有115个运动员回答“是”，则p 的估计是

$$\hat{p} = 2 \times 115/200 - 1 = 15\%.$$

上面的公式和下面的直观理解是一致的：200个人中大约有一半人是因为选中奇数才回答“是”，所以余下的一半人中回答“是”的人才真的“是”．于是得到

$$\hat{p} = (115 - 100)/100 = 15\%.$$

§1.9 全概率公式

全概率公式: 如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容, $B \subset \bigcup_{j=1}^n A_j$, 则

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{j=1}^n \mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B|A_j).$$

证明 因为$B = B\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n BA_j$, 且$BA_1, BA_2, \cdots$ 互不相容, 所以

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(B\bigcup_{j=1}^n A_j) \\ &= \mathrm{P}(\bigcup_{j=1}^n BA_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathrm{P}(BA_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B|A_j).\end{aligned}$$

§1.9 全概率公式

全概率公式: 如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容, $B \subset \bigcup_{j=1}^n A_j$, 则

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B|A_j).$$

证明　因为$B = B\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n BA_j$, 且$BA_1, BA_2, \cdots$ 互不相容, 所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(B\bigcup_{j=1}^{n} A_j) \\
&= \mathrm{P}(\bigcup_{j=1}^{n} BA_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(BA_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B|A_j).
\end{aligned}$$

§1.9 全概率公式

如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容, $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$, 则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是完备事件组, 这时$B \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ 自然成立, 于是全概率公式可以推广到可列个事件的情况.

§1.9 全概率公式

例1.9.3 一个被劫持的人质被隐藏在地区A_j 的概率是p_j, $j=1,2,\cdots,6$. 人质在地区A_j 隐藏时, 被解救的概率是b_j . 根据调查的线索和各地区的办案能力, 公安部门对p_j 和b_j 的判断如下:

j	1	2	3	4	5	6
p_j	0.3	0.25	0.2	0.15	0.05	0.05
b_j	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95

计算人质能够被解救的概率.

§1.9 全概率公式

解　就用A_j 表示人质被藏在地区A_j，用B 表示人质被解救，则$A_1, A_2, \cdots, A_6$ 是完备事件组，并且有

$$\mathrm{P}(A_j) = p_j, \ \mathrm{P}(B|A_j) = b_j.$$

将已知的p_j, b_j 代入全概率公式(4.3)得到

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{j=1}^{6} \mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B|A_j) = \sum_{j=1}^{6} p_j b_j = 0.7775.$$

人质有77.75% 的概率被解救.

§1.9 全概率公式

上面的例子中，人质被解救的概率$\mathrm{P}(B)$ 偏小的原因是人质被隐藏在A_1 的概率p_1 较大，但是b_1 又较小. 如果能增加地区A_1 的警力，适当减少在地区A_5 和A_6 的警力，则会增加人质被解救的概率. 例如通过适当调配警力，可以使得b_j 改动如下:

j	1	2	3	4	5	6
p_j	0.3	0.25	0.2	0.15	0.05	0.05
b_j	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70

这时的b_j 之和不变(可以认为不另外增加警力)，但是人质被解救的概率增加至

$$\mathrm{P}(B)=\sum_{j=1}^{6}\mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B|A_j)=\sum_{j=1}^{6}p_jb_j=0.8725.$$

§1.10 贝叶斯公式

贝叶斯(Bayes)公式: 对于事件A, B, 当$\mathrm{P}(B)>0$, 利用条件概率公式得到

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(B)}.$$

对于$\mathrm{P}(B)$ 再利用全概率公式, 得到

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B|\overline{A})}.$$

§1.10 贝叶斯公式

例1.10.1(接例1.9.1) 在例1.9.1中，如果8:30时李教授还没到答辩会，计算他出发时自行车发生故障的概率.

