

第二卷

第三分册

数学名著译丛

微积分和 数学分析引论

R.柯朗 F.约翰 著



科学出版社

www.sciencep.com

目 录

第六章 微分方程	765
6.1 空间质点运动的微分方程.....	765
a. 运动方程(765) b. 能量守恒原理(767) c. 平衡、稳定性(769)	
d. 在平衡位置附近的小振动(771) e. 行星运动(774) 练习 6.1e	
(780) f. 边值问题, 有载荷的绳与有载荷的梁(781)	
6.2 一般的一阶线性微分方程.....	787
a. 分离变量法(787) b. 一阶线性方程(789) 练习 6.2(791)	
6.3 高阶线性微分方程.....	792
a. 叠加原理, 解通(792) b. 二阶齐次微分方程(796) 练习 6.3b	
(798) c. 非齐次微分方程, 参数变易法(800) 练习 6.3c(803)	
6.4 一般的一阶微分方程.....	805
a. 几何解释(805) b. 曲线族的微分方程, 奇解, 正交轨线(807)	
c. 解的存在唯一性定理(809) 练习 6.4(813)	
6.5 微分方程组和高阶微分方程.....	816
练习 6.5(817)	
6.6 用待定系数法求积分.....	818
练习 6.6(819)	
6.7 电荷引力的位势和拉普拉斯方程.....	820
a. 质量分布的位势(820) b. 位势的微分方程(824) c. 均匀双层	
位势(825) d. 平均值定理(828) e. 圆的边值问题, 普注松	
(Poisson)积分(829) 练习 6.7(832)	
6.8 来自数学物理的偏微分方程的其它例子.....	832
a. 一维波动方程(832) b. 三维空间的波动方程(834) c. 自由	
空间中的马克斯韦耳(Maxwell)方程(836) 练习 6.8(839)	
第七章 变分学	842
7.1 函数及其极值.....	842
7.2 泛函极值的必要条件.....	846

a. 第一变分等于零(846) 习题7.2a(847) b. 欧拉微分方程的推导(847) c. 基本引理的证明(851) d. 一些特殊情形的欧拉微分方程的解. 例子(852) 习题 7.2d(855) e. 欧拉表达式恒等于零的情形(856)	
7.3 推广	857
a. 具有多于一个自变函数的积分(857) b. 例子(859) 习题7.3b(861) c. 哈密尔顿原理. 拉格朗日方程(861) d. 含高阶导数的积分(863) e. 多自变量(864)	
7.4 含附带条件的问题. 拉格朗日乘子	866
a. 通常的附带条件(866) 习题7.4a(868) b. 其他类型的附带条件(869) 习题7.4b(870)	
第八章 单复变函数	872
8.1 幂级数表示的复函数	872
a. 极限. 复数项的无穷级数(872) b. 幂级数(875) c. 幂级数的微分法和积分法(876) d. 幂级数的例子(879)	
8.2 单复变函数一般理论的基础	880
a. 可微性条件(880) b. 微分学的最简单运算(883) c. 保角变换. 反函数(886)	
8.3 解析函数的积分	887
a. 积分的定义(887) b. 柯西定理(889) c. 应用. 对数函数, 指数函数及一般幂函数(891)	
8.4 柯西公式及其应用	895
a. 柯西公式(895) b. 解析函数的幂级数展式(896) c. 函数论与位势理论(899) d. 柯西定理的逆定理(899) e. 解析函数的零点, 极点和留数(900)	
8.5 留数定理对复积分(围道积分)的应用	902
a. 证明公式(902) b. 证明公式(903) c. 留数定理对于有理函数的积分的应用(904) d. 留数定理与常系数微分方程(907)	
8.6 多值函数与解析开拓	908
问题(8.1—8.5)(912)	
解答	921

第六章 微分方程

在第一卷第九章中,我们已经讨论过特殊形状的微分方程.在本书的范围内,虽然我们不可能试图详细地展开它的一般理论,但是,在这一章中,我们从力学中的进一步的例子出发,运用多元函数微积分,至少也能给出微分方程这个课题某些原理的一个梗概.

6.1 空间质点运动的微分方程

a. 运动方程

在第一卷(第四章第421—447页)中,我们讨论了限定在 x, y 平面内移动的质点的运动.现在我们去掉这一限制,考虑一集中于坐标为 (x, y, z) 的点上的质量 m . 从原点到该质点的定位向量具有分量 x, y, z , 我们记之为 \mathbf{R} . 如果能把 (x, y, z) 或 \mathbf{R} 表成时间 t 的函数,那么,质点的运动就在数学上得到了表示. 同以前一样,如果用圆点标记关于时间 t 的微商,那么长度为

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (1)$$

的向量 $\dot{\mathbf{R}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 表示速度, 向量 $\ddot{\mathbf{R}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ 表示质点的加速度.

确定运动的基本工具是牛顿第二定律¹⁾, 即加速度向量 $\ddot{\mathbf{R}}$ 与质量 m 的乘积等于作用在质点上的力 $\mathbf{F} = (X, Y, Z)$:

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} \quad (2a)$$

或, 用分量式,

1) "Mutationem motuo proportionalem esse vi mofrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur" (即, 运动之变化与作用力成比例, 且发生在沿力的作用直线的方向上.)

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z. \quad (2b)$$

只要给出关于力 \mathbf{F} 的充分信息, 这些关系式¹⁾ 就能用来决定运动。

一个例子是地球表面附近的表示重力的恒力场。如果取重力作用方向为 z 轴的负方向, 则重力可表为向量

$$\mathbf{F} = (0, 0, -mg) = -mg(\text{grad } z), \quad (3)$$

其中 g 是重力加速度常数(见第一卷第 422 页)。

另一个例子是, 集中于坐标系原点上的质量 μ 按照牛顿万有引力定律产生的吸引力场(见第一卷第 437 页)。如果

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\mathbf{R}|$$

是质量为 m 的质点 (x, y, z) 与原点的距离, 则力场可表示成

$$\mathbf{F} = \mu m \gamma \left(\text{grad} \frac{1}{r} \right), \quad (4a)$$

其中 γ 是万有引力常数。在这种情况下, 牛顿运动定律 (2a) 表为

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mu \gamma \text{grad} \frac{1}{r} \quad (4b)$$

或, 用分量式,

$$\ddot{x} = -\mu \gamma \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\mu \gamma \frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\mu \gamma \frac{z}{r^3}.$$

一般说来, 如果 \mathbf{F} 是分量为位置的已知函数 $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ 的力场, 则运动方程

$$m\ddot{x} = X(x, y, z), \quad m\ddot{y} = Y(x, y, z), \quad m\ddot{z} = Z(x, y, z) \quad (5)$$

构成关于三个未知函数 $x(t), y(t), z(t)$ 的三个微分方程的系统。质点力学的基本问题是: 当运动开始时(比如说, 在时间 $t = 0$), 已知质点的位置(即坐标 $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $z_0 = z(0)$)和初速度(即量 $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$, $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$, $\dot{z}_0 = \dot{z}(0)$), 从微分方程去确定质点的轨道。寻求既满足这些初条件, 又对所有 t 值满足三个微分方程的三个函数的问题就是通常所谓的微分方程组的求解。

1) 向量 $m\ddot{\mathbf{R}}$ 称为动量, 所以牛顿定律说的是“力等于动量的变化率”。

或积分¹⁾问题。

b. 能量守恒原理

速度向量 $\dot{\mathbf{R}}$ 与质点运动方程(2a)作数量积

$$m\dot{\mathbf{R}} \cdot \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{R}} = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} \quad (6a)$$

可得出一个重要结果。上式左端可写成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v^2, \quad (6b)$$

即质点的动能(运动能) $\frac{1}{2} m v^2$ 对时间的导数。关于 t 从 t_0 到 t_1 积分方程(6a),我们得到在 t_0 到 t_1 时间间隔内质点动能的改变量是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 &= \int_{t_0}^{t_1} \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt \quad (6c) \\ &= \int (X dx + Y dy + Z dz), \end{aligned}$$

其中线积分展布于质点从 t_0 到 t_1 经过的路径上。有向弧上的积分

$$\int X dx + Y dy + Z dz$$

称为沿该弧运动时力 $\mathbf{F} = (X, Y, Z)$ 所作的功²⁾。因此,(6c)称为能量方程:动能的增加等于在运动中外力所作的功。

如果力场能表成某函数的梯度,即

$$\mathbf{F} = \text{grad} \phi, \quad (7a)$$

在这种重要情形下,微分形式

$$X dx + Y dy + Z dz = d\phi$$

的积分不依赖于路径,仅依赖于路径的起点和终点(见第96页)。按照 Helmholtz (海姆霍兹) 的说法,(7a)类型的力场称为保守

1) 由于解微分方程可认为是通常积分过程的一般化,因而在这里用积分一词。

2) 见第一卷第444页。引入弧长 s 作参数,线积分有形式

$$\int \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds} ds,$$

因而,它等于力沿运动方向的分量与距离乘积的和的极限。

场¹⁾。对保守场, 用 $U = -\phi$ 引入势能(位能) U , 则运动方程的形状是:

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\text{grad}U$$

或, 用分量式,

$$m\ddot{x} = -U_x, \quad m\ddot{y} = -U_y, \quad m\ddot{z} = -U_z. \quad (7b)$$

势能作为位置 (x, y, z) 的函数, 在相差一个任意常数的范围内, 是由力场所确定的。我们得到保守力在运动中所作的功为

$$\int Xdx + Ydy + Zdz = -\int dU = U_0 - U_1,$$

其中 U_0 和 U_1 分别是质点在时刻 t_0 和 t_1 的位置上的势能²⁾的值。与(6c)比较, 得到

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 + U_0.$$

因此, 在运动中量 $\frac{1}{2}mv^2 + U$ 在任何时刻 t_0 和 t_1 有相同的值。无须作这些概念的物理解释, 我们已经得到了保守力场中质点的能量守恒定律的一种形式:

总能量——即, 动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 与势能 U 之和——在运动中保持常数。

在下节的例题里, 我们演示这个定理怎样用于运动方程的实际求解。

由方程(3)和(4 a)定义的两个力场都是保守场。在均匀重力场(3)中, 运动方程化简为

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g. \quad (8a)$$

很简单, 它们的通解是

$$x = a_1t + a_2, \quad y = b_1t + b_2, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2. \quad (8b)$$

显然, 这里常数 (a_2, b_2, c_2) 给出质点在时间 $t = 0$ 的初位置, 常数 (a_1, b_1, c_1) 给出初速度。由方程(8b)以时间 t 作为参数给出的质点轨迹, 是其轴平行于 z 轴的一条抛物线。由于力场是

1) “保守”一词源出于我们马上将要推出的能量守恒定理。

$-mg \operatorname{grad} z$, 势能应是 $U = mgz + \text{常数}$. U 的变化与高度 z 的变化成比例. 因而, 能量守恒定律的形式为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + mgz &= \text{常数} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 \\ &= \frac{1}{2}m(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + mgc_2, \end{aligned} \quad (8c)$$

所以, 在轨道的最高点处速度 v 最小.

代替质点的自由降落, 我们考虑在重力场 $\mathbf{F} = -mg \operatorname{grad} z$ 的影响下, 约束于曲面 $z = f(x, y)$ 之上, 且反作用力垂直于该曲面¹⁾ 的质点的运动. 由于反作用力在运动方向上没有分力, 因而不做功, 在运动中所作的功是保守重力场作的功. 因此, 可得出与自由落体一样的能量方程

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{常数}, \quad (9)$$

区别仅在于现在 $z = f(x, y)$ 是坐标 x, y 的一个给定的函数.

c. 平衡. 稳定性

保守力场中质点的运动方程

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\operatorname{grad} U \quad (10a)$$

能用于讨论平衡位置附近的运动. 如果质点保持静止, 我们称它在力场的影响下平衡. 为使质点平衡, 在考虑的整个时间间隔里它的速度和加速度必须都是0. 因此, 运动方程 (10a) 引出

$$\operatorname{grad} U = 0 \quad (10b)$$

或

$$U_x = U_y = U_z = 0 \quad (10c)$$

是平衡的必要条件. 从而, 一个平衡位置 (x_0, y_0, z_0) 必是势能 U 的一个临界点. 反之, 因为常数向量

$$\mathbf{R} = (x_0, y_0, z_0)$$

显然满足 (10a), 所以, U 的每一临界点 (x_0, y_0, z_0) 都是静止的一个

1) 球面摆提供了一个例子, 在那里, 一个质点被约束在一球面上运动. 试与第一卷第429页讨论过的曲线上的运动进行比较.

可能的位置。

特别重要的是平衡的稳定性概念。稳定性是指：如果给平衡状态以轻微的扰动，由此产生的整个运动与静止状态仅有微小的区别¹⁾。更确切地说就是，设 r_1 和 v_1 是任意正数，我们能找到与 r_1 和 v_1 对应的如此之小的两个正数 r_0, v_0 ，使得只要质点离开平衡位置移动的距离不大于 r_0 ，且出发时的速度不大于 v_0 ，那么在它整个后继的运动中它与平衡点的距离永远不能大于 r_1 及速度永远不能大于 v_1 。

特别有趣的是，在势能取严格相对最小值²⁾（相对最小值即极小值——译者注）的点上，平衡是稳定的。值得注意的是，我们无须实际解出运动方程就能证明关于稳定性的这个命题。为简单起见，假设考虑的平衡位置是原点（借助变换总是能作到的），此外，因为势能允许加上一个任意常数，故我们可假定 $U(0,0,0) = 0$ 。由于 U 在原点是严格相对最小值，我们能找到正数 $r < r_1$ ，使得关于原点的半径为 r 的球面及其内部除原点外处处有 $U > 0$ 。因此， U 在球面上的最小值是一正数 a ，因为 U 连续，我们可求得 $r_0 < r$ ，使得在关于原点的半径为 r_0 的球体内

$$U(x, y, z) < \frac{a}{2} \text{ 和 } U(x, y, z) < \frac{1}{4}mv_1^2.$$

此外，设正数 v_0 小到使 $\frac{1}{2}mv_0^2 < \frac{a}{2}$ 和 $\frac{1}{2}mv_0^2 < \frac{1}{4}mv_1^2$ 都成立。那么，当质点的初位置与原点距离小于 r_0 ，初速度小于 v_0 时，质点的初始总能量就满足不等式

-
- 1) 用约束于曲面 $z = f(x, y)$ 上，在重力作用下的质点的类似的二维运动问题能够很好地解释这个概念。因平衡位置是势能 $mgz = mgt(x, y)$ 的临界点，在此，就是曲面 $z = f(x, y)$ 的最高点或最低点或鞍点。在重力作用下，处在向下凸的球形碗的最低点的静止质点的平衡是稳定的。相反，在向上凸的球形碗的最高点静止的质点处于不稳定平衡；即使最轻微的扰动都会引起位置的巨大变化。由于总可以假设质点受到小扰动，所以，不稳定平衡是不能保持的，并且未必能观察得到。
 - 2) 在严格(相对)最小点上， U 的值小于它的一个充分小邻域内的所有其余点上的值。定义见第326—7页。

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) \leq \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}a < a, \quad (11a)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) < \frac{1}{4}mv_1^2 + \frac{1}{4}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (11b)$$

由于能量在整个运动中是常数,从(11a)看出,在后来的任何时刻

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) < a,$$

从而,

$$U(x, y, z) < a.$$

由于质点最初处于半径为 r 的球的内部,又由于在球面上 $U \geq a$,因此,质点永远不能到达此球的表面. 这就证明了质点与原点的距离永远不能超过 $r < r_1$. 又因在半径为 r 的球内部 $U \geq 0$,从(11b)可得

$$\frac{1}{2}mv^2 < \frac{1}{2}mv_1^2.$$

因此,质点的速度永远不能超过值 v_1 ,证毕.

d. 在平衡位置附近的小振动

在对应于势能最小值的稳定平衡位置附近的质点运动能用简单方法去近似. 为简单起见,限于讨论在 x, y 平面上的运动,并假设没有作用于 z 轴方向上的力. 我们还假设势能 $U(x, y)$ 在原点取最小值, $U(0, 0) = 0$. 此外,在这个最小值点上 $U_x = U_y = 0$. 按 Taylor (泰勒)定理展开 U 得到

$$U = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \dots\dots\dots$$

如果二次型

$$Q(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) \quad (12a)$$

正定¹⁾,也就是

1) 见第349页. Q 的正定性质是严格相对最小值的充分条件,但并非必要的. 但是, Q 既非不定又非负定是必要的.

$$a > 0, ac - b^2 > 0, \quad (12b)$$

则函数 U 在原点有严格相对最小值。假设满足条件 (12b), 则在平衡位置原点的充分小的邻域内能够用二次型 Q 足够准确地代替势能 U^0 , 在此假设下, 运动方程形为

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\text{grad}Q$$

或

$$m\ddot{x} = -ax - by, \quad m\ddot{y} = -bx - cy. \quad (12c)^2$$

如果先将 x, y 轴旋转一个适当选择的角度 ϕ , 使新坐标轴与椭圆 $Q = \text{常数}$ 的主轴重合, 那么, 方程 (12c) 能够完全积分。作正交变换

$$x = \xi \cos \phi - \eta \sin \phi, \quad y = \xi \sin \phi + \eta \cos \phi,$$

此处 ϕ 根据下式确定

- 1) 我们不试图在此严格检验这一“似乎有理”的假设是合理的。
- 2) 我们可再来解释这些方程近似于被约束于曲面 $z = f(x, y)$ 之上并在曲面最小值点附近运动的质点在重力作用下的运动方程。考虑到质点受重力 $(0, 0, -mg)$ 和与曲面垂直的反作用力 $(-\lambda f_x, -\lambda f_y, \lambda)$ (λ 是未定乘子) 的作用, 这里确切的运动方程是

$$\ddot{x} = -\lambda f_x, \quad \ddot{y} = -\lambda f_y, \quad \ddot{z} = -g + \lambda.$$

注意到

$$\ddot{z} = \frac{d^2 f}{dx^2} \dot{x}^2 + f_{xx} \dot{x}^2 + 2f_{xy} \dot{x}\dot{y} + f_{yy} \dot{y}^2,$$

我们可消去 λ , 而且得到关于两个未知函数的方程

$$\ddot{x} = -\lambda f_x, \quad \ddot{y} = -\lambda f_y,$$

其中

$$\lambda = \frac{g + f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2}{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

如果 f 在原点取最小值, 并由二次型

$$f = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) \quad (13a)$$

作近似。则在原点附近, 忽略全部非线性项后, 得到形如 (12c) 的微分方程

$$\ddot{x} = -g(\alpha x + \beta y), \quad \ddot{y} = -g(\beta x + \gamma y). \quad (13b)$$

例如, 如果曲面是球面

$$z = L - \sqrt{L^2 - x^2 - y^2}$$

(“长度为 L 的球面摆”), 我们得出

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L}x, \quad \ddot{y} = -\frac{g}{L}y. \quad (13c)$$

$$Q = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) - \frac{1}{2}(\alpha\xi^2 + \gamma\eta^2),$$

其中 α, γ 是适当的正数¹⁾。在新的直角坐标系 ξ, η 中, 运动方程 (12c) 变成

$$m\ddot{\xi} = -\alpha\xi, \quad m\ddot{\eta} = -\gamma\eta. \quad (14a)$$

与第一卷(第 428 页)一样, 这两个方程都能完全积分。我们得到

$$\xi = A_1 \sin \sqrt{\frac{\alpha}{m}}(t - c_1), \quad \eta = A_2 \sin \sqrt{\frac{\gamma}{m}}(t - c_2), \quad (14b)$$

此处 c_1, c_2, A_1, A_2 是积分常数, 它们能使运动满足任何指定的初条件²⁾。

解的形式说明, 在稳定平衡位置附近的运动是由 ξ 和 η 两个主方向上的简谐振动迭加而成的, 振动的频率是 $\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$ 和 $\sqrt{\frac{\gamma}{m}}$ ³⁾。这类振动的一般讨论证明, 复合运动可以取多种形式, 但在这里我们将不作这样的讨论。

举几个这类复合振动的例子。我们首先考虑由方程

$$\xi = \sin(t + c), \quad \eta = \sin(t - c)$$

表示的运动。消去时间 t , 得到方程

$$(\xi + \eta)^2 \sin^2 c + (\xi - \eta)^2 \cos^2 c = 4 \sin^2 c \cos^2 c,$$

它表示一个椭圆。振动的两个分量有相同的频率 1 和相同的振幅 1, 但是位相差为 $2c$ 。如果位相差连续取 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 间的全体值, 对应的椭圆就从退化直线 $\xi - \eta = 0$ 变到圆 $\xi^2 + \eta^2 = 1$, 而振动从所谓线性振动变到圆振动(参看图 6.1—6.3)。

1) 我们立即看到, ϕ 是由方程

$$\tan^2 \phi = \frac{2b}{a-c}$$

决定的。由 Q 的正定性推出 α, γ 为正。

2) 有趣的是, 在不稳定平衡的情况下, 常数 α, γ 至少一个是负的, (14b) 中的三角函数要用双曲函数代替, 坐标 ξ, η 不能同时保持对所有的 t 有界。

3) 在球面摆 (13c) 的情形下, 两频率有相同的值 $\sqrt{\frac{g}{L}}$ 。

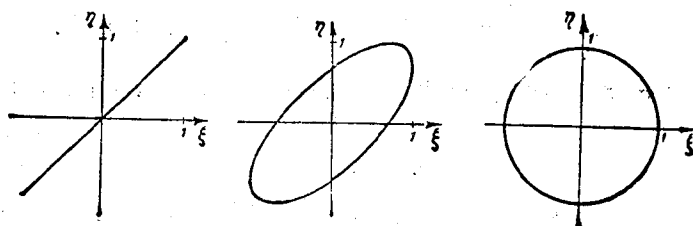


图 6.1—6.3 振动的简图

第二例，如果考虑由方程

$$\xi = \sin t, \quad \eta = \sin 2(t - c)$$

表示的运动，其中频率不再相等，我们得到显然更复杂的振动图

象。图 6.4—6.6 分别给出位相差为 $c = 0, c = \frac{\pi}{8}$ 和 $c = \frac{\pi}{4}$ 的曲

线。在前两种情况下，质点在一条封闭曲线上连续运动，但在最后一种情况下，它在抛物线 $\eta = 2\xi^2 - 1$ 的弧上往复摆动。两相交成直角的方向上的不同简谐振动迭加得到的曲线通常称为 Lissajous 图形。

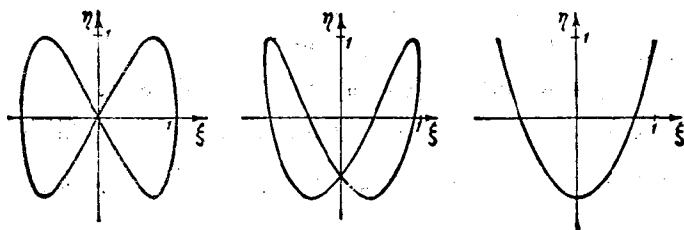


图 6.4—6.6 振动的简图

e. 行星运动¹⁾

在上面讨论的例题中，运动微分方程能够直接(或经简单的变换后)被写成每一坐标仅出现在一个微分方程当中，因而能用初等积分法来定解。现在，我们来考虑一种最重要的运动情况，这时运

1) 圆运动的特殊情形已在第一卷(第 437 页)讨论过。

动方程已不再能够分离成上述简单形式，以至在积分它们时多少包含着更复杂的计算。所讨论的问题是从牛顿引力定律推导开普勒 (Kepler) 行星运动定律。假设在坐标系的原点有一质量为 μ 的物体 (例如, 太阳), 每单位质量受它的万有引力是向量

$$r\mu \operatorname{grad} \frac{1}{r}.$$

质量为 m 的质点 (一个行星) 在这个力场影响下怎样运动呢? 运动方程是 (见第 766 页)

$$\ddot{x} = -r\mu \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -r\mu \frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -r\mu \frac{z}{r^3}. \quad (15)$$

为了积分它们, 我们首先把能量守恒定律 (见第 768 页) 写成

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\gamma \mu m}{r} = C,$$

其中 C 在整个运动中是由初条件决定的常数。

从 (15) 能推出仅包含速度分量, 而不包含加速度分量的方程。如果用 y 乘第一个运动方程, 用 x 乘第二个运动方程, 然后相减, 就得到

$$\dot{x}y - y\dot{x} = 0 \text{ 或 } \frac{d}{dt}(\dot{x}y - \dot{y}x) = 0.$$

积分得

$$x\dot{y} - \dot{y}x = c_1.$$

类似地, 从其余运动方程得到¹⁾

- 1) 应用向量概念也能得到这三个方程。如果用定位向量 \mathbf{R} 对运动方程两端作向量叉积, 由于力向量与定位向量同向, 于是右端得 0, 左端的表达式 $\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}}$ 是向量 $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}$ 关于时间 t 的导数, 所以, 推出向量 $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{C}$ 对时间有常数; 这正与上面坐标方程所说明的一样。

正如我们见到的, 这个方程不依赖于我们特殊的问题, 而一般地适用于力与定位向量同向的每一运动。

向量 $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}$ 称为速度矩, 而向量 $m\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}$ 称为运动的动量矩。从向量叉积的几何意义容易得到刚才给出的关系式的下述直观解释 (参看正文中后面的讨论)。如果把运动质点投影到坐标平面上, 在每一坐标平面上考虑从原点到点的投影的向径在时间 t 内扫过的面积, 那么该面积与时间成比例 (面积定理)。

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_2, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = c_3.$$

这些方程能够用从直观的观点来看似乎很有道理的方法来极大地简化我们的问题。不失一般性，我们可选坐标系使运动开始时(即 $t=0$ 时)，质点位于 x, y 平面上，它的速度向量同时也在该平面上，于是 $\dot{z}(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ ，将它们代入上面方程，注意右端是常数，可得

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c = h, \quad (16a)$$

$$y\dot{z} - z\dot{y} = 0, \quad (16b)$$

$$z\dot{x} - x\dot{z} = 0, \quad (16c)$$

首先，从这些方程可断言整个运动处于平面 $z=0$ 上。由于，自然要排除太阳和行星最初相碰的可能性，应设三个坐标 (x, y, z) 最初不同时为 0，从而在 $t=0$ 时，由 $z(0)=0$ 我们有，比如说， $\dot{x}(0) \neq 0$ 。现在，从 (16c) 推知

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{z}{x} \right) = - \frac{z\dot{x} - \dot{z}x}{x^2} = 0,$$

因而， $z = ax$ ， a 是常数。如果在此取 $t=0$ ，则由方程 $z(0)=0$ 和 $\dot{x}(0) \neq 0$ 推知 $a=0$ ，这样一来 z 永远是 0。

因此，问题化简为积分下列两个微分方程

$$\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\gamma \mu m}{r} = C, \quad (17a)$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = h. \quad (17b)$$

用 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 把直角坐标 (x, y) 变到极坐标 (r, θ) ，其中 r, θ 现在都是 t 的待定函数。由

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = r^2 \dot{\theta},$$

得到关于极坐标 r, θ 的两个微分方程

$$\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{\gamma \mu m}{r} = C, \quad (17c)$$

$$r^2 \dot{\theta} = h. \quad (17d)$$

前一方程是能量守恒定理，而后一方程表示了开普勒面积定律。事

实上(参看第一卷第 395—396 页)表达式 $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ 是原点到质点的

向径在时间 t 内扫过的面积关于时间的导数。我们发现它是常数,或者,按照开普勒的说法,向径在相等时间内扫过相等的面积。

如果面积常数 h 是 0, 则 $\dot{\theta}$ 必为 0; 即 θ 保持常数, 这样一来运动必然处于通过原点的一条直线上, 我们排除这种特殊情况, 特意假设 $h \neq 0$ 。

为求得轨道的几何形状, 我们将不再用时间作为参数来描述它¹⁾, 而把角 θ 考虑成 r 的函数, 或把 r 作为 θ 的函数, 从上面两个方程, 我们来计算导数 $\frac{dr}{d\theta}$ 成为 r 的函数。

从面积方程得 $\dot{\theta} = h/r^2$, 代入能量方程, 并注意

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta},$$

立即就有形如

$$\frac{m}{2} \left[\frac{h^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{h^2}{r^2} \right] - \frac{\gamma \mu m}{r} = C$$

或

$$\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = r^4 \left(\frac{2C}{mh^2} + \frac{2\gamma\mu}{h^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (17e)$$

的轨道微分方程。

为了简化以后的计算, 作变换

$$r = \frac{1}{u}$$

并引入以下的简写记号

$$\frac{1}{p} = \frac{\gamma\mu}{h^2}, \quad \epsilon^2 = 1 + \frac{2Ch^2}{m\gamma^2\mu^2},$$

微分方程 (17e) 于是变成

- 1) 运动过程作为时间的函数, 以后可用方程

$$\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta = h(t - t_0)$$

来确定, 其中 t_0 是 θ 的已知函数(参阅第 778 页)。

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2,$$

而这可以直接积分,得到

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2}},$$

或,如果这时引入新变量 $v = u - \frac{1}{p}$, 则

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{dv}{\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^2 - v^2}}$$

我们[按第一卷第288页公式(24)]得到积分的值是 $\arcsin(pv/\varepsilon)$, 故轨道方程形如

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = v = \frac{\varepsilon}{p} \sin(\theta - \theta_0).$$

由于从哪条固定直线开始计算角度 θ 是无关紧要的, 所以角 θ_0 可任意选取。如果取 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ——即, 如果取 $v = 0$ 与 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 相对应——我们最终得到形如

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$

的轨道方程, 这就是熟知的以原点为一个焦点的圆锥曲线的极坐标方程¹⁾。

因此, 得到开普勒定律:

行星沿以太阳为一焦点的圆锥曲线运动。

积分常数

$$p = \frac{h^2}{\gamma \mu}, \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2Ch^2}{m\gamma^2\mu^2}$$

1) 把方程变到直角坐标得

$$(x - sa)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = a^2 \quad \left(a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}\right)$$

就容易看出这一点。

与初始运动的关系是有趣的。量 p 以圆锥曲线的半正焦弦或参数而闻名；在椭圆和双曲线的情形，它与半轴 a 和 b 以简单的关系式

$$p = \frac{b^2}{a}$$

相联系；而离心率的平方 ϵ^2 决定了圆锥曲线的特征：它是椭圆、抛物线或双曲线取决于 ϵ^2 小于、等于或大于 1。

从关系式

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2Ch^2}{mr^2\mu^2}$$

立刻看出三种不同的可能性也能用能量常数 C 来叙述：轨道是椭圆、抛物线或双曲线，视 C 小于、等于或大于 0 而定。

如果设 $t = 0$ 时，质点在力场中的点 R_0 处，并以初速度 R_0 运动，则关系式

$$C = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\gamma\mu m}{r_0}$$

给出令人惊奇的事实：轨道的特征——椭圆、抛物线，或双曲线——全然不依赖于初速度的方向，而仅仅依赖于其绝对值 v_0 的大小。

开普勒第三定律是其它两个定律的简单推论：

沿椭圆轨道运行的行星，其周期的平方与长半轴立方的比值为常数，比值仅依赖于力场，而不依赖于具体的行星。

如果以 T 表示周期，以 a 表示长半轴，则有

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{常数},$$

式中右端的常数与具体问题无关，仅依赖于吸引质量的大小和引力常数。

为证明这个结论，要用面积定律 (17d) 的积分形式

$$\int_{t_0}^t r^2 d\theta = h(t - t_0),$$

它把运动定义成时间的函数。如果在从 0 到 2π 的区间上求积分，

我们在左端得到轨道椭圆的面积的两倍，用以前的结果，就是 $2\pi ab$ ；在右端，时间差 $t - t_0$ 应该用周期 T 代替。于是

$$2\pi ab = hT \text{ 或 } 4\pi^2 a^2 b^2 = h^2 T^2.$$

我们已知 h^2 与轨道的 a, b 间有关系 $h^2/\gamma\mu = p = b^2/a$ 。如果在上述方程中用 $(b^2/a)\gamma\mu$ 代替 h^2 ，立即推得

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma\mu},$$

它正表达了开普勒第三定律。

练习 6.1 e

1. 详细讨论一个天体在直线轨道上的运动 [在方程(17d) 中 $h=0$].

2. 证明：如果轨道是抛物线，则在 $t \rightarrow +\infty$ 时行星速度趋向 0；如果轨道是双曲线，则在 $t \rightarrow +\infty$ 时行星速度趋向正的极限。

3. 证明：受到指向中心 O 处的大小为 mr 的吸引力的物体沿以 O 为中心的椭圆运动。

4. 证明：在极坐标 (r, θ) 中，受到从中心 O 处的大小为 $f(r)$ 的排斥力的物体的轨道是

$$\theta = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2C/h^2 + 2\int f(r)dr/h^2 - 1/r^2}},$$

其中 f 是给定的函数。

5. 证明：受从中心 O 处的一排斥力 $\frac{\mu}{r^3}$ 的物体的运行轨道方程是

$$\frac{1}{r} = \begin{cases} \frac{2c}{h^2 k} \cos(k\theta + \varepsilon) & \text{当 } \mu < h^2 \\ \frac{2C}{h^2 k} - \cosh(k\theta + \varepsilon) & \text{当 } \mu > h^2, \end{cases}$$

设

$$k = \sqrt{\left|1 - \frac{\mu}{h^2}\right|}.$$

而 ε 是积分常数.

6. 一行星在椭圆轨道上运动. $\omega = \omega(t)$ 表示角 $P'MP$, 其中 P' 是行星在时刻 t 的位置 P 在辅助圆的对应点, P_s 是与太阳 S 最接近的时刻 t_s 的位置; M 是椭圆中心. 证明 ω 与 t 满足开普勒方程

$$h(t - t_s) = ab(\omega - \varepsilon \sin \omega).$$

7. 证明: 在有引力场中每单位质量受到的吸引力是

$$p = \frac{h^2}{q^3} \frac{dq}{dr},$$

其中 q 是从极点轨道的切线的距离, h 是面积常数(第 776 页). 由此证明, 极点对单位质量的吸引力等于 μr^{-4} 时, 运动轨道是心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$.

8. 一单位质量的质点在两个力作用下运动. 一个力永远指向原点而大小等于从原点到质点距离的 λ^2 倍, 另一个力永远与质点的路径正交而大小等于速度的 2μ 倍. 证明: 如果质点从原点沿 x 轴以速度 u 出发, 则在以后任意时刻 t , 它的坐标是

$$x = \frac{u}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \sin\left(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} t\right) \cos \mu t,$$

$$y = \frac{u}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \sin\left(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} t\right) \sin \mu t.$$

9. 设平面上有 n 个固定的质点, 它们都产生大小为 $\frac{1}{r}$ 的有心吸引力. 证明: 一个质点在该力场中的平衡位置不多于 $n - 1$ 个.

计算坐标为 (a, b) , $(a, -b)$, $(-a, b)$, $(-a, -b)$ 四个吸引质点情况下的平衡位置, 其中 $a > b > 0$.

f. 边值问题. 有载荷的缆与有载荷的梁

在前面讨论过的力学问题和其它例子中, 我们是在满足微分方程的整个函数族中按照所谓初条件去选出特殊的一个; 即, 我们适当选择积分常数使得解, 有时还有它的某些导数, 在一个固定点

上取预先指定的值。在很多应用问题中,我们既不是寻求通解,也不是解一定的初值问题,而是要解所谓边值问题了。在边值问题中要寻求在几个点上满足指定条件并在这些点间的区间上满足微分方程的解。这里我们不进入边值问题的一般理论,仅讨论几个典型的例子。

例1. 有载荷的缆的微分方程

在直立的 x, y 平面上——其 y 轴是直立的——假设缆被水平分量为 S (常数) 的张力拉紧在原点和 $x = a, y = b$ 之间(参看图 6.7)。缆受到的载荷在水平投影的单位长度上的密度是分段连续函数 $p(x)$ 。于是,微分方程

$$y'' = g(x), \quad g(x) = \frac{p}{S} \quad (18)$$

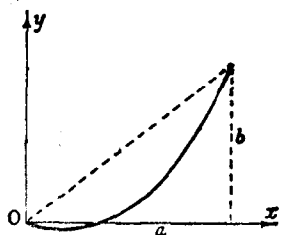


图6.7 有载荷的缆

给出了缆的垂度 $y(x)$, 即 y 坐标。因此, 缆的形状由这个方程的满足条件 $y(0) = 0, y(a) = b$ 的那个解所给出。由于线性函数 $c_0 + c_1x$ 是齐次方程 $y'' = 0$ 的通解, 而积分 $\int_0^x g(\xi)(x - \xi)d\xi$ 是非齐次方程在原点处连同一阶导数为 0 的解[见第 80 页(42)], 所以, 可立即写出这个边值问题的解: 在通解

$$y(x) = c_0 + c_1x + \int_0^x g(\xi)(x - \xi)d\xi$$

中, 由条件 $y(0) = 0$ 立即得 $c_0 = 0$, 此外, 根据条件 $y(a) = b$, 通过方程

$$b = c_1 a + \int_0^a g(\xi)(a - \xi) d\xi$$

就定出了 c_1 。

实际上,经常必须处理形式更复杂的这类边值问题,那时缆不仅承受连续分布的载荷,而且还受集中载荷的作用,即载荷集中在缆的一个固定点上,例如,在点 $x = x_0$ 上. 这种集中载荷被考虑作为载荷 $p(x)$ 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的一种理想的极限情形,这里 $p(x)$ 仅作用在区间 $x_0 - \varepsilon$ 到 $x_0 + \varepsilon$ 上,且总载荷

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} p(x) dx = P$$

在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的过程中保持是常数;量 P 称为作用于 x_0 点的集中载荷¹⁾. 在取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限之前,在从 $x_0 - \varepsilon$ 到 $x_0 + \varepsilon$ 的区间上去积分微分方程 $y'' = p(x)/S$ 的两端,易见

$$y'(x_0 + \varepsilon) - y'(x_0 - \varepsilon) = P/S$$

成立. 如果现在取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$, 我们得到结论: 作用于点 x_0 的集中载荷对应着导数 $y'(x)$ 在点 x_0 的一个大小为 P/S 的跳跃.

下面的例子说明集中载荷的出现怎样改变了边值问题. 设缆张拉在 $x = 0, y = 0$ 与 $x = 1, y = 1$ 两点之间, 仅在中点 $x = \frac{1}{2}$ 上受到大小为 P 的集中载荷. 这个物理问题对应于下述数学问题: 寻求一连续函数 $y(x)$, 它在区间 $0 \leq x \leq 1$ 上除 $x_0 = \frac{1}{2}$ 点外处处满足微分方程 $y'' = 0$; 它取边值 $y(0) = 0, y(1) = 1$; 并且它的导数在 x_0 有跳跃 P/S . 为求此解, 我们把它表示为

1) 通常把集中载荷纯形式地写成载荷分布

$$p(x) = P\delta(x - x_0).$$

其中 $\delta(x)$ 是广义函数(所谓狄拉克(Dirac)函数):

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时 } \delta(x) = 0, \text{ 且 } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

$\delta(0)$ 无定义. 显然,任何 $\delta(0)$ 的有限值都与所提的其它条件不相容.

$$y(x) = ax + b \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$$

和

$$y(x) = c(1-x) + d \quad \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right).$$

条件 $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ 给出 $b = 0$, $d = 1$. 从函数的两段在 $x = \frac{1}{2}$ 点应有同一值的条件, 得到

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}c + 1.$$

最后, 由于要求 y 的导数在通过 $x = \frac{1}{2}$ 时增加 P/S , 给出条件

$$-c - a = P/S.$$

从这些条件得到

$$a = 1 - \frac{P}{2S}, \quad b = 0, \quad c = -1 - \frac{P}{2S}, \quad d = 1,$$

并且找出了问题的解。此外, 不存在具有相同性质的其它解。

例2. 有载荷的梁¹⁾

有载荷的梁的处理是非常类似的 (参看图 6.8). 设梁的静止位置与横坐标 $x = 0$, $x = a$ 之间的 x 轴重合。则四阶线性微分方程

$$y'''' = \varphi(x) \quad (19a)$$



图 6.8 有载荷的梁

给出受沿 y 方向垂直作用力所产生的垂度 (垂直位移) $y(x)$, 其中右端 $\varphi(x)$ 是 $p(x)/EI$, $p(x)$ 是载荷密度, E 是梁材的弹性模量 (E 等于应力除以伸长率), I 是梁的横截面关于通过横截面质

1) 关于有载荷的梁的理论, 参阅 Karman 和 Biot 的《工程中的数学方法》。

心的水平线的惯性矩。

可立即写出这个微分方程的通解[见第 80 页(42)]

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \int_0^x \varphi(\xi) \frac{(x-\xi)^3}{3!} d\xi,$$

其中 c_0, c_1, c_2, c_3 是任意积分常数。但是实际问题不是求通解，而是求特解，即决定积分常数使得 $y(x)$ 满足某些确定的边条件。例如，如果梁的端点被夹紧，边条件就是

$$y(0) = 0, y(a) = 0, y'(0) = 0, y'(a) = 0.$$

于是，立刻得到 $c_0 = c_1 = 0$ ，常数 c_2, c_3 可从方程组

$$c_2 a^2 + c_3 a^3 + \int_0^a \varphi(\xi) \frac{(a-\xi)^3}{3!} d\xi = 0,$$

$$2c_2 a + 3c_3 a^2 + \int_0^a \varphi(\xi) \frac{(a-\xi)^2}{2!} d\xi = 0$$

确定。

同样，梁的集中载荷问题是重要的。仍然把作用于点 $x = x_0$ 的集中载荷考虑成：由在 $x_0 - \varepsilon$ 到 $x_0 + \varepsilon$ 的区间上连续分布的，并使得

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} p(\xi) d\xi = P$$

在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的过程中始终保持常数值的载荷 $p(x)$ 当 ε 趋向于 0 时所产生的载荷。那么， P 就是在 $x = x_0$ 的集中载荷的值。完全同上例一样，我们在从 $x_0 - \varepsilon$ 到 $x_0 + \varepsilon$ 的区间上去积分微分方程 (19a) 的两端，然后让 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。可以看到：解 $y(x)$ 的三阶导数在点 $x = x_0$ 必有跳跃：

$$y'''(x_0 + 0) - y'''(x_0 - 0) = \frac{P}{EI}, \quad (19b)$$

这里 $y(x_0 + 0)$ 表示 $y(x_0 + h)$ 当 h 通过正值趋向 0 的极限， $y(x_0 - 0)$ 是从左边的对应极限。

这样，就提出了如下的数学问题：我们要求 $y'''' = 0$ 的一个解，使得它连同其一、二阶导数连续，且

$$y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0,$$

它的三阶导数除在 $x = x_0$ 有大小为 P/EI 的跳跃外也是到处连续的。

如果梁在点 $x = x_0$ 被固定(参看图 6.9), 即, 如果在这点上垂度取预先指定的固定值 $y = 0$, 则我们能够认为这一约束是由作用在这点的一集中载荷来达到的。根据作用与反作用相等的力学原理, 这个集中载荷的值等于被固定的梁受到的支持力。所以, 这个力的大小 P 立刻由公式[见(19b)]

$$P = EI[y'''(x_0 + 0) - y'''(x_0 - 0)]$$

给出, 其中 $y(x)$ 在区间 $0 \leq x \leq 1$ 上除点 $x = x_0$ 外到处满足微分方程 $y'''' = P/EI$, 而且也满足条件

$$y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0, \quad y(x_0) = 0,$$

还有 y, y', y'' 也在 $x = x_0$ 连续。



图 6.9 中点被支承的梁的垂度

为了说明这些想法, 考虑从点 $x = 0$ 伸展到 $x = 1$ 的梁, 端点 $x = 0$ 与 $x = 1$ 被夹紧, 承受密度为 $p(x) = 1$ 的均匀载荷, 并且在点 $x = \frac{1}{2}$ 处被支承(参看图 6.9)。为简单起见, 假设

$EI = 1$, 于是, 除在 $x = \frac{1}{2}$ 外, 梁到处满足微分方程

$$y'''' = 1.$$

如公式所示, 这个微分方程的通解是 x 的四次多项式, x^4 的系数是 $1/4!$ 。在两半区间的每一个上, 解都被表成这种类型的多项式。在左半区间上我们把多项式写成

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \frac{1}{4!}x^4,$$

在右半区间上, 写成

$$y = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3 + \frac{1}{4!}(x-1)^4.$$

因为梁在两端 $x=0$ 与 $x=1$ 被夹紧, 所以推得

$$y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0,$$

由此得到 $b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = 0$. 此外, $y(x), y'(x), y''(x)$ 必

须在 $x = \frac{1}{2}$ 连续, 即从两个多项式算出的 $y\left(\frac{1}{2}\right), y'\left(\frac{1}{2}\right),$

$y''\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值必须相同, 且 $y\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值必须是 0, 这给出

$$\frac{1}{4}b_2 + \frac{1}{8}b_3 + \frac{1}{384} = \frac{1}{4}c_2 - \frac{1}{8}c_3 + \frac{1}{384} = 0$$

$$b_2 + \frac{3}{4}b_3 + \frac{1}{48} = -c_2 + \frac{3}{4}c_3 - \frac{1}{48},$$

$$2b_2 + 3b_3 = 2c_2 - 3c_3.$$

由此可得 b_2, b_3, c_2, c_3 的值如下:

$$b_2 = c_2 = \frac{1}{96}, \quad b_3 = -c_3 = -\frac{1}{24},$$

为了在 $x = \frac{1}{2}$ 点不出现垂度, 在这点上必须作用于梁的力是

$$\begin{aligned} y''''\left(\frac{1}{2} + 0\right) - y''''\left(\frac{1}{2} - 0\right) &= \left(6c_3 - \frac{1}{2}\right) \\ &- \left(6b_2 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6.2 一般的一阶线性微分方程

a. 分离变量法

称微分方程为一阶的, 如果它的两端包含 x 与 $y(x)$, 函数 $y(x)$ 的一阶导数, 但不包含更高阶的导数。这类方程最一般的形式是

$$F(x, y, y') = 0, \quad (20a)$$

其中 F 是它的三个变元 x, y, y' 的给定函数。我们可以假设在

x, y 平面的某一区域内, 微分方程 (20a) 能唯一地解出 y' , 从而可表成

$$y' = f(x, y). \quad (20b)$$

只能在特殊情况下求得微分方程 (20b) 的通解的显式公式¹⁾. 当 $f(x, y)$ 是 x 的函数与 y 的函数的商时, 即微分方程形如

$$y' = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)} \quad (21a)$$

时是最简单的情况. 在这种情况下, 我们能够将变量 x, y “分离”, 形式地把方程写成

$$\beta(y)dy = \alpha(x)dx. \quad (21b)$$

引入普通求积法得到的两个不定积分

$$A(x) = \int \alpha(x)dx, \quad B(y) = \int \beta(y)dy, \quad (21c)$$

根据 (21a) 就有

$$\frac{dB(y)}{dy} = \frac{dB(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \beta(y) \cdot y' = \alpha(x) = \frac{dA(x)}{dx}.$$

由此推知对于 (21a) 的每一个解都有

$$B(y) - A(x) = c, \quad (21d)$$

其中 c 是常数(依赖于解)²⁾. 任给定 c 值, 可对 y 解出方程 (21d), 这样用求积法就得到了 (21a) 的需求的解.

