概率论与数理统计

庄玮玮
weizh@ustc.edu.cn

安徽 合肥

2020 年 3 月

第三章　随机变量的数字特征

§3.1 数学期望

§3.1 数学期望

随机变量的分布函数或概率密度描述了随机变量的统计性质，从中可以了解随机变量落入某个区间的概率，但是还不能给人留下更直接的总体印象. 例如用X表示某计算机软件的使用寿命，当知道X服从指数分布$\mathcal{E}(\lambda)$后，我们还不知道该软件的平均使用寿命是多少.

这里的平均使用寿命应当是一个常数. 我们需要为随机变量X 定义一个平均值，这就是数学期望,它反映随机变量的平均取值.

§3.1　数学期望

§3.1　数学期望

随机变量的分布函数或概率密度描述了随机变量的统计性质，从中可以了解随机变量落入某个区间的概率，但是还不能给人留下更直接的总体印象. 例如用X表示某计算机软件的使用寿命，当知道X服从指数分布$\mathcal{E}(\lambda)$后，我们还不知道该软件的平均使用寿命是多少.

这里的平均使用寿命应当是一个常数. 我们需要为随机变量X 定义一个平均值，这就是数学期望,它反映随机变量的平均取值.

§3.1 数学期望

例3.1.1 甲每次投资成功的概率为70%，失败的概率为30%．假设每次投资成功将获利3万元，投资失败将损失1万元，下次投资时甲期望赢利多少？

解 在以后的n次独立重复的投资中，甲大约有$0.7n$次获利3万元，大约有$0.3n$次损失1万元，每次投资平均获利是

$$\frac{3\times 0.7n-1\times 0.3n}{n}=3\times 0.7-1\times 0.3=1.8.$$

于是，甲下次投资期望获利1.8万元．

§3.1　数学期望

例3.1.1　甲每次投资成功的概率为70%，失败的概率为30%．假设每次投资成功将获利3万元，投资失败将损失1万元，下次投资时甲期望赢利多少？

解　在以后的n次独立重复的投资中，甲大约有$0.7n$次获利3万元，大约有$0.3n$次损失1万元，每次投资平均获利是

$$\frac{3\times 0.7n-1\times 0.3n}{n}=3\times 0.7-1\times 0.3=1.8.$$

于是，甲下次投资期望获利1.8万元．

§3.1 数学期望

在上面的例子中，甲的期望值是多次投资的平均收益. 如果用随机变量

$$X=\begin{cases}3, & \text{当投资成功},\\ -1, & \text{当投资失败}\end{cases}$$

描述甲的投资情况，则称1.8是X的数学期望. 用$\mathrm{E}(X)$表示X的数学期望时，有

$$\mathrm{E}(X)=3P(X=3)+(-1)P(X=-1)=1.8.$$

例3.1.1中，数学期望指多次独立重复投资时，每次投资的平均收益.

§3.1　数学期望

例3.1.2　一个班有$m=180$个学生，期中考试后有 m_j 个人的成绩是 j 分 $(0\leqslant j\leqslant 100)$. 成绩是$j$分的学生所占的比例是$p_j=m_j/m$. 用向量

$$(p_0, p_1, p_2, \cdots, p_{100}) \qquad (3.1.1)$$

表示这个班期中成绩的分布，称为总体分布. 用 x_i 表示第 i 个学生的成绩，则期中考试的全班平均分是

$$\mu \equiv \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{100} j\cdot m_j = \sum_{j=0}^{100} jp_j. \qquad (3.1.2)$$

在统计学中，称全班的分数构成的集合$\{x_i \mid 1\leqslant i\leqslant m\}$为总体，称总体的平均$\mu$为总体平均，而总体的分布(3.1.1)恰好是总体分布.

§3.1　数学期望

例3.1.2　一个班有$m=180$个学生，期中考试后有 m_j 个人的成绩是 j 分 $(0\leqslant j\leqslant 100)$. 成绩是$j$分的学生所占的比例是$p_j=m_j/m$. 用向量

$$(p_0,p_1,p_2,\cdots,p_{100}) \qquad (3.1.1)$$

表示这个班期中成绩的分布，称为总体分布. 用 x_i 表示第 i 个学生的成绩，则期中考试的全班平均分是

$$\mu\equiv\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{100}j\cdot m_j=\sum_{j=0}^{100}jp_j. \qquad (3.1.2)$$

在统计学中，称全班的分数构成的集合$\{x_j\,|\,1\leqslant j\leqslant m\}$为总体，称总体的平均$\mu$为总体平均，而总体的分布(3.1.1)恰好是总体分布.

§3.1 数学期望

现在从班中任选一人，用X表示他的期中成绩，则X有概率分布

$$p_j = P(X = j) = \frac{m_j}{m}, \ 0 \leqslant j \leqslant 100. \qquad (3.1.3)$$

因为X是从总体$\{x_j \mid 1 \leqslant j \leqslant m\}$中随机抽样得到的，所以把$X$的数学期望定义成总体平均$\mu$. 用 $\mathrm{E}(X)$ 表示 X 的数学期望时，有

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum_{j=0}^{100} j p_j.$$

§3.1　数学期望

现在从班中任选一人，用X表示他的期中成绩，则X有概率分布

$$p_j = P(X = j) = \frac{m_j}{m},\ 0 \leqslant j \leqslant 100. \qquad (3.1.3)$$

因为X是从总体$\{x_j \mid 1 \leqslant j \leqslant m\}$中随机抽样得到的，所以把$X$的数学期望定义成总体平均$\mu$. 用 $\mathrm{E}\,(X)$ 表示 X 的数学期望时，有

$$\mathrm{E}\,(X) = \mu = \sum_{j=0}^{100} j p_j.$$

§3.1 数学期望

在例3.1.2中, X 的数学期望是总体平均.

设想在班里有放回地独立重复随机选取N次. 当N充分大, 因为得j分的学生被选到的概率是p_j, 所以被选到的次数大约是Np_j. 这N次随机选择得到的平均分大约是

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{100} j \cdot Np_j = \sum_{j=0}^{100} jp_j = \mathrm{E}(X).$$

为此, 我们也称$\mathrm{E}(X)$是在班里任选一人时, 期望得到的分数.

§3.1 数学期望

在例3.1.2中, X 的数学期望是总体平均.

设想在班里有放回地独立重复随机选取N次. 当N充分大, 因为得j分的学生被选到的概率是p_j, 所以被选到的次数大约是Np_j. 这N次随机选择得到的平均分大约是

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{100} j\cdot Np_j=\sum_{j=0}^{100} jp_j=\mathrm{E}\,(X).$$

为此, 我们也称$\mathrm{E}\,(X)$是在班里任选一人时, 期望得到的分数.

§3.1 数学期望

A. 数学期望的定义

下面引入随机变量的数学期望的定义.