解 仍用B表示迟到，用A表示出发时自行车发生故障. 要计算$\mathrm{P}(A|B)$. 因为

$$\mathrm{P}(A)=0.01,\ \mathrm{P}(B|\overline{A})=0.05,\ \mathrm{P}(B|A)=0.50,$$

所以用贝叶斯公式得到

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A|B) &= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B|\overline{A})}\\ &= \frac{0.01\times 0.50}{0.01\times 0.50+(1-0.01)\times 0.05}\\ &= 0.0917.\end{aligned}$$

这是已知李教授迟到的条件下，他出发时遇到自行车有故障的概率.

§1.10 贝叶斯公式

例1.10.1(接例1.9.1) 在例1.9.1中，如果8:30时李教授还没到答辩会，计算他出发时自行车发生故障的概率.

解 仍用B表示迟到，用A表示出发时自行车发生故障. 要计算$\mathrm{P}(A|B)$. 因为

$$\mathrm{P}(A)=0.01,\ \mathrm{P}(B|\overline{A})=0.05,\ \mathrm{P}(B|A)=0.50,$$

所以用贝叶斯公式得到

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A|B) &= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B|\overline{A})}\\ &= \frac{0.01\times 0.50}{0.01\times 0.50+(1-0.01)\times 0.05}\\ &= 0.091\,7.\end{aligned}$$

这是已知李教授迟到的条件下，他出发时遇到自行车有故障的概率.

§1.10 贝叶斯公式

在各种考试中，为了降低批改考卷的工作强度，越来越多的人倾向于把题目出成选择题. 但是许多人并不了解出选择题的奥秘，看看下面的例子.

例1.10.2 在回答有A, B, C, D 四个选项的选择题时，由于题目较难，全班只有5% 的学生能解出正确答案. 假设能解出答案的学生回答正确的概率是0.99, 不能解出答案的学生随机猜测答案. 计算答题正确的学生是猜对答案的概率. 评价这样出题是否合适.

§1.10 贝叶斯公式

在各种考试中，为了降低批改考卷的工作强度，越来越多的人倾向于把题目出成选择题. 但是许多人并不了解出选择题的奥秘，看看下面的例子.

例1.10.2 在回答有A, B, C, D 四个选项的选择题时，由于题目较难，全班只有5% 的学生能解出正确答案. 假设能解出答案的学生回答正确的概率是0.99，不能解出答案的学生随机猜测答案. 计算答题正确的学生是猜对答案的概率. 评价这样出题是否合适.

§1.10 贝叶斯公式

解　根据题目，全班有95% 的学生在猜测答案. 用A 表示一个学生猜测答案，则$\mathrm{P}(A)=0.95$. 用B 表示他回答正确，则

$$\mathrm{P}(B|A)=0.25,\ \mathrm{P}(B|\overline{A})=0.99.$$

$\mathrm{P}(A|B)$ 是要计算的概率. 利用贝叶斯公式得到

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A|B) &= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B|\overline{A})} \\ &= \frac{0.95\times 0.25}{0.95\times 0.25+(1-0.95)\times 0.99} \\ &= 0.827\,5.\end{aligned}$$

结果说明回答正确的人中有近83% 的人是猜出答案的，所以应当认为这样的出题不合适.

§1.10 贝叶斯公式

问题出在题目的难度过大了. 如果把题目的难度降低, 使得全班有90% 的人能够解出答案. 则$\mathrm{P}(A) = 1 - 0.9 = 0.1$. 答题正确的学生是猜对答案的概率降低为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A|B) &= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) + \mathrm{P}(\bar{A})\mathrm{P}(B|\bar{A})} \\
&= \frac{0.1 \times 0.25}{0.1 \times 0.25 + (1 - 0.1) \times 0.99} \\
&= 0.027\,3.
\end{aligned}
$$

这样的出题就基本合理了. 一般来讲, 难题不应该出成选择题.

§1.10 贝叶斯公式

例1.10.3(疾病普查问题) 艾滋病是人类健康的大敌，发病率还在逐年上升. 为了有效防止艾滋病病毒(HIV)流入我国，保护中国公民的健康，1995年在我国的出入境管理处曾制订了对HIV的普查规定：对于在国外生活或工作两个月以上的中国公民回国入境时进行HIV的验血检查. 但是没实行多久该规定就被叫停了.