实际上, 在引进微分方程的各种问题中 (见第一卷第 430 页, 第二卷第 778 页) 我们已经用过这种分离变量法了. 另一类可化为 (21a) 形式的微分方程是所谓齐次方程

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (21e)$$

引进新未知函数 $z = \frac{y}{x}$, 就得到微分方程

1) 但是, 我们将要在第 811 页讨论, 在 f 有连续的一阶导数的情况下能够给出方程 (20b) 的解的通用的近似方法.

2) 在 (21d) 的求导中不用链锁法则, 而用 (21b, c) 也可证明

$$d(B - A) = dB - dA = \beta dy - \alpha dx = 0$$

因此, $B - A$ 是常数.

$$z' = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{f(x) - z}{x},$$

它是变量分离的,于是,从关系式

$$\int \frac{dz}{f(x) - z} = \int \frac{dx}{x} + c = c + \log|x| \quad (21f)$$

可得通解,其中 c 是常数. 我们用这个方程把 z 表成 x 的函数,再令 $y = xz$ 就得要求之解.

以方程

$$y' = \frac{y^2}{x^2}$$

为例,相应的 $f(x) = x^2$. 关系式 (21f) 此时变成

$$\int \frac{dz}{z^2 - z} = \log \frac{z-1}{z} = c + \log|x|.$$

因此

$$y = \frac{x}{1 - kx},$$

其中 $k = \pm c'$ 是常数.

b. 一阶线性方程

称微分方程为线性的,如果它能表成未知函数 y 及其导数的,以 x 的给定函数为系数的线性关系式. 所以,一般的一阶线性微分方程的形式为

$$y' + a(x)y = b(x), \quad (22a)$$

其中 $a(x)$ 与 $b(x)$ 为给定.

先设 $b = 0$. 则方程是变量分离的,而且可写成

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx.$$

因此

$$\log|y| = -\int a(x)dx + \text{常数}.$$

用 $A(x)$ 表示 $a(x)$ 的任一不定积分,即任一以 $a(x)$ 为导数的函数,我们就得到

$$y = ce^{-A(x)}. \quad (22b)$$

其中 c 是任意积分常数。甚至当 $c = 0$ 时, 这个公式也给出解, 即, $y = 0$ 。

如果 $b(x)$ 不恒为 0, 我们来寻求形如

$$y = u(x)e^{-A(x)} \quad (22c)$$

的解, 其中 A 的定义如前, $u(x)$ 必须适当地加以确定。 y 代入 (22a) 得

$$y' + ay = u'e^{-A} - uA'e^{-A} + auc^{-A} = u'e^{-A} = b.$$

因此, 未知函数 u 必有导数

$$u' = b(x)e^{A(x)}.$$

于是

$$u = c + \int b(x)e^{A(x)} dx,$$

其中 c 是常数。我们得到 (22a) 的解的表达式

$$y = e^{-A(x)}(c + \int b(x)e^{A(x)} dx), \quad (22d)$$

其中 c 是任意常数, 而

$$A(x) = \int a(x) dx. \quad (22e)$$

由于每一函数 y 都能写成带一适当函数 u 的 (22c) 的形式, 可见公式 (22 d) 表示了 (22 a) 的最一般的解。这样一来, 通解是由已知函数仅仅通过求幂和普通的积分过程得到的。由于在 $A(x)$ 里或 (22d) 中不定积分里的常数的任何不同的选择都能用适当改变 c 来补偿, 所以, 实际上解仅含有一个任意常数。

例如, 对微分方程

$$y' + xy = -x$$

有

$$A(x) = \int x dx = \frac{1}{2} x^2,$$

$$\int b(x)e^{A(x)} dx = - \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx = -e^{\frac{x^2}{2}},$$

于是, 得到通解

- 1) 用变量 u 代替 (22b) 中常数 c 的方法称为常数变易法 (参数变易法)。

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(c - e^{\frac{x}{2}} \right) = -1 + ce^{-\frac{x}{2}}.$$

练习 6.2

1. 用分离变量法积分下列方程:

(a) $(1 + y^2)x dx + (1 + x^2) dy = 0,$

(b) $ye^{2x} dx - (1 + e^{2x}) dy = 0.$

2. 解下列齐次方程:

(a) $y^2 dx + x(x - y) dy = 0,$

(b) $xy dx + (x^2 + y^2) dy = 0,$

(c) $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0,$

(d) $(x + y) dx + (y - x) dy = 0,$

(e) $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2.$

3. 证明: 形如

$$y' = \phi \left[\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \right] \quad (a, a_1, \dots \text{常数})$$

的微分方程可用下法化为齐次方程: 如果 $ab_1 - a_1b \neq 0$, 取新未知函数及新自变量为

$$\eta = ax + by + c, \quad \xi = a_1x + b_1y + c_1,$$

如果 $ab_1 - a_1b = 0$, 仅需把未知函数变作

$$\eta = ax + by$$

就能将方程化为变量分离的新方程.

4. 用上题的方法解:

(a) $(2x + 4y + 3)y' = 2y + x + 1,$

(b) $(3y - 7x + 3)y' = 3y - 7x + 7.$

5. 积分下列一阶线性微分方程:

(a) $y' + y \cos x = \cos x \sin x,$

(b) $y' - \frac{ny}{x+1} = e^x(x+1)^n,$

(c) $x(x-1)y' + (1-2x)y + x^2 = 0.$

$$(d) y' - \frac{2}{x}y = x^4,$$

$$(e) (1+x^2)y' + xy = \frac{1}{1+x^2}.$$

6. 积分下面方程

$$y' + y^2 = \frac{1}{x^2}.$$

7. 伯努利 (Bernoulli) 方程形如

$$y' + f(x)y = g(x)y^n.$$

证明: 作变换

$$y = v \exp\left\{-\int f(x) dx\right\} = vF(x)$$

可将它变成分离变量的形式.

8. 积分下面方程

$$xy' + y(1 - xy) = 0.$$

9. 用任一可行的方法解

$$y' + y \sin x + y^n \sin 2x = 0.$$

6.3 高阶线性微分方程

a. 叠加原理. 通解

前面讨论的很多例题都属于线性微分方程的类型. 未知函数 $u(x)$ 的微分方程称为 n 阶线性的, 如果它的形状为

$$u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n u(x) = \phi(x), \quad (23)$$

其中 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 与右端项 $\phi(x)$ 都是自变量 x 的给定函数. 我们把左端的表达式记成 $L[u]$ (L 是“线性微分算子”).

如果在考虑的区间内 $\phi(x)$ 恒为 0, 我们称方程是齐次的; 反之, 称它为非齐次的. 立即看出 (同第一卷第 678 页讨论的二阶常系数线性微分方程的特殊情况一样), 下面的叠加原理成立:

如果 u_1, u_2 是齐次方程的任意两个解, 则它们的每一线性组合 $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$, 其中系数 c_1, c_2 是常数, 也是一个解.

如果知道了非齐次方程 $L[u] = \phi(x)$ 的一个特解 $v(x)$, 则我们由 $v(x)$ 加上齐次方程的任意解可得全部其它的解.

对于 $n=2$ 和常数 a_1, a_2 , 在第一卷(第 675 页)我们已经证明: 齐次方程的每一解可通过适当选择的两个解 u_1, u_2 表成 $c_1 u_1 + c_2 u_2$ 的形式. 对具有任意连续系数的任何齐次微分方程类似的定理成立.

首先, 我们根据下述定义来阐明所谓函数的线性相关和线性无关性: n 个函数 $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ 是线性相关的, 如果存在不全为 0 的 n 个常数 c_1, c_2, \dots, c_n , 使得方程

$$c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) + \dots + c_n \phi_n(x) = 0$$

恒成立, 即对考虑的区间内 x 的所有值成立. 如果, 例如, $c_n \neq 0$, 则 $\phi_n(x)$ 可表成

$$\phi_n(x) = a_1 \phi_1(x) + \dots + a_{n-1} \phi_{n-1}(x),$$

$\phi_n(x)$ 称为线性地依赖于其它函数. 如果形如

$$c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) + \dots + c_n \phi_n(x) = 0$$

的线性关系式不成立, 则 n 个函数 $\phi_i(x)$ 称为线性无关的¹⁾.

例 1. 函数, $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ 是线性无关的. 否则, 应存在常数 c_0, c_1, \dots, c_{n-1} 使得多项式

$$c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$$

对某区间内的所有 x 都为 0, 但是, 这是不可能的, 除非多项式的所有系数都是 0.

例 2. 设 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, 则函数 $e^{a_i x}$ 为线性无关.

证: 假设对 $(n-1)$ 个这样的指数函数, 这命题已经证明为真. 于是, 如果

$$c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + \dots + c_n e^{a_n x} = 0$$

是 x 的恒等式, 我们用 $e^{a_n x}$ 除之, 并令 $a_i - a_n = b_i$, 便得到

$$c_1 e^{b_1 x} + c_2 e^{b_2 x} + \dots + c_{n-1} e^{b_{n-1} x} + c_n = 0.$$

1) 函数 $\phi(x)$ 的线性相关与向量的线性相关的定义是完全一样的(见第 137 页). 事实上, 把定义在 x 轴的区间 I 上的函数 $\phi(x)$ 想象成“有无穷多个分量的向量 ϕ ”常常是很方便的, 这里 I 中每一 x 对应的值 $\phi(x)$ 就是一个分量.

如果对 x 微商此方程, 则常数 c_n 就消失了, 并且得到一个表明 $(n-1)$ 个函数 $e^{b_1 x}, e^{b_2 x}, \dots, e^{b_{n-1} x}$ 线性相关的方程, 从此推出 $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_{n-1} x}$ 也是线性相关的, 与原假设矛盾. 所以, n 个原来的函数之间不能有线性关系式.

例 3. 函数 $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx$ 在区间 $0 \leq x \leq \pi$ 上为线性无关. 我们把证明留给读者(第 798 页第 1 题); 要利用事实

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & (\text{当 } m \neq n \text{ 时}) \\ \pi & (\text{当 } m = n \text{ 时}) \end{cases}$$

(参看第一卷第 291 页).

如果我们假设函数 $\phi_i(x)$ 有直到 n 阶的连续导数, 则下述定理成立:

函数组 $\phi_i(x)$ 线性相关的必要且充分条件是方程

$$W = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \cdots & \phi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

是 x 的恒等式. 函数 W 称为函数组的朗斯基 (Wronsky) 行列式¹⁾.

如果假设

$$\sum c_i \phi_i(x) = 0,$$

逐次求微商得出另外的方程

$$\sum c_i \phi_i'(x) = 0, \dots,$$

$$\sum c_i \phi_i^{(n-1)}(x) = 0.$$

然而, 它们组成 n 个系数 c_1, \dots, c_n 满足的 n 个方程的齐次方程组; 因此, 方程组的行列式 W 必须是 0, 这就直接得到了条件的必要性.

1) 在这个和以后一个证明中, 假定读者了解行列式理论的初步知识. 注意朗斯基行列式的每一列是由函数 ϕ 及其 $1, 2, \dots, n-1$ 阶导数构成的向量, 所以, 函数组的朗斯基行列式等于 0 表示对应的向量组为线性相关(见第 173 页).

条件的充分性,即,如果 $W = 0$ 则函数组是线性相关的,可证明如下:从 W 为零可推知方程组

$$\begin{aligned} c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n &= 0 \\ c_1\phi_1' + \cdots + c_n\phi_n' &= 0 \\ \vdots & \\ c_1\phi_1^{(n-1)} + \cdots + c_n\phi_n^{(n-1)} &= 0 \end{aligned}$$

有非平凡解 c_1, c_2, \dots, c_n (见第 150 页), 其中 c_i 还可能是 x 的函数, 不失一般性可设 $c_n = 1$. 进一步, 我们假设 $(n-1)$ 个函数 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}$ 的朗斯基行列式 V 不是 0, 因为我们可设定理对 $(n-1)$ 个函数已得证明; 这样一来, 当 $V = 0$ 时便知在 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}$ 之间, 因而, 在 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ 之间存在着线性关系式. 第一个方程关于 x 求微商¹⁾ 并与第二式结合, 得到

$$c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2 + \cdots + c_{n-1}'\phi_{n-1} = 0;$$

类似地, 第二个方程求微商并与第三式结合, 得到

$$c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' + \cdots + c_{n-1}'\phi_{n-1}' = 0,$$

等等, 直到

$$c_1'\phi_1^{(n-2)} + c_2'\phi_2^{(n-2)} + \cdots + c_{n-1}'\phi_{n-1}^{(n-2)} = 0.$$

因为, 已假设这个方程组的行列式 V 不是零, 由此推知 $c_1', c_2', \dots, c_{n-1}'$ 是零, 即 c_1, c_2, \dots, c_{n-1} 是常数, 因此, 方程

$$\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) = 0$$

同断言的一样, 表示一个线性关系式.

现在我们叙述线性微分方程的基本定理:

每一齐次线性微分方程

$$\begin{aligned} L[u] &= a_0(x)u^{(n)}(x) + a_1(x)u^{(n-1)}(x) + \cdots \\ &\quad + a_n(x)u(x) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

具有 n 个线性无关的解 u_1, u_2, \dots, u_n . 每一其它的解 u 均可表示

1) 容易看出系数 c_i 是 x 的连续可微函数, 因为如果行列式 V 不是零, 则它们能表成函数 ϕ_i 及其导数的有理式.

为这些基本解的迭加,即表成 n 带常数 c_1, c_2, \dots, c_n 的线性表达式:

$$u = \sum_{i=1}^n c_i u_i.$$

特别地,用下述条件能够确定一基本解组.在一指定点,比如说 $x = \xi$, u_1 的值是1,而 u_1 的直到第 $(n-1)$ 阶导数都是0; $u_i (i > 1)$ 和 u_i 的直到第 $(n-1)$ 阶导数,除第 i 阶之外,都是0,而第 i 阶导数的值是1.

基本解组的存在性将从下面第809页证明的存在定理得到.从刚刚证明的朗斯基条件(24)知任一解 u 与 u_1, u_2, \dots, u_n 间必存在线性关系,这是因为从方程

$$\sum_{l=0}^n a_l u^{(n-l)} = 0$$

$$\sum_{l=0}^n a_l u_i^{(n-l)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

能得出 $(n+1)$ 个函数 u, u_1, u_2, \dots, u_n 的朗斯基行列式必然是0,所以 u, u_1, u_2, \dots, u_n 线性相关.由于 u_1, u_2, \dots, u_n 线性无关,于是, u 线性依赖于 u_1, \dots, u_n .

b. 二阶齐次微分方程

由于二阶微分方程有重要用处,所以我们将更详细地来考察它.

设微分方程是

$$L[u] = au'' + bu' + cu = 0. \quad (26)$$

如果 $u_1(x), u_2(x)$ 构成基本解组,于是 $W = u_1 u_2' - u_2 u_1'$ 是朗斯基行列式,且 $W' = u_1 u_2'' - u_2 u_1''$. 由于

- 1) 两个不同的基本解组 $u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_n$ 能够借助线性变换

$$v_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} u_k$$

互变,其中系数 c_{ik} 是常数,它们构成一行列式不为零的矩阵,

$L[u_1] = 0$ 和 $L[u_2] = 0$,

便有

$$u_1 L[u_2] - u_2 L[u_1] = aW' + bW = 0.$$

这是关于 W 的一阶线性方程。按第 790 页公式 (22b), 它的通解是

$$W = ce^{-\int [b/a] dx}, \quad (27)$$

其中 c 是常数。这个公式在进一步发展二阶微分方程的理论中用得很多。

值得提出的另一性质是二阶线性齐次微分方程总可变成一阶方程, 即所谓黎卡提 (Riccati) 方程。黎卡提方程的形式为

$$v' + pv^2 + qv + r = 0,$$

其中 v 是 x 的函数。令 $u' = uz$, 从而 $u'' = u'z + uz' = uz^2 + u'z$, 线性方程 (26) 就变成黎卡提方程

$$az' + az^2 + bz + c = 0.$$

第三点注意: 如果我们知道二阶线性齐次微分方程的一个解 $v(x)$, 问题就简化为解一个一阶微分方程, 并且能用积分法解出。特别地, 如果假设 $L[v] = 0$ 并令 $u = zv$, 其中 $z(x)$ 是待求的新函数, 我们得到 z 的微分方程

$$az''v + 2az'v' + bz'v' + zL[v] = avz'' + (2av' + bv)z' = 0.$$

但是, 这是关于未知函数 $z' = w$ 的线性齐次微分方程; 第 790 页公式 (22d) 给出它的解。于是, 再积分一次就能从 w 得到因子 z , 因而, 也得到解 u^0 。

例如, 二阶线性方程

$$y'' - 2\frac{y'}{x} + 2\frac{y}{x^2} = 0$$

等价于黎卡提方程

$$z' + z^2 - \frac{2}{x}z + \frac{2}{x^2} = 0,$$

1) 观察由 v 和另一解 u 组成的朗斯基行列式 W 的公式 (27) 可得相同结果, 因为 W 和 v 已知, 方程 $W = vu'' - v'u$ 表示 u 的一阶线性方程, 它能用积分法求解。

其中 $z = y'/y$. 原方程有 $y = x$ 为一特解; 因此, 它可化归一阶方程

$$v''x = 0,$$

其中 $v = y/x$. 这就有 $v = ax + b$. 所以, 原方程的通积分是

$$y = ax^2 + bx.$$

应当指出同样的方法完全能够用于把 n 阶线性微分方程化归一个 $(n-1)$ 阶的方程, 如果前一方程的一个解是已知的话.

练习 6.3b

1. 证明: 函数组 $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$ 在区间 $0 \leq x \leq \pi$ 上线性无关. 提示: 这些函数中的任何两个在区间上正交; 即如果 $m \neq n$, 则

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = 0$$

(参看第一卷第 291 页).

2. 证明: 如果 a_1, \dots, a_k 是不相等的数, $P_1(x), \dots, P_k(x)$ 是任意多项式(不恒等于 0), 则函数组

$$\phi_1(x) = P_1(x)e^{a_1x}, \dots, \phi_k(x) = P_k(x)e^{a_kx}$$

线性无关.

3. 证明利用新未知函数 $z = y^{1-n}$ 可把所谓伯努利方程(参看 6.2 节第 7 题)

$$y' + a(x)y = b(x)y^n \quad (n \neq 1)$$

化归线性微分方程. 用此法求解方程

$$(a) \quad x'y' + y = y^2 \log x,$$

$$(b) \quad xy^2(xy' + y) = a^2,$$

$$(c) \quad (1-x^2)y' - xy = axy^2.$$

4. 证明黎卡提方程

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$$

能变成线性微分方程, 如果已知一特解 $y_1 = y_1(x)$. [引入新未知函数 $u = 1/(y - y_1)$.] 用此法解方程

$$y' - x^2y^2 + x^3 - 1 = 0,$$

它有特解 $y_1 = x$.

5. 求下列两个微分方程的公共积分

(a) $y' = y' + 2x - x^2$,

(b) $y' = -y' - y + 2x + x^2 + x^3$.

6. 利用第 5 题求得的特解, 用定积分求解方程

$$y' = y^2 + 2x - x^2.$$

在 x, y 平面上画出积分曲线的草图.

7. 设 y_1, y_2, y_3, y_4 是黎卡提方程 (参看第 4 题) 的四个解. 证明表达式

$$\frac{(y_1 - y_3)}{(y_1 - y_4)} \cdot \frac{(y_2 - y_3)}{(y_2 - y_4)}$$

是常数.

8. 证明: 如果已知黎卡提方程的两个解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$, 则通解是

$$y - y_1 = c(y - y_2) \exp \left[\int P(y_1 - y_2) dx \right],$$

其中 c 是任意常数.

方程

$$y' - y \lg x = y^2 \cos x - \frac{1}{\cos x}$$

有形如 $a \cos^n x$ 的解, 从而求它的通解.

9. 证明: 方程

(a) $(1-x)y'' + xy' - y = 0$,

(b) $2x(2x-1)y'' - (4x^2+1)y' + y(2x+1) = 0$

有公共解. 把它求出来, 并因此完全解出两个方程.

10. 曲线在 P 点的切线与 y 轴交于原点 O 之下的点 T , 并且 $OP = n \cdot OT$. 证明: 曲线的极坐标方程形式为

$$r = a \frac{(1 + \sin \theta)^n}{\cos^{n+1} \theta}.$$

c. 非齐次微分方程. 参数变易法

要解非齐次微分方程

$$L[u] = a_0 u^{(n)} + \cdots + a_n u = \phi(x), \quad (28a)$$

一般说来,在第793页讲过,只要求得一个特解就够了. 这可进行如下: 首先,适当选择常数 c_1, c_2, \cdots, c_n , 从而确定齐次方程 $L[u] = 0$ 的满足条件

$$u(\xi) = 0, u'(\xi) = 0, \cdots, u^{(n-2)}(\xi) = 0, u^{(n-1)}(\xi) = 1 \quad (28b)$$

的一个解,它依赖于参数 ξ , 记为 $u(x, \xi)$. 函数 $u(x, \xi)$ 与它对 x 的前 n 阶导数,对于固定的 x 是 ξ 的连续函数. 例如,微分方程 $u'' + k^2 u = 0$ 满足条件(28b)的解 $u(x, \xi)$ 形为 $[\sin k(x - \xi)]/k$.

现在,我们断言公式

$$v(x) = \int_0^x \phi(\xi) u(x, \xi) d\xi \quad (28c)$$

给出 $L[v] = \phi$ 的一个解,它同其前 $(n-1)$ 阶导数在 $x=0$ 点为零. 为了证实这个说法¹⁾,我们用积分对参数的微商法则[参看第79页(41)]逐次求函数 $v(x)$ 对 x 的微商,并回忆从(28b)得到的下述关系式:

$u(x, x) = 0, u'(x, x) = 0, \cdots, u^{(n-2)}(x, x) = 0, u^{(n-1)}(x, x) = 1$, 其中,例如 $u'(x, x)$ 是 $\partial u(x, \xi)/\partial x$ 在 $\xi = x$ 的值.

这样一来,我们得到

$$\begin{aligned} v'(x) &= \phi(\xi) u(x, \xi) \big|_{\xi=x} + \int_0^x \phi(\xi) u'(x, \xi) d\xi \\ &= \int_0^x \phi(\xi) u'(x, \xi) d\xi, \end{aligned}$$

-
- 1) 可给这种方法以物理解释. 如果 $x = t$ 表示时间, u 表示受力 $\phi(x)$ 作用的沿直线运动的点的坐标,该力的效应可认为是由小脉冲的小效应迭加而产生. 于是,上面的解 $u(x, \xi)$ 对应于时刻 ξ 的大小为 1 的一个脉冲,而我们的解给出了大小为 $\phi(\xi)$ 的脉冲在时间 0 到 x 之间的效应.

$$v''(x) = \phi(\xi)u'(x, \xi)|_{\xi=x} + \int_0^x \phi(\xi)u''(x, \xi)d\xi$$

$$= \int_0^x \phi(\xi)u''(x, \xi)d\xi,$$

.....

$$v^{(n-1)}(x) = \phi(\xi)u^{(n-1)}(x, \xi)|_{\xi=x} + \int_0^x \phi(\xi)u^{(n-1)}(x, \xi)d\xi$$

$$= \int_0^x \phi(\xi)u^{(n-1)}(x, \xi)d\xi,$$

$$v^{(n)}(x) = \phi(\xi)u^{(n-1)}(x, \xi)|_{\xi=x} + \int_0^x \phi(\xi)u^{(n)}(x, \xi)d\xi$$

$$= \phi(x) + \int_0^x \phi(\xi)u^{(n)}(x, \xi)d\xi.$$

因为 $L[u(x, \xi)] = 0$, 这就证实了方程 $L[v] = \phi(x)$ 和初条件 $v(0) = 0, v'(0) = 0, \dots, v^{(n-1)}(0) = 0$ 成立.

用下述显然不同的方法——它推广了第 790 页对一阶方程用过的程序——可得到相同的解。我们用齐次方程的线性无关解 u_i 的线性组合形式来寻找非齐次方程的解 u , 即

$$u = \sum \gamma_i(x)u_i(x), \quad (28d)$$

现在我们允许其中的系数 γ_i 是 x 的函数。在这些函数上我们附加上下列条件:

$$\gamma_1' u_1 + \gamma_2' u_2 + \dots + \gamma_n' u_n = 0$$

$$\gamma_1 u_1' + \gamma_2 u_2' + \dots + \gamma_n u_n' = 0$$

.....

$$\gamma_1 u_1^{(n-2)} + \gamma_2 u_2^{(n-2)} + \dots + \gamma_n u_n^{(n-2)} = 0.$$

由此得到 u 的导数有下列公式:

$$u' = \sum \gamma_i u_i'$$

$$u'' = \sum \gamma_i u_i''$$

.....

$$u^{(n-1)} = \sum \gamma_i u_i^{(n-1)}$$

$$u^{(n)} = \sum \gamma_i' u_i^{(n-1)} + \sum \gamma_i u_i^{(n)}.$$

把这些表达式代入微分方程并注意 $L[u] = \phi$, 便有

$$\sum r_i u_i^{(n-1)} = \phi(x).$$

对于系数 r_i 我们得到了一个方程组, 它的行列式就是基本解组 u_i 的朗斯基行列式 W , 因而不为 0. 这样一来, 就确定了系数 r_i . 所以, 用求积法也就确定了系数 r_i . 把整个论述倒回去, 方程的一个解就确实被找到了, 但是, 由于在系数 r_i 中隐含有积分常数, 所以, 事实上这就是通解.

我们让读者来证明: 如果把上面定义的齐次方程的解 $u(x, \xi)$ 表成

$$u(x, \xi) = \sum a_i(\xi) u_i(\xi),$$

则两种方法实际上是完全一样的.

后一种方法通称参数变易法, 因为, 这时解表为变系数的函数的线性组合, 而在齐次方程的情况下, 这些系数都是常数.

例 1. 考察方程

$$u'' - 2\frac{u'}{x} + 2\frac{u}{x^2} = xe^x.$$

在第 798 页上已给出对应的齐次方程

$$u'' - 2\frac{u'}{x} + 2\frac{u}{x^2} = 0$$

的一个独立解组是 $u_1 = x$, $u_2 = x^2$. 因而, 如果寻求形如

$$u = r_1 x + r_2 x^2$$

的解, 我们得到关于 r_1 和 r_2 的条件

$$\begin{aligned} r_1' x + r_2' x^2 &= 0, \\ r_1' + 2r_2' x &= xe^x. \end{aligned}$$

即,

$$r_1' = -xe^x, \quad r_2' = e^x.$$

因此, 原非齐次方程的通解是

$$u = xe^x + c_1 x + c_2 x^2.$$

例 2. 作为应用我们给出处理强迫振动的一种方法, 这时微分方程的右端不必是第一卷第九章第 679 页考察的周期函数, 而可以用任意连续函数 $f(t)$ 来代替. 为了简单起见, 我们限于无摩

擦的情况并取 $m = 1$ (或, 它与除以 m 是一回事). 通常, 微分方程写成

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = \phi(t), \quad (28c)$$

其中量 k^2 和 ϕ 以前称为 k 和 f .

按 (28c), 函数

$$F(t) = \frac{1}{k} \int_0^t \phi(\lambda) \sin k(t - \lambda) d\lambda$$

是微分方程 (28c) 的适合初条件

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0$$

的解. 这样一来, 同前面一样, 我们得到微分方程的通解

$$x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t \phi(\lambda) \sin k(t - \lambda) d\lambda + c_1 \sin kt + c_2 \cos kt,$$

其中 c_1 和 c_2 是任意积分常数.

特别地, 如果微分方程的右端函数是形为 $\sin \omega t$ 或 $\cos \omega t$ 的周期函数, 经过简单计算就能重新得到第一卷第九章第 680 页的结果.

练习 6.3 c

1. 积分下列方程:

(a) $y''' - y = 0,$

(b) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0,$

(c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,$

(d) $y'''' - 3y''' + 2y'' = 0,$

(e) $x'y'' + xy' - y = 0.$

2. 证明: 常系数线性齐次方程

$$L(y) = y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \cdots + c_{n-1} y' + c_n y = 0$$

有形为 $x^a e^{a_k x}$ 的基本解组, 其中 a_k 是多项式

$$f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$$

的根.

3. 设

$$a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = P(x)$$

是 n 阶常系数线性非齐次微分方程, $P(x)$ 是多项式. 设 $a_0 \neq 0$ 并考虑形式恒等式

$$\frac{1}{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$$

证明

$$y = b_0 P(x) + b_1 P'(x) + b_2 P''(x) + \cdots$$

是微分方程的一个特解.

如果 $a_0 = 0$, 但 $a_1 \neq 0$, 则可有展开式

$$\frac{1}{a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n} = b_1 t^{-1} + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$$

证明. 这时

$$y = b \int P(x) dx + b_0 P(x) + b_1 P'(x) + b_2 P''(x) + \cdots$$

是微分方程的一个特殊积分.

4. 用第 3 题的方法求特殊积分:

(a) $y'' + y = 3x^2 - 5x$,

(b) $y'' + y' = (1+x)^2$.

5. 设方程

$$a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = e^{kx} P(x)$$

中 k, a_0, a_1, \cdots 是实常数, $P(x)$ 是多项式. 引进由

$$y = ze^{kx}$$

给出的新未知函数 $z = z(x)$, 并把第 3 题的方法用于 z 的方程, 就能求得原方程的一个特殊积分.

试用这种方法求下列方程的特殊积分:

(a) $y'' + 4y' + 3y = 3e^x$,

(b) $y'' - 2y' + y = xe^x$.

6. 完全解出方程

$$y'' - 5y' + 6y = e^x(x^2 - 3)$$

7. (a) 如果 u, v 是方程

$$f(x)y''' - f'(x)y'' + \phi(x)y' + \lambda(x)y = 0$$

的两个无关的解,证明完全解是 $Au + Bv + Cw$, 其中

$$w = u \left\{ \frac{vf(x)dx}{(uv' - u'v)^2} - v \right\} \frac{uf(x)dx}{(uv' - u'v)^2},$$

和 A, B, C 是任意常数.

(b) 解方程

$$x^2(x^2 + 5)y''' - x(7x^2 + 25)y'' + (22x^2 + 40)y' - 30xy = 0,$$

已知它有形为 x^n 的解.

6.4 一般的一阶微分方程

a. 几何解释

我们开始考察一阶微分方程

$$F(x, y, y') = 0, \quad (29)$$

假设函数 F 是它三个变元 x, y, y' 的连续可微函数. 从几何上来看, 这个方程乃是任何穿过平面上直角坐标为 (x, y) 的点, 且满足微分方程的曲线 $y(x)$ 在该点的切线方向的一个条件. 假设在平面上某区域 R 内, 比如说在一个矩形内, 微分方程 $F(x, y, y') = 0$ 能唯一地解出 y' , 则 y' 能表成形式

$$y' = f(x, y), \quad (30)$$

其中 $f(x, y)$ 是 x, y 的连续可微函数. 于是, 对于 R 的每一点 (x, y) 方程(30)指定了一个前进的方向. 所以从几何上来看, 微分方程由一方向场所表示, 而解微分方程就是寻求属于这个方向的曲线, 即它在每一点的切线方向由方程 $y' = f(x, y)$ 所规定. 这种曲线称为微分方程的积分曲线.

通过 R 的每一点 (x, y) 有微分方程 $y' = f(x, y)$ 唯一的积分曲线, 这在直观上是似乎有理的. 在下述的基本存在定理中更确切地叙述了这个事实:

如果在微分方程 $y' = f(x, y)$ 中, 函数 f 在区域 R 内是连续的且有关于 y 的连续导数, 则通过 R 的每一点 (x_0, y_0) 有一条, 且仅有一条积分曲线; 即, 在 x_0 的一个邻域内微分方程有一个且仅有一个满足 $y(x_0) = y_0$ 的解 $y(x)$.

在第 809 页我们将反过来证明这个定理，在此我们限于考察一些例题。

对于微分方程

$$y' = -x/y, \quad (31a)$$

比如说，我们在区域 $y < 0$ 内来考察它，容易看出，场在点 (x, y) 的方向与从原点到点 (x, y) 的向量垂直。由此我们从几何上推知以原点为中心的圆弧必然是这个方程的积分曲线。这个结果从分析上也非常容易得到证实，用分离变量法(第 788 页)，得

$$x^2 + y^2 = \text{常数} = c,$$

这说明这些圆弧是微分方程的解。

微分方程

$$y' = y/x \quad (31b)$$

的方向场在每点的方向显然与从原点到该点连线的方向一致。这样一来，过原点的直线属于这个方向场，因而，它们同样是积分曲线。事实上，我们立即看出 $y = cx$ 对任意常数 c 均满足微分方程¹⁾。

用同样的方法，我们能够用分析方法证实双曲线族

$$y^2 = c + x^2,$$

$$y = c/x$$

分别满足微分方程

$$y' = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

和

$$y' = -\frac{y}{x} \quad (x \neq 0),$$

其中 c 是用以指定族中特定曲线的参数。

基本定理说明，一般说来，一个单参数的函数族满足一阶微分方程。在这样的族中 x 的函数不仅依赖于 x ，而且还依赖于一个

1) 在原点上方向场不再唯一确定；这与下述事实有关：有无数条积分曲线通过微分方程的这个奇点。

参数 c , 例如, 依赖于 $c = y_0 = y(0)$; 如我们所说, 这些解依赖于一个任意的积分常数. 函数 $f(x)$ 的普通积分仅仅是在 $f(x, y)$ 中不包含 y 的微分方程解的特例. 因此, 方向场在一点的方向被 x 坐标单独决定, 我们立即看出把一条积分曲线沿 y 轴方向平移可得其它的积分曲线. 从分析上来看, 这对应于熟知的事实: y 的不定积分, 即微分方程 $y' = f(x)$ 的解包含一个任意加上的常数.

从微分方程的几何解释得出了一种积分曲线的近似图形的构造方法, 它与 x 的函数的不定积分的特殊情况是大致一样的 (第一卷第 508 页). 我们只须设想用一条折线来代替积分曲线, 折线每边的方向就是方向场在它的起点 (或它的任一别的点) 所规定的方向. 这样的折线可从 R 的任意点开始作起. 把折线的边长取得越小, 则折线的边将不仅只在它们的起点上, 而且在它们的整个长度上以更高的精确度符合微分方程的方向场. 在此, 我们不加证明地叙述一个事实: 当边长逐渐缩小时, 这样构作的折线可确实越来越好地逼近通过起始点的积分曲线.

b. 曲线族的微分方程. 奇解. 正交轨线

存在定理说明每一微分方程有一积分曲线族. 这启示我们问相反的问题. 是否对每一单参数曲线族 $\phi(x, y, c) = 0$ 或 $y = g(c, x)$ 必有对应的微分方程

$$F(x, y, y') = 0$$

使得族中全体曲线都满足它呢? 如果是这样, 又怎样求得这个微分方程呢? 这里, 本质的一点是曲线族的参数 c 不能在微分方程中出现, 所以, 微分方程在某种意义上就是曲线族的不包含参数的表示式. 事实上, 容易求得这样的微分方程. 在

$$\phi(x, y, c) = 0 \quad (32a)$$

中, 对 x 求微商, 我们得到

$$\phi_x + \phi_y \cdot y' = 0. \quad (32b)$$

如果从这个方程和方程 $\phi = 0$ 消去参数 c , 结果就是所求的微分方程. 在方程 $\phi = 0$ 能将参数 c 通过 x 和 y 解出的平面区域

上,总是能够消去 c 的,我们只要把这样得到的表达式 $c = c(x, y)$ 代入 ϕ_x 和 ϕ_y 的表达式,就得到了曲线族的微分方程。

作为第一个例子,考察同心圆族 $x^2 + y^2 - c^2 = 0$, 对 x 微商此式,得到微分方程

$$x + yy' = 0. \quad (32c)$$

这与第 806 页 (31a) 一样。

另一例是中心在 x 轴上的单位圆族 $(x - c)^2 + y^2 = 1$, 对 x 微商此式,我们得到

$$(x - c) + yy' = 0,$$

再消去 c , 可得微分方程

$$y^2(1 + y'^2) = 1.$$

切于 x 轴的抛物线族 $y = (x - c)^2$ 通过方程 $y' = 2(x - c)$ 同样引导到所求的微分方程

$$y'^2 = 4y.$$

在后二例中,我们看到不仅族中的曲线,而且,前者还有直线 $y = 1$ 和 $y = -1$, 后者还有 x 轴 $y = 0$ 都满足对应的微分方程。这个能够立即从分析上证实的事实,也可无须计算而从微分方程的几何意义得出。这些线都是对应曲线族的包络,由于包络在每点上与族中一条曲线相切,所以,它们在该点必然有方向场指定的方向。这样一来,积分曲线的每一包络本身也必然满足微分方程。由单参数积分曲线族的包络构成的微分方程的解称为奇解。

设 R 是单参数曲线族 $\Phi(x, y) = c = \text{常数}$ 所复盖的区域。如果对于 R 的每一点 P , 规定的方向是通过 P 的曲线的切线方向,我们就得到由微分方程 $y' = -\Phi_x/\Phi_y$ 所确定的方向场[见 (32b)]。另一方面,如果对每一点 P 规定的方向是通过它的曲线的法线方向,得到的方向场就由微分方程

$$y' = \Phi_y/\Phi_x$$

所确定。

这个微分方程的解称为原曲线族 $\Phi(x, y) = c$ 的正交轨线。曲线 $\Phi = c$ (函数 Φ 的等值线)与它的正交轨线处处相交成直角。

因此,如果用微分方程 $y' = f(x, y)$ 给出一个曲线族,我们无须求积给定的微分方程,就能求得正交轨线族的微分方程是

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

在上面讨论的例 (31a) 中,由圆族 $x^2 + y^2 = c^2$ 满足的微分方程,我们求得正交轨线的微分方程是 $y' = y/x$. 因而,正交轨线是通过原点的直线族[见(31b)].

如果 $p > 0$, 共焦抛物线族 (参看第三章第 233 页) $y^2 - 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0$ 满足微分方程

$$y' = \frac{1}{y} \left(-x + \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

因此,该曲线族的正交轨线的微分方程是

$$y' = \frac{-1}{(-x + \sqrt{x^2 + y^2})/y} = \frac{1}{y} \left(-x - \sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

这个微分方程的解是抛物线族

$$y^2 - 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0,$$

其中 $p < 0$; 这些是相互共焦,而且还与前一族曲线共焦的抛物线.

c. 解的存在唯一性定理

现在来证明在第 805 页说过的微分方程 $y' = f(x, y)$ 的解的存在唯一性定理. 不失一般性,假设对于所考虑的解 $y(x)$, 初条件 $y(x_0) = y_0$ 简化为 $y(0) = 0$. 因为引进 $y - y_0 = \eta$ 与 $x - x_0 = \xi$ 作为新变量,则可得满足所需条件的同一类型的新微分方程 $d\eta/d\xi = f(\xi + x_0, \eta + y_0)$.

在证明中,我们可限于在点 $x = 0$ 的一个充分小的邻域内讨论. 如果在包含点 $x = 0$ 的这样一个区间内已经证明了解的存在唯一性,那么也就能证明在它的端点的一个邻域中的存在唯一

性,等等.

因此,考虑含于函数 $f(x, y)$ 的定义域中的一个矩形 $|x| \leq a, |y| \leq b$. 存在界 M, M_1 , 使得对于 $|x| \leq a, |y| \leq b$ 有

$$|f_y(x, y)| \leq M, |f(x, y)| \leq M_1. \quad (32d)$$

如果有必要的话,用一个更小的正数代替 a ,我们总能作到

$$M_1 a < b, Ma < 1. \quad (32e)$$

不等式 (32d) 在更小的矩形上当然成立. 对于 $y' = f(x, y)$ 带有初条件 $y(0) = 0$ 的任一解 $y(x)$, 当 $|x| \leq a$ 时便有估计 $|y(x)| < b$. 若不然, 则存在值 ξ , 对它有 $|\xi| \leq a$, 且 $|y(\xi)| = b$. 于是存在一个绝对值最小的这样的 ξ . 因此, 关系式

$$b = |y(\xi)| = \left| \int_0^\xi f(x, y(x)) dx \right| \leq M_1 |\xi| \leq M_1 a < b$$

导致矛盾

首先来证明微分方程的满足初条件的解不多于一个. 如果存在两个解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$, 则它们的差 $d(x) = y_1 - y_2$ 满足

$$d'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)).$$

用中值定理, 方程右端能表成 $(y_1 - y_2)f_y(x, \bar{y}) = d(x)f_y(x, \bar{y})$ 的形式, 其中 \bar{y} 是 y_1 与 y_2 的中间值. 在原点的邻域 $|x| \leq a$ 内, y_1 和 y_2 是 x 的连续函数, 并且在 $x = 0$ 取零值. 这里 b 是两函数的绝对值在该邻域内的上界, 所以在 $|x| \leq a$ 内处处有 $|\bar{y}| \leq b$. 而且, M 是 $|f_y|$ 在区域 $|x| \leq a, |y| \leq b$ 内的界. 最后, 设 D 是 $|d(x)|$ 在区间 $|x| \leq a$ 上的最大值. 假设这个值在 $x = \xi$ 取到. 那么, 对于 $|x| \leq a$,

$$|d'(x)| = |d(x)f_y(x, \bar{y})| \leq DM,$$

因此,

$$D = |d(\xi)| = \left| \int_0^\xi d'(x) dx \right| \leq |\xi| DM \leq a DM.$$

可是由于 $aM < 1$, 这推得 $D = 0$. 即, 在这样的区间 $|x| \leq a$ 中我们有 $y_1(x) = y_2(x)$ ¹⁾.

1) 这个证明的根本思想是: 有界可积函数的积分值, 当积分区间长趋于零时, 与积分区间长以相同的阶变零.