定义3.1.1 设X有概率分布

$$p_j = P(X = x_j),\ j = 0, 1, \cdots,$$

如果$\sum_{j=0}^{\infty} |x_j| p_j < \infty$, 则称$X$的数学期望存在, 并且称

$$\mathrm{E}\,(X) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j p_j \qquad (3.1.4)$$

为X或分布$\{p_j\}$的数学期望(Expected value).

§3.1 数学期望

在定义3.1.1中，要求$\sum_{j=0}^{\infty}|x_j|p_j < \infty$ 的原因是要使(3.1.4)中的级数有确切的意义. 当所有的x_j非负时，如果(3.1.4)中的级数是无穷，则由(3.1.4)定义的 $\mathrm{E}(X)$ 也有明确的意义，它表明 X 的平均取值是无穷. 这时称 X 的数学期望是无穷.

在定义3.1.1中，将 p_j 视为 $\{p_i\}$ 在横坐标 x_j 处的质量，由

$$\sum_{j=1}^{\infty}(x_j-\mu)p_j = \sum_{j=1}^{\infty}x_jp_j - \mu = 0,$$

知道 $\{p_i\}$ 的重心是 μ. 所以X的数学期望 $\mathrm{E}(X)$ 还是其概率分布 $\{p_i\}$ 的重心.

§3.1 数学期望

在定义3.1.1中，要求$\sum_{j=0}^{\infty}|x_j|p_j<\infty$的原因是要使(3.1.4)中的级数有确切的意义. 当所有的x_j非负时，如果(3.1.4)中的级数是无穷，则由(3.1.4)定义的$\mathrm{E}(X)$也有明确的意义，它表明X的平均取值是无穷. 这时称X的数学期望是无穷.

在定义3.1.1中，将p_j视为$\{p_i\}$在横坐标x_j处的质量，由

$$\sum_{j=1}^{\infty}(x_j-\mu)p_j=\sum_{j=1}^{\infty}x_jp_j-\mu=0,$$

知道$\{p_i\}$的重心是μ. 所以X的数学期望$\mathrm{E}(X)$还是其概率分布$\{p_i\}$的重心.

§3.1 数学期望

对于有概率密度 $f(x)$ 的连续型随机变量X, 我们也用 $f(x)$ 和横轴所夹面积的几何重心定义 X 的数学期望. 设 μ 是所述的重心, 如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \tag{3.1.5}$$

则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x - \mu = 0.$$

于是$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 是所述的重心.

§3.1 数学期望

定义3.1.2 设 X 是有概率密度 $f(x)$ 的随机变量，如果(3.1.5)成立，则称X的数学期望存在，并且称

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (3.1.6)$$

为X或$f(x)$的数学期望.

和离散时的情况一样，在定义3.1.2中要求条件 (3.1.5) 的原因是要使 (3.1.6) 中的积分有确切的意义. 当 X 非负时，如果 (3.1.6) 等于无穷，则由 (3.1.6) 定义的 $\mathrm{E}(X)$ 也有明确的意义，它表明 X 的平均取值是无穷. 这时称 X 的数学期望是无穷.

由于随机变量的数学期望由随机变量的概率分布唯一决定，所以也可以对概率分布定义数学期望. 概率分布的数学期望就是以它为概率分布的随机变量的数学期望. 有相同分布的随机变量必有相同的数学期望.

§3.1 数学期望

定义3.1.2 设 X 是有概率密度 $f(x)$ 的随机变量，如果(3.1.5)成立，则称X的数学期望存在，并且称

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (3.1.6)$$

为X或$f(x)$的**数学期望**.

和离散时的情况一样，在定义3.1.2中要求条件 (3.1.5) 的原因是要使 (3.1.6) 中的积分有确切的意义. 当 X 非负时，如果 (3.1.6) 等于无穷，则由 (3.1.6) 定义的 $\mathrm{E}(X)$ 也有明确的意义，它表明 X 的平均取值是无穷. 这时称 X 的数学期望是无穷.

由于随机变量的数学期望由随机变量的概率分布唯一决定，所以也可以对概率分布定义数学期望. 概率分布的数学期望就是以它为概率分布的随机变量的数学期望. 有相同分布的随机变量必有相同的数学期望.

§3.1 数学期望

例3.1.3 17世纪曾有人向帕斯卡请教如下的问题: 两个赌博水平相当的人各出50法郎作赌注, 并约定五局三胜者获得这100法郎. 前三局中甲赢了2局, 乙赢了1局, 这时因故要中止赌博, 问应当怎样合理分配这100法郎.

解 下面是帕斯卡的回答. 设想赌博可以继续下去, 再赌两局必出结果, 这两局的结果只能是以下四个事件之一:

$$甲乙,\quad 乙甲,\quad 甲甲,\quad 乙乙,$$

其中的"甲乙"表示第一局甲胜, 第二局乙胜; "乙甲"表示第一局乙胜, 第二局甲胜; ······. 这4个事件发生的可能性相同. 因为甲在前3局中赢了2局, 所以只有"乙乙"发生时, 甲获得0法郎, 否则甲获得100法郎. 用 X 表示甲应当分到的赌资, 按照以上分析有

$$P(X=0)=P(乙乙)=\frac{1}{4},\quad P(X=100)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

§3.1　数学期望

例3.1.3　17世纪曾有人向帕斯卡请教如下的问题：两个赌博水平相当的人各出50法郎作赌注，并约定五局三胜者获得这100法郎. 前三局中甲赢了2局，乙赢了1局，这时因故要中止赌博，问应当怎样合理分配这100法郎.

解　下面是帕斯卡的回答. 设想赌博可以继续下去，再赌两局必出结果，这两局的结果只能是以下四个事件之一：

$$\text{甲乙},\quad \text{乙甲},\quad \text{甲甲},\quad \text{乙乙},$$

其中的"甲乙"表示第一局甲胜，第二局乙胜；"乙甲"表示第一局乙胜，第二局甲胜；$\cdots\cdots$. 这4个事件发生的可能性相同. 因为甲在前3局中赢了2局，所以只有"乙乙"发生时，甲获得0法郎，否则甲获得100法郎. 用 X 表示甲应当分到的赌资，按照以上分析有

$$P(X=0)=P(\text{乙乙})=\frac{1}{4},\quad P(X=100)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

§3.1 数学期望

于是甲期望分得的赌资是

$$\mathrm{E}\,(X) = 0 + 100 \times \frac{3}{4} = 75(\text{法郎}).$$

这个例子也是“数学期望”的来源之一.

在例3.1.3中, 认为甲应当分得赌资的2/3是不合理的. 因为按照这个逻辑, 甲赢第一局就因故停止赌博时, 甲将获得全部的赌资.

§3.1 数学期望

于是甲期望分得的赌资是

$$\mathrm{E}(X) = 0 + 100 \times \frac{3}{4} = 75(\text{法郎}).$$

这个例子也是“数学期望”的来源之一.