让我们假设当时符合被检查条件的公民中携带HIV的比例是十万分之一，验血检查的准确率是95%(有病被正确诊断和没病被正确诊断的概率都是95%). 甲在检查后被通知带有HIV，计算甲的确带有HIV的概率.

§1.10 贝叶斯公式

解 设A=甲携带HIV, B = 甲被检查出携带HIV. 根据题意,

$$\mathrm{P}(A) = 10^{-5}, \quad \mathrm{P}(B|A) = 0.95, \quad \mathrm{P}(B|\overline{A}) = 0.05.$$

用贝叶斯公式得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})} \\
&= \frac{10^{-5} \times 0.95}{10^{-5} \times 0.95 + (1 - 10^{-5}) \times 0.05} \\
&= \frac{0.95}{0.95 + 99\,999 \times 0.05} \\
&= 0.000\,19.
\end{aligned}$$

不带HIV的概率$\mathrm{P}(\overline{A}|B) = 0.999\,81 > 99.9\%$.

§1.10 贝叶斯公式

例1.10.3的结论说明检查出携带HIV距离真正携带HIV还差得很远. 也说明这样的普查没有什么实质意义. 造成这个结果的原因是发病率较低和诊断的准确性还不够高. 可以设想, 如果被检查人群中没有人携带HIV, 则$\mathrm{P}(A|B) = 0$; 如果检查的正确率是100%, 则$\mathrm{P}(A|B) = 1$.

正因为以上的原因, 可以说对于发病率很低的疾病进行普查意义是不大的, 特别是在检查的准确性也不是很高的情况下. 医生通常是了解这一点的: 在健康普查中, 如果某人被查出有病, 医生一般并不下结论, 而是要求他进行复查. 复查再确定有病, 则他真有病的概率就会增加.

§1.10 贝叶斯公式

例1.10.4 在例1.10.3中，甲被查出携带HIV后再次复查，如果复查又被认为携带HIV，计算他真的携带HIV的概率.

解 仍用A表示甲携带HIV，用B表示复查出携带HIV. 这时

$$\mathrm{P}(A) = 0.000\,19,\quad \mathrm{P}(B|A) = 0.95,\quad \mathrm{P}(B|\overline{A}) = 0.05,$$

再用贝叶斯公式计算出他携带HIV的概率是

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A|B) &= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B|\overline{A})} \\ &= \frac{0.000\,19\times 0.95}{0.000\,19\times 0.95+(1-0.000\,19)\times 0.05} \\ &= 0.0036. \end{aligned}$$

现在，他真的携带HIV的概率提高到0.36%.

§1.10 贝叶斯公式

例1.10.4 在例1.10.3中，甲被查出携带HIV后再次复查，如果复查又被认为携带HIV，计算他真的携带HIV的概率.

解 仍用A表示甲携带HIV，用B表示复查出携带HIV. 这时

$$\mathrm{P}(A)=0.000\,19,\ \mathrm{P}(B|A)=0.95,\ \ \mathrm{P}(B|\overline{A})=0.05,$$

再用贝叶斯公式计算出他携带HIV的概率是

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A|B) &= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B|\overline{A})}\\ &= \frac{0.000\,19\times 0.95}{0.000\,19\times 0.95+(1-0.000\,19)\times 0.05}\\ &= 0.0036.\end{aligned}$$

现在，他真的携带HIV的概率提高到0.36%.

§1.10 贝叶斯公式

以上的举例也告诉我们，确诊发病率很低的疾病时应当十分慎重.

定理1.10.1 如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，$B \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$，则$\mathrm{P}(B) > 0$ 时，有

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

§1.10 贝叶斯公式

证明 由全概率公式得到

$$\mathrm{P}(B)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i).$$

再由条件概率公式得到

$$\mathrm{P}(A_j|B)=\frac{\mathrm{P}(A_jB)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)},\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是完备事件组时，总有 $B\subset\bigcup_{j=1}^{n}A_j=\Omega$.