用类似的积分估计可得解的存在性的证明。我们用一种还有其它重要应用(特别是对于微分方程的数值解和对于映射的反演)的方法来构造解。这就是迭代法或逐次逼近法。在这里,我们得到的解是近似解序列 $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots$ 的极限函数。取 $y_0(x) = 0$ 作第一次近似 $y_0(x)$, 利用微分方程, 取

$$y_1(x) = \int_0^x f(\xi, 0) d\xi$$

作第二次近似: 从它又可得到下一次近似 $y_2(x)$,

$$y_2(x) = \int_0^x f(\xi, y_1(\xi)) d\xi,$$

一般地, 第 $(n+1)$ 次近似是从第 n 次近似用方程

$$y_n(x) = \int_0^x f(\xi, y_{n-1}(\xi)) d\xi \quad (33a)$$

得到的。如果在区间 $|x| \leq a$ 中这个近似解的函数列一致收敛于极限函数 $y(x)$, 我们可立即在积分号下取极限并且得到极限函数的方程

$$y(x) = \int_0^x f(\xi, y(\xi)) d\xi. \quad (33b)$$

由此求微商得 $y' = f(x, y)$, 所以 y 确实是所求的解。

我们用下面的估计来证明在充分小的区间 $|x| \leq a$ 中的收敛性。取 $y_{n+1}(x) - y_n(x) = d_n(x)$, D_n 表示 $|d_n(x)|$ 在区间 $|x| \leq a$ 上的最大值。

对于方程

$$d'_n(x) = y'_{n+1} - y'_n = f(x, y_n) - f(x, y_{n-1}),$$

中值定理给出

$$d'_n(x) = d_{n-1}(x) f_y(x, \bar{y}_{n-1}(x)), \quad (33c)$$

其中 \bar{y}_{n-1} 是 y_n 与 y_{n-1} 的一个中间值。设不等式 $|f_y(x, y)| \leq M$, $|f(x, y)| \leq M_1$ 在矩形区域 $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ 上成立。如果我们假设对函数 y_n 关系式 $|y_n| \leq b$ 在区间 $|x| \leq a$ 上成立, 则根据 y_{n+1} 的定义, 我们有

$$|y_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x f(\xi, y_n(\xi)) d\xi \right| \leq |x| M_1 \leq a M_1.$$

于是, 选取 x 的界 a 这样小, 使得 $a M_1 \leq b$. 那么, 在区间 $|x| \leq a$ 中, 必定有 $|y_{n+1}(x)| \leq b$. 由于对于 $y_0(x) = 0$ 显然有 $|y_0| \leq b$, 所以在区间 $|x| \leq a$ 中可用归纳法推出 $|y_n(x)| \leq b$ 对每个 n 都成立. 因此, 在 (33c) 中我们可用估计 $|f_y| \leq M$ 并积分得

$$|d_n(x)| = \left| \int_0^x d'_n(\xi) d\xi \right| \leq \left| \int_0^x M |d_{n-1}(\xi)| d\xi \right|.$$

这样一来, $|d_n(x)|$ 在区间 $|x| \leq a$ 上的最大值 D_n 以

$$D_n \leq a M D_{n-1}$$

为界.

现取 a 这样的小, 使得 $a M \leq q < 1$, 其中 q 是一固定的适当的分数, 比如说 $q = \frac{1}{4}$. 那么 $D_{n+1} \leq q D_n \leq q^n D_0$.

让我们现在来考察级数

$$d_0(x) + d_1(x) + d_2(x) + \cdots + d_{n-1}(x) + \cdots.$$

它的前 n 项部分和是 $y_n(x)$. 当 $|x| \leq a$ 时第 n 项的绝对值不大于数 $D_0 q^{n-1}$. 因此, 我们的级数被一个收敛的数项几何级数所控制. 因此(参看第一卷第 562 页), 在区间 $|x| \leq a$ 内它一致收敛于极限函数 $y(x)$, 这样一来, 我们看到存在一个区间 $|x| \leq a$, 在其中微分方程有唯一解.

现在留下的全部事情是证明: 可以一步一步地把解延拓到(有界闭)区域 R 的边界, 这里假设 $f(x, y)$ 在 R 中有定义. 迄今为止, 前述的证明指出: 如果解已被延拓到某一点, 则它能继续向前延拓一长度为 a 的 x 区间, 但是, 这个 a 依赖于已经建立的那部分区间的端点的坐标. 可以设想在进行中 a 逐步地缩小得这样迅速, 以致于无论作多少步, 解都不能再延拓得比一个小量更多. 我们将要证明, 情况不是这样.

假设 R' 是在 R 内部的一有界闭区域. 那么, 可求得数 b 如此之小, 使得对 R' 中每一点 (x_0, y_0) , 整个正方形 $x_0 - b \leq$

$x \leq x_0 + b, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$ 都在 R 之内。如果用 M 和 M_1 表示 $|f_y(x, y)|$ 和 $|f(x, y)|$ 在 R 内的上界, 我们就可发现: 若取 a , 比如说, 是数 $b, M/2$ 和 b/M_1 中的最小者, 则在前述证明中加给 a 的全部条件必定都是满足的, 这就不再依赖于 (x_0, y_0) 了; 因此, 每步我们都能够把解延拓一个不变的量 a 。这样, 我们能够一步一步地前进, 直到 R' 的边界。由于 R' 可选为 R 中的任意闭区域, 可见解能延拓到 R 的边界¹⁾。

练习 6.4

1. 设

$$f(x, y, c) = 0$$

是一平面曲线族。从它与方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

之间消去常数 c , 得到曲线族的微分方程

$$F(x, y, y') = 0$$

(参看第 807 页)。又设 $\phi(p)$ 是 p 的给定函数; 满足微分方程

$$F(x, y, \phi(y')) = 0$$

的曲线 C 称为曲线族 $f(x, y, c) = 0$ 的轨线。第二和第三个方程指明

$$y' = \phi(\bar{Y}')$$

- 1) 在定理中, R 是有界闭域而不是, 比如说, 整个 x, y 平面, 这是本质的。这可从微分方程

$$y' = 1 + y^2$$

得到证实, 其中 $f(x, y)$ 对于所有的 x, y 有定义和连续可微。方程具有初条件

$x = 0$ 时 $y = 0$ 的唯一解是函数 $y = \operatorname{tg} x$ (当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时)。尽管 $f(x, y)$ 对

一切 x 和 y 都是合乎要求的, 但解在 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 不再存在。按照已经证明的一般定理, 解的图形在消失之前, 越出给定的 R 的任何有界闭子集, 例如, 任一矩形 $|x| \leq a, |y| \leq b$, 函数 $y = \operatorname{tg} x$ 或者在整个区间 $|x| \leq a$ 存在, 或者存在但在某一子区间上其绝对值变得大于 b 。

是 C 在任一给定点的斜率 Y' 与通过该点的曲线 $f(x, y, c) = 0$ 的斜率 y' 之间的关系式。最重要的情形是 $\phi(p) = -1/p$, 它引导出曲线族的正交轨线的微分方程(参看第 809 页)

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

用此法求下列曲线族的正交轨线:

(a) $x^2 + y^2 + cy - 1 = 0$,

(b) $y = cx^2$,

(c) $\frac{x^2}{a^2 + c} + \frac{y^2}{b^2 + c} = 1$ ($a > b > 0, -b^2 < c < \infty$),

(d) $y = \cos x + c$,

(e) $(x - c)^2 + y^2 = a^2$.

在每种情形下画出两正交曲线族的图象。

2. 对于直线族 $y = cx$ 求两族轨线: (a) 轨线的斜率是直线斜率的二倍; (b) 轨线的斜率与直线斜率相等而反号。

3. 类型为

$$y = xp + \psi(p), \quad p = y'$$

的微分方程组首先由克莱洛 (Clairaut) 研究。求微商得

$$[x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0,$$

它给出 $p = c = \text{常数}$, 所以

$$y = xc + \psi(c)$$

是微分方程的通积分; 它表示一直线族。另一解是

$$x = -\psi'(p)$$

它与

$$y = -p\psi'(p) + \psi(p)$$

一起给出叫做奇积分的参数表达式。注意, 由后二方程给出的曲线是直线族的包络。

用此法求方程

$$(a) y = xp - \frac{p'}{4},$$

$$(b) y = xp + c^2$$

的奇解。

4. 求悬链线

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

的切线的微分方程。

5. 拉格朗日研究了最一般的对 x 与 y 为线性的微分方程, 即

$$y = x\phi(p) + \psi(p).$$

求微商, 我们得

$$p = \phi(p) + [x\phi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx},$$

只要 $\phi(p) - p \neq 0$ 和 p 不是常数, 它就与线性微分方程

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\phi'(p)}{\phi(p) - p}x + \frac{\psi'(p)}{\phi(p) - p} = 0$$

等价。求积分, 并用第一个方程, 可得通积分的参数表达式。从第二个方程可见方程 $\phi(p) - p = 0$, $p = \text{常数}$ 引导出若干表示直线的奇解。

对这些解可作几何解释如下: 考察克莱洛方程

$$y = xp + \psi[\phi^{-1}(p)],$$

其中 $\phi^{-1}(p)$ 是 $\phi(p)$ 的反函数, 即 $\phi^{-1}(\phi(p)) \equiv p$ 。由此可见微分方程的解是直线族

$$y = xc + \psi[\phi^{-1}(c)]$$

或

$$y = x\phi(c) + \psi(c) \quad (c = \text{常数})$$

的轨线族。这样一来, 例如

$$y = -\frac{x}{p} + \psi(p)$$

就是代表克莱洛方程

$$y = xp + \psi\left(-\frac{1}{p}\right)$$

的奇积分的曲线的渐开线(切线的正交轨线)的微分方程。

利用此法积分下述方程

$$y = x(p + a) - \frac{1}{4}(p + a)^2.$$

6. 如果可能的话,用初等函数表出下列微分方程的积分:

$$(a) \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 = 1 - y^2, \quad (c) \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 = \frac{2a - y}{y},$$

$$(b) \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 = \frac{1}{1 - y^2}, \quad (d) \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}.$$

在每一情况下画出积分曲线族的图形,并从图中找出奇解来,如果有的话。

7. 积分齐次方程

$$[xy' - y]^2 = [x^2 - y^2] \cdot \left[\arcsin \frac{y}{x} \right]^2$$

并求奇解。

8. 如同第3题指出,一条曲线是它的切线族的包络,因此,它是切线族满足的克莱洛方程的奇积分。由此,查明何种曲线满足下列性质,并求出对应的克莱洛方程:

- (a) 切线与 x 轴和 y 轴的截距之和是常数。
- (b) 切线被坐标轴截下的线段的长度是常数。
- (c) 切线与坐标轴包围的面积是常数。

6.5 微分方程组和高阶微分方程

上面的论证能推广到 x 的未知函数的个数跟方程个数一样多的一阶微分方程组。作为足够一般化的例子,我们将考察两个函数 $y(x)$ 与 $z(x)$ 的两个微分方程的方程组

$$y' = f(x, y, z),$$

$$z' = g(x, y, z),$$

其中 f 和 g 都是其变元的连续可微函数。这个微分方程组可解释成 x, y, z 空间中的一个方向场。在空间点 (x, y, z) 处规定一个方向, 它的方向余弦满足比例式 $dx:dy:dz = 1:f:g$ 。微分方程组求积分的问题在几何上也相当于在空间求属于这个方向场的曲线。与一个微分方程的情况一样, 我们也有基本定理: 对于已知函数 f 与 g 连续可微区域 R 中的每一点 (x_0, y_0, z_0) 有且仅有一条微分方程组的积分曲线通过¹⁾。区域 R 被双参数空间曲线族所覆盖, 由此可得微分方程组的解是两个函数 $y(x)$ 和 $z(x)$, 它们不仅依赖于自变量 x , 也依赖于两个任意参数 c_1 与 c_2 , 即积分常数。

因为高阶微分方程, 即, 出现有高于二阶导数的微分方程, 总能够化成一阶微分方程组, 所以后者特别重要。

例如, 二阶微分方程

$$y'' = h(x, y, y')$$

可写成两个一阶的微分方程组。我们只需取 y 对 x 的一阶导数作新未知函数 z , 则可写成微分方程组

$$y' = z,$$

$$z' = h(x, y, z).$$

它与给定的二阶微分方程在这种意义下正好等价, 即, 一个问题的每一个解同时是另一个问题的解。

读者可以此为起点去讨论二阶线性微分方程, 从而证明在第 795—796 页用过的线性微分方程的基本存在定理。

练习 6.5

1. 解下列微分方程:

(a) $y'y'' = x,$

1) 对于 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, 利用起着单个关系式 (33a) 的同样作用的递推公式

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x f(\xi, y_n(\xi), z_n(\xi)) d\xi,$$

$$z_{n+1}(x) = \int_0^x g(\xi, y_n(\xi), z_n(\xi)) d\xi$$

和适当的迭代方案可重新给出证明。

$$(b) 2y'''y'' = 1,$$

$$(c) xy'' - y' = 2,$$

$$(d) 2xy'''y'' = y'^2 - 2.$$

2. 形为

$$f(y, y', y'') = 0$$

的微分方程(注意 x 不以显式出现)能用下法化归一阶方程: 选取 y 作自变量, $p = y'$ 作未知函数. 于是,

$$y' = p, y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p,$$

而微分方程变成 $f(y, p, pp') = 0$.

用此法解下列方程:

$$(a) 2yy'' + y'^2 = 0,$$

$$(b) yy'' + y'^2 - 1 = 0,$$

$$(c) y^3y'' = 1,$$

$$(d) y'' - y'^2 + y^2y' = 0,$$

$$(e) y'''' = (y''')^{\frac{1}{2}},$$

$$(f) y'''' + y'' = 0.$$

3. 用第2题的方法解下述问题: 在平面曲线 Γ 的动点 M 处作 Γ 的法线; 记法线与 x 轴的交点为 N , 并记 Γ 在点 M 的曲率中心为 C . 寻求曲线使得

$$MN \cdot MC = \text{常数} = k.$$

讨论 $k > 0$ 和 $k < 0$ 各种可能的情况, 并作图.

4. 求所有圆

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

满足的三阶微分方程.

6.6 用待定系数法求积分

最后, 我们还要讲述另一种经常能用于解微分方程的一般方法. 这就是利用幂级数求积分的方法. 设微分方程

$$y' = f(x, y)$$

中的函数 $f(x, y)$ 能展成变量 x 和 y 的幂级数, 从而具有关于 x 和 y 的任意阶的导数。我们试图寻求微分方程的幂级数形式的解

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots,$$

并通过微分方程来确定这个幂级数的系数¹⁾。为此, 我们从建立微商级数

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots$$

着手, 并在 $f(x, y)$ 的幂级数中用 y 的幂级数表达式代替 y , 然后令左端与右端 x 的同次幂系数相等(待定系数法)。于是, 如果任意给定值 $c_0 = c$, 我们就可期望相继地确定系数

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \cdots.$$

不过, 下面的过程通常是比较简单和更为巧妙的。假设我们要求方程满足 $y(0) = 0$ 的解, 即积分曲线通过原点的解。于是 $c_0 = c = 0$ 。如果我们想起泰勒定理, 幂级数的系数是用表达式

$$c_n = \frac{1}{n!} y^{(n)}(0)$$

给出的, 我们就能够容易地算出它们。首先, $c_1 = y'(0) = f(0, 0)$ 。为了得到第二个系数 c_2 , 我们关于 x 微商方程式的两端, 得到

$$y'' = f_x + f_y \cdot y'.$$

如果这里代入 $x = 0$ 和已知值 $y(0) = 0$ 和 $y'(0) = f(0, 0)$, 我们得到值 $y''(0) = 2c_2$ 。用同样的方法, 我们可以继续这个过程一个接一个地定出其它系数 c_3, c_4, \cdots 。

如果 $f(x, y)$ 的幂级数在 $x = 0, y = 0$ 为中心的某圆内绝对收敛, 那么就可证明这个过程总可得出一个解。这里, 我们将不予证明。

练习 6.6

1. 试求下列微分方程通过指定点的解到指定项数的幂级数展开式

1) 于是这幂级数的前若干项构成解的多项式逼近。

(a) $y' = x + y$, k 项, 过 $(0, a)$ 点,

(b) $y' = \sin(x + y)$, 四项, 过 $(0, \frac{\pi}{2})$ 点,

(c) $y' = e^{xy}$, 四项, 过 $(0, 0)$ 点,

(d) $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$, 四项, 过 $(0, 1)$ 点.

2. 用幂级数求解方程

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0,$$

且 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. 证明: 这个函数与第 4.12 节第 558 页第 7 题定义的贝塞尔函数 $J_0(x)$ 恒等.

6.7 电荷引力的位势和拉普拉斯方程

我们在前面已经讨论过的一元函数的微分方程, 通常称为常微分方程, 以表示它仅仅包含“普通的”导数, 即一元函数的导数. 但是, 在分析学和它的应用的很多分支中, 多元函数的偏微分方程, 即, 未知函数的偏导数与变量间的方程, 起着重要的作用. 在这里我们将论及有关拉普拉斯微分方程的某些典型应用.

我们已经考察了质点依牛顿引力定律产生的力场, 并且把它表成位势 ϕ 的梯度 (参看第四章第 524 页). 在本节中我们要稍微详细地研究位势¹⁾.

a. 质量分布的位势

作为前面考察过的情况的推广, 我们现在取 m 为正的或负的质量或电荷. 在通常的牛顿引力定律中是不涉及负质量的, 但在电学理论中, 电荷代替了质量, 我们要区分正电荷与负电荷; 在这里, 电荷的库伦引力定律同质量的引力定律有相同的形式. 如果电荷 m 集中在空间的一点 (ξ, η, ζ) , 我们称表达式 m/r , 其中

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

1) 一大批文献是专门研究分析学的这一重要分支的 (例如, 见 O. D. Kellogg «位势理论基础», Frederick Ungar Publ. Co.).

是这个质量在点 (x, y, z) 的位势¹⁾。把若干不同的源或极点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的这种位势加起来,跟过去一样(参看第 524 页),我们得到质点组或点电荷组的位势

$$\Phi = \sum_i \frac{m_i}{r_i}.$$

表达式 $\mathbf{f} = \gamma \text{grad} \Phi$ 给出了对应的力场, 其中 γ 是不依赖于质量及其位置的常数。

对于不是集中在孤立点, 而是以密度 $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ 连续地分布在 ξ, η, ζ 空间中一个确定区域 R 内的质量, 我们定义这一质量分布的位势为

$$\Phi = \iiint \frac{\mu}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (34a)$$

如果质量是以面密度 μ 分布在曲面 S 之上, 这个曲面的位势是面积分

$$\iint \frac{\mu(u, v)}{r} d\sigma, \quad (34b)$$

积分取在曲面 S 上, $d\sigma$ 是面积元素。

对于沿曲线分布质量的位势, 我们照样得到形式为

$$\int \frac{\mu(s)}{r} ds \quad (34c)$$

的表达式, 其中 s 是这条曲线的弧长, $\mu(s)$ 是质量的线密度。

对于每种位势, 由 $\Phi = \text{常数}$ 定义的 Φ 的同值曲面表示等势面²⁾。

线分布位势的一个例子是, 由线密度 μ 为常数, 分布在 z 轴上的线段 $-l \leq z \leq l$ 上的质量产生的位势。在平面 $z = 0$ 上我

- 1) 我们可以称这是质量的一个位势。它加上任一常数而得的函数同样也可称为质量的位势, 因为它将给出同一个力场。
- 2) 每一点具有力向量的方向的曲线称为力线。因为在这里力有 Φ 的梯度方向, 所以力线就是处处与等势面相交为直角的曲线。于是, 我们看出由单个极点或有限个极点产生的位势所对应的力线族如像从源泉一样从这些极点发出。例如, 在单个极点的情况, 力线是简单地通过该极点的直线。

们考虑以 (x, y) 为坐标的点 P 。为简单起见, 我们引入 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, 即原点到点 P 的距离。于是在 P 的位势是

$$\Phi(x, y) = \mu \int_{-l}^l \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + C.$$

这里我们对积分加了常数 C , 它不影响这个位势产生的力场。右端的不定积分可按第一卷[第 288 页(26)]算出, 我们得到

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \operatorname{arcsinh} \frac{z}{\rho} = \log \frac{z + \sqrt{z^2 + \rho^2}}{\rho},$$

所以 x, y 平面上的位势是

$$\Phi(x, y) = 2\mu \log \frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{\rho} + C.$$

为了得到沿两端方向无限延伸的线的位势, 我们对常数 C 赋值 $-2\mu \log 2l$, 因此得到

$$\Phi(x, y) = 2\mu \log \frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{2l} - 2\mu \log \rho.$$

如果现在令长度 l 无限增大, 即, 如果令线的长度趋向无穷, 表达式 $\{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}\}/2l$ 趋向 1, 对于 $\Phi(x, y)$ 的极限值我们得到表达式

$$\Phi(x, y) = -2\mu \log \rho. \quad (35a)$$

所以我们看出, 除去因子 -2μ 外, 表达式

$$\log \rho = \log \sqrt{x^2 + y^2} \quad (35b)$$

是质量均匀分布的垂直于 x, y 平面的直线的位势。这里的等势曲面是圆柱面

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{常数}.$$

在第 525 页上, 我们已经算过常密度 (即单位面积上的质量)

1) 我们作此选择是为了使位势 Φ 在 $l \rightarrow \infty$ 的极限过程中保持有界。

为 μ 的球面的位势。我们发现中心在原点, 半径为 a 的球面在点 $P = (x, y, z)$ 的位势是

$$\Phi = \frac{4\pi a^2}{r} \mu \quad (r > a), \quad (36a)$$

$$\Phi = 4\pi a \mu \quad (r < a), \quad (36b)$$

其中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (36c)$$

是原点到点 P 的距离。密度为 μ 的球体的位势可利用把球分解为半径为 a , 面密度为 μda 的球面而得到。因此, 半径为 A 的球体的位势可把公式 (36a, b) 关于 a 从 0 到 A 求积分得到。我们发现(参看第 526 页)

$$\Phi = \frac{4\pi A^3}{3r} \mu \quad (r > A), \quad (37a)$$

$$\Phi = \left(2\pi A^2 - \frac{2}{3} \pi r^2\right) \mu \quad (r < A). \quad (37b)$$

球体对 P 点上单位质量产生的相应的引力

$$\mathbf{f} = r \text{grad} \Phi \quad (37c)$$

指向原点, 其大小为

$$\begin{aligned} \frac{4\pi A^3}{3r^2} r \mu \quad \text{当 } r > A, \\ \frac{4\pi r}{3} r \mu \quad \text{当 } r < A. \end{aligned} \quad (37d)$$

除了先前考察过的分布外, 位势理论也要处理所谓双层位势, 我们用下述方法来得到它: 我们假设点电荷 M 和 $-M$ 分别位于点 (ξ, η, ζ) 和 $(\xi + h, \eta, \zeta)$, 这一对电荷的位势由

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{M}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \\ & - \frac{M}{\sqrt{(x - \xi - h)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \end{aligned}$$

给出。如果我们让两极点间的距离 h 趋向 0, 同时让电荷 M 无限

增大,而使 M 总是等于 $-\mu/h$, 其中 μ 是常数,那么 Φ 趋向极限

$$\mu \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right).$$

我们称这个表达式为以 ξ 方向为轴和以 μ 为“矩”的偶极子或对偶的位势。在物理上,它表示彼此非常接近的一对相等和反号的电荷的位势。同样,我们能把偶极子的位势表成

$$\mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right)$$

的形式,其中 $\partial/\partial \nu$ 表示沿任意的偶极子的轴向 ν 的方向微商。

如果我们设想偶极子以矩密度 μ 布满曲面 S , 且设在每点偶极子轴都是曲面的法方向,则我们得到形如

$$\iint_S \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma$$

的表达式,其中 $\partial/\partial \nu$ 表示沿曲面的法方向的微商(跟过去一样,我们可以选择该法线的随便那一个方向), r 是从点 (x, y, z) 到表面上的动点 (ξ, η, ζ) 的距离。这一双层位势也可考虑成依下面方法产生: 在曲面的每一侧距离为 h 处我们构作曲面,我们给其中一曲面的面密度为 $\mu/2h$, 而给另一曲面的面密度为 $-\mu/2h$ 。这两层曲面一起在外点产生的位势,当 $h \rightarrow 0$ 时就趋向上述表达式。

b. 位势的微分方程

我们将假设在所有表达式中,所考虑的点 (x, y, z) 是空间中没有电荷的一个点,所以被积函数和它关于 x, y, z 的导数是连续的。根据这个假设我们得到所有上述的位势满足的一个关系式,即,拉普拉斯方程

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, \quad (38a)$$

它可简写成

$$\Delta \Phi = 0. \quad (38b)$$

用简单的计算容易证实(第 55 页),表达式 $1/r$ 满足这个方程。因

为我们能在积分号下求关于 x, y, z 的微商, 所以从 $1/r$ 用求和或求积分法构成的所有其它的表达式也满足这个方程¹⁾. 由于可交换微分次序²⁾, 我们发现单个偶极子的位势满足方程式

$$\Delta \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta \frac{1}{r} = 0. \quad (38c)$$

因而, 双层位势也满足这个微分方程.

我们容易验证垂直线的位势 $\log \sqrt{x^2 + y^2}$ 满足拉普拉斯方程 (也可参看第五章第 650 页). 因为这不再依赖变量 z , 所以它也满足更简单的二维拉普拉斯方程

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0. \quad (38d)$$

它们以及有关的偏微分方程的研究, 形成了分析学的最重要的分支之一. 我们指出: 位势理论并不总是主要针对寻找方程 $\Delta \Phi = 0$ 的通解, 而宁可说是针对存在性的问题和那些满足指定条件的解的研究. 所以, 位势理论的一个中心问题是边值问题, 在那里我们要找出 $\Delta \Phi = 0$ 的解 Φ , 使它及其直到二阶导数在区域 R 中连续, 并且它在 R 的边界上取指定的连续的值.

c. 均匀双层位势

我们在这里不可能详细地研究位势函数³⁾, 即满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的函数. 在这个课题中高斯定理和格林定理 (第 679, 687 页) 是主要使用的工具之一. 因此, 通过一些例子来指明怎样进行这类研究也就够了.

- 1) 注意积分号下求微商只当 $r \neq 0$, 即在没有电荷的区域中才合理. 否则拉普拉斯方程不再成立, 例如: 在球体内, 按 (37b), 它的位势满足方程

$$\Delta \Phi = \Delta \left(2\pi A' - \frac{2}{3}\pi r^2 \right) \mu = -4\pi \mu \neq 0.$$

- 2) 记住微分号 $\partial/\partial \nu$ 是对变量 (ξ, η, ζ) 而言的, 表达式 Δ 是对变量 (x, y, z) 而言的. 附带地, 当把函数 $1/r$ 考虑成六个变量 $(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ 的函数时, 它对两组变量对称, 因此, 关于变量 (ξ, η, ζ) 也满足拉普拉斯方程

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} + \Phi_{\zeta\zeta} = 0.$$

- 3) 也称为调和函数.

我们首先考察以常数 $\mu = 1$ 为矩密度的双层位势, 即, 形如

$$V = \iint_S \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma \quad (39)$$

的一个积分. 它有简单的几何意义. 我们假设从坐标为 (x, y, z) 的 P 点能够“看到”双层面上的每一点, 意即它同 P 点能用与曲面不在别处相交的直线连接起来. 曲面 S 连同其边界点与 P 点相连接的射线族构成了空间的一个锥形区域 R . 现在, 我们可以说, 除了也许差一符号外, 均匀双层位势等于曲面 S 的边界与 P 点所对的立体角. 这个立体角, 我们理解为以 P 点为中心的单位球面上被从 P 点引向 S 边界的射线切下部分的面积. 当射线穿过曲面的方向与正的法线方向 ν 相同时, 我们给立体角以正号, 反之, 给它负号.

为了证此, 我们记住, 函数 $u = 1/r$, 当不仅考虑成 x, y, z 的函数, 而且也是 (ξ, η, ζ) 的函数时, 仍旧满足拉普拉斯方程

$$\Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0.$$

我们把坐标为 (x, y, z) 的点 P 固定下来, 用 (ξ, η, ζ) 来标记锥形区域 R 中的直角坐标; 我们用半径为 ρ 中心为 P 的小球切掉 R 的顶点; 剩余的区域记为 R_ρ . 对于函数 $u = 1/r$ (在区域 R_ρ 中看成 (ξ, η, ζ) 的函数) 运用格林公式 (第五章第 686 页)

$$\iiint_{R_\rho} \Delta u d\xi d\eta d\zeta = \iint_{S'} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

这里 S' 是 R_ρ 的边界, 而 $\partial/\partial n$ 表示沿外法向的微商. 因为 $\Delta u = 0$, 左端是零¹⁾. 如果我们选取 S 上的正法向 ν 与外法向 n 相重合, 右端的曲面积分由三部分组成: (1) 在曲面 S 上所取的曲面积分

1) 从格林定理的这个形式推知: 一般说来, 当函数 u 在闭曲面内处处满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 时, 在此闭曲面上所取的曲面积分

$$\iint \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

永远是零.

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma = \iint_S \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma,$$

这就是(39)中考察的表达式 V ; (2) 在射线构成的侧面上所取的积分; (3) 半径为 ρ 的小球表面的一部分 Γ_ρ 上所取的积分. 第二部分是零, 由于法方向 n 与向径垂直, 因此它与 $r = \text{常数}$ 的球面相切. 对于半径为 ρ 的球的内部符号 $\partial/\partial n$ 等于 $-\partial/\partial \rho$, 因为外法线方向指向 r 的值减小的方向. 于是, 我们得到方程

$$V - \iint_{\Gamma_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \right) d\sigma = 0$$

或

$$V = -\frac{1}{\rho^2} \iint_{\Gamma_\rho} d\sigma,$$

这里右端的积分取在属于 R_ρ 的边界的小球面的那部分 Γ_ρ 上. 现在我们把半径为 ρ 的球面上的面积元素写成 $d\sigma = \rho^2 d\omega$ 的形式, 其中 $d\omega$ 是单位球面的面积元素, 于是得到

$$V = - \iint d\omega.$$

右端的积分取在射线构成的锥体内部的单位球面上的那部分上, 我们立即看到右端确有上述的几何意义; 它与视角的大小反号是因为 S 的法方向选成从锥形区域 R 指向外部¹⁾. 反之, 就取正号.

如果曲面 S 相对于 P 的位置不是上述的简单情形, 而是通过 P 的某些射线与它相交几次, 为了看出上面的说法也完全成立, 我们只要把曲面分成若干简单类型的部分即可. 因此, 有界曲面的均匀双层位势 (矩为 1), 除也许差一符号外, 等于从该点 (x, y, z) 去看曲面边界时所成“视角”的大小.

对于闭曲面, 把它分成两个有界的部分后, 我们看出: 如果 P 点在外部则表达式等于零, 如果 P 点在内部则表达式等于 -4π .

类似的推导证实: 在两个自变量的情形下, 沿曲线 C 的积分

1) 这里的负号可如此解释: 随着法线方向这样选择, 负电荷应放在曲面向着 P 点的那一侧.

$$\int_C \frac{\partial}{\partial \nu} (\log r) ds$$

除可能差符号外,等于曲线相对于坐标为 (x, y) 的 P 点的张角。

与空间对应的结果一样,这个结果又作如下几何解释。设坐标为 (ξ, η) 的点 Q 位于曲线 C 上,则 $\log r$ 在点 Q 沿曲线的法方向的导数为

$$\frac{\partial}{\partial \nu} (\log r) = \frac{\partial}{\partial r} (\log r) \cos(\nu, r) = \frac{1}{r} \cos(\nu, r),$$

其中符号 (ν, r) 表示法线与半径向量 r 的方向之间的夹角。另一方面,当写成极坐标 (r, θ) 时,曲线的弧元素 ds 形如

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} d\theta = \frac{r\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{-\dot{y}x + \dot{x}y} r d\theta = \frac{r d\theta}{\cos(\nu, r)}$$

(参看第一卷第 375 页),所以积分变成

$$\int \frac{\partial}{\partial \nu} (\log r) ds = \int \frac{1}{r} \cos(\nu, r) \frac{r d\theta}{\cos(\nu, r)} = \int d\theta.$$

右端最后一个积分就是该角的分析表达式。

d. 平均值定理

作为格林变换的第二个应用,我们证明下面的位势函数的平均值性质:

设 u 在某区域 R 中满足微分方程 $\Delta u = 0$ 。则位势函数在任何完全位于区域 R 内的半径为 r 的球的中心 P 上的值等于函数 u 在该球表面 S_r 上的平均值;即,

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} \bar{u} d\sigma, \quad (40a)$$

其中 $u(x, y, z)$ 是在中心 P 的值,而 \bar{u} 是在半径为 r 的球的表面 S_r 上的值。

对此,我们进行如下证明: 设 S_ρ 是半径为 $0 < \rho \leq r$, 与 S_r 同心,且在其内部的球面,由于 $\Delta u = 0$ 在 S_ρ 内部处处成立,按第 826 页脚注得到

$$\iint_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,$$

其中 $\partial u / \partial n$ 是 u 沿 S_ρ 的外法线方向的导数。如果 (ξ, η, ζ) 是流动坐标, 并引进以 (x, y, z) 为极点的球坐标

$\xi - x = \rho \cos \phi \sin \theta$, $\eta - y = \rho \sin \phi \sin \theta$, $\zeta - z = \rho \cos \theta$,
上面的方程变成

$$\iint_{S_\rho} \frac{\partial u(\rho, \theta, \phi)}{\partial \rho} d\sigma = 0.$$

由于球面 S_ρ 的面积元素 $d\sigma$ 等于 $\rho^2 d\bar{\sigma}$, 其中 $d\bar{\sigma}$ 是单位球面 S 的面积元素[参看第 514 页 (30e)], 我们发现

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial \rho} d\bar{\sigma} = 0,$$

其中积分区域不再依赖于 ρ 。因此,

$$\int_0^r d\rho \iint_S \frac{\partial u}{\partial \rho} d\bar{\sigma} = 0,$$

再交换积分次序并对 ρ 求积分, 我们有

$$\iint_S \{u(r, \theta, \phi) - u(0, \theta, \phi)\} d\bar{\sigma} = 0.$$

由于 $u(0, \theta, \phi) = u(x, y, z)$ 不依赖于 θ 和 ϕ , 于是

$$\iint_S u(r, \theta, \phi) d\bar{\sigma} = u(x, y, z) \iint_S d\bar{\sigma} = 4\pi u(x, y, z).$$

因为

$$\iint_S u(r, \theta, \phi) d\bar{\sigma} = \frac{1}{r^2} \iint_{S_r} u(r, \theta, \phi) d\sigma,$$

其中右端的积分是取在曲面 S_r 上的, 所以 u 的平均值性质得证。

用完全同样的方法可证, 满足拉普拉斯方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 的二元函数 u 有由公式

$$2\pi r u(x, y) = \int_S \bar{u} ds \quad (40b)$$

表示的平均值性质, 其中 \bar{u} 表示位势函数在中心为点 (x, y) 的圆 S_r 上的值, 而 ds 是该圆周的弧元素。

e. 圆的边值问题. 普哇松(Poisson)积分

我们能够相当完满地处理的一个边值问题是两个自变量 x ,

v 的拉普拉斯方程在圆域的情形. 在圆域 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 内引入极坐标 (r, θ) . 我们希望求得一个函数 $u(x, y)$, 它在圆内和边界上连续, 在区域内部具有连续的一阶和二阶导数并满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$, 而且在边界上取指定值 $u(R, \theta) = f(\theta)$. 在此, 我们假设 $f(\theta)$ 是 θ 的连续周期函数, 并有分段连续的一阶导数.

这个问题的解, 在极坐标下是由所谓普鲁松积分

$$u = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^2} d\alpha \quad (41)$$

给出的

为了证明这点, 我们从用下述方法建立拉普拉斯方程的特解开始. 我们把拉普拉斯方程变成极坐标形式, 得到

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0,$$

并且寻找可表成“变量分离”形式的解 $u = \phi(r)\psi(\theta)$, 即, 表成一个 r 的函数与一个 θ 的函数的乘积形式的解. 如果我们用这个表达式代替拉普拉斯方程中的 u , 方程变成

$$r \frac{[r\phi'(r)]_r}{\phi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)}.$$

由于左端不包含 θ 而右端不包含 r , 所以两端必然都不依赖这两个变量, 即, 必然等于同一常数 k . 因此, $\psi(\theta)$ 满足微分方程 $\psi'' + k\psi = 0$.

因为函数 u 是周期为 2π 的周期函数, 因而, $\psi(\theta)$ 必然也是, 且常数 k 应等于 n^2 , 其中 n 是整数. 所以

$$\psi(\theta) = a \cos n\theta + b \sin n\theta,$$

其中 a 与 b 是任意常数.

$\phi(r)$ 的微分方程

$$r^2\phi''(r) + r\phi'(r) - n^2\phi(r) = 0$$

是线性微分方程, 我们能够直接验证函数 r^n 与 r^{-n} 是线性无关的解. 因为第二个解在原点变成无穷, 而 u 在此点连续, 所以我们留下第一个解 $\phi = r^n$. 这样就得到拉普拉斯方程的变量分离形式

的解

$$r^n(a \cos n\theta + b \sin n\theta).$$

现在我们可以根据叠加原理(参看第 795 页)用这样的解的线性组合来产生其它的解

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum r^n(a \cos n\theta + b \sin n\theta).$$

甚至这种形式的无穷级数也将是解, 只要级数在圆内一致收敛并可逐项微商两次.

预定的边值函数 $f(\theta)$ 的富氏展开式

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

作为 θ 的级数, 当然是绝对和一致收敛的(参看第一卷第 636 页). 所以, 不容置疑, 级数

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

在圆内绝对和一致收敛. 如果假定 $r < R$, 因为逐项微商后的级数仍然是一致收敛的(参看第一卷第 566 页), 于是, 这个级数能逐项微商. 因此, 函数 $u(r, \theta)$ 是一个位势函数. 因为它在边界上取指定的值, 所以它是我们边值问题的解.

引进富氏系数的积分公式

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha,$$

我们就能把此解化到积分形式(41). 因为一致收敛, 我们能够交换积分号与求和号, 得到

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos n(\theta - \alpha) \right\} d\alpha.$$

如果我们能够建立关系式

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos n\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos \tau + r^2},$$

普注松积分公式就可得证. 但是, 根据第一卷(第 616 页)的方法, 以复数表达式

$$\cos n\tau = \frac{1}{2} (e^{in\tau} + e^{-in\tau})$$

把上述关系式左端化归几何级数, 就不难证明了。我们把证明的细节留给读者。

练习 6.7

1. 对普注松公式用反演法, 寻求在单位圆外部区域上有界并在边界上取给定值 $f(\theta)$ 的位势函数(所谓外边值问题)。

2. 对于具有常数线密度 μ 的线段 $x=y=0, -l \leq z \leq l$ 的位势, 试求 (a) 等势面和 (b) 力线。

3. 证明: 如果在闭曲面 S 上给定调和函数 $u(x, y, z)$ 及其法向导数 $\partial u / \partial n$ 的值, 则 u 在任一内点的值由表达式

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) d\sigma$$

给出, 其中 r 是点 (x, y, z) 到积分变动点的距离(对函数 u 和 $\frac{1}{r}$ 应用格林公式)。

6.8 来自数学物理的偏微分方程的其它例子

a. 一维波动方程

波的传播现象(比如, 光或声)遵从所谓波动方程。我们从考察所谓一维波的简单的理想化情况开始。这样的波涉及某种性质的量 u ——例如, 压力, 质点的位置或电场强度——它不仅依赖于位置的坐标 x (我们把传播方向取为 x 轴)而且也依赖于时间 t 。

于是波函数满足形为

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{tt} \quad (42a)$$

的偏微分方程, 其中 a 是依赖于介质的物理性质的常数¹⁾。

1) 例如, 对于弦的横振动, u 表示质点的横向位移, $a^2 = T/\rho$, 其中 T 是张力, ρ 是单位长度的质量。

我们能够求得方程 (42a) 的形为

$$u = f(x - at)$$

的解, 其中 $f(\xi)$ 是 ξ 的任一函数, 我们仅需假设它有一阶与二阶的连续导数。如果我们取 $\xi = x - at$, 我们立即看出, 因为

$$u_{xx} = f''(\xi), \quad u_{tt} = a^2 f''(\xi),$$

微分方程确实是满足的。同样, 用任一函数 $g(\xi)$, 我们得到形为

$$u = g(x + at)$$

的解。

两个解都表示以速度 a 沿 x 轴传播的波动; 头一个表示波沿 x 轴的正方向前进, 第二个表示沿 x 轴的负方向前进。设 $u = f(x - at)$ 在时间 t_1 时在任一点 $x = x_1$ 取值 $u(x_1, t_1)$; 则 u 在时刻 t 于点 $x = x_1 + a(t - t_1)$ 有同一值, 因为 $x - at = x_1 - at_1$, 所以 $f(x - at) = f(x_1 - at_1)$ 。同样, 我们看出, 函数 $g(x + at)$ 表示一个沿 x 轴的负方向以速度 a 传播的波。

现在, 我们来解这个波动方程的下述初值问题。从微分方程的全部可能的解中我们希望选出其初始状态 (在 $t = 0$) 由预定的函数 $u(x, 0) = \phi(x)$ 及 $u_t(x, 0) = \psi(x)$ 给出的解。为了解决这个问题, 我们只要写出

$$u = f(x - at) + g(x + at) \quad (42b)$$

并从两个方程

$$\phi(x) = f(x) + g(x),$$

$$\frac{1}{a}\psi(x) = -f'(x) + g'(x)$$

定出函数 f 与 g 即可。第二个方程给出

$$c + \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\tau) d\tau = -f(x) + g(x),$$

其中 c 是任意积分常数。由此, 我们容易得到所要求的解形为

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + at) + \phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau. \quad (42c)$$

引进新变量 $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ 代替 x 和 t , 读者自己可证明, 波动方程除此以外没有其它的解存在了。

b. 三维空间的波动方程

在三维空间中波函数 u 依赖于四个自变量, 即三个空间坐标 x, y, z 及时间 t 。于是, 波动方程是

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{a^2} u_{tt}, \quad (43a)$$

或, 简写为

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt}. \quad (43b)$$

在此我们又容易求得表示物理上的平面波传播的解。即, 任何二次连续可微函数 $f(\xi)$ 可产生微分方程的解, 只要我们取 ξ 为一形状是

$$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z \pm at$$

的线性表示式, 而其系数满足关系式

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

因为

$$\Delta u = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) f''(\xi) = f''(\xi)$$

和

$$u_{tt} = a^2 f''(\xi),$$

我们看到 $u = f(\alpha x + \beta y + \gamma z \pm at)$ 确实是方程 (43b) 的一个解。

如果 q 是从平面 $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ 到点 (x, y, z) 的距离, 我们从解析几何 (参看第 135 页) 知道

$$q = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

所以, 首先, 我们从表达式

$$u = f(q + at)$$

看出, 在与平面 $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ 平行且相距为 q 的平面的全部点上, 在给定的时刻传播的性质 (由 u 表示) 具有同一的数值。性

质在空间中是这样传播的：平行于 $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ 的平面永远是使该性质等于常数的曲面；在垂直于该平面方向的传播速度是 a 。在理论物理中这一类传播现象称之为平面波。

一种特别重要的情况是性质 u 关于时间是周期的。如果振动的频率是 ω ，这类现象可表示为

$$\begin{aligned} u &= \exp[ik(\alpha x + \beta y + \gamma z + at)] \\ &= \exp[ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)] \exp(i\omega t), \end{aligned}$$

其中 $k/2\pi$ 是波长 λ 的倒数： $k = 2\pi/\lambda = \omega/a$ 。

四个自变量的波动方程还有其它的解，它表示从某一定点，例如说从原点扩散开来的球面波。球面波定义为：在给定的瞬间，在以原点为中心的球面上的每一点性质是相同的，即， u 在球面的全部点上取相同的数值。为找出满足这个条件的解，我们把 Δu 变成球坐标 (r, θ, ϕ) ，然后假设 u 仅依赖于 r 及 t 而不依赖于 θ 和 ϕ 。如果我们相应地让 u 对 θ 和 ϕ 的导数等于零（参看第 689 页），微分方程 (43b) 变成

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

或

$$(ru)_{rr} = \frac{1}{a^2} (ru)_{tt}.$$

我们用 w 代替量 ru ，注意到 w 是我们已经讨论过的方程

$$w_{rr} = \frac{1}{a^2} w_{tt}$$

的解；因此， w 必然表成

$$w = f(r - at) + g(r + at).$$

结果有，

$$u = \frac{1}{r} [f(r - at) + g(r + at)]. \quad (43c)$$

现在读者可自己直接验证这类函数确为微分方程 (43b) 的解。

物理上，函数 $u = f(r - at)/r$ 表示以速度 a 从中心向外传播到空间中的波。

c. 自由空间中的马克斯韦耳 (Maxwell) 方程

作为最后的例子，我们来讨论方程组——著名的马克斯韦耳方程，它构成了电动力学的基础。但是，我们将不试图从物理学的观点去探讨这个方程组，而仅仅用它们来解释前面已经提出的种种数学概念。

自由空间中的电磁场由两个向量（其分量是位置和时间的函数）所确定，一是分量为 E_1, E_2, E_3 的电向量 \mathbf{E} ，一是分量为 H_1, H_2, H_3 的磁向量 \mathbf{H} 。这些向量满足马克斯韦耳方程组

$$\text{curl} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (44a)$$

$$\text{curl} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (44b)$$

其中 c 是在自由空间中的光速。用向量的分量表达式，方程组就是：

$$\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_1}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_2}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_3}{\partial t} = 0,$$

和

$$\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_2}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_3}{\partial t} = 0,$$

所以，我们有了六个一阶偏微分方程的方程组，一阶的含意是，方程中包含各分量对空间坐标和对时间的一阶偏导数。

现在我们将推演某些特殊的关于马克斯韦耳方程的结果。如

果我们求两方程组的散度,并注意 $\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{A} = 0$ (参阅第208页) 以及对时间的微商和求散度的次序是可交换的,我们从 (44a,b) 得到

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \text{常数}, \quad (45a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \text{常数}; \quad (45b)$$

即,两个散度不依赖于时间。特别,如果一开始 $\operatorname{div} \mathbf{E}$ 和 $\operatorname{div} \mathbf{H}$ 是零,则它们在所有时刻保持为零。

现在我们考虑在场中的任一闭曲面 S , 在被它包围的整个区域上求体积分

$$\iiint \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau$$

和

$$\iiint \operatorname{div} \mathbf{H} d\tau.$$

如果对这些积分应用高斯定理(第679页),它们就变成法向分量 E_n, H_n 在曲面 S 上的积分。于是,从方程

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

给出

$$\iint_S E_n d\sigma = 0, \quad \iint_S H_n d\sigma = 0.$$

在电学理论中,面积分

$$\iint_S E_n d\sigma \text{ 或 } \iint_S H_n d\sigma$$

称为通过曲面 S 的电或磁通量,因此,我们的结论可叙述如下:

假定 $\operatorname{div} \mathbf{E}$ 和 $\operatorname{div} \mathbf{H}$ 的初条件为零,则通过一闭曲面的电通量或磁通量必是零。

如果我们考察曲面 S 被曲线 Γ 界住的一部分,就可从马克斯韦耳方程组得到进一步的推论如下:

如果用下标 n 表示向量沿曲面 S 的法向分量,从马克斯韦耳方程组 (44a,b) 可直接得到

$$(\operatorname{curl} \mathbf{E})_n = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_n}{\partial t},$$

$$(\operatorname{curl} \mathbf{H})_n = +\frac{1}{c} \frac{\partial E_n}{\partial t}.$$

如果在以 $d\sigma$ 为面积元素的曲面上积分这些方程,用斯托克斯

(Stokes) 定理 (参看第 690 页) 就能把左端的积分变为沿边界 Γ 的线积分。这样做了之后, 又在积分号外对 t 取微商, 我们得到方程

$$\int_{\Gamma} E_t ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_s H_n d\sigma,$$

$$\int_{\Gamma} H_t ds = +\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_s E_n d\sigma,$$

这里左端积分号下的符号 E_t 和 H_t 是电或磁向量沿描述曲线 Γ 的弧长增加方向的切向分量, 并使弧长的增加方向与法线方向 n 构成右手螺旋。

这些方程表达的事实可用语言表述如下:

围绕一面元的电或磁力的线积分与通过该面元的电或磁通量的变化率成比例, 比例常数是 $-1/c$ 或 $1/c$ 。

最后, 我们将建立马克斯韦耳方程组与波动方程之间的联系。事实上, 我们发现, 向量 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} , 也就是说, 它们的每个分量, 都满足波动方程

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} u_{tt}.$$

为了证实这一点, 我们从两个方程中, 比如说, 消去向量 \mathbf{H} : 将第二个方程关于时间 t 求微商, 并用第一个方程来替换 $\partial \mathbf{H} / \partial t$ 。

于是推知

$$c \operatorname{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{E}) + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

现在如果用向量关系式¹⁾

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}), \quad (46)$$

并注意到

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

我们立即得到

1) 从它们的坐标表达式可直接推得此向量关系式。

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (47a)$$

同样,我们能够证实向量 \mathbf{H} 满足同样的方程:

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (47b)$$

练习 6.8

1. 积分下列偏微分方程:

(a) $u_{xy} = 0,$

(b) $u_{xyz} = 0,$

(c) $u_{xy} = a(x, y).$

2. 求方程

$$u_{xy} = u$$

满足 $u(x, 0) = u(0, y) = 1$ 的幂级数解.