在例3.1.3中，认为甲应当分得赌资的2/3是不合理的. 因为按照这个逻辑，甲赢第一局就因故停止赌博时，甲将获得全部的赌资.

§3.1　数学期望

例3.1.4　在澳门赌场，有很多人在赌廿一点时顺便押对子. 其规则如下：庄家从6副(每副52张)扑克中随机发给你两张. 如果你下注a元，当得到的两张牌是一对时，庄家赔你十倍，否则输掉你的赌注. 如果你下注100元，你在每局中期望赢多少元?

解　用X表示你在一局中的获利，$a = 100$. 则

$$P(X = 10a) = \frac{13\mathrm{C}_{4\times 6}^2}{\mathrm{C}_{52\times 6}^2} = 0.074, \quad P(X = -a) = 1 - 0.074,$$

于是，你期望赢

$$\mathrm{E}(X) = 10a \cdot 0.074 - a \cdot (1 - 0.074) = -0.186a = -18.6(\text{元}).$$

当只使用一副扑克，可以计算出你每局期望赢 -35.29元.

§3.1　数学期望

例3.1.4　在澳门赌场，有很多人在赌廿一点时顺便押对子. 其规则如下：庄家从6副(每副52张)扑克中随机发给你两张. 如果你下注a元，当得到的两张牌是一对时，庄家赔你十倍，否则输掉你的赌注. 如果你下注100元，你在每局中期望赢多少元？

解　用X表示你在一局中的获利，$a = 100$. 则

$$P(X = 10a) = \frac{13\mathrm{C}_{4\times 6}^{2}}{\mathrm{C}_{52\times 6}^{2}} = 0.074, \quad P(X = -a) = 1 - 0.074,$$

于是，你期望赢

$$\mathrm{E}\,(X) = 10a \cdot 0.074 - a \cdot (1 - 0.074) = -0.186a = -18.6(\text{元}).$$

当只使用一副扑克，可以计算出你每局期望赢 -35.29元.

§3.1 数学期望

例3.1.5 某个E-mail地址收到相邻的E-mail的时间间隔是独立同分布的随机变量，都服从参数为 $\lambda = 0.8\,\mathrm{h}$的指数分布.

(1) 计算两个E-mail之间的平均间隔时间;

(2) 计算从 t 开始对于下一个E-mail的平均等待时间.

解 (1)用 X 表示两个E-mail的间隔时间. 根据题意知 $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, 有概率密度 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$. 平均间隔时间是

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{0.8} = 1.25(\,\mathrm{h}).$$

(2) 由于指数分布具有无记忆性，所以从时刻t开始，需要等待的时间和X同分布，因而也平均需要等待1.25 h.

§3.1　数学期望

例3.1.5　某个E-mail地址收到相邻的E-mail的时间间隔是独立同分布的随机变量，都服从参数为 $\lambda = 0.8\,\mathrm{h}$的指数分布．

(1)　计算两个E-mail之间的平均间隔时间；

(2)　计算从 t 开始对于下一个E-mail的平均等待时间．

解　(1)用 X 表示两个E-mail的间隔时间．根据题意知 $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$，有概率密度 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$，$\lambda > 0$．平均间隔时间是

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{0.8} = 1.25(\,\mathrm{h}).$$

(2)　由于指数分布具有无记忆性，所以从时刻t开始，需要等待的时间和X同分布，因而也平均需要等待1.25 h．

§3.1 数学期望

例3.1.5 某个E-mail地址收到相邻的E-mail的时间间隔是独立同分布的随机变量，都服从参数为 $\lambda = 0.8\,\mathrm{h}$的指数分布.

(1) 计算两个E-mail之间的平均间隔时间;

(2) 计算从 t 开始对于下一个E-mail的平均等待时间.

解 (1)用 X 表示两个E-mail的间隔时间. 根据题意知 $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, 有概率密度 $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$. 平均间隔时间是

$$\mathrm{E}\,(X) = \int_0^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{0.8} = 1.25(\,\mathrm{h}).$$

(2) 由于指数分布具有无记忆性，所以从时刻t开始，需要等待的时间和X同分布，因而也平均需要等待$1.25\,\mathrm{h}$.

§3.1　数学期望

B. 数学期望的统计含义

在例3.1.4中，设甲下注n次，每次下注a元. 如果用N_a表示他下注n次得到的“对子数”，则根据概率的频率定义知道，当$n \to \infty$时，

$$\frac{N_a}{n} \to P(X_1 = 10a) = 0.074,$$

$$\frac{n - N_a}{n} \to P(X_1 = -a) = 1 - 0.074 = 0.926.$$

§3.1 数学期望

用X_i表示他第i次下注的收益，则他独立重复下注n次的平均收益是

$$
\begin{aligned}
\overline{X}_n &= \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \\
&= \frac{10aN_a - a(n - N_a)}{n} \\
&= 10a\frac{N_a}{n} - a\frac{n - N_a}{n} \\
&\to 10a \times 0.074 - a \times (1 - 0.074) \\
&= \mathrm{E}(X_1).
\end{aligned}
$$

§3.1 数学期望

以上例子说明，当试验次数增加时，独立重复试验的结果的平均收敛到总体分布的平均. 或者说，当 $n \to \infty$，独立同分布的随机变量的平均 $\overline{X}_n$ 收敛到随机变量的数学期望 $\mathrm{E}(X_1) = \mu$.

对于连续型的随机变量，也有相同的结论. 在例3.1.5中，两个E-mail的间隔时间有数学期望 $\mathrm{E}(X) = 1.25$. 用计算机产生 10^7 个独立同分布的都服从指数分布 $\mathcal{E}(0.8)$ 的随机变量的观测值，利用前 n 个观测值计算的平均数 $\overline{x}_n$ 如下:

n	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
$\overline{x}_n$	1.0439	1.4126	1.3001	1.2531	1.2553	1.2506	1.2501

计算结果支持结论: $\overline{X}_n \to \mathrm{E}(X)$.

§3.2　常用的数学期望

§3.2　常用的数学期望

数学期望的符号 E 在概率论和统计学中是最常用的符号. 为了简化, 在不引起混淆的情况下, 经常将 E 后面的括号(　)省略. 例如将 $\mathrm{E}(X)$ 写成 $\mathrm{E}X$, 将 $\mathrm{E}(X^2)$ 写成 $\mathrm{E}X^2$等.

下面是实际中常用分布的数学期望及其计算.

§3.2 常用的数学期望

(1) 伯努利分布$\mathcal{B}(1,p)$: 设$X \sim \mathcal{B}(1,p)$, 则

$$\mathrm{E}\,X = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p.$$

又设A是事件, $\mathrm{I}[A]$是A的示性函数, 即

$$\mathrm{I}[A] = \begin{cases} 1, & \text{当}A\text{发生}, \\ 0, & \text{当}A\text{不发生}, \end{cases}$$

则 $\mathrm{I}[A]$ 服从伯努利分布, 且 $P(\mathrm{I}[A]=1) = P(A)$. 于是

$$\mathrm{E}\,\mathrm{I}[A] = P(\mathrm{I}[A]=1) = P(A).$$

(2) 二项分布$\mathcal{B}(n,p)$: 设 $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, 则 $\mathrm{E}\,X = np$.

§3.2 常用的数学期望

(1) 伯努利分布$\mathcal{B}(1,p)$: 设$X \sim \mathcal{B}(1,p)$, 则

$$\mathrm{E}\,X = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p.$$

又设A是事件, $\mathrm{I}[A]$是A的示性函数, 即

$$\mathrm{I}[A] = \begin{cases} 1, & \text{当}A\text{发生}, \\ 0, & \text{当}A\text{不发生}, \end{cases}$$

则 $\mathrm{I}[A]$ 服从伯努利分布, 且 $P(\mathrm{I}[A]=1) = P(A)$. 于是

$$\mathrm{E}\,\mathrm{I}[A] = P(\mathrm{I}[A]=1) = P(A).$$

(2) 二项分布$\mathcal{B}(n,p)$: 设 $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, 则 $\mathrm{E}\,X = np$.

§3.2 常用的数学期望

证明 设$q=1-p$, 由

$$p_j=P(X=j)=\mathrm{C}_n^j p^j q^{n-j},\ 0\leqslant j\leqslant n,$$

得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}X &= \sum_{j=0}^{n} j\mathrm{C}_n^j p^j q^{n-j} \\
&= np\sum_{j=1}^{n}\mathrm{C}_{n-1}^{j-1}p^{j-1}q^{n-j} \quad [\text{用}\ j\mathrm{C}_n^j=n\mathrm{C}_{n-1}^{j-1}] \\
&= np\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}p^{k}q^{n-1-k} \qquad [\text{取}\ k=j-1] \\
&= np(p+q)^{n-1}=np.
\end{aligned}$$

$\mathrm{E}X=np$ 说明单次试验成功的概率p越大, 则在n次独立重复试验中, 平均成功的次数越多.

§3.2　常用的数学期望

(3) 泊松分布$\mathcal{P}(\lambda)$: 设 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, 则 $\mathrm{E}\,X = \lambda$.

证明　由

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ k = 0, 1, \cdots,$$

得到

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda.$$

说明参数 λ 是泊松分布 $\mathcal{P}(\lambda)$ 的数学期望. 回忆: 因为7.5 s 内放射性钋平均放射出3.87个 α 粒子, 所以当时认为7.5 s 内释放出的粒子数 $X \sim \mathcal{P}(3.87)$.

§3.2 常用的数学期望

(4) 几何分布: 设X服从参数为p的几何分布, 则$\mathrm{E}\,X = 1/p$.

证明 由

$$P(X=j) = pq^{j-1},\ j = 1, 2, \cdots$$

得到

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,X &= \sum_{j=1}^{\infty} jpq^{j-1} \\ &= p\Big(\sum_{j=0}^{\infty} q^j\Big)' \\ &= p\Big(\frac{1}{1-q}\Big)' \\ &= \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

结论说明单次试验中的成功概率p越小, 首次成功所需要的平均试验次数就越多.

§3.2 常用的数学期望

(5) 指数分布$\mathcal{E}(\lambda)$: 设$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, 则$\mathrm{E}\,X = 1/\lambda$.

证明 因为 X 有概率密度

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x},\ x \geqslant 0,$$

所以

$$\mathrm{E}\,X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}.$$

§3.2 常用的数学期望

定理3.2.1 设X的数学期望有限，概率密度 $f(x)$ 关于 c 对称：$f(c+x)=f(c-x)$，则 $\mathrm{E}X=c$.

证明 这时$g(t)=tf(t+c)$是奇函数：$g(-t)=-g(t)$. 因为 $g(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 中的积分等于0，所以有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} cf(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)f(x-c+c)\,\mathrm{d}x \\
&= c + \int_{-\infty}^{\infty} tf(t+c)\,\mathrm{d}t \\
&= c + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= c.
\end{aligned}
$$

§3.2　常用的数学期望

定理3.2.1的结论是自然的,因为只要$f(x)$关于c对称，则c就是曲线$f(x)$和x轴所夹面积的几何重心的横坐标.

根据概率密度的对称性和定理3.2.1马上得到如下的推论.

推论3.2.2　正态分布$N(\mu, \sigma^2)$的数学期望是μ，均匀分布$\mathcal{U}(a, b)$ 的数学期望是 $(a+b)/2$.

§3.3 数学期望的计算

§3.3 数学期望的计算

如果 $P(X \geqslant 0) = 1$, 则 X 是非负随机变量. 对于非负的随机变量 X, 无论其数学期望 $\mathrm{E}X$ 是否无穷, 都可以直接计算 $\mathrm{E}X$.

为了方便计算随机变量函数的数学期望, 再介绍下面的定理.

§3.3 数学期望的计算

定理3.3.1 设X, Y是随机变量, $\mathrm{E}\,g(X)$, $\mathrm{E}\,h(X,Y)$ 存在.

(1) 若X有概率密度$f(x)$, 则

$$\mathrm{E}\,g(X)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.3.1}$$

(2) 若(X,Y)有联合密度$f(x,y)$, 则

$$\mathrm{E}\,h(X,Y)=\iint_{\mathrm{R}^2}h(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.3.2}$$

(3) 若X是非负随机变量, 则

$$\mathrm{E}\,X=\int_0^{\infty}P(X>x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.3.3}$$

§3.3　数学期望的计算

使用定理3.3.1计算随机向量函数的数学期望有很多方便，最主要的是不再需要推导随机变量$g(X)$或$g(X,Y)$的概率分布.

例3.3.1　设X在$(0,\pi/2)$上均匀分布，计算$\mathrm{E}(\cos X)$.

解　X有概率密度$f(x)=2/\pi$, $x\in(0,\pi/2)$.

$$\mathrm{E}\cos X=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

§3.3 数学期望的计算

使用定理3.3.1计算随机向量函数的数学期望有很多方便，最主要的是不再需要推导随机变量$g(X)$或$g(X,Y)$的概率分布.

例3.3.1 设X在$(0,\pi/2)$上均匀分布，计算 $\mathrm{E}(\cos X)$.

解 X 有概率密度 $f(x)=2/\pi,\ x\in(0,\pi/2)$.

$$\mathrm{E}\cos X=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

§3.3 数学期望的计算

使用定理3.3.1计算随机向量函数的数学期望有很多方便，最主要的是不再需要推导随机变量$g(X)$或$g(X,Y)$的概率分布.

例3.3.1 设X在$(0,\pi/2)$上均匀分布，计算 $\mathrm{E}(\cos X)$.

解 X 有概率密度 $f(x)=2/\pi,\ x\in(0,\pi/2)$.

$$\mathrm{E}\cos X=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

§3.3 数学期望的计算

例3.3.2 设 X, Y 独立, 都服从标准正态分布, 计算 $\mathrm{E}(X^2+Y^2)$.