3. 求双参数球面族

$$z^2 = 1 - (x - a)^2 - (y - b)^2$$

满足的偏微分方程.

4. 证明: 如果

$$z = u(x, y, a, b)$$

是一阶偏微分方程

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

的依赖于两个参数 a, b 的解, 则从 $z = u(x, y, a, b)$ 中抽出的每一单参数解族的包络仍然是解.

5. (a) 求方程

$$u_x^2 + u_y^2 = 1$$

的形状是 $u = f(x) + g(y)$ 的特解.

(b) 求方程

$$u_x u_y = 1$$

的形状是 $u = f(x) + g(y)$ 和 $u = f(x) \cdot g(y)$ 的特解.

(c) 如果在

$$u = ax + \frac{1}{a}y + b$$

中令 $b = ka$ (k 是常数), 试用第 4 题的结果求出本题中 (b) 的另外的解.

6. 把方程

$$u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = e^{x+y}$$

化为第 1 题 (c) 的形式, 并求解.

7. 证明: 如果 K 是 x, y, z 的齐次函数, 则方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

有一个 $(x^2 + y^2 + z^2)$ 的方幂解.

8. 确定满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

及条件

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 = a^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2$$

的解.

9.(a) 求波动方程

$$u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt}$$

满足边条件

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

的形为 $u(x, t) = \phi(x)\psi(t)$ 的特解.

(b) 把 (a) 中的解表成 $f(x + ct) + g(x - ct)$ 的形式.

(c) 受到弹拨的弦的振动问题: 在区间 $[0, \pi]$ 上把 $f(x)$ 展成富氏正弦级数 (对于 $0 \leq x \leq \pi$ 它定义了 $f(-x) = -f(x)$) 求对于 $0 \leq x \leq \pi$, 满足初条件

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

的上述类型的解, 其中

$$(i) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx.$$

10. 设 $u(x, t)$ 表示波动方程

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{tt} \quad (a > 0)$$

的解,它是二次连续可微的. 又设 $\phi(t)$ 是二次连续可微的给定函数,并且

$$\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(0) = 0.$$

试在 $x \geq 0$ 和 $t \geq 0$ 求解 u ,使它满足边条件

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \quad (x \geq 0),$$

$$u(0, t) = \phi(t) \quad (t \geq 0).$$

第七章 变 分 学

7.1 函数及其极值

在 n 元可微函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的通常极大值与极小值的理论中, f 在定义域中某一点达到极值的必要条件(第 349 页)是

$$df = 0 \text{ 或 } \operatorname{grad} f = 0 \text{ 或 } f_{x_i} = 0 \ (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

这些方程表明了函数 f 在该点的逗留特性. 至于这些逗留点是否确是极大或极小点, 就只能取决于进一步的研究. 极值的充分条件是取不等式的形式(见第 349 页), 跟方程(1)大不一样.

变分学也是讨论极值(或逗留值)问题的, 但是在完全新的情况下. 现在, 那些我们求极值的函数不再依赖于在某区域内的一个自变量或有限个自变量了, 而是叫做泛函或函数的函数了. 明确地说, 为了确定它们, 我们需要知道一个或多个函数或曲线(或曲面, 看情形而定), 即所谓自变函数.

约翰·贝努里在 1696 年对最速降线问题的陈述首先引起了对此类问题的普遍注意.

在垂直的 x, y 平面上, 点 $A = (x_0, y_0)$ 与点 $B = (x_1, y_1)$ (设 $x_1 > x_0, y_0 > y_1$) 用一条光滑曲线 $y = u(x)$ 如此连接起来, 使得质点在重力(它的作用方向为正 y 轴方向)作用下, 沿曲线无摩擦地从 A 滑行到 B 所用的时间是最短的.

问题的数学表达是根据物理的假设: 沿这样的曲线 $y = \phi(x)$, 速度 ds/dt (s 为曲线的弧长)正比于 $\sqrt{2g(y - y_0)}$, 即下落高度的平方根. 因此质点下落所需的时间为

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_0}} dx$$

(参考第一卷, 第 431 页). 如果我们舍去不重要的因子 $\sqrt{2g}$, 并且

取 $y_0 = 0$ (我们可以做到这一点而无损于一般性), 我们就得到下面的问题: 在所有的连续可微函数 $y = \phi(x)$ ($y \geq 0$ 且 $\phi(x_0) = 0$, $\phi(x_1) = y_1$) 中, 寻找一个函数, 使得积分

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx \quad (2a)$$

有最小的可能值。

在第 855 页上, 我们将得到结果 (曾使贝努里的同代人感到震惊): 曲线 $y = \phi(x)$ 必定是旋轮线。这里我们要强调, 贝努里问题跟初等的极大值和极小值问题是完全不同的。表达式 $I\{\phi\}$ 依赖于函数 ϕ 的全过程。由于 ϕ 不能用自变量的有限个值来描述, 因此 I 是一种新类型的函数。我们用花括号来指出它的“函数 $\phi(x)$ 的函数”的特征。

下面是另一个性质类似的问题: 两点 $A = (x_0, y_0)$ 与 $B = (x_1, y_1)$ ($x_1 > x_0, y_0 > 0, y_1 > 0$) 用一条位于 x 轴上的曲线 $y = u(x)$ 连接起来, 使得当这条曲线绕 x 轴转动时所成的旋转曲面的面积是尽可能地小。

利用在第 514 页上给出的旋转曲面的面积表达式, 并且舍去不重要的因子 2π , 我们有该问题如下的数学陈述: 在所有的连续可微函数 $y = \phi(x)$ ($\phi(x_0) = y_0, \phi(x_1) = y_1, \phi(x) > 0$) 中, 寻找一个函数, 使得积分

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2} dx \quad [y = \phi(x)] \quad (2b)$$

有最小的可能值。将会看到, 其解答是一条悬链线。

在平面上寻找连结两点 A 与 B 的最短曲线, 这个初等的几何问题属于相同的范畴。这个问题在分析上是: 在一个区间 $t_0 \leq t \leq t_1$ 上, 寻找参数 t 的两个函数 $x(t), y(t)$, 它们取预定的值 $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ 与 $y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1$, 并且使积分

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt} \right) \quad (2c)$$

有最小的可能值。当然, 其解答是一条直线。

在一个已知曲面 $G(x, y, z) = 0$ 上求测地线，即在曲面上用最短的可能曲线连接曲面上以 (x_0, y_0, z_0) 与 (x_1, y_1, z_1) 为坐标的两点，相应问题的解答就不是那样简单了。用分析的话来说，我们下面的问题：设参数 t 的三个为一组的函数 $x(t), y(t), z(t)$ ，它们使方程

$$G(x, y, z) = 0 \quad (3a)$$

成为 t 的恒等式，而且 $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0$ 与 $x(t_1) = x_1, y(t_1) = y_1, z(t_1) = z_1$ 。在所有这些函数组中寻找一组使积分

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (3b)$$

有最小的可能值。

在第 368 页上已经讨论的等周问题——求一条给定长度的闭曲线使它包围最大的可能面积——也属于同一范畴。我们在前面已经证明了它的解答是一圆周¹⁾。

在这里遇到的问题类型的一般提法如下：给定三元函数 $F(x, y, y')$ ，它在定义域中是连续的，并且有一阶和二阶的连续导数。如果在这个函数 F 中我们用函数 $y = \phi(x)$ 代替 y 以及用导数 $y' = \phi'(x)$ 代替 y' ，那末 F 变成 x 的函数，而且形如

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (4)$$

的积分变成一个依赖于函数 $y = \phi(x)$ 的确定数；即，它是一“对于函数 $\phi(x)$ 计值的泛函”。

变分学的基本问题如下：

在所有定义在区间 $x_0 \leq x \leq x_1$ 上，取预定的边值 $y_0 = \phi(x_0)$

- 1) 那里给出的证明只适用于凸的曲线；然而，下面的注解能使我们把结果直接推广到任何曲线：我们考虑曲线 C 的凸壳（即，包含 C 的最小的凸集）。它的边界 K 由 C 的凸弧和那些跟 C 相切于两点并且在 C 的凹部上搭桥的 C 的切线段组成。显然，只要 C 不是凸的， K 内的面积就超过 C 内的面积，而且另一方面， K 的周长要比 C 的短。如果我们现在使 K 连续扩张使得它永远保持同类形状，直到最后的曲线 K' 有预定的周长，那末 K' 将是一条与 C 的周长相等然而包围的面积要大的曲线。因此，在等周问题中，为了得到最大面积，我们可以一开头就以凸曲线为限。

与 $y_1 = \phi_1(x)$, 连续且有连续的一阶与二阶导数的函数中, 寻找一个函数使得泛函 $I\{\phi\}$ 有最小的可能值 (或最大的可能值)。

在讨论这个问题时, 本质的一点是加在函数 $\phi(x)$ 上的容许条件。作出值 $I\{\phi\}$ 只需要 F 在用 $\phi(x)$ 代入后是 x 的分段连续函数, 而这只要导数 $\phi'(x)$ 分段连续就可得到保证。但是我们对容许条件作了更严厉的要求: 函数 $\phi(x)$ 的一阶甚至二阶导数是连续的。当然, 搜索极大值或极小值的领域因此受到限制。然而, 我们将会看到, 这个限制实际上不影响到解, 即在采用更大领域时的那些最合适的函数总可以在比较局限的具有连续的一阶和二阶导数的函数领域中找到。

这类问题在几何与物理中是很常见的。这里我们仅举一例: 几何光学的基本原理。我们考虑在 x, y 平面中的光束, 并且假定光的速度是点 (x, y) 和方向 y' 的已知函数 $v(x, y, y')$ [设 $y = \phi(x)$ 为光的轨线方程, $y' = \phi'(x)$ 为相应的导数], 则费马的最小时间原理可叙述成:

一光线在两个已知点 A, B 之间的实际轨线是使得光线通过它所用的时间小于光线通过任何其他从 A 到 B 的轨线所用的时间。

换言之, 如果 t 是时间, 而 s 为任一连接点 A 与 B 的曲线的弧长, 那末光线通过曲线在 A 与 B 之间的那部分所化的时间等于积分

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x, y, y')} dx. \quad (5)$$

光的实际轨线是由那个使这积分取最小的可能值的函数 $y = \phi(x)$ 确定的。

我们看到, 寻找光线的轨线, 这个光学问题是前述一般问题的特例, 对应的

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}.$$

在大多数光学的例子中, 光速 v 跟方向无关而只是位置的函数

$v(x, y)$.

7.2 泛函极值的必要条件

a. 第一变分等于零

我们的目的是求出函数 $y = \phi(x)$ 使由 (4) 规定的积分产生极大值或极小值的必要条件, 或用一般的术语, 极值的必要条件. 我们运用的方法十分类似于在求一元或多元函数极值的初等问题中所用的方法. 我们假定 $y = \phi = u(x)$ 是解. 然后我们需要说明一个事实: (对于极小值) 当 u 由别的容许函数 ϕ 取代时, I 必定增加. 而且, 由于我们仅仅关心获得必要条件, 我们可限于考虑那些与函数 u 接近的任一特殊类属的函数 ϕ , 即那些使得差 $\phi - u$ 的绝对值保持在预定界限之内的函数.

我们设想函数 u 是属于以 ε 为参数的单参数函数族, 其构造如下: 取在区间的边界上为零的任一函数 $\eta(x)$, 即对它有 $\eta(x_0) = 0$, $\eta(x_1) = 0$, 而且它在闭区间上处处有连续的一阶和二阶导数. 然后我们作函数族

$$\phi(x, \varepsilon) = u(x) + \varepsilon \eta(x).$$

表达式 $\varepsilon \eta(x) = \delta u$ 叫作函数 u 的变分. [因为 $\eta(x) = \partial \phi / \partial \varepsilon$, 所以符号 δ 表示当 ε 作为自变量而 x 作为参数时所得的微分] 如果我们把函数 u 与函数 η 一样看成是固定的, 那末泛函的值

$$I\{u + \varepsilon \eta\} = G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon \eta, u' + \varepsilon \eta') dx$$

就变成 ε 的函数; 而且, u 给出 $I\{\phi\}$ 的极小值, 这个假定蕴含上述函数将在 $\varepsilon = 0$ 处获得极小值. 由此作为必要条件我们得方程

$$G'(0) = 0, \quad (6a)$$

并且还有不等式

$$G''(0) \geq 0. \quad (6b)$$

对于极大值相应的必要条件有相同的方程 $G'(0) = 0$ 和相反的不等式 $G''(0) \leq 0$. 条件 $G'(0) = 0$ 对一切函数 η 必定成

立,其中 η 除了满足前面的条件外是任意的。

撇开极大值与极小值之间的判别问题,我们说:如果函数 u 对所有的函数 η 都满足方程 $G'(0) = 0$, 那末积分 I 对 $\phi = u$ 是逗留的。假如象以前那样,我们用符号 δ 表示对于 ε 的微分,我们还说:当方程

$$\delta I = \varepsilon G'(0) = 0$$

由函数 $\phi = u$ 和任意的 η 所适合时,它表达了 I 的逗留性质。表达式

$$\varepsilon G'(0) = \varepsilon \left\{ \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon\eta, u' + \varepsilon\eta') dx \right\}_{\varepsilon=0} \quad (6c)$$

称之为积分的变分,或更确切地,第一变分¹⁾。所以,积分的逗留性质与第一变分等于零完全意味着同一件事。

逗留性质对于极大值或极小值的出现是必要的,但是,正如通常极大值或极小值的情况一样,它不是这两种可能性中的某一种出现的充分条件。我们在这里将不研究充分性问题;以下,我们只考虑逗留性的问题。

我们的主要目标是按这样的方式变换积分的逗留性条件 $G'(0) = 0$, 使得它成为只是 u 而不再含任意函数 η 的条件。

习题 7.2a

1. 联系最速降线问题(见第 842—843 页),当点 A 与 B 用直线连接时,计算降落时间。

2. 设球坐标 (r, θ, ϕ) 。令在三维空间中运动的一质点的速度为 $v = 1/f(r)$ 。该质点要用多少时间扫描点 A 与 B 之间的由参数 σ 给出的曲线弧[曲线上点的坐标为 $r(\sigma), \theta(\sigma), \phi(\sigma)$]?

b. 欧拉微分方程的推导

下面的定理构成变分学基本的判定标准:

- 1) 变分学一词的应用由于于此,它指的意思是:在这个课题中我们研究“函数的函数”在独立函数或自变函数由改变一参数 σ 而变动时的性质,

积分

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi') dx \quad (7a)$$

当 $\phi = u$ 时为逗留的必要和充分条件是: u 为容许函数, 且满足欧拉微分方程

$$L[u] = F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} = 0, \quad (7b)$$

或

$$F_{u'u''} + F_{uu'}u'' + F_{u'u'} + F_{xu'} - F_u = 0. \quad (7c)$$

为了证明这一点, 我们注意到表达式

$$G(s) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + s\eta, u' + s\eta') dx$$

对 s 求微分可以在积分号下进行(参考第 76 页), 倘若微分所得的 x 的函数是连续的或至少是分段连续的。此时, 令 $u + s\eta = y$ 并且微分, 由于对 f, u 和 η 所作的假设, 我们在积分号下得到的表达式 $\eta F_y + \eta' F_{y'}$ 满足刚才所讲的条件。因此, 我们立即得到

$$G'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [\eta F_u(x, u, u') + \eta' F_{u'}(x, u, u')] dx. \quad (7d)$$

为了后面的用途, 我们指出: 在推导这个方程时, 除了函数 u 和 η 的连续性及其一阶导数的分段连续性以外, 我们什么也没有用到。在这个方程中, 任意函数在积分号下以双重形式, 即 η 和 η' 出现。然而, 用分部积分, 我们立即可去掉 η' ; 由 $\eta(x_0)$ 和 $\eta(x_1)$ 等于零的假定, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \eta' F_{u'} dx &= \eta F_{u'} \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \left(\frac{d}{dx} F_{u'} \right) dx \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} \eta \left(\frac{d}{dx} F_{u'} \right) dx. \end{aligned}$$

在这个分部积分中我们应当假设表达式 $\frac{d}{dx} F_{u'}$ 有定义而且可积, 而由于我们假定了 F 二阶导数的连续性, 所以情况确实如此。于是, 如果我们简写

$$L[u] = F_u - \frac{d}{dx} F_{u'}, \quad (7e)$$

那末我们有方程

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta L[u] dx = 0. \quad (7f)$$

对于每一个满足我们的条件,而在其他方面则是任意的函数 η , 这个方程必须成立. 从这一点,而且根据下面的引理得出结论:

$$L[u] = 0. \quad (7g)$$

引理 I. 如果函数 $C(x)$ 在所考虑的区间内连续而且对任意函数 $\eta(x)$ (使得 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ 与 $\eta''(x)$ 为连续) 满足关系式

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) C(x) dx = 0.$$

那末对区间内的一切 x 值有 $C(x) = 0$. (这个引理的证明放到第 851 页.)

但是,我们可以用不同的方法¹⁾得到条件 (7g): 由分部积分法可以在方程

$$\int_{x_0}^{x_1} (\eta F_u + \eta' F_{u'}) dx = 0$$

中消去 η , 因为如果在分部积分时我们为了简单起见写成 $F_{u'} = A$, $F_u = b = B'$, 并且记住 η 的边条件,我们就得到

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta F_u dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta B' dx = - \int_{x_0}^{x_1} \eta' B dx.$$

如果我们置 $\zeta = \eta'$, 我们就有类似于 (7f) 的条件

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta (A - B) dx = 0. \quad (7h)$$

在推导这个公式时我们不需要对 η 与 u 的二阶导数作任何假定. 相反,只要假定 ϕ (或 u 和 η) 连续且有分段连续的一阶导数就足够了. 方程 (7h) 不是对任意的 (分段连续) 函数 ζ 必定成立,而只是对那些在端点满足我们那些条件的函数 $\eta(x)$ 的导数 ζ 才成立. 然而,若 $\zeta(x)$ 是任意给定的分段连续函数,且满足关系

1) 第一个方法是拉格朗日的,而第二个方法是雷蒙的.

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta(x) dx = 0, \quad (7i)$$

我们就可以使

$$\eta = \int_{x_0}^x \zeta(t) dt;$$

于是我们构造了一个可容许的 η ，这是因为 $\eta' = \zeta$ 和 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ 。我们从而得到下面的结果：

积分为逗留的必要条件是

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta(A - B) dx = 0, \quad (7j)$$

其中 ζ 是一个仅仅满足条件 (7i) 的任意的分段连续函数。

现在我们需要借助下述引理：

引理 II. 如果分段连续函数 $S(x)$ 满足条件

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta S dx = 0, \quad (8a)$$

其中任意函数 $\zeta(x)$ 在区间内分段连续而且

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta dx = 0, \quad (8b)$$

那末 $S(x)$ 是一个常数。

这个引理也将下面第 851 页得到证明。如果在证明之前我们假定它是正确的，那末由 (7h)——只要我们代以上面 A 和 B 的表达式——推出

$$\int_{x_0}^x F_u dx + c = F_{u'}.$$

由于 F_u 是分段连续的，上式左端作为一不定积分可以对 x 微分而且其导数为 F_u ；所以同样对右端做也是正确的。因此，对于所设的解 u ，表达式 $(d/dx)F_{u'}$ 存在，而且方程

$$F_u = \frac{d}{dx} F_{u'} \quad (9a)$$

在 u' 的所有连续点上成立。

于是，当容许函数类 $\{\phi(x)\}$ 一开始就扩充成为只要求 $\phi(x)$ 的一阶导数分段连续，那末欧拉方程仍旧是极值的必要条件，或积

分为逗留的条件。

欧拉方程是二阶常微分方程，它的解叫作极小值问题的极值曲线。为了解决极小值问题，我们须在所有的极值曲线之中找出一条满足预定边条件的曲线。

如果勒让德条件

$$F_{u'u'} \approx 0 \quad (9b)$$

对 $\phi = u(x)$ 成立，那末该微分方程可以变成“正规的”形式 $u'' = f(x, u, u')$ ，其中右边是含 x, u, u' 的已知表达式。

c. 基本引理的证明

现在我们来证明上面用过的两个引理。为了证明引理 I，我们假定在某一点，比如说 $x = \xi$ ， $C(x)$ 不是零而且是正的。于是，由于 $C(x)$ 是连续的，我们自然可以划出一个 (x_0, x_1) 的子区间

$$\xi - a \leq x \leq \xi + a, \quad (9c)$$

使得 $C(x)$ 在其中仍旧是正的。我们现在选取一个二次可微的 η ，它在此子区间内为正而在别处为零，比如说，对 (9c) 中的 x ，令

$$\eta(x) = (x - \xi + a)^4 (x - \xi - a)^4 = \{(x - \xi)^2 - a^2\}^4.$$

这个函数确实满足所有的给定条件； $\eta(x)C(x)$ 在子区间的内部为正而在外部为零。所以积分

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta C dx$$

不可能是零¹⁾。因为这与我们的假设矛盾，所以 $C(\xi)$ 不可能是正的。同理， $C(\xi)$ 也不可能是负的。于是 $C(\xi)$ 如引理中所说的那样，必定对区间内所有的 ξ 都等于零。

为了证明引理 II，我们指出，关于 $\zeta(x)$ 的假设 (8b) 直接导致关系式

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta(x) \{S(x) - c\} dx = 0, \quad (10)$$

1) 一个连续的非负函数的积分一定是正的，除非被积函数到处等于零；这直接可从积分的定义推出。

这里 c 是任意常数。我们现在这样来选取 c ，使得 $S(x) - c$ 是一个容许函数 $\zeta(x)$ ；即，我们用方程

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \zeta dx = \int_{x_0}^{x_1} \{S(x) - c\} dx = \int_{x_0}^{x_1} S(x) dx - c(x_1 - x_0)$$

来确定 c 。把 c 的这一值代入方程(10)，并且取 $\zeta = S(x) - c$ ，我们马上得

$$\int_{x_0}^{x_1} \{S(x) - c\}^2 dx = 0.$$

因为被积函数根据假设是连续的，或至少是分段连续的，所以推得

$$S(x) - c = 0$$

是 x 的恒等式，正如引理所说的那样。

d. 一些特殊情形的欧拉微分方程的解。例子

为了求极小值问题的解，我们必须求欧拉微分方程在区间 $x_0 \leq x \leq x_1$ 上的一个特解，它在端点取预定的边值 y_0 与 y_1 。因为二阶的欧拉微分方程的完全积分包含两个积分常数，所以我们期望使这两个常数适合边条件——积分常数必须满足的两个方程——来唯一确定一个解。

一般说来，用初等函数或积分明显地解出欧拉微分方程是不可能的，我们就只得满足于指明变分问题确实归结为一微分方程的问题。另一方面，对于一些重要的特例，而且事实上对于大多数经典的例子，微分方程可以用积分法解出。

第一种情形是 F 不显含导数 $y' = \phi'$ ： $F = F(\phi, x)$ 。在这里欧拉微分方程仅仅是 $F_u(u, x) = 0$ ；就是说，它完全不再是一个微分方程了，而只构成了解 $y = u(x)$ 的隐式定义。这里自然不存在积分常数的问题或满足边条件的可能性问题。

第二种重要的特殊情形是 F 不显含函数 $y = \phi(x)$ ： $F = F(y', x)$ 。在这里欧拉微分方程是 $\frac{d}{dx} (F_{u'}) = 0$ ，它立刻给出

$$F_{u'} = c,$$

其中 c 是一任意的积分常数。我们可以用这个方程把 u' 表达成

x 与 c 的函数 $f(x, c)$ ，于是我们有方程

$$u' = f(x, c),$$

由此用简单的积分得到

$$u = \int_0^x f(\xi, c) d\xi + a,$$

即, u 表达成 x 和 c 连同另外一个任意的积分常数 a 的函数。所以在这种情况下, 欧拉微分方程可以用积分彻底得解。

第三种情况——对一些实例和应用是最重要的——是 F 不显含自变量 x : $F = F(y, y')$. 在这种情况下, 我们有下面的重要定理:

如果自变量 x 在变分问题中不明显地出现, 那末

$$E = F(u, u') - u' F_{u'}(u, u') = c \quad (11)$$

是欧拉微分方程的一个积分, 即如果我们把关于 F 的欧拉微分方程的一个解 $u(x)$ 代入这表达式, 那末该表达式就变成一个与 x 无关的常数。

只要我们求导数 dE/dx , 就可立刻推断这个说法的正确性。我们有

$$\frac{dE}{dx} = F_u u' + F_{u'} u'' - u'' F_{u'} - u'^2 F_{u'u'} - u' u'' F_{u'u'},$$

或由 (7c),

$$\frac{dE}{dx} = u' L[u] = 0;$$

因此, 对于欧拉微分方程的每一个解 u , 我们有 $E = c$, 其中 c 是常数。

如果我们把 u' 想作由方程 $E = c$ 算出的, 比如说 $u' = f(u, c)$, 那末对方程

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{f(u, c)}$$

应用简单的积分就得到 $x = g(u, c) + a$ (这里 a 是另一积分常数); 即, x 表达成 u, c 和 a 的函数。只要解出 u , 我们就得到函数 $u(x, c, a)$ 。因此, 欧拉微分方程依赖于两个任意积分常数的一般解可以用积分法得到。

现在我们将用这些方法来讨论若干例子。

一般注解

有一类一般的例子,其中 F 的形式为

$$F = g(y)\sqrt{1+y'^2}$$

这里 $g(y)$ 只是一个明显地依赖于 y 的函数。对于极值曲线 $y = u$, 我们最后的那个法则立刻给出

$$g(u)\sqrt{1+u'^2} - \frac{g(u)u'^2}{\sqrt{1+u'^2}} = c$$

或

$$\frac{g(u)}{\sqrt{1+u'^2}} = c;$$

于是

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{(\{g(u)\}^2/c^2) - 1}},$$

再进行积分,我们得到方程

$$x - b = \int \frac{du}{\sqrt{(\{g(u)\}^2/c^2) - 1}}, \quad (12)$$

其中 b 是另一积分常数。算出右边的积分,并且对 u 求解方程,我们得到 u 为 x 和两个积分常数 c 与 b 的函数¹⁾。

最小面积的旋转曲面

在这个情形,由第843页的(2b),我们有 $g = y$ 。那积分(11)变成

$$x - b = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2/c^2) - 1}} = c \operatorname{arc} \cosh \frac{u}{c};$$

因此,结果是

$$y = u = c \cosh \frac{x - b}{c},$$

即,求一条曲线,使它在转动时给出一个有逗留面积的旋转曲面,这个问题的解是一条悬链线(见第一卷,第402页)。

1) 当然,我们不见得能用初等函数解出 u , 但是对于所有实用的目的来说,这些步骤足以完全确定 u 了。

这样的逗留曲线出现的必要条件是：两个给定的点 A 和 B 可以用一条 $y > 0$ 的悬链线连接起来。至于这悬链线是否真的表达了极小值，这个问题将不在此处讨论了。

最速降线

另一个例子是由取 $g = 1/\sqrt{y}$ 而得的。根据第 843 页的 (2a)，这就是最速降线的问题。利用替换 $1/c^2 = k^2$ ， $u = k\tau$ ， $\tau = \sin^2(\theta/2)$ ，则积分 (12)

$$\int \frac{du}{\sqrt{1/(uc)^2 - 1}}$$

立即变到

$$x - b = k \int \sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}} d\tau = \frac{k}{2} \int (1 - \cos\theta) d\theta,$$

由此

$$x - b = \frac{k}{2} (\theta - \sin\theta),$$

$$y = u = \frac{k}{2} (1 - \cos\theta).$$

最速降线从而是一条尖点在 x 轴上的普通旋轮线(参考第一卷, 第 353 页)。

习题 7.2d

1. 对于下列的被积函数, 求极值曲线:

(a) $F = \sqrt{y(1+y'^2)}$,

(b) $F = \sqrt{1+y'^2}/y$,

(c) $F = y\sqrt{1-y'^2}$.

2. 对于被积函数 $F = x^n y'^2$, 求极值曲线, 并且证明: 若 $n \geq 1$, 则位于 y 轴两侧的两个点不能用一条极值曲线连接起来。

3. 对于被积函数 $y^n y'^m$ (这里 n 和 m 为偶整数), 求极值曲线。

4. 对于被积函数 $F = ay'^2 + 2byy' + cy^2$ (这里 a, b, c 是 x

的连续可微的给定函数),求极值曲线。试证欧拉微分方程是二阶的常微分方程。为什么当 b 是常数时,这个常数就完全不进入微分方程?

5. 对于被积函数 $F = e^x \sqrt{1+y'^2}$, 证明极值曲线由方程 $\sin(y-b) = e^{-(x-a)}$ 和 $y=b$ (这里 a, b 是常数) 给出。讨论这些曲线的形状, 并且考查, 如果两点 A 和 B 可用形如 $y=f(x)$ 的极值曲线弧连接起来, 那末 A 和 B 该怎样坐落?

6. 对于 F 不含导数 y' 的情形, 用初等方法推导出欧拉条件 $F_y = 0$ 。

7. 求一函数, 使它给出带边条件 (a) $y(0) = y(1) = 0$ 或 (b) $y(0) = 0, y(1) = 1$ 的积分

$$I\{y\} = \int_0^1 y'' dx$$

的绝对极小值。

8. 求 $\int \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$ 的极值曲线, 即在极坐标下的最短路径。

e. 欧拉表达式恒等于零的情形

在第 848 页对于 $F(x, y, y')$ 的欧拉微分方程 (7c) 可能退化为一个无意义的恒等式, 即每个容许函数 $y = \phi(x)$ 都适合的关系式。换句话说, 对应的那个积分可能对任何容许函数 $y = \phi(x)$ 都是逗留的。如果碰到这个退化的情形, 那末不管用什么函数 $y = \phi(x)$ 代入欧拉表达式

$$F_y - F_{xy} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'',$$

它在区间内的每一点 x 都必须等于零。然而, 我们总可以找到一条曲线, 使得对于 x 的预定值, $y = \phi, y' = \phi'$ 与 $y'' = \phi''$ 取任意的预定值。所以, 对于任何四个为一组的数 x, y, y', y'' , 欧拉表达式必须等于零。我们断定 y'' 的系数 (即 $F_{y'y'}$) 必须为零。于是 F 必定是 y' 的线性函数, 比如说, $F = ay' + b$, 这里 a 与 b 仅是 x 和 y 的函数。如果我们把这个 F 代入微分方程的其余部分,

$$F_{yy'}y' + F_{xy'} - F_y = 0,$$

那末立即推出

$$0 = a_y y' + a_x - a_y y' - b_y$$

或

$$a_x - b_y$$

必须对 x 与 y 恒等于零。换句话说, 欧拉表达式恒等于零当且仅当积分的形式为

$$I = \int \{a(x, y)y' + b(x, y)\} dx = \int a dy + b dx,$$

其中 a 与 b 满足我们在第 105 页已经碰到过的可积性条件, 即这里的 $a dy + b dx$ 是一个全微分。

7.3 推 广

a. 具有多于一个自变函数的积分

求积分的极值(逗留值)的问题可以推广到这个积分不是依赖于一个自变函数而是依赖于若干个这种函数 $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ 的情形。

这种类型的标准问题可以叙述如下:

令 $F(x, \phi_1, \dots, \phi_n, \phi'_1, \dots, \phi'_n)$ 是 $(2n+1)$ 个变元 x, ϕ_1, \dots, ϕ_n 的函数, 它是连续的, 并且在所考虑的区域内有直到二阶的连续导数。如果我们用具有连续的一阶和二阶导数的 x 的函数代替 $y_i = \phi_i$, 而用其导数代替 ϕ'_i , 那末 F 变为 x 的单元函数, 并且在区间 $x_0 \leq x \leq x_1$ 上的积分

$$I\{\phi_1, \dots, \phi_n\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi_1, \dots, \phi_n, \phi'_1, \dots, \phi'_n) dx \quad (13)$$

由这些函数的选取而有一个确定值。

与极值相对照, 我们把那些满足上述连续性条件以及它们的边值 $\phi_i(x_0)$ 和 $\phi_i(x_1)$ 取预定值的所有函数组 $\phi_i(x)$ 看作是容许的。换句话说, 我们在以 y_1, y_2, \dots, y_n, x 为坐标的 $(n+1)$ 维空间中考虑那些连接两点 A 和 B 的曲线 $y_i = \phi_i(x)$ 。现在, 变分问题要求我们在所有这些函数组 $\phi_i(x)$ 中寻找一组

$$[y_i = \phi_i(x) = u_i(x)],$$

使得积分(13)取得极值(极大值或极小值)。

我们又将不讨论极值的真实性质,而只限于探究对于什么自变函数组 $\phi_i(x) = u_i(x)$, 积分是逗留的。

我们完全用第 842 页所用的同样方法来定义逗留值的概念。我们按照下面的方法把函数组 $u_i(x)$ 嵌入到依赖于参数 ε 的函数组的单参数族: 令 $\eta_1(x), \dots, \eta_n(x)$ 是 n 个任意选取的函数, 它们在 $x = x_0$ 和 $x = x_1$ 的值等于零, 而在区间上连续, 且有连续的一阶和二阶导数。我们把 $u_i(x)$ 嵌入到函数族

$$y_i = \phi_i(x) = u_i(x) + \varepsilon \eta_i(x)$$

之中。

项 $\varepsilon \eta_i(x) = \delta u_i$ 叫作函数 u_i 的变分。如果我们把 ϕ_i 的表达式代入 $I\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, 那末这个积分就变为参数 ε 的函数

$$G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u_1 + \varepsilon \eta_1, \dots, u_n + \varepsilon \eta_n, u'_1 + \varepsilon \eta'_1, \dots, u'_n + \varepsilon \eta'_n) dx.$$

当 $\phi_i = u_i$ (即, 当 $\varepsilon = 0$) 时可能存在极值的必要条件是

$$G'(0) = 0.$$

正如一个自变函数的情形一样, 如果不管怎样选取具有上述附加条件的函数组 η_i 都有 $G'(0) = 0$ 成立, 或

$$\delta I = \varepsilon G'(0) = 0$$

成立, 那末我们说积分 I 对于 $\phi_i = u_i$ 有逗留值。换句话说, 积分对于一固定函数组 $u_i(x)$ 的逗留性质跟第一变分 δI 等于零意味着一回事。

问题仍旧是对于积分的逗留性质确立起不包含任意变分 η_i 的条件。这不需要新的概念。我们着手进行如下: 首先我们取 $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ 恒为零 (即, 我们不让函数 u_2, \dots, u_n 变动)。于是我们只考虑第一个函数 $\phi_1(x)$ 作为变元, 从而由第 848 页, 条件 $G'(0) = 0$ 等价于欧拉微分方程

$$F_{u_i} - \frac{d}{dx} F_{u_i'} = 0.$$

因为我们可同样挑选函数组 $u_i(x)$ 中的任何一个, 所以我们得到下面的结果:

积分 (13) 为逗留的充要条件是这 n 个函数 $u_i(x)$ 满足欧拉方程组

$$F_{u_i} - \frac{d}{dx} F_{u_i'} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (13a)$$

这是对于 n 个函数 $u_i(x)$ 的二阶的 n 个微分方程的系统. 这个微分方程组的所有解都叫作变分问题的极值曲线. 因而, 寻找积分的极值问题归结为求解这些微分方程并从通解选择满足边条件的问题¹⁾.

b. 例子

给出欧拉微分方程组通解的可能性甚至比第 7.2 节的情形更为渺茫了. 仅仅在很特殊的情形我们能够明确地找到所有的极值曲线. 这里与第 853 页公式 (11) 的特殊情形类似, 下面的定理是经常用到的:

如果函数 F 不显含自变量 x , 即

$$F = F(\phi_1, \dots, \phi_n, \phi_1', \dots, \phi_n'),$$

那末表达式 $E = F(u_1, \dots, u_n, u_1', \dots, u_n')$ 是欧拉微分方程组的一个积分. 即, 如果我们考虑欧拉方程 (13a) 的任一组解 $u_i(x)$, 我们就有

$$E = F - \sum u_i' F_{u_i'} = \text{常数 } c, \quad (13c)$$

- 1) 利用引理 II (第 850 页, 第 7.2 节), 我们可以在一般的假设——容许函数只有分段连续的一阶导数——下, 证明这些微分方程必定成立. 然而, 如果我们要集中注意在主题的建立上, 那末在函数组 $\phi_i(x)$ 的容许性条件中包括二阶导数的连续性是更为方便的. 这样, 我们就能把表达式 $d/dx F_{u_i'}$ 写成形式

$$\sum_{k=1}^n F_{u_i' u_k'} u_k' + \sum_{k=1}^n F_{u_i' u_k} u_k' + F_{u_i' u_i}, \quad (13b)$$

在这里,这个常数值当然依赖于所代入的那一组解。

证明可仿照第 853 页的相同格式;我们对表达式的左边关于 x 进行微分,并且利用 (13b),就可验证所得的结果等于零。

一个通俗的例子是在三维空间中求两点之间最短距离的问题。这里我们需要确定两个函数 $y = y(x), z = z(x)$, 使得积分

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

有最小的可能值,而 $y(x)$ 和 $z(x)$ 在区间端点的值是预定的。欧拉微分方程 (13a) 给出

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0,$$

由此立即推出导数 $y'(x)$ 和 $z'(x)$ 是常数;因此,极值曲线必定是直线。

在三维空间的最速降线问题就有点不简单了。(重力的作用方向又取作沿正 y 轴的方向。)这里我们需要这样确定 $y = y(x), z = z(x)$, 使得积分

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{y}} dx = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', z') dx$$

是逗留的。在欧拉微分方程组中有一个方程给出

$$\frac{z'}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = a,$$

另外,我们由 (13c) 得

$$F - y'F_{y'} - z'F_{z'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = b,$$

其中 a 与 b 是常数。相除后,即得 $z' = a/b = k$ 同样是常数。所以使积分为逗留的曲线必定在平面 $z = kx + h$ 内。从另一方程

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 + y'^2}} = b$$

如第 855 页那样显然,可以推出这曲线必定又是旋轮线。

习题 7.3b

1. 假设在三维空间中(采用球坐标 r, θ, ϕ) 光速是 r 的函数(参考第 847 页第 2 题), 写出光线的轨线微分方程. 证明光线是平面曲线.

2. 证明在球面上的测地线(连接两点的长度为最短的曲线)是大圆.

3. 在直立圆锥面上求测地线.

4. 证明在两个不相交的光滑闭曲线之间距离为极小的路径是它们的公共法线.

5. 证明从一给定点到一给定曲线降落时间为最少的轨线是一条与该曲线正交的旋轮线.

6. $\int F(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$ 的端点在两条曲线上自由移动的极值曲线跟那两条曲线正交.

c. 哈密尔顿原理. 拉格朗日方程

欧拉微分方程组跟许多应用数学的分支, 尤其是动力学, 有很重要的联系. 特别, 由有限个质点组成的力学系统的运动可以用某一表达式——叫作哈密尔顿积分——的逗留条件表达出来. 这里我们将简要地说明这种关系.

一个力学系统如果它的位置可由 n 个独立的坐标 q_1, q_2, \dots, q_n 确定的话, 则它有 n 阶的自由度. 例如, 设系统由一个质点组成, 则我们有 $n = 3$, 这是因为我们可以取 q_1, q_2, q_3 为三个直角坐标或三个球坐标. 又设系统由两个质点用刚性——假设没有质量——连结起来且保持单位的距离, 则 $n = 5$, 这是因为对坐标 q_i , 我们可以取其中一个质点的三个直角坐标和决定这两个质点连线方向的另两个坐标.