解 (X,Y) 有联合密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right),$$

在积分中采用变换$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2+Y^2) &= \iint_{\mathrm{R}^2}(x^2+y^2)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}r^3\exp(-r^2/2)\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\infty}r^3\exp(-r^2/2)\,\mathrm{d}r \qquad [\text{取}t=r^2/2] \\
&= 2\int_0^{\infty}t\exp(-t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\Gamma(2)=2\cdot(2-1)!=2.
\end{aligned}$$

§3.3 数学期望的计算

例3.3.2 设 X, Y 独立, 都服从标准正态分布, 计算 $\mathrm{E}(X^2+Y^2)$.

解 (X,Y) 有联合密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{2}\Big),$$

在积分中采用变换$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2+Y^2) &= \iint_{\mathrm{R}^2}(x^2+y^2)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}r^3\exp(-r^2/2)\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\infty}r^3\exp(-r^2/2)\,\mathrm{d}r \qquad [\text{取}\,t=r^2/2] \\
&= 2\int_0^{\infty}t\exp(-t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\Gamma(2)=2\cdot(2-1)!=2.
\end{aligned}$$

§3.3 数学期望的计算

例3.3.3 秘书长的3台传真机独立工作. 第j台传真机对下一个到达的传真的等待时间服从参数为 λ_j 的指数分布. 计算该秘书长对第一个到达的传真的平均等待时间.

解 用 X_j 表示第 j 台传真机对下一个传真的等待时间, 则 X_1, X_2, X_3 相互独立, $X_j \sim \mathcal{E}(\lambda_j)$. $Y = \min(X_1, X_2, X_3)$ 是对第一个传真的等待时间. 容易计算

$$P(X_j > y) = \int_y^{\infty} \lambda_j \mathrm{e}^{-\lambda_j x}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda_j y}.$$

$$\begin{aligned} P(Y > y) &= P(X_1 > y, X_2 > y, X_3 > y) \\ &= P(X_1 > y)P(X_2 > y)P(X_3 > y) \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y}. \end{aligned}$$

§3.3 数学期望的计算

例3.3.3 秘书长的3台传真机独立工作. 第j台传真机对下一个到达的传真的等待时间服从参数为 λ_j 的指数分布. 计算该秘书长对第一个到达的传真的平均等待时间.

解 用 X_j 表示第 j 台传真机对下一个传真的等待时间, 则 X_1, X_2, X_3 相互独立, $X_j \sim \mathcal{E}(\lambda_j)$. $Y = \min(X_1, X_2, X_3)$ 是对第一个传真的等待时间. 容易计算

$$P(X_j > y) = \int_y^{\infty} \lambda_j \mathrm{e}^{-\lambda_j x}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda_j y}.$$

$$\begin{aligned} P(Y > y) &= P(X_1 > y, X_2 > y, X_3 > y) \\ &= P(X_1 > y)P(X_2 > y)P(X_3 > y) \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y}. \end{aligned}$$

§3.3 数学期望的计算

再用定理3.3.1(3)得到

$$\mathrm{E}\,Y = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}.$$

由于指数分布具有无记忆性，所以例3.3.3中的等待时间可以是从任何时刻开始的等待时间.

对于离散型随机变量和随机向量也有类似定理3.3.1的结论，这就是下面的定理3.3.2.

§3.3 数学期望的计算

定理3.3.2 设X, Y是离散型随机变量, $\mathrm{E}\,g(X)$, $\mathrm{E}\,h(X,Y)$存在.

(1) 若X有离散分布$p_j = P(X = x_j)$, $j \geqslant 1$, 则

$$\mathrm{E}\,g(X) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) p_j.$$

(2) 若(X,Y)有离散分布 $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i,j \geqslant 1$, 则

$$\mathrm{E}\,h(X,Y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} h(x_i, y_j) p_{ij}.$$

§3.3　数学期望的计算

例3.3.4　设 X 服从二项分布 $\mathcal{B}(n,p)$, 计算 $\mathrm{E}[X(X-1)]$.

解　从 $P(X=j)=\mathrm{C}_n^j p^j q^{n-j}$ 知道

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X(X-1)] &= \sum_{j=0}^{n} j(j-1)\mathrm{C}_n^j p^j q^{n-j} \\
&= p^2\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_n^j x^j q^{n-j}\right)\Bigg|_{x=p} \\
&= p^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x+q)^n\Big|_{x=p} \\
&= n(n-1)p^2.
\end{aligned}$$

§3.3 数学期望的计算

例3.3.4 设 X 服从二项分布 $\mathcal{B}(n,p)$, 计算 $\mathrm{E}\,[X(X-1)]$.

解 从 $P(X=j)=\mathrm{C}_n^j p^j q^{n-j}$ 知道

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X(X-1)] &= \sum_{j=0}^{n} j(j-1)\mathrm{C}_n^j p^j q^{n-j} \\
&= p^2\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_n^j x^j q^{n-j}\right)\Big|_{x=p} \\
&= p^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x+q)^n\Big|_{x=p} \\
&= n(n-1)p^2.
\end{aligned}
$$

§3.4 数学期望的性质

§3.4 数学期望的性质

根据定理3.3.1和定理3.3.2,

$$\mathrm{E}\,|X| = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| P(X = x_j), & \text{当} \ \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_j) = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{当} X \text{有概率密度} f(x). \end{cases}$$

于是, $\mathrm{E}\,X$存在的充分必要条件是 $\mathrm{E}\,|X| < \infty$.

§3.4 数学期望的性质

定理3.4.1 设$\mathrm{E}\,|X_j| < \infty\ (1 \leqslant j \leqslant n)$, $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 是常数, 则有以下结果:

(1) 线性组合 $Y = c_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n$ 的数学期望存在, 而且

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}\,(c_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n) \\ = \ & c_0 + c_1\mathrm{E}\,X_1 + c_2\mathrm{E}\,X_2 + \cdots + c_n\mathrm{E}\,X_n; \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

(2) 如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则乘积 $Z = X_1X_2\cdots X_n$ 的数学期望存在, 并且

$$\mathrm{E}\,(X_1X_2\cdots X_n) = \mathrm{E}\,X_1\mathrm{E}\,X_2\cdots\mathrm{E}\,X_n;$$

§3.4　数学期望的性质

(3) 如果$P(X_1 \leqslant X_2) = 1$, 则 $\mathrm{E}\,X_1 \leqslant \mathrm{E}\,X_2$.

性质(1)说明对随机变量求数学期望的运算是线性运算; 性质(2)说明相互独立的随机变量积的数学期望等于数学期望的积; 性质(3)说明如果$X_1 \leqslant X_2$, 则对X_1的期望值应小于等于对X_2的期望值.

§3.4 数学期望的性质

例3.4.1 设 $X \sim N(0,1)$，则 $\mathrm{E}\,X^2 = 1$.

证明 取随机变量 Y 和 X 独立同分布，则 $\mathrm{E}\,Y^2 = \mathrm{E}\,X^2$. 从例3.3.2的结论知道 $\mathrm{E}\,(X^2+Y^2) = 2$，于是有

$$\mathrm{E}\,X^2 = (\mathrm{E}\,X^2 + \mathrm{E}\,Y^2)/2 = \mathrm{E}\,(X^2+Y^2)/2 = 2/2 = 1.$$

X 的数学期望是指对 X 的期望值，它也是 X 的平均取值. 看下面的例子.

§3.4　数学期望的性质

例3.4.1　设 $X \sim N(0,1)$，则 $\mathrm{E}\,X^2 = 1$.

证明　取随机变量 Y 和 X 独立同分布，则 $\mathrm{E}\,Y^2 = \mathrm{E}\,X^2$. 从例3.3.2的结论知道 $\mathrm{E}\,(X^2 + Y^2) = 2$，于是有

$$\mathrm{E}\,X^2 = (\mathrm{E}\,X^2 + \mathrm{E}\,Y^2)/2 = \mathrm{E}\,(X^2 + Y^2)/2 = 2/2 = 1.$$

X 的数学期望是指对 X 的期望值，它也是 X 的平均取值. 看下面的例子.

§3.4 数学期望的性质

例3.4.2(二项分布$\mathcal{B}(n,p)$) 设单次试验成功的概率是p，问n次独立重复试验中，期望有几次成功?

解 引入

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验成功}, \\ 0, & \text{第}i\text{次试验不成功}, \end{cases}$$

则$\mathrm{E}\,X_i = p$. $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$是$n$次试验中的成功次数，服从二项分布$\mathcal{B}(n,p)$. 期望的成功次数是

$$\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,X_1 + \mathrm{E}\,X_2 + \cdots + \mathrm{E}\,X_n = np.$$

§3.4 数学期望的性质

例3.4.2(二项分布$\mathcal{B}(n,p)$) 设单次试验成功的概率是p，问n次独立重复试验中，期望有几次成功？

解 引入

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验成功}, \\ 0, & \text{第}i\text{次试验不成功}, \end{cases}$$

则$\mathrm{E}\,X_i = p$. $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$是$n$次试验中的成功次数，服从二项分布$\mathcal{B}(n,p)$. 期望的成功次数是

$$\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,X_1 + \mathrm{E}\,X_2 + \cdots + \mathrm{E}\,X_n = np.$$

§3.4 数学期望的性质

例3.4.3(超几何分布$H(N,M,n)$) N件产品中有M件正品，从中任取n件，期望有几件正品？

解 定义随机变量

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次取得正品},\\ 0, & \text{第}i\text{次取得次品},\end{cases}$$

则无论是否有放回地抽取，总有$\mathrm{E}\,X_i=M/N$(参考抽签问题). 无放回抽取时，抽到的正品数$Y=(X_1+X_2+\cdots+X_n)$服从超几何分布$H(N,M,n)$. 期望的正品数是

$$\mathrm{E}\,Y=\mathrm{E}\,X_1+\mathrm{E}\,X_2+\cdots+\mathrm{E}\,X_n=nM/N.$$

本例中，如果有放回地抽取，则 $Y\sim\mathcal{B}(n,M/N)$. 如果无放回地抽取，则 $Y\sim H(N,M,n)$. 无论是否有放回地抽取，期望得到的正品数都是n倍的正品率.

§3.4 数学期望的性质

例3.4.4 将n个不同的信笺随机放入n个写好地址的信封，期望有几封能正确搭配？

解 定义随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{封信正确搭配,} \\ 0, & \text{第}i\text{封信没有正确搭配,} \end{cases}$$

则$\mathrm{E}\,X_i = P(X_i = 1) = 1/n$. 因为$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$是正确搭配的个数，所以平均正确搭配的个数是

$$\mathrm{E}\,Y = \mathrm{E}\,X_1 + \mathrm{E}\,X_2 + \cdots + \mathrm{E}\,X_n = n/n = 1.$$

本例说明无论有多少个信封，平均只有一封信能正确搭配.

§3.4　数学期望的性质

例3.4.5　设商店每销售一袋大米获利a元，每库存一袋大米损失b元，假设大米的销量Y服从指数分布$\mathcal{E}(\lambda)$. 问库存多少袋大米才能获得最大的平均利润.

解　库存量是x时，利润是

$$Q(x,Y)=\begin{cases} aY-b(x-Y), & Y<x,\\ ax, & Y\geq x.\end{cases}$$

用$\mathrm{I}[Y<x]$表示事件$\{Y<x\}$的示性函数，用$\mathrm{I}[Y\geq x]$表示$\{Y\geq x\}$ 的示性函数，则可以将$Q(x,Y)$写成

$$Q(x,Y)=\big[aY-b(x-Y)\big]\mathrm{I}[Y<x]+ax\mathrm{I}[Y\geq x].$$

§3.4 数学期望的性质

例3.4.5 设商店每销售一袋大米获利a元，每库存一袋大米损失b元，假设大米的销量Y服从指数分布$\mathcal{E}(\lambda)$. 问库存多少袋大米才能获得最大的平均利润.

解 库存量是x时，利润是

$$Q(x, Y) = \begin{cases} aY - b(x - Y), & Y < x, \\ ax, & Y \geqslant x. \end{cases}$$

用$\mathrm{I}[Y < x]$表示事件$\{Y < x\}$的示性函数，用$\mathrm{I}[Y \geqslant x]$表示$\{Y \geqslant x\}$ 的示性函数，则可以将$Q(x, Y)$写成

$$Q(x, Y) = \big[aY - b(x - Y)\big]\mathrm{I}[Y < x] + ax\mathrm{I}[Y \geqslant x].$$

§3.4　数学期望的性质

Y有概率密度$f_Y(y) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}, y > 0$. 所以平均利润是

$$\begin{aligned} q(x) &= \mathrm{E}\, Q(x, Y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{E}\,\{[aY - b(x - Y)]\mathrm{I}[Y < x] + ax\mathrm{I}[Y \geqslant x]\} \\ &= \int_0^x \big[ay - b(x - y)\big] f_Y(y)\,\mathrm{d}y + ax \int_x^{\infty} f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (a + b)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x})/\lambda - bx. \end{aligned}$$

$q(x)$ 的最大值点是所要的库存数.

§3.4 数学期望的性质

由

$$q'(x) = (a+b)\mathrm{e}^{-\lambda x} - b = 0$$

得到$q(x)$的唯一极值点$x = \lambda^{-1}\ln[(a+b)/b]$. 由

$$q''(x) = -(a+b)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} < 0$$

知道$q(x)$是上凸函数. 所以, $x = \lambda^{-1}\ln[(a+b)/b]$是$q(x)$的唯一最大值点. 于是, 库存 $\lambda^{-1}\ln[(a+b)/b]$ 袋大米可以获得最大平均利润.