用两个函数——动能和势能——足以一般地描述一动力系统. 如果系统在运动, 那末坐标 q_i 将是 t 的函数 $q_i(t)$, 而速度

的分量 $\dot{q}_i = dq_i/dt$ 。相应于动力系统的动能是如下形式的函数

$$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k (a_{ik} = a_{ki}) \quad (14a)$$

所以动能是速度分量的齐次二次式, 系数 a_{ik} 为坐标 q_1, \dots, q_n 本身而不显含 t 的函数¹⁾。

假设动力系统由动能和另一个只依赖于位置坐标 q_i 而不依赖速度或时间²⁾的势能函数 $U(q_1, \dots, q_n)$ 来描述。

哈密尔顿原理是: 一动力系统在时间区间 $t_0 \leq t \leq t_1$ 内从一个给定的初始位置到一个给定的最后位置的运动是这样的运动, 它使积分

$$H\{q_1, \dots, q_n\} = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt \quad (14b)$$

在所有二阶连续可微且对 $t = t_0$ 和 $t = t_1$ 取预定的边值的函数类中是逗留的。

这个哈密尔顿原理是动力学的基本原理, 它以简练的形式包含了动力学的一些定律。当应用哈密尔顿原理时, 欧拉方程(13a)给出拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i}, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (14c)$$

它们是理论动力学的基本方程组。

这里我们将只作一个值得注意的推导, 即能量守恒律。

因为哈密尔顿积分的被积函数不明显地依赖于自变量 t , 所以对于动力微分方程的解 $q_i(t)$, 表达式

- 1) 为了得到动能 T 的这个表达式, 我们想象系统的质点, 其各自的直角坐标表成为坐标 q_1, \dots, q_n 的函数, 则各个质点速度的直角分量可以表成 \dot{q}_i 的线性齐次函数; 因此, 我们作动能的初等表达式, 即各自的质量与相应速度平方的乘积之和的一半。
- 2) 我们在这里限于讨论作用力与时间无关且是保守的力学系统。如在力学教科书中所证明的那样, 势能确定了作用于系统的外力。系统在一个位置转移到另一个位置时, 作了机械功; 这个功等于相应的 U 值之间的差, 而不依赖于从这个位置到另一位置的特殊的运动。

$$T - U - \sum \dot{q}_i \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_i}$$

必定是常数[见 (13c)]. 由于 U 不依赖于 \dot{q}_i , 且 T 是 \dot{q}_i 的齐次二次函数, 所以

$$\sum \dot{q}_i \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_i} = \sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

因此

$$T + U = \text{常数};$$

即, 在运动过程中动能与势能之和不随时间变化。

d. 含高阶导数的积分

类似的方法可以用来解决下面的积分极值问题: 在被积函数 F 中不仅包含所求的函数 $y = \phi$ 和它的导数, 而且还包含高阶导数。例如, 假设我们欲求形式为

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi', \phi'') dx \quad (15a)$$

的积分极值, 这里的极值相对于那些可容许的函数 $y = \phi(x)$ 而言, 即 $\phi(x)$ 连同其一阶导数在区间的端点取预定的值, 而且 $\phi(x)$ 有直到四阶的连续导数。

为了找到极值的必要条件, 我们又假设 $y = u(x)$ 是所求的函数。我们把 $u(x)$ 嵌入到一函数族 $y = \phi(x) = u(x) + \epsilon \eta(x)$, 其中 ϵ 为一任意参数和 $\eta(x)$ 为一任意选取的四阶连续可微的函数, 并且 $\eta(x)$ 连同 $\eta'(x)$ 在端点都等于零。从而, 积分变成形式 $G(\epsilon)$, 而且对于一切选取的函数 $\eta(x)$, 必要条件

$$G'(0) = 0 \quad (15b)$$

必须成立。仿照与第 848 页相同的方法, 我们在积分号下求微商, 因而得到上述条件的形式为

$$\int_{x_0}^{x_1} (\eta F_u + \eta' F_{u'} + \eta'' F_{u''}) dx = 0, \quad (15c)$$

只要用 u 代替 $\phi(x)$, 分部积分一次, 我们就把含 $\eta'(x)$ 的项化成一个含 η 的项, 而分部积分二次, 我们又把含 $\eta''(x)$ 的项化成一个

含 η 的项,再把边条件考虑在内,我们容易得到

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \left(F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{u''} \right) dx = 0. \quad (15d)$$

因此,极值的必要条件(即,积分为逗留的条件)是欧拉微分方程

$$L[u] = F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{u''} = 0. \quad (15e)$$

读者可自己验证,这是一个四阶的微分方程¹⁾.

e. 多自变量

求极值必要条件的一般方法可照样应用于积分不再是单重积分而是多重积分时. 令 D 为 x, y 平面上由曲线 Γ 围成的已知区域. 我们假设 D 和 Γ 是足够规则的,使得可以允许应用分部积分(第 638 页)的. 令 $F(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y)$ 是它的五个变元的二次连续可微的函数. 设在 F 中我们用一个函数 $\phi(x, y)$ 替代 ϕ , 而 $\phi(x, y)$ 在 Γ 上取预定的边值和在 D 内有直到二阶的连续导数,又设用 ϕ 的偏导数替代 ϕ_x 和 ϕ_y , 那末 F 变成 x 和 y 的一个函数,而且积分

$$I\{\phi\} = \iint_D F(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y) dx dy \quad (16a)$$

有一个与 ϕ 的选取有关的值. 问题在于寻求一个函数 $\phi = u(x, y)$, 使得这个值是一极值.

为了找到必要条件,我们又采用老方法. 选取一个在边界 Γ 上等于零的函数 $\eta(x, y)$; 它有直到二阶的连续导数; 而除此以外,它是任意的. 我们假设 u 是所求的函数,而 ϵ 是任意参数,然后把 $\phi = u + \epsilon\eta$ 代入积分. 这积分又变为 ϵ 的函数 $G(\epsilon)$, 而且极值的必要条件是

$$G'(0) = 0.$$

象以前一样,这个条件取下面的形式

- 1) 从 (15d) 推导 (15e) 时,我们须要在引理 I (第 849 页)中限制函数 η 属于 C^2 类,而且 η 和 η' 在端点等于零. 从第 851 页引理的证明中明显可见,这个结论在这些比较局限的条件下也成立.

$$\iint_D (\eta F_u + \eta_x F_{u_x} + \eta_y F_{u_y}) dx dy = 0. \quad (16b)$$

为了消除在积分号下的 η_x 和 η_y 的项, 我们把其中一项对 x 进行分部积分, 而把另一项对 y 进行分部积分. 因为 η 在 Γ 上等于零, 所以在 Γ 上的边值不出现了, 而我们有

$$\iint_D \eta \left[F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right] dx dy = 0. \quad (16c)$$

引理 I (第 849 页) 可以立刻推广到多于一的维数, 而且我们立即得到欧拉的二阶偏微分方程

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0. \quad (16d)$$

例子

1. $F = \phi_x^2 + \phi_y^2$. 如果我们略去因子 2, 那末欧拉微分方程变成

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

即, 从一变分问题得到了拉普拉斯方程.

2. 极小曲面. 柏拉梯奥问题是这样的: 在一个区域 D 上, 求一曲面 $z = f(x, y)$, 它通过一预定的其投影为 Γ 的空间曲线, 并且它的面积

$$\iint_D \sqrt{1 + \phi_x^2 + \phi_y^2} dx dy$$

为极小.

这里的欧拉微分方程是

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} = 0,$$

或, 以展开的形式,

$$u_{xx}(1 + u_y^2) - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}(1 + u_x^2) = 0.$$

这是著名的极小曲面的微分方程, 我们已在别处对它进行了广泛的研究¹⁾.

1) R. Courant, *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces*, Interscience: New York, 1950.

7.4 含附带条件的问题。拉格朗日乘子

在第3章(第334页)对多元函数通常的极值讨论中,我们考虑了对那些变元加某些附带条件的情形。在这种情形,不定乘子法对函数可能有逗留值导出了一个特别清楚的表达式。类似的方法在变分学中甚至是更重要的。在这里我们将仅仅简要地讨论一些最简单的情形。

a. 通常的附带条件

一个典型的例子是:在三维空间中,求一条表成参数 t 的曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), 它服从附带条件——曲线位于给定的曲面 $G(x, y, z) = 0$ 上, 并且通过该曲面上两个给定的点 A 和 B 。于是, 问题是从那些服从附带条件 $G(x, y, z) = 0$ 和通常的边界条件以及连续性条件的函数组 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 中进行适当的选取, 使得形式为

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) dt \quad (17)$$

的积分是逗留的。这个问题可直接归结为在第857页已讨论过的情形。我们假设 $x(t), y(t), z(t)$ 为所求的函数。再设所求曲线所在的那部分曲面可以表示成形式 $z = g(x, y)$; 只要 G_z 在曲面的这部分上异于零, 这一点确是可能的。如果我们假设在所讨论的曲面上三个方程 $G_x = 0$, $G_y = 0$, $G_z = 0$ 不同时成立, 并且如果我们限于考虑曲面的充分小的一块, 那末我们可以不失一般性设 $G_z \neq 0$ 。把 $z = g(x, y)$ 和 $\dot{z} = g_x \dot{x} + g_y \dot{y}$ 代入积分内, 我们得到一个以 $x(t)$ 和 $y(t)$ 为彼此独立函数的问题。从而, 我们可以直接应用第859页的结论, 而且对被积函数

$$F(x, y, g(x, y), \dot{x}, \dot{y}, \dot{x}g_x + \dot{y}g_y) = H(x, y, \dot{x}, \dot{y})$$

应用方程(13a), 写出积分 I 可能是逗留的条件。我们因而有两个方程

$$\frac{d}{dt} H_x - H_x = \frac{d}{dt} F_x - F_x + \frac{d}{dt} (F_x g_x)$$

$$- F_x g_x - F_x \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} H_y - H_y = \frac{d}{dt} F_y - F_y + \frac{d}{dt} (g F_y)$$

$$- F_y g_y - F_y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

但是,我们在微分时立刻看出

$$\frac{d}{dt} g_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt} g_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

因此

$$\frac{d}{dt} F_x - F_x + g_x \left(\frac{d}{dt} F_x - F_x \right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} F_y - F_y + g_y \left(\frac{d}{dt} F_y - F_y \right) = 0.$$

如果为了简单起见我们以一适当的乘子 $\lambda(t)$ 写出

$$\frac{d}{dt} F_x - F_x = \lambda G_x, \quad (18a)$$

并且利用关系式(第 228 页) $g_x = -G_x/G_z$, $g_y = -G_y/G_z$, 那末我们得到另外两个方程

$$\frac{d}{dt} F_x - F_x = \lambda G_x, \quad (18b)$$

$$\frac{d}{dt} F_y - F_y = \lambda G_y. \quad (18c)$$

于是我们有以下的积分可能为逗留的条件: 如果我们设 G_x , G_y , G_z 在曲面 $G = 0$ 上不同时为零, 那末极值的必要条件是存在一个乘子 $\lambda(t)$, 使得三个方程 (18a, b, c) 在附带条件 $G(x, y, z) = 0$ 下同时得到满足; 即, 我们有决定函数 $x(t), y(t), z(t)$ 和乘子 $\lambda(t)$ 的四个对称的方程。

最重要的特例是在给定的曲面 $G = 0$ 上 (设 G 的梯度不为

零)求连接两点 A 和 B 的最短曲线的问题, 这里有

$$F = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

而欧拉微分方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \lambda G_x,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \lambda G_y,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \lambda G_z.$$

这些方程关于新参数 s 的引进是不变的。即, 读者可自己容易验证, 如果 s 换成任何别的参数 $\tau = \tau(s)$, 只要这个变换是一一的、可逆的和连续可微的, 那末这些方程保持相同的形式。如果我们取弧长为新的参数, 因此 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, 我们的微分方程有形式

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \lambda G_x, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} = \lambda G_y, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = \lambda G_z. \quad (19)$$

这些微分方程的几何意义是, 我们问题的极值曲线的主法向量¹⁾正交于曲面 $G = 0$ 。我们称这些曲线为曲面的测地线。因而, 在曲面上两点之间的最短距离必定由一测地线弧给出。

习题 7.4a

1. 证明一个不受外力的、约束在一给定的曲面 $G = 0$ 上运动的质点的轨线也同样是测地线。在这个情形中, 势能 U 等于零, 并且读者可应用哈密尔顿原理(第 862 页)。

2. 令 C 为一给定曲面 $G(x, y, z) = 0$ 上的曲线。在 C 的每一点上取一段定长的而且相对于 C 是定向的垂直测地线。测地线的自由端画出一条曲线 C' 。证明 C' 也垂直于那些测地线段。

1) 即, 向量 $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$; 见第 211 页。

b. 其他类型的附带条件

在上面讨论的问题中,我们能够消去附带条件,是由于解出了确定附带条件的方程,从而把问题直接归结为以前讨论过的类型。然而,对于经常出现的其他种类的附带条件是不可能做到这一点的。这种类型的最重要的情形是等周的附带条件。下面是一个标准的例子:在前面的边条件和连续性条件下,要使积分

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi') dx \quad (20a)$$

是逗留的,这里的自变函数服从另外的附带条件

$$H\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \phi, \phi') dx = \text{给定的常数 } c. \quad (20b)$$

特别, $F = \phi$, $G = \sqrt{1 + \phi'^2}$ 是经典的等周问题。

这类问题不能只靠我们以前用一个在边界上等于零的任意函数来构造“变动的”函数 $\phi = u + \varepsilon \eta$ 的方法予以解决,因为一般而言,这些函数(除去 $\varepsilon = 0$) 在 $\varepsilon = 0$ 的邻域内不满足附带条件。然而,用一个类似在问题中最早所用的那种方法,不是引进一个函数和一个参数,而是两个在边界上等于零的函数 $\eta_1(x)$ 和 $\eta_2(x)$, 以及两个参数 ε_1 和 ε_2 , 我们可以得到所需的结果。假设 $\phi = u$ 为所求的函数,我们因此构造变动的函数

$$\phi = u + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2.$$

如果我们把这个函数代入那两个积分,我们就把问题归结为:在附带条件

$$\begin{aligned} H &= \int_{x_0}^{x_1} G(x, u + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2, u' + \varepsilon_1 \eta_1' + \varepsilon_2 \eta_2') dx \\ &= M(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = c \end{aligned}$$

下,推导积分

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2, u' + \varepsilon_1 \eta_1' + \varepsilon_2 \eta_2') dx = K(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

的逗留性的必要条件;即,函数 $K(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 对 $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$ 是逗留的,这里 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 满足附带条件

$$M(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = c.$$

根据以前有附带条件的通常极值的结果, 以及在第 848 页给出的类似的其他原由, 作一简单的讨论就可导出这一结果:

积分的逗留性质等价于存在一个常数乘子 λ , 使得方程 $H = c$ 和欧拉微分方程

$$\frac{d}{dx} (F_{u'} + \lambda G_{u'}) - (F_u + \lambda G_u) = 0$$

成立. 这结论的一个例外情形只可能出现在函数 u 满足方程

$$\frac{d}{dx} G_{u'} - G_u = 0$$

时.

证明的细节留给读者, 他可以参考这个课题的文献¹⁾.

习题 7.4b

1. 证明圆柱面上的测地线是螺旋线.

2. 求下列例子的欧拉方程:

(a) $F = \sqrt{1 + y'^2} + yg(x),$

(b) $F = y''^2/(1 + y'^2)^3 + yg(x),$

(c) $F = y''^2 - y'^2 + y^2,$

(d) $F = \sqrt{1 + y'^2}.$

3. 设有两个自变量, 求以下例子的欧拉方程:

(a) $F = a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 + \phi^2d,$

(b) $F = (\phi_{xx} + \phi_{yy})^2 = (\Delta\phi)^2,$

(c) $F = (\Delta\phi)^2 + (\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2).$

4. 求下面等周问题的欧拉方程: 在条件

1) 例如, 见 M. R. Hestenes, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1966. R. Courant and D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, New York, 1953, Vol. 1, Chapter IV.

$$\int_{x_0}^{x_1} u^2 dx = 1$$

下,积分

$$\int_{x_0}^{x_1} (au'^2 + 2buu' + cu^2) dx$$

是逗留的.

5. 令 $f(x)$ 为一给定的函数. 在积分条件

$$H(\phi) = \int_0^1 \phi^2 dx = K^2 \quad (\text{这里 } K \text{ 是给定的常数})$$

下,要使积分

$$I(\phi) = \int_0^1 f(x)\phi(x) dx$$

是极大的. (a) 从欧拉方程求解 $u(x)$. (b) 应用哥西不等式证明在(a) 中找到的解给出 I 的绝对极大值.

6. 利用拉格朗日乘子法, 证明经典等周问题的解是一个圆.

7. 一根密度均匀和给定长度的细线吊在两点 A 和 B 之间. 如果重力作用于负 y 轴的方向, 细线的平衡位置是使重心有最低的可能位置. 于是这是一个使形式为 $\int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx$ 的积分在

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

等于给定的常数值的这种附带条件下的极小值问题. 证明细线将挂成一条悬链线.

8. 设 $y = u(x)$ 在所有具有预定边值 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 的连续可微函数族 $y(x)$ 中使积分 $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ 产生最小的值. 证明 $u(x)$, 对于区间 $x_0 \leq x \leq x_1$ 内的所有 x , 满足不等式

$$F_{y'y'}(x, u(x), u'(x)) \geq 0 \quad (\text{勒让德条件})$$

9. 令 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 是位于 x 轴上方的两点. 求通过这两点的函数的图形下面积的极值曲线, 附加的条件为两点之间的轨线有固定的长度.

第八章 单复变函数

在第一卷 7.7 节中, 我们已经提到单复变函数论, 并且看到, 这个理论有助于弄清楚一个实变数的函数的结构. 这一章, 我们将就这个理论的基本原理给出一个简要的、更加系统的叙述.

8.1 幂级数表示的复函数

a. 极限. 复数项的无穷级数

我们从虚数单位 i 与任何两个实数 x, y 形成的复数 $z = x + iy$ 的基本概念开始 (见第一卷第 109 页). 我们对复数的运算如同对实数的运算一样, 只要附加法则: i^2 总可以用 -1 来代替. 我们用 x, y 平面上或 z 平面上的直角坐标表示 z 的实部 x 和虚部 y . 复数 $\bar{z} = x - iy$ 称为 z 的共轭复数. 我们由关系式 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 引进极坐标 (r, θ) , 并且称 θ 为复数的幅角, 与

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z|$$

为它的绝对值(或模). 我们有

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

我们能够直接建立复数 z_1, z_2 和 $z_1 + z_2$ 满足的所谓“三角不等式”

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

如果设 $z_1 = u_1 - u_2, z_2 = u_2$, 我们立即得到另一个不等式

$$|u_1| - |u_2| \leq |u_1 - u_2|.$$

如果用 x, y 平面上分量为 x_1, y_1 和 x_2, y_2 的向量分别表示复数 z_1, z_2 , 三角不等式可以得到几何上的解释: 表示和数 $z_1 + z_2$ 的向量正是由前面两个向量相加而得到, 由这个加法所得到的三角形的边长是 $|z_1|, |z_2|, |z_1 + z_2|$ (见图 8.1).

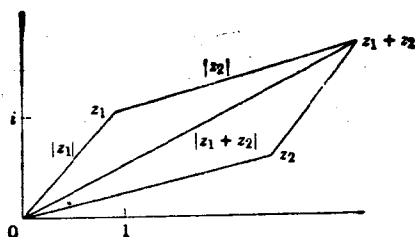


图 8.1 复数的三角不等式

于是,三角不等式表示三角形的任意一边不超过另外两边的和。

现在我们考虑复数序列的极限概念,这个概念本质上是新的。我们叙述下面的定义:复数序列 z_n 趋于极限 z , 如果 $|z_n - z|$ 趋于零。当然这就意味着 $z_n - z$ 的实部和虚部都趋于零。从柯西准则推出,序列 z_n 的极限 z 存在的必要充分条件是

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} |z_n - z_m| = 0.$$

一类特别重要的极限是由复数项无穷级数所引出的极限。我们说复数项无穷级数

$$\sum_{v=0}^{\infty} c_v$$

是收敛的,并且有和 s , 如果部分和序列

$$s_n = \sum_{v=0}^n c_v$$

趋于极限 s 。如果实的非负项级数

$$\sum_{v=0}^{\infty} |c_v|$$

收敛,如同在第一卷第七章(第 540 页),推出原来的复数项级数也收敛。这种级数我们就说它是绝对收敛的。

如果级数的项 c_v 不是常数,而是依赖于区域 R 内变化的点的坐标 (x, y) , 那么一致收敛的概念就有意义。我们说这个级数在区域 R 内是一致收敛的, 如果对于任意给定的正数 ϵ , 能够找到

仅仅依赖于 ε 的固定的 N , 使得对于每个 $n \geq N$ 和区域 R 内的一切点 $z = x + iy$, 关系式 $|s_n - s| < \varepsilon$ 成立. 当然, 对于依赖于 R 的点的复函数序列 $s_n(z)$, 一致收敛完全一样定义. 所有这些关系、定义以及有关证明完全和我们已经熟知的实变数函数的理论相对应.

收敛级数的最简单例子是几何级数

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

和实变数的情形一样, 这个级数的部分和是

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

并且, 当 $|z| < 1$ 时, 有

$$1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1 - z}. \quad (1)$$

我们看到, 这个几何级数当 $|z| < 1$ 时绝对收敛, 而当 $|z| \leq q$ 一致收敛, 这里 q 是任意介于 0, 1 之间的固定正数. 换句话说, 几何级数对于单位圆内的一切 z 的值绝对收敛, 在每个与单位圆同心、半径小于 1 的闭圆上一致收敛.

对于收敛性的研究, 比较判别法仍然是适用的: 如果 $|c_n| \leq p_n$, p_n 是实的、非负的, 且无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n$$

收敛, 那么复级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

如果 p_n 是常数, 而 c_n 是依赖于在 R 内变化的点 z , 那么 $\sum c_n$ 在 R 内一致收敛, 证明和实变数的相应证明完全一样 (见第一卷第七章第 562 页), 这里不必重复.

如第一卷第 569 页一样, 如果 M 是任意一个正常数, q 是介于 0, 1 之间的正数, 那么以 $p_n = Mq^n$ 或 $M\nu q^{\nu-1}$ 或 $\frac{M}{\nu+1} q^{\nu+1}$ 为正的无穷级数也收敛. 我们将直接利用这些级数作为比较.

b. 幂级数

最重要的复数项级数是幂级数: $c_n = a_n z^n$, 即幂级数可以表示为以下形式

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

或者稍为更一般的形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

其中 z_0 是一个固定点。但是由于这种形式总可以通过替换 $z' = z - z_0$ 归结为前一种形式, 所以我们只需考虑 $z_0 = 0$ 的情形。

有关幂级数的主要定理可以逐句照搬第一卷第七章 (第 568 页) 中有关实的幂级数的相应定理:

如果幂级数当 $z = \xi$ 时收敛, 那么对于使得 $|z| < |\xi|$ 的每个 z 的值, 级数绝对收敛, 而且, 如果 q 是小于 1 的正数, 级数在圆 $|z| \leq q|\xi|$ 上一致收敛。

我们能够立即继续讲下面进一步的定理:

两个级数

$$D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n+1},$$

$$I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

也绝对收敛, 并且对于 $|z| \leq q|\xi|$ 一致收敛。

证明和以前完全一样。由于级数 $P(z)$ 当 $z = \xi$ 时收敛, 因此第 n 项 $a_n \xi^n$ 当 n 增大时趋于零, 所以存在正常数 M , 使得对一切 n , 不等式 $|a_n \xi^n| < M$ 成立。现在, 如果 $|z| = q|\xi|$, $0 < q < 1$, 我们有

$$|a_n z^n| < M q^n, |n a_n z^{n-1}| < \frac{M}{|\xi|} n q^{n-1},$$

$$\left| \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \right| < \frac{M|\xi|}{n+1} q^{n+1}.$$

于是我们得到已知的比较级数(第874页),所以级数收敛,定理证毕.

在幂级数的情形,有两种可能性:或者它对一切 z 的值收敛,或者有值 $z = \eta$ 使级数发散.由上面的定理,对于 $|z| > |\eta|$ 的一切 z ,级数一定发散(见第一卷第568页),并且如同实的幂级数一样,有收敛半径 ρ ,使得当 $|z| < \rho$ 时级数收敛,当 $|z| > \rho$ 时级数发散.将此应用到 $D(z)$ 和 $I(z)$ 上,它们的 ρ 和原来的幂级数相同.圆 $|z| = \rho$ 称为幂级数的收敛圆.对于收敛圆的圆周本身,即对于 $|z| = \rho$ 上的点,不能作出有关级数的收敛和发散的一般命题.

c. 幂级数的微分法和积分法

一个收敛的幂级数

$$P(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$$

在它的收敛圆内确定一个复变数 z 的函数.在这个区域内,它是多项式

$$P_n(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$$

当 n 趋于无穷时的极限.

和实变数的情形一样,一个多项式 $f(z)$ 可以对自变数 z 求微分.首先,我们注意到代数恒等式

$$\frac{z_1^n - z^n}{z_1 - z} = z_1^{n-1} + z_1^{n-2}z + \cdots + z^{n-1}$$

成立.如果我们现在让 z_1 趋于 z ¹⁾,我们立即有

$$\frac{d}{dz} z^n = \lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{z_1^n - z^n}{z_1 - z} = n z^{n-1}.$$

同样,我们立即有

1) 一个连续复函数的极限概念 ($z_1 \rightarrow z$) 可以和实变数的情形完全一样引进.

$$P'_n(z) = \frac{d}{dz} P_n(z) = \lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{P_n(z_1) - P_n(z)}{z_1 - z} \\ = \sum_{\nu=1}^n \nu a_\nu z^{\nu-1} = D_n(z).$$

自然,我们称表达式 $P'_n(z)$ 为复多项式 $P_n(z)$ 的微商.

现在我们有下面的定理,它在幂级数理论中是基本的:

一个收敛的幂级数

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad (2a)$$

可以在它的收敛圆内部逐项微商,即极限

$$P'(z) = \lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{P(z_1) - P(z)}{z_1 - z} \quad (2b)$$

存在,并且

$$P'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu z^{\nu-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} P'_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(z) = D(z). \quad (2c)$$

从这个定理显然有,幂级数

$$I(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} z^{\nu+1}$$

可以作为第一个幂级数的不定积分,即 $I'(z) = P(z)$.

幂级数的逐项可微性证明如下:

从第 875 页我们知道关系式

$$D(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(z)$$

在收敛圆内成立. 我们应当证明: 当 z_1 在收敛圆内充分接近 z 时, 差商

$$\frac{P(z_1) - P(z)}{z_1 - z}$$

与 $D(z)$ 的差的绝对值小于预先指定的正数 ε . 为此,我们把差商写成

$$D(z_1, z) = \frac{P(z_1) - P(z)}{z_1 - z} = \frac{P_n(z_1) - P_n(z)}{z_1 - z} + \sum_{v=n+1}^{\infty} a_v \lambda_v,$$

其中

$$\lambda_v = \frac{z_1^v - z^v}{z_1 - z} = z_1^{v-1} + z_1^{v-2}z + \cdots + z^{v-1}.$$

如果保持第874页上的记号, 并且如果 $|z| < q|\xi|$, $|z_1| < q|\xi|$, 那么

$$|\lambda_v| \leqslant vq^{v-1}|\xi|^{v-1}.$$

因此,

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \sum_{v=n+1}^{\infty} a_v \lambda_v \right| \leqslant \sum_{v=n+1}^{\infty} |a_v| vq^{v-1} |\xi|^{v-1} \\ &\leqslant \frac{M}{|\xi|} \sum_{v=n+1}^{\infty} vq^{v-1}. \end{aligned}$$

由于正项级数 $\sum vq^{v-1}$ 收敛, 所以当 n 充分大, $|R_n|$ 可以任意地小. 我们选取 n , 使得 $|R_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, 并且如果必要的话可增大 n ,

使得同时有

$$|D(z) - D_n(z)| < \varepsilon/3.$$

现在我们选取如此接近于 z 的 z_1 , 使得

$$\frac{P_n(z_1) - P_n(z)}{z_1 - z}$$

与 $D_n(z)$ 的差也小于 $\varepsilon/3$. 于是

$$\begin{aligned} |D(z_1, z) - D(z)| &\leqslant \left| \frac{P_n(z_1) - P_n(z)}{z_1 - z} - D_n(z) \right| \\ &\quad + |D_n(z) - D(z)| + |R_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

这个不等式就是所要证明的.

由于函数的微商仍然是具有相同收敛半径的幂级数, 我们能

够再次求微商,并且可不断地重复这个过程,即幂级数可以在它的收敛圆内部任意次地求微商.

幂级数是它所表示的函数的泰勒级数,即系数 a_ν 可由以下公式表示

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!} P^{(\nu)}(0). \quad (3)$$

证明和实的情形完全一样(见第一卷第 572 页).

d. 幂级数的例子

我们在第一卷第七章(第 581 页)中提到过,初等函数的幂级数能够直接推广到复变数的情形.换句话说,我们能够将初等函数的幂级数看作复的幂级数,并由此把这些函数的定义推广到复的领域.例如,级数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

对一切 z 收敛(这可以由比较判别法立即推出).这些幂级数所表示的函数,如同在实的情形一样,仍然分别采用符号 $e^z, \cos z, \sin z, \cosh z, \sinh z$. 关系式

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}, \quad (4a)$$

$$\cosh z = \cos iz, \quad i \sinh z = \sin iz \quad (4b)$$

现在可以立即从幂级数推出.此外,由逐项微商,我们得到关系式

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z. \quad (4c)$$

作为异于几何级数的、具有有穷收敛半径的幂级数例子,我们考虑级数

$$\log(1+z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{z^\nu}{\nu}, \quad (4d)$$

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2i} [\log(1+iz) - \log(1-iz)].$$

这两个级数的和,我们仍用 \log 和 \arctan 表示. 这里, 收敛半径等于 1. 由逐项微商, 我们得到几何级数, 并且

$$\frac{d \log(1+z)}{dz} = \frac{1}{1+z}, \quad \frac{d}{dz} (\arctan z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

8.2 单复变函数一般理论的基础

a. 可微性条件

上面我们已经看到, 由幂级数表示的函数具有微商和不定积分. 这个事实可以作为单复变函数一般理论的出发点. 这个理论的目的在于把微积分学推广到单复变函数上去, 特别地, 重要的是把函数概念推广到复变数的函数, 使其包含复区域内可微的一切函数.

当然, 我们可以一开始就限于考虑由幂级数表示的函数, 于是它满足可微性条件. 但是这样做有两个缺点. 首先, 我们不能预先知道是否复变数函数的可微性条件一定蕴含函数能够展开为幂级数(在实变数的情形, 我们知道, 确实存在具有任意阶微商而不能展开为幂级数的函数, 见第一卷第 486 页). 其次, 我们从仅在单位圆内收敛, 它的幂级数是几何级数的简单函数 $\frac{1}{1-z}$ 知道, 即使对于简单的函数表达式, 它的幂级数并不是处处代表这个函数. 在这个特别情形, 我们已经用别的方法知道这个函数.

这些困难能够通过外尔斯特拉斯方法加以避免, 并且单复变函数论能够在幂级数的理论上展开. 但是值得强调的是另一种观点, 即柯西和黎曼的观点. 他们的方法不是用明显的表达式而是用简单性质来表征函数. 更确切地说, 是用函数在定义域内的可微性而不是用幂级数来表征.

我们从复变数 z 的复函数 $\zeta = f(z)$ 的一般概念开始. 如果 R 是 z 平面上的一个区域, R 内的每个点 $z = x + iy$ 借助某种关

系联系着一个复数 $\zeta = u + iv$, 则称 ζ 是 R 内的一个复函数. 这个定义只表示使得点 (x, y) 位于 R 内的实数偶 x, y 有相应的实数偶 u, v , 即 u, v 是定义在 R 内的两个实变数 x, y 的两个实函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$.

对于复的微积分来说, 函数概念的要求是非常强的. 首先, 我们限于 $u(x, y), v(x, y)$ 在 R 内有连续一阶偏微商 u_x, u_y, v_x, v_y . 我们称 $u + iv = \zeta = f(z)$ 在 R 内关于自变数 z 是可微的, 意思就是, 极限

$$\lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

对于 R 内的一切 z 的值存在. 称这个极限为 $f(z)$ 的微商.

要使 $f(z)$ 是可微的, 仅仅 u, v 具有关于 x, y 的连续偏微商是不够的. 可微性条件比实函数的可微性条件要强得多. 因为如果函数可微, 当 $h = r + is$ 经实数 ($s = 0$) 和经纯虚数 ($r = 0$) 或任何别的方式趋于零时, 必需有相同的极限值 $f'(z)$.

例如, 如果我们设 $u = x, v = 0$, 即 $f(z) = f(x + iy) = x, u(x, y), v(x, y)$ 是连续可微的. 但是对于 f 关于 z 的微商, 如果设 $h = r$, 我们得到

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z+r) - f(z)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{x+r-x}{r} = 1,$$

如果设 $h = is$, 则有

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z+is) - f(z)}{is} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0}{is} = 0;$$

即, 我们得到完全不同的极限值. 类似地, 对于 $f(z) = u + iv = x + 2iy$, 当 h 以不同方式趋于零时, 我们得到差商的不同极限值.

所以, 为确保 $f(z)$ 对于 z 的可微性, 必需加上别的限制. 复变函数论中的这个基本事实可表达为下面的定理:

如果 $\zeta = u(x, y) + iv(x, y) = f(z) = f(x + iy)$, 其中 $u(x, y), v(x, y)$ 是连续可微的, 则函数 $f(z)$ 在复区域内可微的必

要充分条件是所谓柯西-黎曼微分方程

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (5a)$$

成立

在每个使 u, v 连续可微且满足柯西-黎曼微分方程的开集 R 内, $f(z)$ 称为复变数 z 的解析函数, 并且 $f(z)$ 的微商为

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{1}{i}(u_y + iv_y). \quad (5b)$$

我们首先证明柯西-黎曼微分方程是必要条件. 设 $f(z)$ 存在, 因此取 h 等于实值 r , 我们一定得到极限值 $f'(z)$, 即

$$f'(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{u(x+r, y) - u(x, y)}{r} + i \frac{v(x+r, y) - v(x, y)}{r} \right) = u_x + iv_x.$$

同样地, 如果取 h 为纯虚值 is , 我们一定得到 $f'(z)$, 即

$$f'(z) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{u(x, y+s) - u(x, y)}{is} + i \frac{v(x, y+s) - v(x, y)}{is} \right) = \frac{1}{i}(u_y + iv_y).$$

所以

$$u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y + iv_y).$$

取实部和虚部, 我们立即得到柯西-黎曼方程。

但是这两个方程也是函数 $f(z)$ 可微性的充分条件. 为了证明这一点, 我们作差商 [见第二卷第一分册第 42 页公式 13)]

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} =$$

- 1) 也称为全纯. 这里不予以证明的一个较为深刻的定理是: 对于在一个区域内可微的函数 f 而言, u, v 的偏微商不仅存在而且一定是连续的. 因此, f 的可微性实际上蕴含连续可微性. 但是在今后我们并不利用这个定理, 而总是假定我们所考虑的可微函数 f 有连续可微的实部和虚部, 即 $f'(z)$ 是 z 的连续函数.

$$\frac{u(x+y, y+s) - u(x, y) + i\{v(x+r, y+s) - v(x, y)\}}{r+is}$$

$$= \frac{ru_x + su_y + irv_x + isv_y + e_1|h| + ie_2|h|}{r+is},$$

其中 e_1 和 e_2 是两个实的, 随 $|h| = \sqrt{r^2 + s^2}$ 一起趋于零的量. 现在如果柯西-黎曼方程成立, 上面的表达式立即变成

$$u_x + iv_x + e_1 \frac{|h|}{r+is} + ie_2 \frac{|h|}{r+is}.$$

我们立即看出当 $h \rightarrow 0$ 时, 这个表达式趋于极限值 $u_x + iv_x$, 而不依赖于 $h \rightarrow 0$ 所取的方式.

现在我们利用柯西-黎曼方程, 或与此等价的可微性作为解析函数的定义, 并以此作为解析函数一切性质推理的基础.

b. 微分学的最简单运算

一切多项式和一切在收敛圆内部的幂级数是解析函数 (见第 876 页). 我们立即看出, 导至微分学基本法则的运算, 如同在实变数的情形一样, 能够以完全相同方式进行 (见第一卷第 215—219 页, 第 231—234 页). 特别, 以下法则成立: 解析函数的和、差、乘积以及商 (只要分母不为零) 能够按照微积分的基本法则求微商, 从而仍然是解析函数. 此外, 一个解析函数的解析函数能够按照链式法则求微商, 所以它本身是解析函数.

我们也注意到下面的定理:

如果解析函数 $\zeta = f(z)$ 的微商在区域 R 内处处为零, 则 $f(z)$ 是常数.

证明. 由 (5a), (5b), $v_y - iu_y = 0$ 在 R 内处处成立. 因此 $v_y = 0, u_y = 0$. 根据柯西-黎曼方程, $v_x = 0, u_x = 0$. 即 u 和 v 是常数, 因此, ζ 是一常数.

对于指数函数的应用

我们利用这个定理, 推导出指数函数的某些基本性质. 对一切复数 z , 指数函数由幂级数定义:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

由于我们可以微商这个级数, 我们得到

$$\frac{d}{dz} e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = e^z. \quad (6)$$

于是, 指数函数 $f(z) = e^z$ 是微分方程

$$f'(z) = f(z)$$

的解(对一切 z)。由微分法的链式法则, 对于任意固定的复数 ζ , 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} e^{z+\zeta} e^{-z} &= \frac{d}{dz} f(z+\zeta) f(-z) \\ &= f'(z+\zeta) f(-z) - f(z+\zeta) f'(-z) \\ &= f(z+\zeta) f(-z) - f(z+\zeta) f(-z) = 0. \end{aligned}$$

利用上面的定理, 对于自变量 z ,

$$e^{z+\zeta} e^{-z}$$

是一个常数。令 $z = 0$, 并且由于 $e^0 = 1$, 我们求出这个常数, 得到

$$e^{z+\zeta} e^{-z} = e^{\zeta} \quad (6a)$$

对于一切 z 和 ζ 成立。对于 $\zeta = 0$, 有

$$e^z e^{-z} = 1. \quad (6b)$$

因此, 对于一切复数 z , 指数函数不等于零, 而且 e^z 的倒数是 e^{-z} 。用 e^z 乘 (6a) 的两边, 我们得到指数函数的函数方程

$$e^{z+\zeta} = e^z e^{\zeta}, \quad (6c)$$

这个方程直接从幂级数表示式推导出来不是如此容易。

如果 $f(z)$ 是微分方程

$$f'(z) = f(z) \quad (7a)$$

的任意解, 则我们有

$$\frac{d}{dz} f(z) e^{-z} = f'(z) e^{-z} - f(z) e^{-z} = 0.$$

因此

$$f(z)e^{-z} = c(\text{常数}).$$

于是,微分方程 (7a) 的一般解有以下形式

$$f(z) = ce^z. \quad (7b)$$

其中 c 是一个常数.

在第 879 页,我们已经看到

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (8a)$$

其中 $\cos z, \sin z$ 是由它们的幂级数定义的. 用 $-z$ 代替 z , 由于 $\sin(-z) = -\sin z$, 我们发现

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

这两个关系式相乘,得到

$$e^{iz}e^{-iz} = \cos^2 z + \sin^2 z.$$

由于 $e^{iz}e^{-iz} = e^{iz-iz} = 1$, 所以我们证明了恒等式:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad (8b)$$

对一切复数 z 成立.

由 (6c) 和 (8a), 有

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \quad (8c)$$

如果 x, y 是实的, 我们求得 $e^z = e^{x+iy}$ 的绝对值为

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^{x+iy}| = |e^x \cos y + i e^x \sin y| \\ &= \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} \\ &= e^x. \end{aligned} \quad (8d)$$

如果令 $z = 2\pi$, 我们就得到联系指数函数和三角函数的关系式 (8a) 的另一个重要结论:

$$e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1. \quad (9a)$$

更一般地, 在 (6c) 中令 $\zeta = 2\pi i$, 我们有

$$e^{z+2\pi i} = e^z. \quad (9b)$$

于是,复变数的指数函数是周期函数,周期是 $2\pi i$.

公式 (8a) 表明,对于任意整数 n

$$e^{2n\pi i} = \cos(2n\pi) + i \sin(2n\pi) = 1. \quad (9c)$$

容易看出,仅当 $z = 2n\pi i$ ($n = \text{整数}$) 时,

$$e^z = 1.$$

因为如果 $z = x + iy$, x, y 是实数, 由 $e^z = 1$ 及 (8d) 知道 $e^z = 1$, 所以 $x = 0$, 于是由

$$1 = e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

得到 $\cos y = 1, \sin y = 0$.

所以, y 必是 2π 的倍数.

我们推知方程

$$e^z = e^\zeta \quad (9d)$$

成立, 当且仅当

$$z = \zeta + 2n\pi i,$$

其中 n 是整数, 因为用 $e^{-\zeta}$ 乘 (9d), 得到

$$e^{z-\zeta} = e^z e^{-\zeta} = 1.$$

c. 保角变换. 反函数

通过函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 建立了 z 平面或 x, y 平面的点到 ζ 平面或 u, v 平面的点的对应. 于是, 我们得到一个由 $\zeta = f(z) = u + iv$ 确定的, 从 x, y 平面上的区域到 u, v 平面上的区域的变换或映照. 由第 882 页上的 (5a), (5b), 这变换的雅可比行列式是

$$D = \frac{d(u, v)}{d(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2.$$

所以, 只要 $f'(z) \neq 0$ 时, 雅可比不等于零, 并且是正的. 如果假定 $f'(z) \neq 0$, 我们前面的结果 (第二卷第一分册第 262 页) 表明, 在 z 平面上点 z_0 的充分小的邻域被一一对应地、连续地映照到一个区域, 这个区域在 ζ 平面上点 $\zeta_0 = f(z_0)$ 的邻域内. 这个映照是保角的 (即它保持角度不变), 因为如同我们在第三章 (第二卷第一分册第 243—244 页) 已经看到的那样, 柯西-黎曼方程是变换不仅保持角度大小、而且保持方向的必要和充分条件. 于是我们有以下结果:

除去那些使得 $f'(z_0) = 0$ 的点 z_0 外, 由 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 给定的变换的保角性与函数 $f(z) = u + iv$ 的解析性恰恰意味着

同一件事情.

读者应当研究在第三章(第二卷第一分册第243—244页)中讨论过的那些保角表示的例子,并且证明所有这些变换能够表示为简单形式的解析函数.

因为 z_0 的邻域到 ζ_0 的邻域的一一对应的保角表示,其反变换也是保角的,所以 $z = x + iy$ 也可以看作是 $\zeta = u + iv$ 的解析函数 $\phi(\zeta)$, 这个函数称为 $\zeta = f(z)$ 的反函数.

不用这个几何论证,如同在第二卷第一分册第 253 页上(24d)所做的那样,通过计算 $x(u, v)$, $y(u, v)$ 的偏微商,我们能够直接建立反函数的分析特征. 我们有

$$x_u = \frac{v_y}{D}, \quad x_v = -\frac{u_y}{D}, \quad y_u = -\frac{v_x}{D}, \quad y_v = \frac{u_x}{D}, \quad (10a)$$

我们看到反函数满足柯西-黎曼方程 $x_u = y_v$, $x_v = -y_u$. 我们能够立即验证,函数 $\zeta = f(z)$ 的反函数 $z = \phi(\zeta)$ 的微商由下面的公式给出:

$$\frac{dz}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = 1. \quad (10b)$$

8.3 解析函数的积分

a. 积分的定义

实变数函数的微积分学的主要定理,是一个函数的不定积分(变上限的积分)可以看作是这个函数的原函数或反微商(第一卷第 199 页). 相应的关系构成单复变函数论的核心.

我们从给出已知函数 $f(z)$ 的积分定义开始. 这里,用 $t = r + is$ 而不用自变量 z 表示积分变量是方便的. 设 $f(t)$ 在区域 R 内解析, $t = t_0$, $t = z$ 是这个区域 R 内的两个点. 用一条完全位于 R 内的分段光滑的(见第一章第 90 页)有向曲线连接这两点(图 8.2),然后借助于分点 $t_0, t_1, \dots, t_n = z$ 将曲线 C 细分为 n 部分,作和数

$$S_n = \sum_{v=1}^n f(t'_v)(t_v - t_{v-1}), \quad (11a)$$

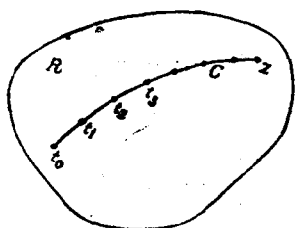


图 8.2

其中 t'_v 是 C 上位于 t_{v-1} 和 t_v 之间的任意一点。如果现在分割越来越细：无限地增加分点，使得长度 $|t_v - t_{v-1}|$ 的最大值趋于零， S_n 趋于极限，并且这个极限和特殊的中间点 t'_v ，分点 t_v 的选取无关。

采用与证明实变数的定积分存在定理相类似的方法，我们可以直接证明这一点。但是，化为关于实的曲线积分（见第一章第 91 页）的定理更方便：设

$$f(z) = u(r, s) + iv(r, s), \quad t_v = r_v + is_v,$$

$$\Delta t_v = t_v - t_{v-1} = \Delta r_v + i\Delta s_v,$$

则有

$$S_n = \sum_{v=1}^n u(r'_v, s'_v)\Delta r_v - v(r'_v, s'_v)\Delta s_v + i \left\{ \sum_{v=1}^n v(r'_v, s'_v)\Delta r_v + u(r'_v, s'_v)\Delta s_v \right\}.$$

当 n 增大时，右边的和数分别趋于实的线积分

$$\int_C u dx - v dy \quad \text{和} \quad i \int_C v dx + u dy,$$

所以，我们断言 S_n 趋于一极限。我们把这个极限值称为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 从 t_0 到 z 的定积分，记为

$$\int_{t_0}^z f(z) dz \quad \text{或} \quad \int_C f(z) dz.$$

于是，有

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy). \quad (11b)$$

从这个定积分的定义立即给出一个重要估计：如果在积分路径上， $|f(z)| \leq M$ ，其中 M 是一个常数， L 是积分路径的长度，那么

$$\left| \int_c f(t) dt \right| \leq ML, \quad (11c)$$

因为由 (11a) 和第一卷(第 374 页)

$$|S_n| \leq M \sum_v |t_v - t_{v-1}| \leq ML.$$

此外,我们指出,复积分(特别地,不同积分路径的组合)的运算满足第一章(第二卷第一分册第94—96页)中所述曲线积分的一切法则。

b. 柯西定理

一个复变数函数的最重要性质是 t_0 到 z 的积分大都和积分路径 c 的选取无关。事实上,我们有柯西定理:

如果函数 $f(t)$ 在单连通域 R 内解析,则积分

$$\int_{t_0}^z f(t) dt = \int_c f(t) dt$$

不依赖于 R 内连接 t_0 和 z 的积分路径 c 的特殊选取;这个积分是一个解析函数 $F(z)$, 并且

$$\frac{d}{dz} F(z) = \frac{d}{dz} \left[\int_{t_0}^z f(t) dt \right] = f(z).$$

因此, $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数或不定积分。

柯西定理也可以表述如下:

如果 $f(t)$ 在单连通域内解析, 则 $f(t)$ 沿位于这个区域内的闭曲线的积分等于零。

从 (11b) 和曲线积分的主要定理推出积分和路径无关;因为被积表达式的实部 $u dx - v dy$ 和虚部 $v dx + u dy$, 由于柯西-黎曼方程, 满足可积性条件, 于是这个积分是 x, y 或 $x + iy = z$ 的函数 $F(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, 并且由曲线积分的已知结果, 有以下关系:

$$U_x = u, \quad U_y = -v, \quad V_x = v, \quad V_y = u,$$

即(见第 882 页(5b))

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x, \quad U_x + i V_x = u + i v,$$

这就表明, $F(z)$ 确实在 R 内是解析的, 且导数 $F'(z) = f(z)$ 。

单连通区域的假定对于确保柯西定理成立是不可缺少的。例

如,考虑函数 $1/z$, 它在 z 平面上除去原点外处处解析。我们不能从柯西定理推断 $1/z$ 沿环绕原点的闭曲线的积分等于零, 因为这条曲线不能范围一个单连通域, 使得 $1/z$ 在这个区域内解析。区域的单连通性在例外点 $z=0$ 受到破坏。例如, 如果我们沿圆 $K: |z|=r$ 或 $z=re^{i\theta}$ 方向为正向取积分, θ 为积分变量 ($dz = rie^{i\theta}d\theta$), 就有

$$\int_K \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = 2\pi i. \quad (12a)$$

即积分的值不是零而是 $2\pi i$ 。

但是, 我们能够推广柯西定理到多连通域:

如果多连通域 R 是由有限多个分段光滑的闭曲线 c_1, c_2, \dots 所围成, $f(z)$ 在这个区域内和它的边界上解析¹⁾, 则函数沿一切边界曲线的积分为零, 只要一切边界的取向对于区域 R 的内部是相同的, 即当沿边界曲线移动时, 区域总在它的同一边, 比如说是总在左边。

其证明可从曲线积分相应的证明方法立即得到: 我们分割区域 R 为有限个单连通域 (见图 8.3 和图 8.4), 应用柯西定理于这些区域, 并把这些结果加起来。我们能够用稍为不同的方式来表述

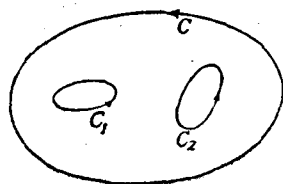


图 8.3 $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$

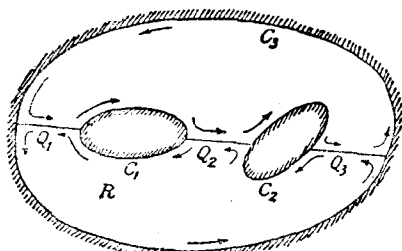


图 8.4 用线 Q_1, Q_2, \dots 分多连通域为单连通域

1) 称一个函数在一条曲线是解析的, 如果它在这条曲线的不管多么小的邻域内是解析的。

这个定理:

如果区域 R 是由闭曲线 C 的内部除去 C_1, C_2, \dots 的内部所组成, 则

$$\int_C f(t) dt = \sum_v \int_{C_v} f(t) dt, \quad (12b)$$

其中积分沿外边界 C 和内边界是按相同方向取的。

c. 应用. 对数函数, 指数函数及一般幂函数

现在, 我们能够利用柯西定理作为对数函数、指数函数、从而也是其他初等函数的理论基础, 只要仿效类似于对实变数采取过的做法(第一卷第五章第 155 页)。

我们开始定义函数 $1/t$ 的积分作为对数函数。首先我们限定积分路径使它位于沿负实轴作割痕而得到的解析性单连通域内, 即不允许积分路径跨过负实轴。更精确地说, 如果 $t = |t|(\cos\theta + i\sin\theta)$, 我们限定 $-\pi < \theta \leq \pi$ 。在作了这条割痕后的 t 平面内, 我们用任意曲线 C 连接点 $t = 1$ 和任意点 z , 于是我们能够利用柯西定理于这两点间的函数 $1/t$ 的积分, 这个积分和路径无关。它对于 $z \neq 0$ 唯一确定一个解析函数。我们称它为 z 的对数 $\log z$:

$$\zeta = \log z = \int_1^z \frac{dt}{t} = f(z). \quad (12c)$$

对数有性质

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}. \quad (12d)$$

对数函数的逆与指数函数一致。按照对数函数的定义, 在沿负实轴割开的平面内, 我们考虑函数 $e^{\log z}$, $z \neq 0$ 。利用微商的链式法则, 从 (12d) 和 (6), 对于 $z \neq 0$, 有

$$-\frac{d}{dz} \frac{1}{z} e^{\log z} = -\frac{1}{z^2} e^{\log z} + \frac{1}{z^2} e^{\log z} = 0.$$

因此

$$\frac{1}{z} e^{\log z} = c(\text{常数}).$$

如果取 $z = 1$, 有

$$c = e^{\log 1} = e^0 = 1.$$

于是, 对于一切 $z \neq 0$, 有

$$e^{\log z} = z. \quad (13a)$$

方程 (13a) 表示, 方程

$$e^w = z \quad (13b)$$

对于每一个 $z \neq 0$ 至少有一个解 w , 即

$$w = \log z. \quad (13c)$$

所以, 指数函数取到除 0 以外的一切复数.

但是, 这个解不是唯一的. 从第 886 页我们知道, 如果 w 是 (13b) 的任意一个特解, 则一般解为

$$w + 2n\pi i,$$

其中 n 是整数. 因此有: 对于任意 $z \neq 0$, 方程

$$e^w = z \quad (13d)$$

等价于

$$w = \log z + 2n\pi i, \quad (13e)$$

其中 n 是整数.

作为一个应用, 我们推导出对数的加法定理. 对于任意两个都不为零的复数 z, ζ , 由 (13a), 我们有

$$z\zeta = e^{\log z} e^{\log \zeta} = e^{\log z + \log \zeta}.$$

另一方面,

$$z\zeta = e^{\log(z\zeta)}.$$

1) 人们试图从

$$\frac{d}{dz} \log(e^z) = \frac{1}{e^z} e^z = 1$$

类似地推断

$$g(z) = \log(e^z) - z = \text{常数}.$$

但是, 这是不对的, 因为 $g(0) = 0$, $g(2\pi i) = -2\pi i$. 这个推理的谬误之处留给读者去找出.

所以

$$\log(z\zeta) = \log z + \log \zeta + 2n\pi i, \quad (14)$$

其中 n 是整数。这里，对于正实值 z, ζ ，我们总可以取 $n = 0$ 。但是如同下面的例子所表明的那样，对于其他情形是不行的。

通过取连接 $t = 1$ 和 $t = |z|$ 的直线段与圆弧 $|t| = |z|$ 作为积分路径，积分

$$\log z = \int_1^{|z|} \frac{dt}{t}$$

容易明显地计算出来。在圆上，设 $t = |z|e^{i\zeta}$ ，我们有

$$\log z = \int_1^{|z|} \frac{dt}{t} + \int_0^\theta i d\zeta = \log |z| + i\theta, \quad (15)$$

其中 θ 是复数 z 的幅角(图 8.5)，例如

$$\log 1 = 0, \quad \log i = \frac{\pi i}{2}, \quad \log(-1) = \pi i.$$

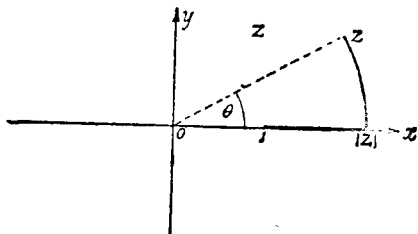


图8.5 $\log z = \log |z| + i\theta$

我们注意到

$$\log[(-1)(-1)] = \log 1 = 0 = \log(-1) + \log(-1) - 2\pi i.$$

于是，在公式(14)中，当 $z = \zeta = -1$ 时，我们不能取 $n = 0$ 。

对于任意复数 z ，它的幅角位于区间 $-\pi < \theta \leq \pi$ 内。用这个方法得到的对数值常称为对数的主值。这个术语是基于这样的事实：对数的其他值可以由除去不准跨越负实轴这个条件而得到。这样，我们能够取连接点 1 和点 z 的、并环绕原点 $t = 0$ 的路径。在这条曲线上， t 的幅角增加到某一个值，这个值比原先 z 的

幅角大了或小了 2π 。所以,我们得到积分的值为

$$\log z = \log |z| + i\theta \pm 2\pi i$$

(图 8.6)。同样地,如果取曲线围绕原点从正方向或反方向绕行 n 次,我们得到值

$$\log z = \log |z| + i\theta + 2n\pi i. \quad (16)$$

这就表示对数的多值性¹⁾。公式(16)表示方程 $e^{\log z} = z$ 的一般解。

引进了对数和指数函数,现在我们容易定义 a^z 和一般幂函数 z^a , 其中 a 和 a 是常数 (见第一卷第 163 页对于实变数的相应的讨论)。我们通过关系

$$a^z = e^{z \log a} (a \neq 0), \quad (16a)$$

定义 a^z ; 其中 $\log a$ 取主值。同样可通过关系

$$z^a = e^{a \log z} (z \neq 0) \quad (16b)$$

定义 z^a 。

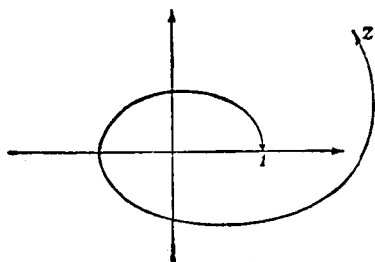


图 8.6 $\log z = \log |z| + i\theta + 2\pi i$

如果利用 $\log a$ 主值的定义, 函数 a^z 是唯一确定的, 而函数 z^a 的多值性则更深入一步。注意到 $\log z$ 的多值性, 我们看出, 由 z^a 的任一个值, 乘以 $e^{2\pi n i a}$ 可得到其他的一切值, 这里 n 是任意正或负的整数。如果 a 是有

理数, 比如 p/q , p, q 是互素的, 则在这些乘数中有有限个是不同的 (其 q 次幂必为 1)。但是, 如果 a 是无理数, 我们得到无穷多个乘数。函数 z^a 的多值性将在第 908 页详细地讨论。

从链式法则看出, 这些函数满足微商公式

$$\frac{d(a^z)}{dz} = a^z \log a, \quad \frac{d(z^a)}{dz} = a z^{a-1}. \quad (16c)$$

1) 当然, 多值性对数不是对每个数 z 的复对数在单值意义下的函数, 主值是这种意义下的函数。

8.4 柯西公式及其应用

a. 柯西公式

对于复连通域的柯西定理引出一个仍属于柯西的基本公式：一个在整个闭区域解析的函数，在其内部任意一点 $z = a$ 处的值可以用这个函数在边界 C 上的值表示出来。

设函数 $f(z)$ 在单连通域 R 和它的边界 C 上解析，则函数

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - a}$$

除去点 $z = a$ 外，在 R 内以及边界 C 上处处解析。在域 R 内去掉一个以 $z = a$ 为中心、 ρ 为半径、且整个位于 R 内的小圆（图8.7）。然后应用柯西定理（第 890 页）于函数 $g(z)$ 。如果 K 表示这个方向为正向的小圆周，且 R 的边界 C 也是正向，由柯西定理[见第 891 页 (12b)]

$$\int_C g(z) dz = \int_K g(z) dz.$$

在圆 K 上，有 $z - a = \rho e^{i\theta}$ 。这里 θ 决定圆周上点的位置，所以在这个圆上， $dz = \rho i e^{i\theta} d\theta$ ，因此

$$\int_K g(z) dz = i \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

由于 $f(z)$ 在点 a 是连续的，所以只要 ρ 充分小，我们就有

$$f(a + \rho e^{i\theta}) = f(a) + \eta,$$

其中 $|\eta|$ 小于任意指定的正数 ε 。

因此

$$\left| \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta - \int_0^{2\pi} f(a) d\theta \right| = \left| \int_0^{2\pi} \eta d\theta \right| \leq 2\pi\varepsilon,$$

所以

$$\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(a) + \kappa,$$

其中 $|\kappa| \leq 2\pi\varepsilon$ 。于是，如果 ρ 充分小，

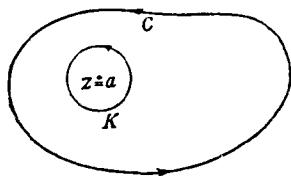


图 8.7

$$\int_0 g(z) dz = 2\pi i f(a) + \kappa i,$$

其中 $|\kappa i| \leq 2\pi\varepsilon$.

如果使 ε 趋于零 (当 ρ 趋于零时), 上边等式的右边趋于 $2\pi i f(a)$, 而左边, 即

$$\int_C g(z) dz$$

不变, 于是我们得到柯西基本积分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz. \quad (17a)$$

如果我们现在回到用 t 表示积分变量, 然后用 z 代替 a , 这个公式有以下形式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt. \quad (17b)$$

这个公式表明, 一个在闭区域内解析的函数, 其内部的值可以用这个函数在边界上的值表示出来.

特别地, 如果 C 是以 z 为中心的圆 $t = z + re^{i\theta}$, 即如果 $dt = ire^{i\theta} d\theta$, 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

用文字来表达就是: 一个函数在圆盘中心的值等于圆周上的平均值, 只要这个圆及其内部包含在 $f(z)$ 是解析的区域内.

b. 解析函数的幂级数展式

柯西公式有许多重要的推论, 其中主要的是, 每个解析函数能够展为幂级数, 这就把当前的理论和 8.1 节的理论联系起来了. 更明确地说, 我们有以下定理:

如果函数 $f(z)$ 在圆 $|z - z_0| \leq R$ 的内部和边界上解析, 则这个函数能够展为在这个圆内收敛的 $z - z_0$ 的幂级数.

不失证明的一般性, 我们取 $z_0 = 0$ (否则只要由变换 $z - z_0 = z'$ 引进新的自变量 z'). 现在应用柯西积分公式 (17b) 于圆 C , $|t| = R$, 并把被积函数写成 (利用几何级数) 以下形式;

$$\begin{aligned}\frac{f(z)}{z-z} &= \frac{f(z)}{z} \frac{1}{1-z/z} = \frac{f(z)}{z} \left(1 + \frac{z}{z} + \dots + \frac{z^n}{z^n}\right) \\ &\quad + \frac{f(z)}{z} \left(\frac{z}{z}\right)^{n+1} \frac{1}{1-z/z}.\end{aligned}$$

由于 z 是圆内的点, 所以 $|z/z| = q$ 是小于 1 的正数, 而且我们估计几何级数的余项

$$r_n = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^{n+1}}{z^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-z/z}$$

为

$$|r_n| \leq \frac{1}{R} q^{n+1} \frac{1}{1-q}.$$

将这个表达式代入柯西公式, 并逐项积分, 得到

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + R_n,$$

其中

$$c_p = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{p+1}} dz,$$

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) r_n dz.$$

如果 M 是 $|f(z)|$ 在圆周上的上界, 由复积分的估计式 (11c), 对余项立即可有

$$|R_n| \leq \frac{1}{2\pi R} \frac{q^{n+1}}{1-q} 2\pi R M = \frac{q^{n+1}}{1-q} M.$$

由于 $q < 1$, 这个余项当 n 增加时趋于零, 我们得到 $f(z)$ 的幂级数表达式

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p z^p,$$

$$c_p = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{p+1}} dz. \quad (18a)$$

于是我们的断言得到证明。

这个定理有重要的推论。首先, 我们从第 879 页知道, 每个幂级数在它的收敛圆内部可以任意次微商, 而每个解析函数可以表

示为幂级数,由此推出,在域内解析函数的微商仍然是可微的(即仍是解析函数)。换句话说,解析函数类的微商运算是自封的。如同我们已知的那样,对于积分运算也是如此,所以解析函数的微商和积分能够无任何限制地进行,这是一件很适意的事情,这在实函数的情形是没有的。

因为如同在 8.1 节(第 879 页)已经看到的那样,每个幂级数是它所表示的函数的泰勒级数,现在我们推出,每个解析函数在它解析的区域 R 内的点 $z = z_0$ 的邻域内能够展开为泰勒级数

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^{\nu}. \quad (18b)$$

因此 (18a) 中的系数 c_{ν} 由公式

$$\frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z_0 + \iota)}{\iota^{\nu+1}} d\iota \quad (18c)$$

给出。

从这个结果我们也可以推出关于幂级数收敛半径的一个重要事实。函数 $f(z)$ 在点 $z = z_0$ 邻域内的泰勒级数,在其内部整个地位于函数有定义并且解析的区域内的最大圆内收敛。

借助于我们现在已经建立的对于复变数也成立的关于微分和积分的定理,展开为泰勒级数的一切基本实变数函数,对于复变数函数也有相同的泰勒级数。我们已经看到对于这些函数的大多数,这是对的。

例如,这里我们指出,如果 $|z| < 1$, α 是任意复指数,二项式级数(见第一卷第 480 页)

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} z^{\nu} \quad (19a)$$

对于复变数也成立。只要

$$(1+z)^{\alpha} = e^{\alpha \log(1+z)}$$

是由 $\log(1+z)$ 的主值构成的。

这个幂级数的收敛半径等于 1,这是从我们刚才说过的,以及

函数 $(1+z)^a$ 在 $z=-1$ 不再解析推出。因为如果在 $z=-1$ 函数解析,那么在这点就该有它的各阶微商,而这是不对的。所以半径为 1, 中心在 $z=0$ 的圆是这个函数在其中解析的最大圆。

这个例子说明,借助于刚才我们证明过的关于收敛半径的事实,实分析中玄奥的幂级数的收敛性就变得完全明瞭了。

例如,表示 $1/(1+z')$ 的几何级数在单位圆上不收敛,是这个函数在 $z=i$ 和 $z=-i$ 不再解析的一个简单推论。我们现在也知道,确定伯努利数的幂级数(见第一卷第 590 页)

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum \frac{B_n^* z^n}{n!}, \quad (20)$$

一定以圆 $|z| = 2\pi$ 作为它的收敛圆。因为这个函数的分母在 $z = 2\pi i$ 为零,但在圆 $|z| \leq 2\pi$ 内部没有使分母为零的点(除原点 $z=0$ 外)。

c. 函数论与位势理论

因为解析函数任意次可微,由此推出,函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 有任意阶连续微商。所以可以微商柯西-黎曼方程,如果对 x 微商第一个方程,对 y 微商第二个方程,并把它们加起来,得到

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0;$$

同样,虚部 v 满足相同的方程

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

换句话说,一个解析函数的实部和虚部是位势函数。

如果两个位势函数 u, v 满足柯西-黎曼方程,则称 v 对 u 是共轭的,并且 u 对 v 共轭。

这就表示,单复变函数论与二维的位势理论本质上是彼此等价的。

d 柯西定理的逆定理

柯西定理的逆定理成立(莫勒拉定理):

如果连续函数 $\zeta = u + iv = f(z)$ 沿位于定义域 R 内的每一条闭曲线 C 的积分为零, 则 $f(z)$ 在 R 内解析.

为了证明这个定理, 我们注意到, 沿连接固定点 z_0 与变动点 z 的任意路径的积分

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(t) dt$$

与路径无关, 于是由第 889 页 (11c) 有

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(t) - f(z)] dt \rightarrow 0 (h \rightarrow 0).$$

因此, $F(z)$ 有微商, $F'(z) = f(z)$. 所以 $F(z)$ 解析, 由前面的结果, 它的微商 $f(z)$ 也解析.

柯西定理的逆定理表明, 可微性条件可以为可积性条件(即线积分与路径无关)所代替. 这两个条件的等价性是单复变函数论很特殊的性质.

e. 解析函数的零点, 极点和留数

如果函数 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 为零, 那么 $f(z)$ 关于 $z - z_0$ 的泰勒级数的常数项消失, 并且这个级数的其他项也可能消失, 于是可以提出因子 $(z - z_0)^n$, 写成

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z),$$

其中 $g(z_0) \neq 0$. 点 z_0 称为是函数 $f(z)$ 的 n 阶零点.

上面我们已经看到, 一个解析函数的倒数 $1/f(z) = g(z)$, 除去使 $f(z)$ 为零的那些点外, 也是解析的, 如果 z_0 是 $f(z)$ 的一个 n 阶零点, 在点 z_0 的邻域内, 函数 $g(z)$ 可表成

$$q(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^n} h(z),$$

其中 $h(z)$ 在 $z = z_0$ 邻域内解析. 在点 $z = z_0$, 函数 $q(z)$ 不再是解析的, 我们称这种点为奇点. 在现在这种特殊情形, 这个奇点称为函数 $q(z)$ 的一个 n 阶极点. 如果 $h(z)$ 展为 $(z - z_0)$

的幂级数,并且用 $(z - z_0)^n$ 除各项,我们得到在极点邻域内以下形式的展式

$$q(z) = c_{-n}(z - z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots,$$

其中 $(z - z_0)$ 的幂的系数表示为 $c_{-n}, \cdots, c_{-1}, c_0, c_1, \cdots$.

如果我们讨论一阶极点(即,如果 $n = 1$),我们从关系式

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)q(z)$$

立即得到系数 c_{-1} , 由于

$$\frac{1}{q(z)(z - z_0)} = \frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

在 $q(z)$ 展式中 $1/(z - z_0)$ 的系数

$$c_{-1} = \frac{1}{f'(z_0)}. \quad (21a)$$

同样,如果 $q(z) = r(z)/\phi(z)$, 其中 $\phi(z)$ 在 $z = z_0$ 有一阶零点,且 $r(z_0) \neq 0$, 则在 $q(z)$ 的展式中

$$c_{-1} = \frac{r(z_0)}{\phi'(z_0)}. \quad (21b)$$

如果一个函数在 z_0 的邻域内有定义,并且除了这点本身外是解析的,那么沿环绕点 z_0 的圆的积分,一般是不等于零的。但是,由柯西定理,这个积分与圆的半径无关,并且对于一切闭曲线 C 有相同的值,而 C 是包含 z_0 的充分小区域的边界。以正方向绕这点取的积分值称为在这点的留数。

如果奇点是 n 阶极点,我们积分函数的展式,具有正幂次的级数的积分等于零,因为这个幂级数在 z_0 仍解析。

项 $c_{-1}(z - z_0)^{-1}$ 的积分等于 $2\pi i c_{-1}$, 而更高的负幂次的积分为零。因为当 $\nu > 1$ 时, $(z - z_0)^{-\nu}$ 的不定积分和实的情形一样,是 $(z - z_0)^{-\nu+1}/1 - \nu$ 。于是沿闭曲线的积分为零。

所以,一个函数在极点的留数是 $2\pi i c_{-1}$ 。

在下一节我们将熟悉这个概念的用处。这个概念表述为下面的定理:

留数定理. 如果函数 $f(z)$ 在区域 R 内和边界 C 上除去有限个内部的极点外解析, 则沿 C 的正向的积分等于边界 C 所包含的函数极点的留数和.

证明立即从上面的叙述推出.

8.5 留数定理对复积分(围道积分)的应用

我们可以应用柯西定理和留数计算实的定积分. 把所要计算的积分看作复平面上沿实轴上的积分. 然后取适当的积分路径¹⁾, 通过简洁的论证而得到. 用这个方法, 我们有时可以得到复杂积分的极巧妙计算, 而不必先求相应的不定积分. 我们将讨论某些典型例子.

a. 证明公式

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

这里给出这个重要公式有启发性的证明. 这个公式我们已经用别的方法讨论过(第一卷第 619 页; 第二卷第 554 页).

我们对函数 e^{iz}/z 在 z 平面沿图 8.8 所示的路径 C 求积分. 路径 C 是由以原点为中心, 以 R 和 r 为半径的半圆 H_R 和 H_r , 以及实轴上的两个对称区间 I_1 和 I_2 所组成. 由于函数 e^{iz}/z 在由这些边界所围成的圆环内正则, 这个围道积分值等于零. 合并沿 I_1 和 I_2 的积分, 我们有

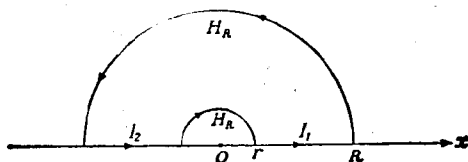


图8.8

1) 总是把所考虑的积分归结为沿复平面上某一闭路径的积分.

$$\int_{H_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{H_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

现在令 R 趋于无穷, 那么沿半圆 H_R 的积分趋于零, 因为对于半圆上的点, $z = R(\cos\theta + i\sin\theta) = Re^{i\theta}$, 我们有

$$e^{iz} = e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta},$$

积分变成

$$i \int_0^{2\pi} e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} d\theta.$$

因子 $e^{iR\cos\theta}$ 的绝对值为 1, 而因子 $e^{-R\sin\theta}$ 的绝对值小于 1, 并且在每个区间 $\varepsilon \leq \theta < \pi - \varepsilon$ 内, 当 R 趋于无穷时, 一致地趋于零, 因此立即推出, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 沿 H_R 的积分趋于零. 读者自己容易证明, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 沿 H_r 的积分趋于 $-\pi i$. 沿实轴上的两个对称区间 I_1, I_2 的积分趋于

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx, \text{ 当 } R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0 \text{ 时.}$$

综上所述, 我们立即得到关系式(22).

b. 证明公式

$$\int_0^\infty (\cos ax) e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2/4} \quad (23)$$

(比较 4.12 节第二卷第二分册第 559 页习题 9(a)).

我们对 e^{-z^2} 沿矩形 $ABB'A'$ (图 8.9) 求积分, 矩形的垂直边 AA', BB' 的长度为 $a/2$, 水平边 $AB, A'B'$

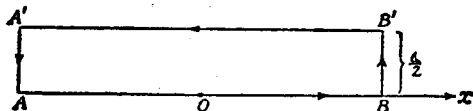


图 8.9

的长度为 $2R$. 由柯西定理, 这个围道积分值等于零. 在垂直边上, 有

$$|e^{-x^2}| = |e^{-(x^2-y^2)}e^{-2ixy}| = e^{-R^2}e^{y^2} < e^{-R^2}e^{a^2/R^2},$$

当 R 趋于无穷时, 它一致地趋于零, 于是, 如果令 $R \rightarrow \infty$, 那么在垂直边上的那部分积分趋于零. 又注意到在 AB' 上, $dz = d(z + \frac{1}{2}ia) = dx$, 我们可把柯西定理的结果表达如下:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia/2)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

即, 无穷积分的积分路径能够用和它平行的路径所代替. 由前面的结果 (见第二卷第二分册第 501 页), 右边的积分等于 $\sqrt{\pi}$. 因为 $\sin ax$ 是奇函数, $\cos ax$ 是偶函数, 左边的积分可直接写成

$$e^{a^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (\cos ax - i \sin ax) dx = 2e^{a^2/4} \int_0^{\infty} \cos ax e^{-x^2} dx.$$

这就证明了公式(23).

c. 留数定理对于有理函数的积分的应用

对于有理函数

$$Q(x) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n},$$

如果分母没有实的零点, 且它的次数比分子的次数至少大 2 次, 则积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx$$

能够用下面的方法计算: 我们先取沿半径为 R 的半圆周 H (在此半圆上, $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$) 和实轴上从 $-R$ 到 R 的线段所组成的围道积分. 半径 R 取得充分大, 使得分母的全部零点都位于这个圆内, 因此 $Q(z)$ 的全部极点都在这个圆的内部. 一方面, 这个积分等于 $Q(z)$ 在这个半圆内的留数和, 而另一方面, 它等于积分

$$I_R = \int_{-R}^R Q(x) dx$$

加上沿半圆周 H 的积分. 由假设, 存在固定正数 M , 使得对于充分

大的 R , 有¹⁾

$$|Q(x)| < \frac{M}{R^2}.$$

半圆弧的长度等于 πR . 由第 889 页的公式 (11c), 沿半圆弧的积分, 其绝对值小于

$$\pi R \frac{M}{R^2} = \frac{\pi M}{R}.$$

因此, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 它趋于零. 这就意味着, 积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx$$

等于 $Q(z)$ 在上半平面的留数和.

现在我们应用这个原理于若干有趣的特别情形, 我们首先取

$$Q(z) = \frac{1}{az^2 + bz + c} = \frac{1}{f(z)},$$

其中系数 a, b, c 是实数, 且满足条件 $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$. 函数 $Q(z)$ 在上半平面有一个一阶极点

$$z_1 = \frac{1}{2a} \{-b + i\sqrt{4ac - b^2}\},$$

其中平方根取正号, 所以由一般法则 (21a), 留数等于 $2\pi i/f'(z_1)$. 由于

$$f'(z_1) = 2az_1 + b = i\sqrt{4ac - b^2},$$

我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac - b^2}}. \quad (24a)$$

作为第二个例子, 我们将证明公式 (见第一卷第 309 页)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{2}. \quad (24b)$$

这里, 能够再次直接应用我们的一般原理. 在上半平面上, 函

1) 这从以下事实直接推出: $Q(z) = \left(\frac{1}{z^2}\right) R(z)$, 当 $z \rightarrow \infty$ 时, $R(z)$ 趋于零 (如果 $n > m + 2$), 或趋于 a_m/b . (如果 $n = m + 2$).

数 $1/(1+z^4) = 1/f(z)$ 有两个极点 $z_1 = \varepsilon = e^{i\pi/4}$, $z_2 = -\varepsilon^{-1}$ (两个-1的四次方根, 它们有正虚部)。留数和等于

$$\begin{aligned} 2\pi i \left\{ \frac{1}{f'(z_1)} + \frac{1}{f'(z_2)} \right\} &= 2\pi i \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z_1^3} + \frac{1}{z_2^3} \right) = \frac{\pi i}{2} (\varepsilon^{-3} - \varepsilon^3) \\ &= -\pi i \cdot i \sin \frac{3\pi}{4} = \pi \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{2}. \end{aligned}$$

这就是所要证明的。

公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{4^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (24c)$$

的以下证明例示了应当计算高阶极点的留数的情形。

如果我们用 z 代替 x , 被积函数的分母为 $(z+i)^{n+1}(z-i)^{n+1}$ 的形式。因此, 被积函数在 $z=i$ 有 $(n+1)$ 阶极点。为了求出在这点的留数, 我们把它写成

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}} &= \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-i)^{n+1}} \frac{1}{(2i+z-i)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{(z-i)^{n+1}} \frac{1}{(2i)^{n+1}} \left(1 + \frac{z-i}{2i} \right)^{-n-1}. \end{aligned}$$

如果由二项式定理展开最后一个因子, $(z-i)^n$ 的系数为

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2i)^n} \binom{-n-1}{n} &= \frac{1}{(2i)^n} (-1)^n \frac{(n+1) \cdots 2n}{1 \cdot 2 \cdots n} \\ &= \frac{i^n (2n)!}{2^n (n!)^2}. \end{aligned}$$

所以, 被积函数在点 $z=i$ 的邻域内展开为幂级数的系数 c_{-1} 等于

$$\frac{1}{2^{2n+1}} \frac{1}{i} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

所以留数 $2\pi i c_{-1}$ 等于

$$\frac{\pi}{2^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

这就证明了公式。

作为进一步的练习,读者自己可以由留数理论证明

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + c^2} dx = \frac{1}{2} \pi e^{-|c|} \quad (24d)$$

(用 e^{ix} 代替 $\sin x$).

d. 留数定理与常系数微分方程

设

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = P(z)$$

是 n 次多项式, t 是实参数. 我们把沿 z 平面上不通过 $P(z)$ 的零点的闭曲线 C 的积分

$$u(t) = \int_C \frac{e^{itz} f(z)}{P(z)} dz \quad (25)$$

作为参数 t 的函数 $u(t)$. 设 $f(z)$ 是一个常数或次数小于 n 的任意一个多项式. 由于积分号下求微商的法则对于复平面仍然成立, 我们能够求 $u(t)$ 的关于 t 的一阶或高阶微商. 积分号下对 t 求微商按情况它就等价于在被积函数上乘以 z, z^2, \dots . 如果我们现在作微分表达式 $L[u] = a_0 u + a_1 u' + \cdots + a_n u^{(n)}$ 或用符号 $P(D)u$ 表示, 其中 D 表示微分符号 $D = d/dt$. 我们有

$$P(D)u = L[u] = \int_C e^{itz} f(z) dz.$$

由柯西定理, 右边的复积分值为零, 即函数 $u(t)$ 是微分方程 $L[u] = 0$ 的解. 如果 $f(z)$ 是 $(n-1)$ 次的任意多项式, 这个解包含 n 个任意常数. 因此我们可以期望用这个方法得到常系数线性微分方程 $L[u] = 0$ 的一般解.

事实上, 假设曲线 C 包含分母 $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$ 的全部零点 z_1, z_2, \dots, z_n , 由留数定理计算积分, 可以得到我们已知的解的形式(见第六章第 803 页). 如果首先假定全部零点是简单零点, 它们是被积函数的简单极点, 由公式 (21b), 在点 z_v 的留数等于

$$2\pi i \frac{f(z_v)}{P'(z_v)} e^{itz_v}.$$

适当选取多项式 $f(z)$, 可使 $f(z_0)/P'(z_0)$ 为任意常数. 因此, 我们得到解的形式为

$$u(z) = \sum_{v=1}^n c_v e^{z z_v}, \quad (26)$$

这与我们前面的结果一致.

如果多项式 $P(z)$ 的零点是多重的, 比如说是 r 重的, 被积函数的相应极点是 r 阶的. 在 z_0 的留数必需由分子 $e^{z_0 z} f(z) = e^{z_0 z} e^{(z-z_0)^{-r}} f(z)$ 展为 $(z-z_0)$ 的幂级数来决定. 我们留给读者去证明, 在 z_0 的留数给出解 $1/z^r, \dots, 1/z^{r-1}$ 以及 $e^{z z_0}$.

8.6 多值函数与解析开拓

迄今为止, 不论在定义实变数函数还是复变数函数, 我们总是采取这样的观点: 对于每个自变数的值, 函数的值必需是唯一的. 例如, 柯西定理也是基于假定函数在所考虑的区域是唯一确定的. 虽然如此, 在函数的实际构造中, 常常必然出现多值性(例如找出如 n 次幂那样的单值函数的反函数). 在实变数的情形, 我们在求反函数的过程中可以分出不同的单值分支, 比如 \sqrt{x} 或 $-\sqrt{x}$. 但是, 我们将看到, 在复变数的情形, 这样做不再是合理的, 因为现在不同的单值分支是相互连结的, 以致于它们的任意分离都是颇为勉强的.

这里, 我们只好限于对典型例子作些很简单的讨论.

例如, 我们考虑函数 $z = \zeta^2$ 的反函数 $\zeta = \sqrt{z}$. 对于每个非零值 z , 对应着方程 $z = \zeta^2$ 的两个解 ζ 和 $-\zeta$, 这个函数的两个分支是以下面的方式连接起来: 设 $z = r e^{i\theta}$, 如果我们令 $\zeta = \sqrt{r} e^{i\theta/2} = f(z)$, $\zeta = f(z)$ 一定在除去原点(在这点 $f(z)$ 不再是可微的)外的每一个单连通区域 R 内解析, 在这样的区域内, 由前述可知, ζ 是唯一确定的. 但是, 如果我们让点 z 沿以原点为中心的圆 K 按正向绕一周, $\zeta = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ 将连续变化, 但是角 θ

将不再回到原来的值,而是增加了 2π 。因此,在这个连续开拓中,当我们回到点 z 时,函数不再回到原来的值 $\zeta = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$,而是 $\sqrt{r} e^{i\theta/2} e^{2\pi i/2} = -\zeta$ 。我们说,当函数 $f(z)$ 在闭曲线 K 上被连续开拓时,它不是单值的。

函数 $\sqrt[n]{z}$ (n 是整数)也有同样的性质。这里, z 绕原点一周,函数值就乘以 n 次单位根,即 $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$,绕 n 周后,函数才回到它原来的值。

在函数 $\log z$ 的情形,我们看到(第894页)有类似的多值性, z 以正方向绕原点一周, $\log z$ 的值就增加 $2\pi i$ 。

还有,每当 z 绕一周,函数 z^a 就乘以 $e^{2\pi i a}$ 。

虽然在第一种情形,函数在区域 R 内唯一确定,当我们连续开拓(作为解析函数)并通过某一闭曲线回到出发点,所有这些函数是多值的。这种多值现象和与相联系的解析开拓理论,在本书的范围内不能作详细的讨论,我们仅仅指出,能够在理论上确保函数值的唯一性:在 z 平面上划某一条线,使得 z 的路径不允许越过这条线,或者说沿某一条线作割痕,使得平面上的闭路径不再可能导致函数的多值性。

例如,函数 $\log z$,由于沿负实轴割开而单值。同样 \sqrt{z} 也是如此。如果沿实轴在 -1 和 $+1$ 之间作割痕,函数 $\sqrt{1-z^2}$ 就变成单值。

平面一旦用这种方法割开后,柯西定理就能应用于这些函数。我们给出下面的简单例子:证明公式

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{(x-k)\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}}, \quad (27)$$

其中 k 是一个不介于实轴上 -1 和 $+1$ 之间的常数。

我们首先注意到函数

$$\frac{1}{(z-k)\sqrt{1-z^2}}$$

在 z 平面是单值的,只要沿实轴从 -1 到 $+1$ 作割痕,如果在 z 平

面, 我们先从上方然后从下方接近这条割痕 S , 我们得到平方根 $\sqrt{1-z^2}$ 相等而反号的值, 比如说, 从上方是正的, 从下方是负的。现在沿图 8.1 所示的路径 C 取复积分

$$\int_C \frac{dz}{(z-k) \sqrt{1-z^2}}.$$

由柯西定理, 我们可以使这条路径围绕割痕收缩, 不改变积分值。所以积分等于收缩后所得到的极限值。这显然等于 $2I$ 。另一方面, 如果我们取同样的被积函数的积分, 积分路径是以 R 为半径, 以原点为中心的圆周 K , 由前面的研究, 这个积分当 R 增大时趋于零¹⁾。但是, 由留数定理, 沿 C 和 K 的积分的和等于被积函数在 C , K 所范围的极点 $z=k$ 处的留数。因此, $2I$ 等于这个留数。这个留数是

$$2\pi i \lim_{z \rightarrow k} (z-k) \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot \frac{1}{z-k} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}}.$$

公式得证。

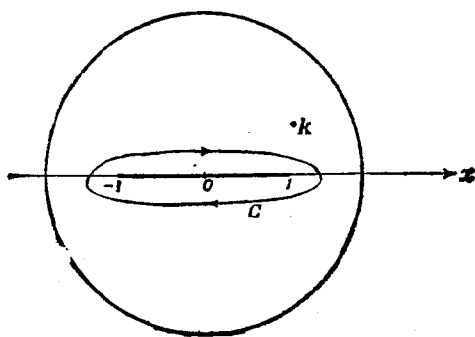


图8.10

解析开拓的例子: 伽马函数.

最后, 我们还要给出一个例子, 表明如何将一个原来定义在平

-
- 1) 事实上, 它的值是零, 因为由柯西定理, 它和 R 无关, 只要这个圆包含极点 $z=k$ 。

面一部分的解析函数开拓到原定义域之外去,我们要把对于 $x > 0$, 由方程

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (28)$$

定义的伽马函数,解析地开拓到 $x \leq 0$ 去。这可借助于函数方程

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

来实现。当 $\Gamma(x)$ 已知,就可用这个方程来定义 $\Gamma(x-1)$ 。利用这个方程,我们能够设想得到, $\Gamma(x)$ 首先开拓到带域 $-1 < x \leq 0$ 。其次开拓到下一个带域 $-2 < x \leq -1$, 如此等等。

对于伽马函数的开拓,我们采取更有理论兴趣的另一种方法。我们考虑 z 平面上如图 8.11 所示的路径 C , 它环绕 z 平面的正实轴, 并在两边渐近地接近这条轴。由柯西定理容易看出, 迴路积

$$\int_C t^{z-1} e^{-t} dt$$

的值,当迴路收敛到 x 轴时是不变的。当 z 从上方和下方接近 x 轴时,被积函数趋于不同的值。它们相差一个因子 $e^{2\pi iz}$ 。

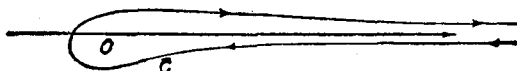


图8.11 伽马函数的迴路积分

于是,对于 $x > 0$, 我们得到公式

$$(1 - e^{2\pi iz})\Gamma(x) = \int_C t^{z-1} e^{-t} dt.$$

这个公式是在 z 的实部为正的假定下推导出来的。但是,现在我们看到这个迴路积分对于一切复数 z 有意义,因为这个积分避开了原点 $t = 0$ 。所以,这个迴路积分代表一个定义在整个 z 平面上的函数。然后我们规定这个函数在整个 z 平面上等于 $(1 - e^{2\pi iz})\Gamma(x)$ 。于是伽马函数解析开拓到了整个平面,除去 $x \leq 0$

1) 这又是一个无穷积分。它是作为沿 C 的无穷部分的积分的极限。读者自己可以由前面使用过的类似方法证明这个极限是存在的。

而使因子 $(1 - e^{2\pi iz})$ 等于零的点, 即除去 $z = 0, z = -1, z = -2, \dots$ 等等.

更详细而广泛的研究, 读者可以参考函数论有关的文献¹⁾.

练 习

8.1 节

1. (a) 证明: 复数取共轭的运算对于有理代数运算遵循分配律, 例如

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}.$$

(b) 证明: 如果 $f(z)$ 是实系数的幂级数所确定的函数, 则

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}).$$

2. (a) 证明: 对于实系数的多项式 $P(z)$, α 是它的根, 当且仅当 $\bar{\alpha}$ 的共轭复数是它的根.

(b) 证明: 在上题假定下, 如果 $P(\alpha) = 0$, α 不是实的, $\alpha = a + ib$, $b \neq 0$, 则 $P(z)$ 有实的二次因子.

$$(z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 - 2az + a^2 + b^2.$$

3. (a) 证明: 当 λ 是不等于 1 的实数, $|z - \alpha| = \lambda|z - \beta|$ 是圆的方程. 确定这个圆的中心 z_0 和半径 r . 如果 $\lambda = 1$, 这个方程的轨迹是什么?

(b) 证明: 一般线性变换

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

其中 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, 把圆和直线变为圆和直线.

4. 满足条件

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1$$

是哪些点 $z = x + iy$?

5. 证明: 如果 $\sum a_n z^n$ 当 $z = \zeta$ 绝对收敛, 则这个级数在

1) 例如, 可参见 L. V. 阿尔福斯 (Ahlfors) 著的“复分析”.

$|z| \leq |\zeta|$ 一致收敛.

6. 利用 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的幂级数, 证明

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

7. 对于哪些 z 的值, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$$

收敛?

8.2 节

1. 不用可微性的定义, 而用柯西-黎曼方程证明: 解析函数的积、商仍然是解析函数.

2. 证明: 如果 $|f(z)|$ 在区域 R 内是常数, 则 $f(z)$ 是常数.