§3.4 数学期望的性质

定理3.4.2 $\mathrm{E}|X| = 0$ 的充分必要条件是 $P(X = 0) = 1$.

如果$P(X = 0) = 1$, 则称$X = 0$ 以概率1发生, 记做 $X = 0$ a.s.. 完全类似地, 我们把 $P(X \leqslant Y) = 1$ 记做 $X \leqslant Y$ a.s.. 当 $P(A) = 1$, 我们称 A 以概率1发生. 以概率1发生又称作几乎处处或几乎必然(almost surely)发生.

§3.5 随机变量的方差

§3.5 随机变量的方差

在许多问题中，只知道随机变量的数学期望是远远不够的. 在例3.1.2中，如果知道全班期中考试的平均成绩是75分，我们还是不知道这个班的学习情况是否整齐，也不知道这次考试的试题是否合理.

可以设想，当全班的成绩过于集中时，试题可能有问题. 过于分散时，会有较多的学生不及格，也不合乎情理. 于是应当有一个量描述考试成绩是否过于集中或分散. 这个量就是方差.

§3.5 随机变量的方差

例3.5.1 在例3.1.2中，全班同学的期中考试的平均分是

$$\mu = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i, \quad m = 180.$$

可以用

$$\sigma^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu)^2$$

描述全班期中考试成绩的分散程度. 因为考试成绩是总体，所以称 σ^2 是总体方差. 总体方差用来描述总体的分散程度.

§3.5 随机变量的方差

从例3.1.2知道，若用X表示任选一个同学的期中成绩，则 X 的概率分布是总体分布，$\mu = \mathrm{E}\,X$ 是总体均值. 因为 X 的取值的分散程度由总体的分散程度 σ^2 决定，所以把 X 的方差定义成总体方差 σ^2. 因为得 j 分的同学共有 m_j个，
$p_j = P(X = j) = m_j/m$, 所以有

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2\\ &= \sum_{j=0}^{100}(j-\mu)^2\frac{m_j}{m}\\ &= \sum_{j=0}^{100}(j-\mu)^2 p_j\\ &= \mathrm{E}\,(X-\mu)^2.\end{aligned}$$

说明应当用 $\mathrm{E}\,(X-\mathrm{E}\,X)^2$ 描述随机变量 X 的分散程度.

§3.5 随机变量的方差

定义3.5.1 设 $\mu = \mathrm{E}\,X$, 如果 $\mathrm{E}\,(X-\mu)^2 < \infty$, 则称

$$\sigma^2 = \mathrm{E}\,(X-\mu)^2 \qquad (5.1)$$

为X的方差(variance), 记做 $\mathrm{Var}\,(X)$ 或 σ_X^2. 称 $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}$ 为 X 的标准差.

也可以从另外的角度解释方差. 设X是对长度为μ的物体的测量值, 则$X-\mu$是测量误差, $(X-\mu)^2$ 是测量误差的平方. 如果测量仪器无系统偏差(即$\mathrm{E}\,X=\mu$), 则 $\mathrm{E}\,(X-\mu)^2$ 是测量误差平方的平均, 正是方差.

§3.5 随机变量的方差

当X有离散分布 $p_j = P(X = x_j), j = 1, 2, \cdots$ 时, 利用定理3.3.2(1)得到

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{E}\,(X - \mu)^2 = \sum_{j=1}^{\infty}(x_j - \mu)^2 p_j.$$

当 X 有概率密度 $f(x)$ 时, 利用定理3.3.1(1)得到

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{E}\,(X - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

上面两式都说明随机变量X的方差$\mathrm{Var}\,(X)$由X的概率分布唯一决定. 这就是下面的定理.

§3.5 随机变量的方差

定理3.5.1 如果 X, Y 有相同的概率分布, 则他们有相同的数学期望和方差.

X的方差描述了X的分散程度, $\mathrm{Var}(X)$ 越小, 说明 X 在数学期望 μ 附近越集中. 特别当$\mathrm{Var}(X)=0$时, 知道$X=\mu$ a.s..
利用方差的定义得到

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X-\mu)^2=\mathrm{E}(X^2-2X\mu+\mu^2)=\mathrm{E}X^2-\mu^2.$$

这就得到计算方差的常用公式

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}X^2-(\mathrm{E}X)^2. \qquad (3.5.2)$$

§3.5 随机变量的方差

定理3.5.1 如果 X, Y 有相同的概率分布, 则他们有相同的数学期望和方差.

X的方差描述了X的分散程度, $\mathrm{Var}\,(X)$ 越小, 说明 X 在数学期望 μ 附近越集中. 特别当$\mathrm{Var}\,(X)=0$时, 知道$X=\mu$ a.s..
利用方差的定义得到

$$\mathrm{Var}\,(X)=\mathrm{E}\,(X-\mu)^2=\mathrm{E}\,(X^2-2X\mu+\mu^2)=\mathrm{E}\,X^2-\mu^2.$$

这就得到计算方差的常用公式

$$\mathrm{Var}\,(X)=\mathrm{E}\,X^2-(\mathrm{E}\,X)^2. \tag{3.5.2}$$

§3.5 随机变量的方差

A. 常用的方差

下面计算几个常见分布的方差.

(1) 伯努利分布$\mathcal{B}(1, p)$:

设$P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p=q$, 则$\mathrm{Var}\,(X)=pq$.

证明　由$X^2=X$ 和$\mathrm{E}\,X=p$, 得到

$$\mathrm{Var}\,(X)=\mathrm{E}\,X^2-(\mathrm{E}\,X)^2=p-p^2=pq.$$

§5.5 随机变量的方差

(2) 二项分布$\mathcal{B}(n,p)$: 设$q=1-p$,

$$P(X=j)=\mathrm{C}_n^j p^j q^{n-j},\ 0\leqslant j\leqslant n,$$

则$\mathrm{Var}\,(X)=npq$.

证明 由$\mathrm{E}\,X=np$ 和$\mathrm{E}\,[X(X-1)]=n(n-1)p^2$(见例3.3.4)得到

$$\mathrm{E}\,X^2=\ \mathrm{E}[X(X-1)]+\mathrm{E}\,X=\ n(n-1)p^2+np.$$

最后用(3.5.2)得到

$$\mathrm{Var}\,(X)=n(n-1)p^2+np-(np)^2=npq.$$

§5.5 随机变量的方差

(2) 二项分布$\mathcal{B}(n,p)$: 设$q=1-p$,

$$P(X=j)=\mathrm{C}_n^j p^j q^{n-j},\ 0\leqslant j\leqslant n,$$

则$\mathrm{Var}\,(X)=npq$.