3. 下列函数在何处连续? 在何处可微?

$$(a) \bar{z}; (b) |z|; (c) \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|}; (d) \frac{z' + \bar{z}'}{|z|^2}.$$

4. 证明: 变换 $\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ 将 z 平面上的、以原点为中

心的圆和过原点的直线分别变为 ζ 平面上的共焦椭圆和共焦双曲线.

5. 一般的线性变换

$$\zeta = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

可能有两个不动点(就是使得 $\zeta = z$ 的值 z). 证明: 如果变换有两个不动点, 则过这两个不动点的圆族和与此圆族正交的圆族变为它们自身(为此, 过这两个不动点的直线和这两个不动点连线的中垂线应分别作为族中的圆).

6. 叙述解析函数 $f(z) = 1/z$ 在单位圆内的反演, 并导出在本卷第一分册第 256 页 3.3d 节第 4 题中所述反演的基本性质.

7. 证明: 形如

$$\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \alpha}$$

的变换,其中 α, β 是满足关系

$$\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1$$

的任意复数,变单位圆周为它自身,圆的内部为它自身。如果

$$\beta\bar{\beta} - \alpha\bar{\alpha} = 1,$$

则圆的内部变为圆的外部。

8. 证明: 任何一个圆可以通过形如 $\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ 的变换变为由实轴所界的上半平面(利用第 912 页上的第 4 题)。

9. 证明: 变换 $\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, 其中 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, 保持四点 z_1, z_2, z_3, z_4 的交比

$$\frac{(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_4)/(z_2 - z_4)}$$

不变。

8.3 节

1. 考虑 $\int \frac{2z-1}{z^2-1} dz$

(a) 分别沿以 1 和 -1 为中心的反时针方向的小圆, 这个积分值是多少?

(b) 试描出同时环绕 1 和 -1 的一个闭路径, 使积分为零。

2. 研究从实的到复的指数法则的推广:

$$a^t a^s = a^{t+s}, \quad s^t t^s = (st)^s, \quad (a^t)^s = a^{ts},$$

并讨论由定义 $z^a = \exp[a(\log z + 2n\pi i)]$ 中的多值性所引起的复杂性, 这里 $\log z$ 是对数的主值。

3. (a) 证明 i^i 的一切值是实的。

(b) 找出使 $z^z (z \neq 0)$ 为实的, 关于复数 z 和 ζ 的一般条件。

(c) 能否选取实数 x 和 ζ , 使得 x^x 的一切值是实的?

4. 伽马函数: 证明积分

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

是参变数 $z = x + iy$, $x > 0$ 的解析函数, 其中 t^{z-1} 对积分变量 t 的一切实值取主值. 直接证明 $\Gamma(z)$ 能对 z 求微商. 证明复变数的伽马函数满足函数方程 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

5. 黎曼采他函数: 取 n^z 的主值, 作无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \zeta(z) \quad (z = x + iy).$$

证明这个级数当 $x > 1$ 时收敛, 并表示一个可微函数 ($\zeta(z)$ 称为黎曼采他函数) 其证明可以采用类似于幂级数那样的方法 (见第一卷第 552 页).

6. (a) 应用柯西定理于积分

$$\int \left(z + \frac{1}{z} \right)^m z^{n-1} dz \quad (n > m > 0),$$

积分路径是由下列曲线组成; 第一象限内单位圆周 $|z| = 1$ 和以原点为中心的小圆周, 以及轴上位于这两个圆弧之间的直线段. 由此推出

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \theta \cos n \theta d\theta = -\frac{\sin \left[\frac{(n-m)\pi}{2} \right]}{2^{n+1}} \frac{\Gamma(m+1) \Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2} + 1\right)}.$$

(b) 证明: 如果 $n = m$, 后面这个积分值为 $\pi/2^{n+1}$. (复积分的被积函数在正半实轴上取实轴).

8.4 节

1. 不直接利用幂级数的理论, 而通过柯西公式的积分号下逐项微商并验证其合理性, 从而证明解析函数的微商是可微的.

2. 证明函数

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{z^n}{\zeta^n} d\zeta$$

是 $(n-1)$ 次多项式 $g(z)$, 且

$$g^{(m)}(0) = f^{(m)}(0) \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

其中积分是沿包含点 $\zeta = 0$ 及 $\zeta = z$ 的简单围道.

3. 证明: 对于每个位势函数 u , 能够构造一个共轭函数 v , 除去相差一个常数外, 是唯一确定的, 只要区域是单连通的.

4. 函数 $f(z) = (2z-1)/(z^2-1)$ 在它的极点的留数是多少?

5. 如果 $f(z)$ 在整个复平面是有界的, $|f(z)| < M$, 证明: 积分

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right] d\zeta$$

在积分路径的圆充分大时, 可以任意地小, 因此, $f(z) = f(0)$, 即 $f(z)$ 是常数.

6. 设 $f(z)$ 在 $|z| \leq \rho$ 解析, 如果 M 是 $|f(z)|$ 在圆 $|z| = \rho$ 上的最大值. 则 $f(z)$ 的幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

的系数满足不等式

$$|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}.$$

注意: 第 5 题的结论也可以从这个结果推出.

7. 设 $P(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_0$ 是正 n 次多项式. 证明: $P(z)$ 没有根蕴含 $f(z) = 1/P(z)$ 是有界的, 因此是常数. 于是由第 5 题和第 6 题, $f(z)$ 恒等于零. 这就证明了代数基本定理: 每个正次的复系数的多项式至少有一个复根.

8. 设在简单闭曲线 C 内可能除去有限个点外, 以及在 C 上 $f(z)$ 解析, 考虑沿 C 的正向的积分

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{f'(z)} dz$$

(a) 证明: 如果 f 在 α 有 n 阶零点, 在 C 内和 C 上没有其他的极点和零点, 则 $I = n$.

(b) 证明: 如果 f 在 α 有 m 阶极点, 在 C 内或 C 上没有任何别的极点或零点, 则 $I = -m$.

(c) 证明: 如果在 C 内有有限多个零点和极点, 在 C 上没有零点和极点, 则 I 等于零点个数减去极点个数. 零点和极点按重数计算, 即如果零点的重数是 n_1, n_2, \dots, n_j , 极点的重数是 m_1, m_2, \dots, m_k , 则

$$I = n_1 + n_2 + \dots + n_j - m_1 - m_2 - \dots - m_k.$$

9. (a) 两个多项式 $P(z)$ 和 $Q(z)$, 在包围道 C 上的每一点有

$$|Q(z)| < |P(z)|.$$

证明: 方程 $P(z) = 0$ 和 $P(z) + Q(z) = 0$ 在 C 内有相同数目的根. (考虑函数族 $P(z) + \theta Q(z)$, 其中参数 θ 从 0 变到 1).

(b) 证明: 如果 $|a| < r - \frac{1}{r}$, 方程

$$z^2 + az + 1 = 0$$

的一切根位于圆 $|z| = r$ 内.

10. 利用第 8 题 (b), 证明 n 次多项式 $P(z)$ 按重数计算有 n 个根.

11. (a) 如果 $f(z)$ 在 C 内只有一个简单根 α , 证明这个根

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

(b) 当 $f(z)$ 在 C 内有有限多个零点和极点, 而在 C 上没有零点和极点, 说明 (a) 中积分的意义.

12. 证明: 对于任意 z, c^* 不为零.

8.5 节

1. (a) 设 $f(z)$ 解析, $g(z)$ 有 n 阶极点 $z = \alpha$, 求 $f(z)g(z)$

在 $z = \alpha$ 的留数.

(b) 特别地, 如果 $g(z) = (z - \alpha)^{-n}$, 证明: 留数等于

$$\frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\alpha).$$

2. 如果 α 是 $f(z)$ 的二阶零点, 证明 $1/f(z)$ 在 α 的留数等于

$$-\frac{4\pi i}{3} \frac{f'''(\alpha)}{f''(\alpha)^2}.$$

3. 对于非负整数 $n, m, n > m$, 求下列积分:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^j}{1+x^4} dx;$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^4)^j} dx;$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx.$

4. 设 $f(z)$ 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为简单根的 n 次多项式, 证明

$$\sum_{v=1}^n \frac{\alpha_v^k}{f'(\alpha_v)} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-2).$$

(考虑沿环绕一切 α_v 的闭曲线的积分 $\int \frac{z^k}{f(z)} dz$.)

5. 推导 (24d) 的结果, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + c^2} dx = \frac{1}{2} \pi e^{-|c|}.$$

杂题

1. 写出三点 z_1, z_2, z_3 位于一条直线上的条件.

2. 证明: 复平面上三个不同点 α, β, γ 作成以 γ 为顶点的等腰三角形, 当且仅当, 存在一正实数 k , 使得

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \frac{\gamma - \alpha}{\alpha - \beta} = k.$$

3. 写出四点 z_1, z_2, z_3, z_4 位于一个圆周上的条件.

4. 设 A, B, C, D 是 z 平面上依次位于圆周上的四个点, 其坐

标为 z_1, z_2, z_3, z_4 , 利用这些复坐标, 证明 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

5. 证明: 对一切 c 的值, 方程 $\cos z = c$ 有解.

6. 对于哪些 c 的值, 方程 $\tan z = c$ 无解?

7. 对于哪些 z 的值 (a) $\cos z$, (b) $\sin z$ 是实的?

8. 求幂级数 $\sum a_n z^n$ 的收敛半径, 其中

(a) $a_n = \frac{1}{n^s}$, s 是实部为正的复数,

(b) $a_n = n^s$,

(c) $a_n = \log n$.

9. 用复积分计算以下积分:

(a) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^4} dx$;

(b) $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos x}{1+x^4} dx$;

(c) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{q^2 + x^2} dx (q \neq 0)$;

(d) $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(x+1)(x+2)} dx, 1 < \alpha < 2$.

10. 求函数

$$\frac{1}{\sin z}, \frac{1}{\cos z}, \Gamma(z), \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

的极点及其留数.

11. 证明: 如果 x, y 是实数, 则

$$|\sinh(x + iy)| \geq A(x),$$

其中 $A(x)$ 与 y 无关, 且当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, 趋于 ∞ .

沿适当的围道序列积分 $\frac{1}{(z-w)\sinh z}$, 证明

$$\frac{1}{\sinh w} = \frac{1}{w} + 2w \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{w^2 + \pi^2 n^2}.$$

12. 求出当 $n \rightarrow \infty$ 时, 积分

$$\int_{C_n} \frac{\cot \pi z}{t-z} dz$$

的极限值, 其中积分路径是正方形 C_n , 它的边平行于坐标轴, 且与原点的距离等于 $n \pm \frac{1}{2}$. 利用留数定理, 从而得到 $\cot \pi z$ 的分分式表达式.

13. 利用方程

$$\log(1+z) = \int_0^z \frac{dt}{1+t}$$

证明: $\log(1+z)$ 的幂级数在单位圆 $|z|=1$ 上除去点 $z=-1$ 外处处收敛. 由幂级数的虚部等于 $\log(1+e^{i\theta})$ 的虚部, 得到富利埃级数

$$\frac{1}{2} \theta = \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta - \dots \quad (-\pi < \theta < \pi).$$

(见第一卷第 623 页)

14. 证明: 如果 f 是解析的, 则 $\frac{d^n}{dx^n} f(\sqrt{x})$ 等于表达式

$$2 \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{y f(y)}{(y+a)^{n+1}}$$

中令 y 和 a 等于 \sqrt{x} 时的值.

15. (a) 证明级数

$$f(z) = f(x+iy) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{y^n}$$

当 $x > 0$ 收敛.

(b) 借助于对于 $x > 1$ 成立的公式

$$f(z) = (1 - 2^{1-z}) \zeta(z),$$

证明: 表示 $f(z)$ 的级数给出采他函数 (其定义见第 915 页上的第 5 题) 到带形 $0 < x \leq 1$ 的开拓.

(c) 证明: 采他函数在 $z=1$ 有一极点, 其留数为 1.

解 答

第 六 章

练习 6.1e

1. 由于 $\dot{Q} = 0$, 方程 (17c) 呈如下形式

$$(i) \quad \dot{r}^2 = c + \frac{b}{r},$$

其中 $c = 2C/m$ 而且 $b = 2r\mu$. 将此方程写成

$$\sqrt{\frac{r}{cr+b}} \cdot \frac{dr}{dt} = 1,$$

并进行积分, 我们得到, 当 $c \neq 0$.

$$(iia) \quad t = k + \frac{\sqrt{cr^2 + br}}{c} - \frac{b}{2c} f(r),$$

其中

$$(iib) \quad f(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc} \sinh(1 + 2cr/b) & \text{对于 } c > 0, \\ \frac{-1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc} \sin(1 - 2cr/b) & \text{对于 } c < 0, \end{cases}$$

而当 $c = 0$,

$$(iic) \quad r = \left(\frac{3\sqrt{b}}{2} t + k \right)^{2/3}.$$

回到微分方程 (i), 我们通过

$$c = \dot{r}_0^2 - \frac{b}{r_0}$$

决定积分常数 c . 当 $c < 0$, 我们看到 r 是有界的, $r \leq -b/c$.

若 $r_0 > 0$, 则 r 增加到这个值, 当飞行体落向太阳时减少. 当 $r_0 < 0$, 这飞行体直接朝着太阳运动, 直到碰撞为止.

当 $c = 0$, 我们注意在 (iic) 中的积分常数 k 是 $k = \pm r_0^3 \dot{\theta} = b^{3/2}/r_0^3$, 这里正号和负号取决于 r_0 是正还是负, 若 r_0 是负的, 我们又得到这样一个解, 在这个解中飞行体加速向太阳运动。当 r_0 是正的, 这飞行体向无穷远逸出, 但具有零极限速度。

当 $k > 0$, 而 $r_0 < 0$ 与前面一样飞行体向太阳加速运动直到碰撞。但是若 $r_0 > 0$, 则飞行体逸出并从 (i) 和 (iii) 能看出它有正的极限速度, 即

$$\dot{r}_\infty = c = \dot{r}_0^2 - \frac{b}{r_0}.$$

2. 对于抛物线和双曲线, 两者飞行都是非周期的而且 θ 是有界的, 因此, 根据 $\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta = h(t - t_0)$, 当 t 趋近 ∞ 时, r 也必须趋近于 ∞ . 由 (17d) 我们有当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\dot{\theta} = 0$; 因此在 (17c) 中, 由于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r^2 \dot{\theta}^2 = (\lim_{t \rightarrow \infty} r^2 \dot{\theta}) (\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}) = h \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta} = 0,$$

我们得出结论 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{r}^2 = 2c/m$. 然而, 根据 ε 的定义, 对于抛物线 ($\varepsilon = 1$) c 的值为 0, 对于双曲线 ($\varepsilon > 1$) c 的值是正的。

3. 力是 $-m/2 \text{ grad } r^2$. 根据能量守恒,

$$\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m r^2 = c,$$

又对于任何一个向心力, 动量矩方程给出

$$r^2 \dot{\theta} = h.$$

我们从这些方程中消去 t , 就像我们对行星运动方程 (17c) 和 (17d) 所做的那样, 得到

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{h} \sqrt{\frac{2cr^2}{m} - h^2 - r^4}.$$

由此容易通过积分得到

$$r^2 = \frac{a}{b + \sin 2\theta},$$

其中 $a = 2h^2$, $b = \sqrt{1 - h^2 m^2 / c^2}$. 在笛卡儿坐标中, 这就变成

$$b(x^2 + y^2) + 2xy = a$$

这是圆锥截线方程。

4. 力是 $-\text{grad}U$, 其中 $U = -\int f(r)dr$, 就行星运动而论, 我们可以应用能量守恒和动量矩方程 (17d), 也就是

$$\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \int f(r)dr = c,$$

$$r^2\dot{\theta} = h.$$

现在我们可以用同样方法继续进行得到需要的结果。

5. 应用第 4 题结果。

6. 若 (ξ, η) 是相对于椭圆轴的坐标, 则

$$\xi = a \cos \omega = x + ea,$$

$$\eta = b \sin \omega = y,$$

给出这个椭圆的方程而且根据面积定律

$$\begin{aligned} h(t - t_0) &= \int_0^\omega \left(x \frac{\partial y}{\partial \omega} - y \frac{\partial x}{\partial \omega} \right) d\omega \\ &= ab \int_0^\omega (1 - e \cos \omega) d\omega. \end{aligned}$$

7. 运动在平面上进行, 因为 p 是有心力 (对于 $p = 1/r^2$, 这一情况在第 776 页证明过)。因此,

$$\ddot{x} = -\frac{x}{r} p,$$

$$\ddot{y} = -\frac{y}{r} p.$$

于是有

$$x\ddot{y} - \ddot{x}y = \text{常数} = h$$

$$\ddot{x}\dot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{-x\dot{x} - y\dot{y}}{r} p = -\dot{r}p.$$

因此,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -\dot{r}p.$$

切线到原点的距离是

$$q = \frac{|x\dot{y} - \dot{x}y|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{h}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}};$$

因此,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{h^2}{q^2} = -p \frac{dr}{ds}$$

或

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \frac{h^2}{q^2} = -p,$$

这就证明了第一个论断. 对于心脏线我们有 $q = r^2/\sqrt{2ar}$.

8. 按照定义

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad \ddot{x} &= -\lambda^2 x - 2\mu\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\lambda^2 y + 2\mu\dot{x}. \end{aligned}$$

对这两个方程微商两次并进行组合之后, 我们立即得到只包含 x 或只包含 y 的方程

$$\ddot{x} + (2\lambda^2 + 4\mu^2)\dot{x} + \lambda^4 x = 0,$$

$$\ddot{y} + (2\lambda^2 + 4\mu^2)\dot{y} + \lambda^4 y = 0,$$

于是, x 和 y 是 $\exp[\pm i(\mu \pm \sqrt{\lambda^2 + \mu^2})t]$ 的线性组合 (参看第 803 页练习第 2 题). 或是

$$\cos(\mu + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2})t, \cos(\mu - \sqrt{\lambda^2 + \mu^2})t,$$

$$\sin(\mu + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2})t, \sin(\mu - \sqrt{\lambda^2 + \mu^2})t$$

的线性组合, 具有常数 a, b, c, d 和 a', b', c', d' . 根据 (A) 如下关系成立, $a' = -c$, $b' = -d$, $c' = a$, $d' = b$. 用初始条件 $x(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$, $\dot{x}(0) = u$, 我们得到所给的结果.

9. 设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 是产生引力的粒子, 则在点 (x, y) 的合力具有分量

$$X = \sum_v \frac{x - x_v}{\sqrt{(x - x_v)^2 + (y - y_v)^2}},$$

$$Y = \sum_v \frac{y - y_v}{\sqrt{(x - x_v)^2 + (y - y_v)^2}}.$$

如果我们引进复数量 $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n$, $z =$

$x + iy, Z = X + iY$, 我们有

$$Z = \sum_v \frac{1}{z - \bar{z}_v} = \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)},$$

这里 $f(z)$ 表示多项式 $(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ 和 \bar{z} 表示 z 的共轭复数. 平衡位置对应 $Z = 0$, 这也就是多项式 $f'(z)$ 的零点, 其中至多有 $n - 1$ 个.

在这特殊情况下, 平衡位置为: $(0, 0), (\sqrt{a^2 - b^2}, 0), (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$.

练习 6.2

1. (a) $y = \tan \log(c / \sqrt{1 + x^2})$

(b) $y = c\sqrt{1 + e^{2x}}$.

2. (a) $y = ce^{y/x}$,

(b) $y^2(2x^2 + y^2) = c^2$,

(c) $x^2 - 2cx + y^2 = 0$, (圆周)

(d) $\arctan(y/x) + c - \log \sqrt{x^2 + y^2}$ 或用极坐标 $r = e^{c + \theta}$ (对数螺线),

(e) $c + \log |x| = \arcsin(y/x) - \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - y^2}$.

3. 若 $ab_1 - a_1b \neq 0$, 我们有

$$\frac{dn}{d\xi} = \frac{a + by'}{a_1 + b_1y'} = \frac{a + b\phi(n/\xi)}{a_1 + b_1\phi(n/\xi)}.$$

这是一个齐次方程.

若 $ab_1 - a_1b = 0$ 或 $a_1/a = b_1/b = k$, 则

$$\frac{dn}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} = a + b\phi\left(\frac{\eta + c}{k\eta + c_1}\right).$$

其中变量是分离的.

4. (a) $4x + 8y + 5 = 4e^{4x-2y}$,

$$(b) x = c - \frac{1}{4}(3y - 7x) - \frac{3}{4} \log(3y - 7x).$$

$$5. (a) y = ce^{-\sin x} + \sin x - 1,$$

$$(b) y = (x+1)^n(e^x + c),$$

$$(c) y = cx(x-1) + x,$$

$$(d) y = \frac{1}{3}x^3 + cx^2,$$

$$(e) y = \frac{c}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})}.$$

6. 引进 $1/y$ 作为新的未知函数; 方程便成为齐次的:

$$\frac{1}{x} \frac{1 - cx\sqrt{5}}{cx\sqrt{5} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}}.$$

7. 用这个变量代换, 方程成为

$$v' = v^n g(x) F(x)^{n-1}.$$

8. 参看第 7 题, 通过 $v = xy, y' = v'/x - v/x^2$ 消去 y 得到分离变量的方程

$$y = \frac{1}{x(c - \log x)}.$$

9. 仿效第 7 题中变量代换的想法, 寻求一个函数 $f(x)$ 使得 $v = y \cdot f(x)$ 而且 $v' = (y' + y \sin x) f(x)$. 根据 $f' = y' f(x) + y f'(x)$ 我们有

$$f(x) = f(x) \sin x;$$

从而

$$f(x) = ae^{-\cos x}.$$

为了我们的目的, 常数 a 是无关紧要的, 因此我们让 $a = 1$, 于是我们得到分离变量的方程

$$v' = -e^{(n-1)\cos x} \sin 2x,$$

它通过分离变量是容易积分的, 其最后结果是

$$y = \begin{cases} \sqrt[n-1]{2 \left| \frac{1}{n-1} - \cos x \right|} + k e^{-(n-1)\cos x} & n \neq 1 \\ k e^{\cos x + (\cos^2 x)/2} & n = 1 \end{cases}$$

练习 6.3b

1. 如果其中任何一个线性组合是 0, 也就是说

$$c_1 \sin n_1 x + c_2 \sin n_2 x + \cdots + c_k \sin n_k x = 0,$$

则通过乘 $\sin n_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, k$, 并在 $[0, \pi]$ 上积分之后我们立即得到

$$c_j \int_0^\pi \sin^2 n_j x dx = 0.$$

从而对一切 j , $c_j = 0$.

2. 用数学归纳法. 假设线性关系

$$c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 + \cdots + c_k \phi_k = 0$$

成立, 如果 $P_k(x)$ 具有次数 n_k , 用 e^{ikx} 去除并微商 $(n_k + 1)$ 次, 其他 e^{ik} 的系数的次数是不变的, 也就是它们保持不等于零.

3. 用 $(1 - n)y^{-n}$ 乘方程的两边

$$(a) y^{-1} = cx + \log x + 1,$$

$$(b) y^3 = cx^{-3} + \frac{3a^2}{2x},$$

$$(c) (y^{-1} + a)^2 = c(x^2 - 1).$$

4. 如果我们表示 $y = y_1 + u^{-1}$, 方程就归结为线性方程 $u' - (2py_1 + Q)u = p$.

$$y = x - \frac{\exp[(1/2)x^2]}{c + \int_0^x x' \exp[(1/2)x^2] dx}.$$

5. 让两个方程的右边相等, 得到 $y = x^2$ 并直接验证这是两个方程的积分.

6. 注意这是第 5 题的方程 (a), 从而是具有一个已知解的 Riccati 方程, 然后应用第 4 题的结果.

$$y = x^2 - \frac{\exp[(2/3)x^3]}{c + \int_{-\infty}^x \exp[(2/3)x^3] dx} \quad [= f(x, c)].$$

为了画出对应曲线族的图形,首先区分曲线的两个分支

$$y' + 2x - x^3 = 0, \quad y = \pm \sqrt{(x^3 - 2)x},$$

它划分平面为两个区域,其中一个区域 $y' < 0$, 另一个区域 $y' > 0$. 这两个无限的曲线分支是渐近于抛物线 $y = \pm x^2$ 的, 通过证明下列两个关系, 断定所有积分曲线都渐近于这两条抛物线.

$$f(x, c) = -x^2 + o(1) \quad \text{当 } x \rightarrow +\infty \quad (-\infty < c < +\infty)$$

与

$$f(x, c) = x^2 + o(1) \quad \text{当 } x \rightarrow -\infty \quad (c \neq 0),$$

其中 $o(1)$ 表示趋近于零的函数.

7. 令 $y_1 - y_2 = a$, $y_1 - y_3 = b$, $y_2 - y_3 = c$, $y_2 - y_4 = d$
则 $a' + Pa(y_1 + y_3) + Qa = 0$, 于是

$$P(y_1 + y_3) = -Q - \frac{a'}{a},$$

$$P(y_1 - y_3) = aP$$

或

$$2Py_1 = aP - Q - \frac{a'}{a}.$$

类似地

$$2Py_3 = bP - Q - \frac{b'}{b}.$$

因此,

$$\frac{d \log(a/b)}{dx} = \rho(a - b) = -P(y_1 - y_3).$$

又类似地

$$\frac{d \log(c/d)}{dx} = -P(y_3 - y_4);$$

通过相减得

$$\log \frac{a/b}{c/d} = \text{常数}.$$

8. 与前题证明中的关系式

$$\frac{d \log(a/b)}{dx} = p(y_1 - y_2)$$

进行比较。

特殊的方程的特解是 $y_1 = 1/\cos x$, $y_2 = -1/\cos x$;

$$y = \frac{1 + ce^{ix}}{(1 - ce^{ix})\cos x}.$$

9. (a) 和 (b) 的公共解 e^x 是通过从两个方程中消去 y'' 得到的。

$$(a) \quad c_1 e^x + c_2 x,$$

$$(b) \quad c_1 e^x + c_2 \sqrt{x}.$$

10. 曲线满足微分方程

$$n \left(x \frac{dx}{dy} - y \right) = r$$

或用极坐标 r, θ , 以 θ 作为独立变量。

$$\frac{nr^2}{\cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \sin \theta} = r;$$

这也就是

$$\frac{d \log r}{d\theta} = \frac{n}{\cos \theta} + \tan \theta,$$

从而

$$r = a \frac{[\tan(\theta/2 + \pi/4)]^n}{\cos \theta} = a \frac{(1 + \sin \theta)^n}{\cos^{n+1} \theta}$$

(参看第一卷, 第 288—290 页)。

练习 6.3c.

$$1.(a) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-(1/2)x} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + c_3 e^{-(1/2)x} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

$$(b) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x}.$$

$$(c) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x.$$

$$(d) y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{\sqrt{2}x} + c_4 e^{-\sqrt{2}x}$$

$$(e) \text{作变换 } x = e^t:$$

$$y = c_1 x + c_2/x.$$

2. 根据代数学的基本定理, $f(x)$ 可以写成

$$f(z) = (z - a_1)^{\mu_1} (z - a_2)^{\mu_2} \cdots (z - a_k)^{\mu_k}$$

(参看第一卷第 304 页; 第二卷, 第 916 页), 其中 μ_v 是正整数, 满足 $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = n$ 而且

$$f(a_v) = f'(a_v) = \cdots = f^{(\mu_v-1)}(a_v) = 0.$$

现在

$$L(e^{\lambda x}) = f(\lambda) e^{\lambda x}.$$

对此关系式微商 $(\mu_v - 1)$ 次, 并在结果中代入 $\lambda = a_v$, 我们得到 (参看 Leibnitz 法则, 第一卷, 第 216 页).

$$L(e^{a_v x}) = f(a_v) e^{a_v x} = 0$$

$$L(x e^{a_v x}) = [f'(a_v) + x f(a_v)] e^{a_v x} = 0$$

$$L(x^2 e^{a_v x}) = [f''(a_v) + 2x f'(a_v) + x^2 f(a_v)] e^{a_v x} = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$L(x^{\mu_v-1} e^{a_v x}) = \left[\binom{\mu_v-1}{0} f^{(\mu_v-1)}(a_v) + \binom{\mu_v-1}{1} f^{(\mu_v-2)}(a_v) x + \cdots + (\mu_{v-1} \mu_{v-1}) f(a_v) x^{\mu_v-1} \right] e^{a_v x} = 0.$$

于是我们有 n 个特解

$$e^{a_1 x}, x e^{a_1 x}, \dots, x^{\mu_1-1} e^{a_1 x}$$

$$e^{a_2 x}, x e^{a_2 x}, \dots, x^{\mu_2-1} e^{a_2 x}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$e^{a_k x}, x e^{a_k x}, \dots, x^{\mu_k-1} e^{a_k x},$$

根据第 798 页第 2 题, 它们是线性无关的.

3. 对微分方程进行变换之后, 我们立即得到

$$(a_0 b_0 - 1)P(x) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)P'(x)$$

$$+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)P''(x) + \cdots = 0,$$

而且根据这个表达式, 当 $a_0 b_0 = 1, a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0, \dots$

时,这是一个恒等式。如果我们将 y' 换为 y ,则第二种情况归结为第一种情况。

4. (a) $1/(1+t^2) = 1 - t^2 + t^4 - \dots$; 因此,

$$y = P(x) - P'(x) = 3x^2 - 5x - 6.$$

(b) $1/(t+t^2) = (1/t) - 1 + t - t^2 + \dots$; 因此,

$$\begin{aligned} y &= \int P(x) dx - P(x) + P'(x) - P''(x) \\ &= -\frac{2}{3} + x + \frac{1}{3} x^3. \end{aligned}$$

$$5. (a) y = \frac{3}{8} e^x, \quad (b) y = \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

$$6. y = e^x \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \right) + c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}.$$

7. (b) 如果我们用 x^3 去乘方程,便出现在 (a) 中处理过的形式。它有特解 $u = x^3$ 和 $y = x^3$; 因此,根据 (a) 第三个解通过 $W = 1 + x^2$ 给定,因此,一般解是

$$A(1+x^2) + Bx^2 + cx^3.$$

练习 6.4

1. (a) $x^2 + y^2 + cx + 1 = 0$ ($-\infty < c < \infty$) 和直线 $x = 0$,

(b) $x^2 + 2y^2 = c^2$,

(c) 共焦圆锥曲线族(参看第257页)的微分方程求出来是

$$y'^2 + \frac{x^2 - y^2 - a^2 + b^2}{xy} y' - 1 = 0,$$

当 y' 用 $-1/y'$ 代替时它是不变的;椭圆族 ($-b^2 < c < \infty$) 正交于双曲线族 ($-a^2 < c < -b^2$),

(d) $y = \log |\tan(x/2)| + c$ 和垂直线 $x = k\pi$ (k 是整数),

(e) 曲线族(曳物线)

$$x - c = \pm [\sqrt{a^2 - y^2} - a \operatorname{ar} \cosh(a/y)]$$

和对 x 轴反射的同一个族。

2.(a) 抛物线族 $y = cx^2$,

(b) 双曲线族 $xy = c$.

3.(a) $y = x^2$, (b) $y = -x + x \log(-x)$, ($0 > x > -\infty$).

4. $y = xp + a\sqrt{1+p^2} - ap \operatorname{ar} \sinh p$.

5. $x = ce^{-p/a} + \frac{1}{2} p$

$$y = c(p+a)e^{-p/a} + \frac{1}{2}p(p+a) - \frac{1}{4}(p+a)^2.$$

注意当 $c = 0$ 由此得到抛物线 $y = x^2 - (a^2/4)$. 这个结果的几何意义是什么?

6.(a) $y = \sin(x+c)$, 奇异解 $y = \pm 1$.

(b) $x = \pm \frac{1}{2} \left(\arcsin y + y\sqrt{1-y^2} \right) + c$.

(c) $x = \pm \left(\sqrt{(2a-y)y} - 2a \arctan \sqrt{\frac{y}{2a-y}} \right) + c$.

它是旋轮线族, 并可用参数形式表示为 $x = c + a(\phi - \sin \phi)$, $y = a(1 - \cos \phi)$. 奇异解 $y = 2a$.

(d) $x = \pm \int_0^y \sqrt{\frac{1+y'}{1-y'}} dy + c \quad (-1 \leq y \leq 1)$;

奇异解 $y = \pm 1$ (读者应该证明, 这些曲线不是正弦曲线, 对 x 的这个表达式, 可以表示为第二类椭圆积分, 参看第一卷第 460 页 ff. 4.1g 节, 问题 1.)

7. $y = r \sin ax$; 奇异解 $y = x$ 和 $y = -x$.

8. 在各种情况下, 让切线方程用形式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 来给出.

(a) Clairaut 方程, $y = xp + kp/(p-1)$, 其中 $k = a + b$. 奇异积分是抛物线 $x^2 - 2xy + y^2 - 2kx - 2ky + k^2 = 0$, 它关于直线 $x = y$ 对称, 而且分别在点 $(k, 0)$ 和 $(0, k)$ 与 x 轴和 y 轴相切.

(b) 设 $a = k \cos \theta$ 和 $b = k \sin \theta$, 其中 k 是在切线上所截取

的长度,并用 θ 作为参数,则 Clairaut 方程是

$$y = xp \pm kp / \sqrt{1 + p^2}.$$

这些曲线的参数方程是 $x = k \cos^3 \theta$, $y = k \sin^3 \theta$. 这是星形线,第一卷, p. 第 459 页, 4.1e 节, 问题 7.

(c) 设 $|ab| = k$. 其 Clairaut 方程是 $y = xp + \sqrt{k|p|}$. 此曲线是两个直角抛物线族 $4xy = \pm k$ 的和.

练习 6.5

1.(a) 改写为 $\left(\frac{1}{2} y'^2\right)' = x$;

$$y = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a} + \frac{1}{2} a \log(x + \sqrt{x^2 + a}).$$

(b) 改写为 $(y'')' = 1$;

$$y = \frac{4}{15} (x + a)^{5/2} + bx + c.$$

(c) 改写为 $(xy')' = 2$;

$$y = 2x + a \log x + b.$$

(d) 改写为 $x(y''')' = y''' - 2$ 并且引进 y''' 作为新的独立

变量. $y = x' + \frac{1}{6} ax^3 + bx + c.$

2.(a) $y = (ax + b)^{2/3},$

(b) $y = \sqrt{a + (x + b)^2},$

(c) $y = \sqrt{a(x + b)^4 + a^{-1}},$

(d) 方程可表示成 $p(d/dy)(p/y) = 1$ 的形式,

$$y = a/(1 - be^{ax}),$$

注意解 $p = 0, y = \text{常数},$

(e) 引进新变量 z 和 q , 其中 $z = y'', q = y'''$ 而且 $q(dq/dz) = y''.$

$$y = ax^2 + bx + c + \frac{2}{15} \left(\frac{x}{2} + b \right)^3.$$

(f) 同 (e) 小题方法:

$$y = ax + b + c \sin(x + d).$$

3. $MN = y + \sqrt{1 + y'^2}$, $MC = -[(1 + y'^2)^{3/2}/y'']$, 从而微分方程是

$$(1 + y'^2)y + ky'' = 0.$$

用通常方法容易由此导出

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{k + c - y^2}{y^2 - c} \quad (c \text{ 为任意常数}).$$

曲面微分几何学¹⁾中的各种重要情况列举如下:

(1) $k = x^2 (> 0)$, $c = -r^2 (< 0, r^2 < x^2)$. 曲线是处处光滑和振动的, 另一方面与直线 $y = \pm \sqrt{x^2 - r^2}$ 相切, 它像正弦曲线, 但不是一样的。

(2) $k = \kappa^2, c = 0$. 曲线是圆周, 其半径为 κ , 中心在 x 轴上。

(3) $k = \kappa^2, c = r^2 (> 0)$. 曲线由一系列全等的弧组成, 这些弧通过落在直线 $y = r$ 上的尖点, 并与 $y = \sqrt{\kappa^2 + r^2}$ 相切. 它像旋轮线, 但不是一样的。

(4) $k = -\kappa^2 (< 0)$, $c = r^2 > \kappa^2$. 曲线是由一系列颠倒的弧组成, 具有三个尖点在 $y = r$ 上并与 $y = \sqrt{r^2 - \kappa^2}$ 相切。

(5) $k = -\kappa^2, c = r^2 = \kappa^2$. 曲线是星形线。

(6) $k = -\kappa^2, c = r^2 < \kappa^2$. 曲线有无穷多个尖点, 并垂直于直线 $y = r$ 或 $y = -r$ 。

4. 连续对圆周方程微商三次并用所得的方程消去 a, b, c 得到

$$(1 + y^2)y''' - 3y'y'' = 0.$$

1) 参看 L. P. Eisenhart, A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, reprinted by Dover (N. Y., 1960), pp. 270—274.

练习 6.6

1. (a) $c_0 = a, c_1 = a, c_n = \frac{a+1}{n!} (n \geq 2).$

(b) $c_0 = \frac{\pi}{2}, c_1 = 1, c_{2n} = 0, c_{2n+1} = \frac{\alpha(-1)^n}{2^n + 1} (n \geq 1).$

(c) $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{3}.$

(d) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \dots$

2. 如果 $y(x) = \sum c_n x^n$, 则

$$c_{n+1} = -\frac{c_n}{(n+2)}, \text{ 而且 } c_0 = 1, c_1 = 0;$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!^2} x^{2n}.$$

在练习 4.12 $J_0(x)$ 的表达式中, 如果用幂级数去代替 $\cos xt$ 并更换和与积分的顺序(这为什么是允许的?) 我们得到

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n \int_{-1}^{+1} \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}} dt;$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ 的值是 } \frac{(2n)! \pi}{n!^2 2^{2n}}.$$

它是通过变换 $t = \sin c$ 并参照第一卷第 298 页。由此可见 $y(x)$ 和 $J_0(x)$ 的幂级数是一样的。

练习 6.7

1. Poisson 公式给出单位圆内部具有边界值 $f(\theta)$ 的位势函数 $u(r, \theta)$. 现在 $u(1/r, \theta)$ 也是位势函数第 59 页。具有同一边界值而且在单位圆外区域是有界的, 于是表达式

$$\frac{r^2 - 1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \frac{d\alpha}{1 - 2r \cos(\theta - \alpha) + r^2}$$

是问题的解。

2. 位势是

$$\mu \log \frac{z + L + \sqrt{(z + L)^2 + x^2 + y^2}}{z - L + \sqrt{(z - L)^2 + x^2 + y^2}}.$$

因为在椭球 $z = L \cos \phi, \sqrt{x^2 + y^2} = L \sqrt{\alpha^2 - 1} \sin \phi$ 上, 位势是

$$\mu \log \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1},$$

共焦椭球面

$$\frac{z^2}{\alpha^2} + \frac{x^2 + y^2}{\alpha^2 - 1} = 1 \quad (1 \leq \alpha \leq \infty)$$

是等位面, 力线是正交于等位线的, 从而它是共焦双曲面。(参看第814页练习1c.) 由同一个方程当 $0 \leq \alpha \leq 1$ 时给定, 并且 x 和 y 的比是常数。

3. 设 Σ 是半径为 O , 中心 (x, y, z) 落在 S 内的球, 因为 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ 而且在由 Σ 和 S 所界的区域内 $\Delta u = 0$, 根据 Green 定理我们有

$$0 = \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) d\sigma - \iint_\Sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) d\sigma,$$

其中, 在第一个积分中 n 是 S 的外法线, 而在第二个积分中 n 是 Σ 的外法线. 今在球面 Σ 上我们有

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial n} = \frac{\partial(1/r)}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}, \quad r = \text{常数} = \rho;$$

因此,
$$\iint_\Sigma \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\rho} \iint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,$$

因为 u 是调和函数(参看第826页); 另外还有

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} u \frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\sigma = -\frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\Sigma} u d\sigma,$$

而且,当 $\rho \rightarrow 0$, 这个表达式显然趋向于 $u(x, y, z)$, 这是因为它在 Σ 上的平均值.

练习 6.8

1. (a) $u = f(x) + g(y)$; f 和 g 是任意函数,
- (b) $u = f(x, y) + g(x, z) + h(y, z)$; f, g, h 是任意函数,
- (c) 通解是由特解加上齐次方程的通解得到的.

$$u = \int_0^x d\xi \int_0^y a(\xi, \eta) d\eta + f(x) + g(y).$$

其中 f 和 g 是任意的函数.

2. 如果 $u(x, y) = \sum a_{\nu\mu} x^\nu y^\mu$, 则

$$a_{\nu+1, \mu+1} = \frac{a_{\nu\mu}}{(\nu+1)(\mu+1)};$$

另外,

$$a_{\nu 0} = a_{0, \nu} = 0$$

对一切 $\nu \geq 1$ 而且 $a_{00} = 1$. 因此,

$$u(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu y^\nu}{\nu!^2} = J_0(2i\sqrt{xy}).$$

其中 J_0 是 Bessel 函数. (参看第820页第2题)

$$3. z^2(z^2x + z^2y + 1) = 1.$$

4. 从两个参数的解族 $z = u(x, y, a, b)$, 用某种方式使 a 和 b 依赖于参数 t , 这样得到单参数族:

$$a = f(t)$$

$$b = g(t)$$

$$z = u(x, y, f(t), g(t)).$$

这个单参数族的包络是这样得到的, 先通过如下方程求 t ,

$$0 = z_t = u_a f' + u_b g',$$

然后在 $z = u(x, y, f(t), g(t))$ 中, 将 t 用上述求得的 t 的表达式

代替,其结果又是 $F(x, y, z, z_x, z_y) = 0$ 的解,因为

$$z = u(x, y, a, b)$$

$$z_x = u_x + u_t \cdot t_x = u_x(x, y, a, b)$$

$$z_y = u_y + u_t \cdot t_y = u_y(x, y, a, b)$$

以及 $z = u(x, y, a, b)$ 满足方程 $F(x, y, z, z_x, z_y) = 0$.

5.(a) 根据微分方程我们得

$$[f'(x)]^2 + [g'(y)]^2 = 1$$

或

$$[f'(x)]^2 = 1 - [g'(y)]^2.$$

因为左边不依赖于 y , 右边不依赖于 x , 所以两边都等于常数(此常数应是正的或0), 比如说 c^2 ; 也就是

$$[f'(x)]^2 = c^2, \quad 1 - [g'(y)]^2 = c^2.$$

因此,

$$u = cx + \sqrt{1 - c^2}y + b$$

是一个解, 其中 c 和 b 是任意的, 只要 $c^2 \leq 1$.

(b) $u = f(x) + g(y)$ 给出

$$f(x) = \frac{1}{g'(y)} = \text{常数} = a,$$

于是

$$u = ax + \frac{1}{a}y + b$$

(其中 a 和 b 是常数). 如果 $u = f(x)g(y)$, 则

$$\frac{d}{dx} [f(x)]^2 = 4 / \frac{d}{dy} [g(y)]^2 = \text{常数} = 2c;$$

于是, 在这种情况下,

$$u = \sqrt{(2cx + a) \left(\frac{2}{c}y + b \right)}.$$

其中 a, b, c 是任意常数.

$$(c) u = x \sqrt{\frac{y}{x+k}} + y \sqrt{\frac{x+k}{y}} + k \sqrt{\frac{y}{x+k}}.$$

6. 应用线性变换

$$x = \xi + \eta,$$

$$y = 3\xi + 2\eta,$$

$$u = f(y - 2x) + g(3x - y) + \frac{1}{12} e^{x+y}.$$

7. 令 $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$ 并设 K 具有次数 h , 则

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = n(n+1)(x^2 + y^2 + z^2)^{(n-2)/2},$$

$$x \frac{\partial K}{\partial x} + y \frac{\partial K}{\partial y} + z \frac{\partial K}{\partial z} = hK.$$

因此, $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-(n+h)/2}$ 是一个解.

8. 依照第833页, 第一个方程的解具有如下形式,

$$z = f(x + at) + g(x - at).$$

在第二个方程中代入这个表达式以后, 我们有

$$f'g' = 0;$$

这也就是, 不是 f 等于常数就是 g 等于常数. 因此, $z = f(x + at)$ 或 $z = f(x - at)$ 是两个方程的通解.

9.(a) 根据微分方程

$$\frac{\phi_{xx}}{\phi} = \frac{1}{c^2} \frac{\phi_{tt}}{\phi} = \lambda,$$

是一个常数, 仅当 $\lambda = -n^2$ 时, 边界条件得到满足, 其中 n 是整数而且

$$\phi(x) = a \sin nx,$$

从而

$$\phi(t) = a \sin ct + b \cos ct.$$

于是, 特殊类型的最一般特解是

$$u(x, t) = \sin nx (a \sin nct + b \cos nct).$$

$$(b) \text{ 用 } \sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)] \text{ 和}$$

$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$, 我们得到

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [a \cos n(x - ct) + b \sin n(x - ct)] \\ - \frac{1}{2} [a \cos n(x + ct) - b \sin n(x + ct)].$$

(c) 假设解是 (a) 小题中所得到的特解的和, 也就是

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx (a_n \sin nct + b_n \cos nct).$$

在 (ii) 中为了满足初始条件, 我们应该有 $b_n = a_n$, $a_n = 0$.

对于 (i) 的解, 依照第一卷第 617 页(17)式, 也就是

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -f(-x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \right] \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

对于 (i) 中的具体函数, 我们求得 $a_n = 0$,

$$a_{2v+1} = (-1)^v / \pi (2v+1)^2,$$

其中 $v = 0, 1, 2, \dots$;

从而

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin x \cos ct}{1^2} - \frac{\sin 3x \cos 3ct}{3^2} \right. \\ \left. + \frac{\sin 5x \cos 5ct}{5^2} - \dots \right].$$

10. $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$; 因此, 对于 $x \geq 0$,

$$0 = u(x, 0) = f(x) + g(x)$$

$$0 = u_t(x, 0) = -af'(x) + ag'(x);$$

对第一个方程微商并将结果与第二个方程比较, 我们有

$$f'(x) = 0, \quad g'(x) = 0$$

或

$$f(x) = \text{常数} = c, \quad g(x) = -c \quad \text{对于 } x \geq 0.$$

此外, 对于 $t \geq 0$,

$$\phi(t) = u(0, t) = f(-at) + g(at) = f(-at) - c;$$

这也就是, $f(\xi) = c + \phi(\xi/-a)$, 当 $\xi < 0$. 因为 $x + a \geq t0$ 总成立, 又因此 $g(x + at) = -c$, 这样, 如果 x 和 t 都是负的则有

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{对于 } x - at \geq 0 \\ \phi\left(\frac{x - at}{-a}\right), & \text{对于 } x - at \leq 0. \end{cases}$$

第 七 章

练习7.2 a

1. $\frac{\alpha}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}{y_1 - y_0}}$.
2. $T = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} f(r) \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2} d\sigma$

练习7.2 d

1. (a) 抛物线 $y = c^2 + \frac{x^2}{4c^2}$,
(b) 中心在 x 轴上的圆周,
(c) $y = c \sin \frac{x-a}{c}$.
2. $y = \frac{a}{x^{n-1}} + b$, 当 $n > 1$ 和 $y = a \log x + b$ 当 $n = 1$.
3. $y = a(x - b)^{n(n+m)}$, 若 $n + m \neq 0$;
 $y = ac^{b^x}$, 若 $n = -m$.
4. $ay'' + a'y' + (b' - c)y = 0$; 当 $b = \text{常数}$,

$$\int_{x_2}^{x_1} byy'dx = \frac{b}{2} (y_1^2 - y_2^2)$$

只依赖于曲线 $y = y(x)$ 的端点.

$$5. y_1 - y_0 < \frac{\pi}{2}.$$

6. 在 x 固定情况下, 考虑 $F(x, y)$ 作为 y 的函数; 设此 y 的函数在 $y = \bar{y}$ 处有极小值. 则 $F(x, y) \geq F(x, \bar{y})$ 对于 \bar{y} 的某个邻域成立并且 $F_y(x, \bar{y}) = 0$. 其中 \bar{y} 将依赖于参数 x ; [也就是, $\bar{y} = \bar{y}(x)$]. 因此, 对于任一个邻域中的函数 y , 我们有

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x)) dx \geq \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}(x)) dx,$$

其中 $\bar{y}(x)$ 满足方程 $F_y(x, \bar{y}(x)) = 0$.

7.(a) $y = 0$,

(b) 用 Cauchy 不等式, 对一切允许的 x ,

$$1 = y(1) - y(0) = \int_0^1 y' dx \leq \sqrt{\int_0^1 1^2 dx} \sqrt{\int_0^1 y'^2 dx} = \sqrt{I},$$

而且等号当 $y = x$ 时成立.

8. 在 Euler 方程中, 引进 $1/r$ 作为新的独立变量, 其通解是直线 $1/r = a \cos \theta + b \sin \theta$.

练习 7.3 b

1. 如果 $v = 1/f(r)$, 则 T 由第 847 页练习第 2 题给定:

$$F = f(r) \sqrt{r^2 + r^2 \theta'^2 + r^2 \sin^2 \theta \phi'^2}.$$

沿着射线方向, ϕ 的 Euler 方程是

$$F_\phi = \frac{\phi'^2 f r^2 \sin^2 \theta}{F} = \text{常数} = C.$$

现在这样选择极坐标, 使平面 $\phi = 0$ 通过初始点和端点, 因为在这两点 $\phi = 0$, 所以根据中值定理, 对于某个中间点我们有 $\phi' = 0$, 这就使 $C = 0$; 但是, 另一方面, $\phi' = 0$ 对整个射线是成立的, 因此, 整个射线必须落在平面 $\phi = 0$ 上.

2. 参看上面第 1 题, 用 ϕ 作参数, 我们要使 $r \sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta} d\phi$ 取极小, 其中 $r = \text{常数}$. 在 Euler 方程中引进 $\cot Q$ 作为新的独

立变量, 导出通解 $\cot\theta = a\cos\phi + b\sin\phi$, 这个解对应于球面与通过其中心的平面的交线。

3. 参看上面第1题, 这里用球坐标, 我们有 $\theta = \text{常数}$, 引进 r 作为相关的而 $\phi\sin\theta$ 作为独立的变量, 便产生同样一个求极小值的积分, 如第856页练习第8题。(具有球坐标 r, θ, ϕ 的锥面上的点, 映象到具有极坐标 $r, \phi\sin\theta$ 的平面上的点, 这个映象保持弧长不变)

$$1/r = a\cos(\phi\sin\theta) + b\sin(\phi\sin\theta).$$

4. 此路径应该是直的。因为对于给定的端点, 它应该有极小的长度。我们只要求得约束在两条给定曲线上的两动点之间的最短距离。这是一个多元函数在辅助条件下求极小的问题(参看第三章, 第339页)。

5. 参看下一个问题的解。

6. 设端点分别约束在曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 上, 则极小曲线的端点是 $(a_0, f(a_0)), (b_0, g(b_0))$, 令其方程是 $y = u(x)$, 其中 $u(a_0) = f(a_0), u(b_0) = g(b_0)$. 因为 u 也是符合固定端点条件的极值曲线, 所以它满足 Euler 方程。考虑曲线族 $y = u(x) + \varepsilon\eta(x)$, 具有参数 ε 和端点 $(a, f(a)), (b, g(b))$, 其中 $a = a(\varepsilon), b = b(\varepsilon)$ 是如下方程的解

$$f(a) = u(a) + \varepsilon\eta(a), \quad g(b) = u(b) + \varepsilon\eta(b).$$

其相应的积分是

$$G(\varepsilon) = \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} F(x, u(x) + \varepsilon\eta(x)) \sqrt{1 + [u'(x) + \varepsilon\eta'(x)]^2} dx.$$

对于极值曲线 u , 我们有条件 $0 = G'(0)$. 与第847—848页所进行的那样, 我们来计算 $G'(0)$. 用分部积分消去 $\eta'(x)$, 因为 u 满足 Euler 方程, 所以有贡献的仅是这样两部分, 其一是对 G 的积分表达式中的上下限进行微商的结果, 其二是由边界项在分部积分中产生的。注意, 对于 $\varepsilon = 0$,

$$[f(a) - u'(a)] \frac{da}{d\varepsilon} = \eta(a), [g(b) - u'(b)] \frac{db}{d\varepsilon} = \eta(b)$$

以及 $\eta(a)$, $\eta(b)$ 是任意的, 我们求得关系

$$0 = 1 + u'(a_0)f'(a_0) = 1 + u'(b_0)g'(b_0),$$

此关系表示在端点的正交性.

练习 7.4 a

1. 能量守恒定律给出

$$T + U = T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \text{常数} = \frac{1}{2} c^2;$$

因此, $ds/dt = \text{常数} = c = \text{初速度}$.

又 Hamilton 原理断言如下积分的稳定特性.

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = \int_{t_0}^{t_1} T dt = \frac{1}{2} c^2 \int_{t_0}^{t_1} dt = \frac{1}{2} c \int_{t_0}^{t_1} ds;$$

由此可见, Hamilton 积分的稳定性的蕴涵着路径长度是稳定的.

2. 设 t 是沿着曲线 C 确定的参数, 在 C 上具有参数 t 的点处, 作垂直于 C 的测地线, 在这测地线上, 我们用弧长 s 作为参数, s 从 C 上的点算起, 则 $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z = z(s, t)$ 将表示这样一条曲线, 这条曲线是这样得到的, 对每一个 t , 在 C 上具有参数 t 的点处, 作垂直于 C 的测地线, 沿着每条所作的测地线, 截取一段固定的测地距离 s , 其中因为 s 是弧长, 我们有

$$x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 = 1;$$

此外, 根据第868页公式(19), x_{st}, y_{st}, z_{st} 是 G_x, G_y, G_z 成比例的, 并且 $G(x, y, z) = 0$ 对问题中的一切 s, t 成立. 在 $C = 0$ (即, 对于 $s = 0$), 按假设, 我们有 $x_t x_t + y_t y_t + z_t z_t = 0$, 因此,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (x_s x_t + y_s y_t + z_s z_t) &= \lambda (G_x x_t + G_y y_t + G_z z_t) + x_t x_{st} \\ &+ y_t y_{st} + z_t z_{st} = \lambda \frac{dG}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x_t^2 + y_t^2 + z_t^2) = 0. \end{aligned}$$

因此, $x_s x_t + y_s y_t + z_s z_t = \text{常数} = 0$, 对一切 s 成立. 这样就证明了由 $s = \text{常数}$ 表达的曲线 C' 垂直于测地线.

练习 7.4b

1. 从测地线的微分方程(第 869 页)我们发现, 对于一个柱面 (也就是当 G 与 z 无关) $\frac{dz}{dt}$ 是常数; 因此, 柱面上的测地线与 xy 平面成一定角.

$$2. (a) \quad g(x) - \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = 0,$$

$$(b) \quad g(x) - \frac{6y''(y'''^2 + 4y'y''')}{(1+y'^2)^4} + \frac{2y^{(4)}}{(1+y'^2)^3} + \frac{48y'^2y'''^3}{(1+y'^2)^5} = 0,$$

$$(c) \quad y + y'' + y^{(4)} = 0,$$

$$(d) \quad (z - y'')y'' = 0.$$

$$3. (a) \quad \phi d = (ax + by)\phi_x + (b_x + c_y)\phi_y + a\phi_{xx} + 2b\phi_{yy} + c\phi_{yy},$$

$$(b) \quad \Delta^2 \phi = 0,$$

$$(c) \quad \Delta^2 \phi = 0.$$

$$4. \quad \frac{au'' + a'u' + u(b' - c)}{u} = \lambda = \text{常数}.$$

5. (a) Euler 方程给出

$$f + 2\lambda u = 0;$$

根据这个方程和 $\int_0^1 \phi^2 dx = K^2$, 我们有

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{\int_0^1 f^2 dx}}{2K}, \quad u = \pm \frac{Kf}{\sqrt{\int_0^1 f^2 dx}}.$$

(b) 对于任何一个连续的许可函数 ϕ 我们有

$$I = \int f\phi dx \leq \sqrt{\int_0^1 f^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 \phi^2 dx} = K \sqrt{\int_0^1 f^2 dx},$$

其中等号当 $\phi = u$ 时成立.

8. 根据必要条件第846页(6b), 我们求得

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_{\eta\eta} \eta'^2 + 2F_{\eta\eta'} \eta \eta' + F_{\eta'\eta'} \eta'^2) dx \geq 0$$

对于一切在 $x = x_0, x = x_1$ 为 0 的 $\eta(x)$ 成立. 取 h 和 ξ 使得 $x_0 < \xi - h < \xi < \xi + h < x_1$, 定义 $\eta(x)$. 当 $|x - \xi| < h$ 时是

$$[(x - \xi)^2 - h^2]^m,$$

而在其他地方是 0. 当 $h \rightarrow 0$, 此积分趋近于 $c F_{\eta'\eta'}(\xi, u(\xi), u'(\xi))$, 其中 c 是正常数.

9. 这个问题实际上等同于标准的等周问题, 其解是圆弧, 但是在本题中, 因为解是 x 的函数, 关于允许长度有一上界, 即,

$$\frac{\alpha[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2]}{x_1 - x_0} \arctan \frac{x_1 - x_0}{|y_1 - y_0|}.$$

第 八 章

练习 8.1

1. (a) 设 $\alpha = a_1 + ia_2, \beta = b_1 + ib_2$.

以乘法为例

$$\overline{\alpha\beta} = (a_1b_1 - a_2b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1) = \overline{\alpha}\overline{\beta},$$

(b) 根据 (a), 通过对部分和的实部和虚部取极限就可直接得出.

2. (a) 根据第 1 题, $\overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha})$; 因此, $P(\alpha) = 0$ 蕴涵 $P(\overline{\alpha}) = 0$ 并且反之亦然.

(b) 根据长除法, 将 $P(z)$ 表示为如下形式

$$P(z) = (z - 2az + a^2 + b^2)Q(z) + cz + d,$$

其中 $Q(z)$ 是具有实系数的多项式, 而且 c 和 d 是实数, 在此方程中令 $z = \alpha$, 得到 $c\alpha + d = 0$, 从而,

$$c\alpha + d = 0 \text{ 和 } icb = 0.$$

因为 $b \neq 0$, 所以 $c = 0$. 因此, $d = 0$.

3. (a) 用如下形式的圆周方程

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2.$$

则

$$z_0 = \frac{\alpha - \lambda^2 \beta}{1 - \lambda^2}, \quad r = \frac{\lambda |\alpha - \beta|}{|1 - \lambda^2|}.$$

若 $\lambda = 1$, $z = x + iy$, 方程成为直线方程, $ax + by = c$, 其中 $a = 2 \operatorname{Re}(\alpha - \beta)$, $b = 2 \operatorname{Im}(\alpha - \beta)$, $c = |\alpha|^2 - |\beta|^2$.

(b) 先将点变换反演求得

$$z = \frac{\beta - \delta z'}{\gamma z' - \alpha};$$

然后证明

$$|z - z_1| = \lambda |z - z_2|$$

变成

$$|z' - z'_1| = \lambda \left| \frac{\gamma z'_1 - \alpha}{\gamma z'_2 - \alpha} \right| |z' - z'_2|.$$

4. 对于 $x \geq 0$.

5. 用比较判别法

6. 对于 $n > 0$, 在 $\cos^2 z + \sin^2 z$ 的展开式中 z^n 的系数是

$$(-1)^{n/2} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu}{\nu! (n-\nu)!} = \frac{(-1)^{n/2}}{n!} \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} = 0$$

[参看第一卷第118页. 练习第1题(b)].

7. 此级数当且仅当 $|z| < 1$ 时收敛. 因为若 $|z| = \theta < 1$, 则

$$\left| \frac{z^\nu}{1 - z^\nu} \right| \leq \frac{\theta^\nu}{1 - \theta^\nu} \leq \frac{1}{1 - \theta} \theta^\nu.$$

因此我们可以与几何级数比较; 若 $|z| > 1$ 则当 ν 无限增加时

$\frac{z^\nu}{1 - z^\nu}$ 趋于 -1 , 但是在收敛级数中一般项必须趋于 0, 若 $|z| =$

1, 则级数 每一项不是没有定义就是绝对值 $\geq \frac{1}{2}$, 因此这时级数

不能收敛。

练习 8.2

1. 设 $f(z) = u + iv$, $g(z) = s + it$. 以取乘积为例, 对于

$$U(x, y) = \operatorname{Re}\{f(z)g(z)\} = us - vt$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im}\{f(z)g(z)\} = ut + vs.$$

我们得到

$$v_x = u_x s + u s_x - (v_x t + v t_x)$$

$$= v_y s + u t_y + u_y t + v s_y$$

$$= u t_y + u_y t + v_y s + v s_y = v_y,$$

等等。

2. 对于 $f(z) = u + iv$. 对 $u' + v' = \text{常数}$ 进行微商之后, 我们就得到一对方程

$$uu_x + vv_x = 0, \quad uu_y + vv_y = 0.$$

通过 Cauchy-Riemann 方程, 把第二个方程换成只含有关于 x 的微商, 我们得到只有以 $u_x = v_x = 0$ 为解的方程组, (除非 $u' = v' = 0$). 从而 $u_y = v_y = 0$, 因此结果成立。

3. (a) — (c) 到处连续; 不可微。

(d) 对 $z \neq 0$ 连续; 不可微。

4. 若 $z = re^{i\phi}$, $\zeta = \xi + in$, 则

$$\xi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \phi$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \phi.$$

若 $r = \text{常数} = c$, 则

$$\frac{\xi^2}{\frac{1}{4} \left(c + \frac{1}{c} \right)^2} + \frac{\eta^2}{\frac{1}{4} \left(c - \frac{1}{c} \right)^2} = 1;$$

若 $\phi = \text{常数} = c$, 则

$$\frac{\xi'}{\cos' c} + \frac{\eta'}{\cos' c - 1} = 1$$

(参看第 256 页第 8 题)。

5. 根据 8.1 节, 第 3 题 (b), 这变换将圆周映射到圆周. 因为两个点是不动的, 所以通过这两点的圆族在变换和它的反变换下都变换到同一圆族, 又因为映射是共形的, 所以圆族的正交族也变换为自身。

6. 设 $z = x + iy$, $\zeta = 1/z = \xi + i\eta$. 于是

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

我们将反演看作是复合映射 $gf(z)$, 其中 $f(z) = \frac{1}{z}$; $g(\zeta) = \bar{\zeta}$

是关于 x 轴的反射. 因为反射是角的大小保持, 符号改变, 所以是共形映射, 而 $1/z$ 是解析的, 角的大小与符号都保持不变, 故在乘积映射 $gf(z)$ 中, 角度不变而符号变了, 因此反演是共形映射. 反射把圆周映射到圆周, 而 $1/z$ 作为一般线性变换的特例 (参看第 5 题) 也同样把圆周映到圆周, 因此, 反演也是把圆周映射到圆周. 反演的 Jacobian 是反射的 Jacobian 和 $1/z$ 的 Jacobian 的乘积, 从而它的值是

$$-|f'(z)|^2 = -\frac{1}{|z|^4} = \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$7. |\zeta|^2 = \zeta\bar{\zeta} = \frac{\alpha\bar{\alpha}z\bar{z} + \beta\bar{\beta} + (\alpha\beta z + \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{z})}{\beta\bar{\beta}z\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} + (\alpha\beta z + \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{z})}.$$

现在对于 $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1$, 其分母和分子之差为

$$z\bar{z} - 1;$$

也就是当 $|z| > 1$ 时分母大于分子, 而 $|z| < 1$ 时分母小于分子. 如果 $\beta\bar{\beta} - \alpha\bar{\alpha} = 1$, 情形恰相反。

8. 首先, 通过 $\zeta = az + b$ 变换到单位圆; 然后应用变换

$$\zeta' = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}.$$

$$9. \text{用 } \zeta_i - \zeta_j = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z_i - z_j)}{(\gamma z_i + \delta)(\gamma z_j + \delta)}.$$

练习 8.3

1. (a) 将被积函数写成这样形式

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{3}{z+1} \right),$$

括号中的第一项在 $z = -1$ 邻域内解析; 因此, 沿着中心在 -1 的小圆它的积分为 0, 类似地, 其中第二项沿着中心在 1 的小圆积分是 0, 为了计算围绕 1 的圆周上的积分, 设 $z = re^{i\theta}$, 得到 πi , 类似地, 对于围绕 -1 的小圆, 积分值为 $3\pi i$,

(b) 取一路径一方面环绕 1 , 另一方面环绕 -1 . 但环绕前者的次数是环绕后者次数的 3 倍, 如图 8.12 所示.

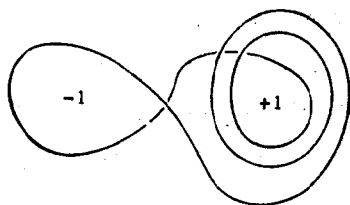


图 8.12

$$2. \alpha^z \cdot \alpha^\zeta = \exp[z(\log \alpha + 2\pi i)] \exp[\zeta(\log \alpha + 2m\pi i)], \text{ 而} \\ \alpha^{z+\zeta} = \exp[(z+\zeta)(\log \alpha + 2k\pi i)]$$

如果所用的对数始终是同一分支, 也就是 $n = m = k$, 这样指数的加法成立. 这是最理想的, 除了在很特殊情况下, 我们才能做到. 原因在于如果加法定理成立, 则

$$k(z + \zeta) = nz + m\zeta + P,$$

其中 P 是某个整数. 若 z 和 ζ 作为两个分量的向量时是线性无关的, 且 $n \neq m$, 则 $z = a + ib$ 和 $\zeta = \alpha + i\beta$ 的分量应受如下限制, 即

$$\frac{(m-n)(a\beta - \alpha b)}{\beta + b} = p$$

是一整数。而当 $n = m \neq k$ 时, 则要求 $\beta + b = 0$ 。这两个条件一般都不满足。对于第二个法则,

$$\begin{aligned} z^a \zeta^b &= \exp[\alpha(\log z + 2n\pi i)] \exp[\alpha(\log \zeta + 2m\pi i)] \\ &= \exp\{\alpha[\log z + \log \zeta + 2(n+m)\pi i]\} \end{aligned}$$

而

$$(z\zeta)^a = \exp\{\alpha[\log(z\zeta) + 2k\pi i]\}.$$

在此, 即使 $k = n + m$ 等式也未必成立。这是因为, 若 $z = re^{i\theta}$ 和 $\zeta = \rho e^{i\phi}$, 条件 $-\pi < \theta \leq \pi, -\pi < \phi \leq \pi$ 不一定使 $\theta + \phi$ 满足此不等式。

对于第三法则,

$$\begin{aligned} (\alpha^z)^\zeta &= e^{\zeta \log \alpha^z} \\ &= \exp\{\zeta[z(\log \alpha + 2n\pi i) + 2m\pi i]\} \\ &= \exp\{z\zeta \log \alpha + 2z\zeta n\pi i + 2\zeta m\pi i\}. \end{aligned}$$

类似地,

$$(\alpha^\zeta)^z = \exp(z\zeta \log \alpha + 2z\zeta p\pi i + 2zq\pi i)$$

和

$$\alpha^{z\zeta} = \exp(z\zeta \log \alpha + 2z\zeta r\pi i),$$

其中 m, n, p, q, r 是任意整数, 于是仅当 $m = q = 0$ 和 $n = p = r$ 时, 才有可能等式成立。

我们可以说理想情况是存在的, 挑选所涉及的多值函数的分支以使得指数法则成立, 但是在选择它们时, 我们应当小心谨慎。

3. (a) i^j 的值是 $\exp\left[\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi i\right]$, 其中 n 为任意整数。

(b) 设 $\zeta = \xi + in$, $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$ 和

$$a = \log r = \log |z|.$$

则

$$z^\zeta = \exp[a\xi - (\theta + 2k\pi)\eta] \exp\{i[a\eta + \xi(\theta + 2k\pi)]\}.$$

其条件是对于每一个整数 k 的选择, $a\eta + \xi(\theta + 2k\pi)$ 是 π 的整数倍, 取 $k = 0, 1$ 我们得到 $\xi = j/2$, 其中 j 是任意整数, 并因

此, 对于 $a \neq 0$ ($r \neq 1$)

$$\eta = \left(l\pi - \frac{1}{2} i\theta \right) / a.$$

其中 l 可以是任何整数, 于是, 对于一切不在单位圆上的 z 及每一对整数 j, l 存在一个指数 $\zeta(j, l)$ 使得 z^l 的所有值是实数. 如果 $a = 0$, 则以上加在 η 上的条件, 由条件 $\xi\theta = p\pi$ 代替, 其中 p 是任意整数而且 η 是任意的. 若 $p \neq 0$, 我们看到 $\theta = 2\pi p/j$ 必须是 2π 的有理数倍. 若 $p = 0$, ξ 应为 0, 因此 θ 可以任意.

(c) 是, 设 $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, 其中当 $x > 0$ 时, $y = \eta = 0$, 由 (b) 的解给出 $\xi = 1$, i 是任意整数. 当 $x < 0$, (b) 的解仅给出 $\xi = \eta$ 的整数值.

4. 对于 $z = x + iy$, 我们当然可以在积分号下对 x 和 y 进行微商, 因为所得的微商关于参数是连续的, 而且微商的积分在其下限 $t = 0$ 处的收敛性对于 $x > \varepsilon > 0$ 是一致的. 又由于被积函数满足 Cauchy-Riemann 方程, 因此积分之后还是满足的. 通过分部积分给出函数方程.

5. 应用在第一卷, 第552页中的定理, 判断此级数绝对收敛.

6. (a) 环绕小圆周积分的值, 当圆周逐渐变小时趋近于 0, 如果我们表示单位圆上的点 $z = e^{i\theta}$ 以及分别表示坐标轴上的点为 $z = x$ 和 $z = iy$ 则由 Cauchy 定理得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x} \right)^m x^{n-1} dx + i \int_0^{2\pi} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^m e^{in\theta} d\theta \\ &\quad - i \int_0^1 \left(iy + \frac{1}{iy} \right)^m \cdot (iy)^{n-1} dy \\ &= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x} \right)^m x^{n-1} dx + i \cdot 2^m \int_0^{2\pi} \cos^m \theta e^{in\theta} d\theta \\ &\quad - e^{i\pi(n-m)/2} \int_0^1 \left(-y + \frac{1}{y} \right)^m y^{n-1} dy; \end{aligned}$$

通过让方程的虚部相等, 我们得到

$$\begin{aligned}
2^m \int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \cos n \theta d\theta &= \sin \frac{\pi(n-m)}{2} \int_0^1 \left(-y + \frac{1}{y}\right)^m y^{n-1} dy \\
&= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi(n-m)}{2} \int_0^1 (1-\eta)^m \eta^{(n-m-1)/2} d\eta \\
&= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} (n-m) \right) B \left(m+1, \frac{n-m}{2} \right)
\end{aligned}$$

(参看第591页)。

练习8.4

1. 被积函数有对 z 的连续微商, 因此可以在积分号下求微商. 参看 1.86 节.

2. 容易看出

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) z^n}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

是 z 的解析函数, 通过在积分号下求微商, 并应用 Leibnitz 法则 (参看第一卷, 第216页), 我们求得 $h^{(\mu)}(z)$ 是

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^n \binom{\mu}{\nu} \nu! n \cdot (n-1) \cdots (n-\mu+\nu+1) \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}} \\
\cdot \frac{z^{n-\mu+\nu}}{\zeta^n} d\zeta = \frac{\mu!}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\mu-\nu} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}} \frac{z^{n-\mu+\nu}}{\zeta^n} d\zeta,
\end{aligned}$$

其中只有 $\mu - \nu \leq n$ 的项不为 0, 因为此外 $\binom{n}{\mu-\nu}$ 为 0. 另一方面, 当 $z=0$ 时, $\mu - \nu < n$ 的项为 0; 因此, 若 $\mu < n$, 则无非零项. 于是 $h^{(\mu)}(0) = 0$. 若 $\mu \geq n$, 只保留 $\mu - \nu = n$ 的项. 于是

$$h^{(\mu)}(0) = \frac{\mu!}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{\mu+1}} = f^{(\mu)}(0).$$

3. 根据 Cauchy-Riemann 方程, ν 的偏微商 ν_x 和 ν_y 是给定的; 具有这些微商的函数 ν 是存在的, 因为可积条件 $\nu_{xx} + \nu_{yy} = 0$ 被满足, [参看第105页公式 (75a, b)]. 因此除了一个附

加常数之外, v 被唯一地确定, 而且通过如下曲线积分给出

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (v_y dy + v_x dx) + c.$$

根据 Cauchy-Riemann 方程 v 也是位函数.

4. 在 $z = 1$ 为 πi ; 在 $z = -1$ 为 $3\pi i$ (8.3 节, 练习第 1 题).

5. 选取半径为 R , 中心在 O 点的圆周, $R = |\xi|$ 如此之大, 使得 $R > 2|z|$. 则

$$\left| \frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi} \right| = \frac{|z|}{|\xi|^2 |1 - z/\xi|} < \frac{2|z|}{R^2}.$$

由此得到积分的界限

$$|f(z) - f(0)| \leq 2M|z|/R,$$

再通过 R 趋于 ∞ 取极限.

$$6. |a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho,$$

其中 C 是半径为 ρ , 环绕原点的圆周.

7. 根据假设 $|a_n| > 0$, 因此,

$$(i) |p(z)| = |z|^n |a_n + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \dots + \frac{\alpha_0}{z^n}| > \frac{1}{2} |z|^n |a_n|$$

只要我们取

$$|z| > \max \left\{ 1, 2 \frac{|\alpha_{n-1}| + \dots + |\alpha_0|}{|a_n|} \right\};$$

事实上, 这时,

$$\left| a_n + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \dots + \frac{\alpha_0}{z^n} \right| \geq |a_n| - \left\{ \frac{|\alpha_{n-1}|}{|z|} + \dots + \frac{|\alpha_0|}{|z^n|} \right\}$$

$$\geq |\alpha_n| - \frac{|\alpha_n - 1| + \cdots + |\alpha_0|}{|z|} > \frac{|\alpha_n|}{2}.$$

现在, 因为 $P(z)$ 没有根, $f(z)$ 是在全平面有定义的, 又 $|z| > 1$ 所以

$$|f(z)| < \frac{2}{|\alpha_n||z|^n} < \frac{2}{|\alpha_n|}.$$

从而推出 $f(z)$ 是有界的, 因此 $f(z)$ 是常数. 根据上面不等式中的第一个, 我们有 $f(z) = 0$, 这与 $f(z) \cdot p(z) = 1$ 矛盾.

8. (a) — (b) f'/f 的留数在 α 点是 $2\pi i$. 设 $f(z) = (z - \alpha)^p \phi(z)$, 其中 ϕ 是解析的, $\phi(\alpha) \neq 0$ 而且 p 分别在 (a) 和 (b) 中表示零点的阶数 n 和极点阶数 $-m$. 则

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p\phi(z) + (z - \alpha)\phi'(z)}{(z - \alpha)\phi(z)}.$$

因此, Cauchy 积分公式指出 I 是

$$[p\phi(\alpha) + (z - \alpha)\phi'(\alpha)]/\phi(\alpha).$$

当 $z = \alpha$ 时, $I = p$.

(c) 应用留数定理 (第 902 页).

9. (a) 方程 $p(z) + \theta Q(z) = 0$ 的根的个数, 根据第 8 题, 是

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{p'(z) + \theta Q'(z)}{p(z) + \theta Q(z)} dz.$$

对于每一个 θ , $0 \leq \theta \leq 1$, 在 C 上任何一点处分母不为 0, 因此整个积分是 θ 的连续函数. 又因为它的值总是整数, 所以是常数, 因此对 $\theta = 0$ 和对 $\theta = 1$ 有同一个值.

(b) 若

$$|a| < r^3 - \frac{1}{r},$$

则 $r > 1$; 因此方程 $z^3 + 1 = 0$ 所有 3 个根都在圆周 $|z| = r$ 内部; 如果我们表示 $P(z) = z^3 + 1$, $\theta(z) = az$, 则在圆周 $|z| = r$ 上我们有

$$|\theta(z)| = |a|r < r^3 - 1 < |z^3 + 1| = |p(z)|.$$

10. 根据第7题(i)式中的 $|P(z)|$ 有下界, 围绕原点作半径充分大的圆周, 使在圆周的外头或上头不能有根, 应用在第7题(i)式中所用的估计方法, 我们求得

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z} + R(z),$$

其中余项 $R(z)$ 满足 $|R(z)| < M/|z|^2$, z 在半径 r 足够大的圆外. 取 r 充分大使得 P 的一切根都落在 $|z| = r$ 内部, 应用第8题(c)的结果, 根的个数等于如下半径为 r 的圆上的积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n + \frac{1}{2\pi i} \int R(z) dz.$$

又因为

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int R(z) dz \right| < \frac{M}{r},$$

所以当 $r \rightarrow \infty$ 时, 余项积分趋向于 0.

11.(a) 仿效第8题(a)的解法.

(b) 若根是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$, 又若极点位于 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, 并且它们分别有重数 n_1, n_2, \dots, n_j 和 m_1, m_2, \dots, m_k 则积分值为 $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \dots + n_j\alpha_j - m_1\beta_1 - m_2\beta_2 - \dots - m_k\beta_k$.

12. 因为 $f(z) = e^z$ 是到处解析的, $f'(z)/f(z) = 1$, 因此, 在任何一个半径无论多大的圆周上, 8(a) 中的积分必须是零, 从而 $f(z)$ 不可能有根.

练习8.5

1.(a) 在 α 的邻域中将函数展开为

$$f(z) = a_0 + a_1(z - \alpha) + \dots + a_{n-1}(z - \alpha)^{n-1} + \dots$$

和

$$g(z) = (z - \alpha)^{-n} [c_{-n} + c_{-n+1}(z - \alpha) + \dots + c_{-1}(z - \alpha)^{n-1} + \dots],$$

我们得到留数

$$2\pi i \sum_{v=0}^{n-1} a_v c_{-v-1}.$$

(b) 在上述的解中, 用 $c_k = 0$ 当 $k > -n$ 且

$$a_{n-1} = f^{(n-1)}(\alpha)/(n-1)!.$$

2. 假设 $f(z) = (z - \alpha)^2 \phi(z) = (y - \alpha)^2$

$$\times \left[\frac{f''(\alpha)}{2} + \frac{f'''(\alpha)}{6}(z - \alpha) + \cdots \right],$$

并确定 $1/\phi(z)$ 的展开式中一阶项系数。

$$3. (a) \pi/\sqrt{2}.$$

(b) 对于在 $e^{i\pi/4}$ 和 $e^{3\pi/4}$ 的留数应用第 2 题的结果得到

$3\pi/4\sqrt{2}$. 在此, 考虑到 $f(x) = (1+x^4)^2, f''(x) = 24x^2(1+x^4) + 32x^6$ 和 $f'''(x) = 48x(1+x^4) + 9 \cdot 32x^3$.

(c) 点 $z_k = \omega^{2k-1}$ 是被积函数的简单极点, ($k = 1, 2, \dots, 2n$), 其中 $\omega = e^{i\pi/2n}$ 是 1 的 $4n$ 次主方根. 当 $k \leq n$ 极点位于上半平面. 于是根据公式 (8.21b) 积分等于

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{2m}}{2n z_k^{2n-1}} = -\frac{\pi i}{n} \sum_{k=1}^n z_k^{2m+1},$$

其中我们应用了 $z_k^{2n} = -1$. 在这最后的和式中代入 z_k 的表达式, 我们得到 I 的几何级数形式, 然后求和得到结果.

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\pi i}{n \omega^{2m+1}} \sum_{k=1}^n [\omega^{4m+2}]^k = -\frac{\pi i \omega^{2m+1}}{n} \frac{1 - (\omega^{4m+2})^n}{1 - \omega^{4m+2}} \\ &= \frac{\pi}{n} \frac{2i}{\omega^{2m+1} - \omega^{-(2m+1)}} = \frac{\pi}{n \sin[\pi(2m+1)/2n]}. \end{aligned}$$

4. 公式右边是函数 $z^k/f(z)$ 除以 $2\pi i$ 的留数之和, 因此等于

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{z^k}{f(z)} dz,$$

其中积分路径是封闭所有根 α_v 在内的圆周. 但是, 这样的圆周当中心保持不动, 半径趋向无限大时, 积分值趋向于 0.

5. 因为 $x \cos x$ 是奇的而 $x \sin x$ 是偶的, 所以积分等于

$$\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + c^2} dx.$$

$ze^{iz}/2i(z^2 + c^2)$ 在上半平面的留数是 $\frac{1}{2} \pi e^{-|c|}$. 取

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

并在整个闭轨道 C 上积分, 此处 C 由 $-r$ 到 r 间的实轴与以此线段为直径的上半圆所组成. 我们只需证明在半圆上的积分随 $r \rightarrow \infty$ 而趋于 0, 我们求得半圆 ($0 \leq \theta \leq \pi$) 上的积分,

$$J = \int_0^\pi \frac{r^2 e^{i\theta} e^{-rs \sin \theta} e^{irc \cos \theta}}{r^2 e^{2i\theta} + c^2} d\theta.$$

选择 r 如此大使得 $|r^2 e^{2i\theta} + c^2| > \frac{1}{2} r^2$: 例如选 $r^2 > 2c^2$. 由此得到

$$|J| < 4 \int_0^{\pi/2} e^{-rs \sin \theta} d\theta < 4 \int_0^{\pi/2} e^{-2r\theta/\pi} d\theta < \frac{2\pi}{r}.$$

杂题8

1. $(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)$ 必须是实的.

2. 设 $\arg z$ 是 $z = r e^{i\theta}$ 的幅角; 也就是 $\arg z = \theta + 2n\pi$. 线段 $\vec{\alpha\beta}$ 与线段 $\vec{\pi\gamma}$ 之间的夹角是

$$\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} + 2p\pi,$$

其中 p 是整数. 由给定方程得知

$$\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = -\arg \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} + 2n\pi.$$

于是, 如果取连接 α 和 β 的线段为三角形的底边, 我们看看到底与两边的夹角大小相等符号相反. 反之, 底角的相等得出给定的方程.

$$3. \quad \Delta = \frac{(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_4)/(z_3 - z_4)}$$

必须是实的,这是因为如果 C 是过 z_1, z_2, z_3 三点的圆周,我们可以通过线性变换 $\zeta = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$ 将 C 变到实轴。(参看 8.2 节练习第 8 题). 根据 8.2 节练习第 9 题, Δ 是不变的,因此, z_4 的像与 z_1, z_2, z_3 的像落在同一圆周上的必要条件是它是实的,而这等价于 Δ 是实的.

4. 要证明的等价性是

$$\begin{aligned} & \sqrt{|z_1 - z_2||z_3 - z_4|} + \sqrt{|z_2 - z_3||z_1 - z_4|} \\ &= \sqrt{|z_1 - z_3||z_2 - z_4|} \end{aligned}$$

或

$$1 + \sqrt{\left| \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} \right|} = \sqrt{\left| \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} \right|}.$$

现在平方根下的表达式在线性变换下是不变的(参看 8.2 节练习第 8, 9 题). 如果通过适当的线性变换将圆周变为实轴, 我们只需证明关系

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

对直线上的四个点成立, 而这是显然的.

5. $\zeta = e^{iz}$ 取遍除了 $\zeta = 0$ 以外的一切值, 这从关系式 $e^{iz} = e^{-i}(\cos x + i \sin x)$ 容易看到. 现在我们应该选择 ζ 使得

$$c = \cos z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right);$$

这个二次方程总是有解

$$\zeta = c \pm \sqrt{c^2 - 1}.$$

并且这个解不等于零, 于是对应的 z 存在.

6. 参看第 5 题. 若 $\zeta = e^{iz}$, 则

$$\tan z = \frac{1}{i} \frac{\zeta - (1/\zeta)}{\zeta + (1/\zeta)} = c$$

或

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 + ic}{1 - ic}};$$

仅当 $c \neq \pm i$ 时, 存在有限值 $\zeta \neq 0$; 因此, $\tan z = c$, 当 c 既

不等于 i 又不等于 $-i$ 时,有唯一解。

7. 若 $z = x + iy$, 当 $x = n\pi$ 或 $y = 0$ 时 $\cos z$ 是实的, 而当 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 或 $y = 0$ 时 $\sin z = 0$ (其中 n 是整数)。

8. (a) $r = 1$ (当 $|z| > 1$ 各项趋于 ∞ ; 当 $|z| < 1$ 与几何级数比较)。

(b) $r = 0$ 。

(c) $r = 1$ 。

9. (a) 在上半圆上积分 $e^{iz}/(1+z^2)$:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}/2} \left(\sin \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

(b) 在上半圆上积分 $z^2 e^{iz}/(1+z^2)$:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}/2} \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

(c) 在上半圆上积分 $e^{iz}/(q^2 + z^2)$:

$$\frac{\pi}{2q} e^{-q}$$

(d) 以原点为中心的大圆周和沿正实轴的割痕围成一个区域, 在此区域上积分

$$z^{a-1}/[(x+1)(x+2)];$$

$$\frac{\pi(2^{a-1}-1)}{\sin \pi a}.$$

10. (a) $+2\pi i$ 在 $z = 2n\pi$,

$-2\pi i$ 在 $z = (2n+1)\pi$,

(b) $+2\pi i$ 在 $z = 2n\pi + 3\pi/2$,

$-2\pi i$ 在 $z = 2n\pi + \pi/2$,

(c) 应用函数方程 $\Gamma(z) = \Gamma(z+\nu+1)/$

$$z(z+1)\cdots(z+\nu);$$

$$\frac{(-1)^n}{n!} 2\pi i \text{ 在 } z = -n.$$

(d) $2\pi i$ 在 $z = n\pi$ 。

$$\begin{aligned}
 11. \quad |\sinh(x+iy)|^2 &= \left(\frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{2} \right) \left(\frac{e^{x-iy} - e^{-x+iy}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (\cosh 2x - \cos 2y) \\
 &\geq \frac{1}{2} (\cosh 2x - 1).
 \end{aligned}$$

沿着以 $x = \pm\pi(n + \frac{1}{2})$ 和 $y = \pm(n + \frac{1}{2})$ 为边的矩形的边界积分, 其中 n 是整数, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 此积分趋向于 0; 因此, 留数的和趋向于零.

$$12. \frac{\cos \pi t}{t-z} = \frac{\cot \pi t}{t} + \frac{z \cot \pi t}{t(t-z)};$$

$\cot \pi t$ 在矩形 c_n 上有界, 而 $(\cot \pi t)/t$ 在此矩形这一对边和另一对边上的积分几乎抵消了; 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{c_n} \frac{\cot \pi t}{t-z} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{c_n} \frac{z \cot \pi t}{t(t-z)} dt = 0.$$

如果我们将大小相等符号相反的极点的留数放在一起, 则留数的和收敛, 从而我们得到

$$\cot \pi x = \frac{2x}{\pi} \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-2^2} + \cdots \right)$$

(参看第一卷, 第 634 页).

$$13. \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots \pm t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

因此,

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots \pm \frac{z^n}{n} + R_n,$$

其中

$$R_n = (-1)^n \int_0^z \frac{t^n}{1+t} dt.$$

如果我们令 $z = e^{i\theta}$ 并取从 0 到 $e^{i\theta}$ 的直线作为积分路径, 当 $e^{i\theta} \neq -1$, 我们有

$$|R_n| = \left| \int_0^1 \frac{t^n}{1 + e^{i\theta} t} dt \right| \leq \frac{1}{m} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{m(n+1)}.$$

因此, 如果 $z = e^{i\theta} \neq -1$, 则 R_n 趋近于 0.

14. 若 $x \neq 0$ 和 C' 是包含 y 而不包含 0 的围道, 并且如果 f 在此围道所界的区域内是正则的, 依照第 898 页, 则有

$$\frac{d^n}{dy^n} \frac{yf(y)}{(y-a)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C'} \frac{tf(t)}{(t+a)^{n+1}(t-y)^{n+1}} dt.$$

如果我们令 $a = y = \sqrt{x}$, 则后一个积分成为

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{C'} \frac{tf(t)}{(t^2-x)^{n+1}} dt.$$

因此, 如果我们作变换 $t^2 = \tau$, 此积分便成为

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\sqrt{\tau})}{(\tau-x)^{n+1}} d\tau,$$

其中 C 是包含 x 但不包含 0 的围道; 于是积分等于

$$\frac{1}{2} \frac{d^n}{dx^n} f(\sqrt{x}).$$

$$15. (a) f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2v-1)^z} - \frac{1}{(2v)^z} \right);$$

现在

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2v-1)^z} - \frac{1}{(2v)^z} &= z \int_{2v-1}^{2v} \frac{1}{y^{z+1}} dy \\ &\leq \frac{|z|}{|(2v-1)^{z+1}|} = \frac{|z|}{(2v-1)^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

而当 $x > 0$, 级数 $\sum_v 1/(2^v-1)^{1+\alpha}$ 是绝对收敛的.

$$(b) (1-2^{1-z})\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots$$

$$- \frac{2}{2^z} - \frac{2}{4^z} - \frac{2}{6^z} - \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \dots = f(z).$$

$$\begin{aligned}
 (\text{c}) \quad \lim_{s \rightarrow 1} (z-1)\zeta(z) &= f(1) \cdot \lim_{s \rightarrow 1} \frac{z-1}{1-2^{1-s}} \\
 &= \frac{f(1)}{g'(1)} = 1,
 \end{aligned}$$

其中

$$g(x) = 1 - 2^{1-x}.$$