证明 由$\mathrm{E}\,X=np$ 和$\mathrm{E}\,[X(X-1)]=n(n-1)p^2$(见例3.3.4)得到

$$\mathrm{E}\,X^2=\ \mathrm{E}[X(X-1)]+\mathrm{E}\,X=\ n(n-1)p^2+np.$$

最后用(3.5.2)得到

$$\mathrm{Var}\,(X)=n(n-1)p^2+np-(np)^2=npq.$$

§3.5 随机变量的方差

(3) 泊松分布$\mathcal{P}(\lambda)$: 设

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots,$$

则$\mathrm{Var}\,(X)=\lambda$.

证明 由$\mathrm{E}\,X=\lambda$ 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,X^2 &= \mathrm{E}\,[X(X-1)]+\mathrm{E}\,X \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda \\ &= \lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda.\end{aligned}$$

用公式(3.5.2)得到

$$\mathrm{Var}\,(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

§3.5 随机变量的方差

(3) 泊松分布$\mathcal{P}(\lambda)$: 设

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots,$$

则$\mathrm{Var}\,(X)=\lambda$.

证明 由$\mathrm{E}\,X=\lambda$ 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,X^2 &= \mathrm{E}\,[X(X-1)]+\mathrm{E}\,X\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda\\ &= \lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda.\end{aligned}$$

用公式(3.5.2)得到

$$\mathrm{Var}\,(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

§3.5 随机变量的方差

(4) 几何分布：设X有概率分布

$$P(X=j)=pq^{j-1},\ j=1,2,\cdots,\ q=1-p,$$

则$\mathrm{Var}\,(X)=q/p^2$.

证明 用 $\mathrm{E}\,X=1/p$ 得到

§3.5　随机变量的方差

(4) 几何分布: 设X有概率分布

$$P(X=j)=pq^{j-1},\ j=1,2,\cdots,\ q=1-p,$$

则$\mathrm{Var}\,(X)=q/p^2$.

证明　用 $\mathrm{E}X=1/p$ 得到

§3.5 随机变量的方差

(4) 几何分布: 设X有概率分布

$$P(X=j)=pq^{j-1},\ j=1,2,\cdots,\ q=1-p,$$

则$\mathrm{Var}\,(X)=q/p^2$.

证明 用 $\mathrm{E}\,X=1/p$ 得到

§3.5 随机变量的方差

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\, X^2 &= \mathrm{E}\,[X(X-1)] + \mathrm{E}\, X \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j(j-1)pq^{j-1} + \frac{1}{p} \\
&= pq\Big(\sum_{j=0}^{\infty} q^j\Big)'' + \frac{1}{p} \\
&= pq\Big(\frac{1}{1-q}\Big)'' + \frac{1}{p} \\
&= \frac{2pq}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}.
\end{aligned}
$$

最后用公式(3.5.2)得到

$$
\mathrm{Var}\,(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.
$$

§3.5 随机变量的方差

(5) 均匀分布$U(a,b)$: 设X有概率密度$f(x)=1/(b-a)$, $x\in(a,b)$, 则

$$\mathrm{Var}\,(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

证明 因为X有数学期望$\mathrm{E}\,X=(a+b)/2$, 且

$$\mathrm{E}\,X^2=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}.$$

所以

$$\mathrm{Var}\,(X)=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

§3.5 随机变量的方差

(5) 均匀分布$U(a,b)$: 设X有概率密度$f(x)=1/(b-a)$, $x\in(a,b)$, 则

$$\mathrm{Var}\,(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

证明 因为X有数学期望$\mathrm{E}\,X=(a+b)/2$, 且

$$\mathrm{E}\,X^2=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}.$$

所以

$$\mathrm{Var}\,(X)=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

§3.5 随机变量的方差

(5) 均匀分布$U(a,b)$: 设X有概率密度$f(x)=1/(b-a)$, $x\in(a,b)$, 则

$$\mathrm{Var}\,(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

证明 因为X有数学期望$\mathrm{E}\,X=(a+b)/2$, 且

$$\mathrm{E}\,X^2=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}.$$

所以

$$\mathrm{Var}\,(X)=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

§3.5 随机变量的方差

(6) 指数分布$\mathcal{E}(\lambda)$: 设X有概率密度$f(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$, $x>0$, 则$\mathrm{Var}\,(X)=1/\lambda^2$.

证明 X有数学期望$\mathrm{E}X=1/\lambda$, 由

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X^2 &= \int_0^\infty x^2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad [\text{取}x=t/\lambda] \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) \\ &= \frac{2!}{\lambda^2},\end{aligned}$$

得到

$$\mathrm{Var}\,(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

§3.5　随机变量的方差

(6) 指数分布$\mathcal{E}(\lambda)$: 设X有概率密度$f(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$, $x>0$, 则$\mathrm{Var}\,(X)=1/\lambda^2$.

证明　X有数学期望$\mathrm{E}\,X=1/\lambda$, 由

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,X^2 &= \int_0^\infty x^2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad [\text{取}x=t/\lambda] \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) \\
&= \frac{2!}{\lambda^2},
\end{aligned}$$

得到

$$\mathrm{Var}\,(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

§3.5 随机变量的方差

(7) 正态分布$N(\mu,\sigma^2)$: 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则$\mathrm{Var}\,(X)=\sigma^2$.

证明 X有数学期望$\mathrm{E}\,X=\mu$, 并且由§3.4例3.4.2知道

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$$

从例3.4.1知道 $\mathrm{E}\,Y^2=1$, 于是用 $(X-\mu)^2=Y^2\sigma^2$ 得到

$$\mathrm{Var}\,(X)=\mathrm{E}\,(X-\mu)^2=\mathrm{E}\,Y^2\sigma^2=\sigma^2.$$

现在我们知道了正态分布$N(\mu,\sigma^2)$中的μ和σ^2就是该正态分布的数学期望和方差. 如果已知X服从正态分布, 那么只要再计算它的数学期望μ和方差σ^2, 则可以得到X的概率密度了.

§3.5 随机变量的方差

(7) 正态分布$N(\mu,\sigma^2)$: 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则$\mathrm{Var}\,(X)=\sigma^2$.

证明 X有数学期望$\mathrm{E}\,X=\mu$, 并且由§3.4例3.4.2知道

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$$

从例3.4.1知道 $\mathrm{E}\,Y^2=1$, 于是用 $(X-\mu)^2=Y^2\sigma^2$ 得到

$$\mathrm{Var}\,(X)=\mathrm{E}\,(X-\mu)^2=\mathrm{E}\,Y^2\sigma^2=\sigma^2.$$

现在我们知道了正态分布$N(\mu,\sigma^2)$中的μ和σ^2就是该正态分布的数学期望和方差. 如果已知X服从正态分布, 那么只要再计算它的数学期望μ和方差σ^2, 则可以得到X的概率密度了.

§3.5　随机变量的方差

例3.5.2　设 X, Y 相互独立, 都服从标准正态分布, 求

$$U = 3X - 4Y + 5$$

的分布.

解　由 U 服从正态分布, 再从 $\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,Y = 0$, $\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Var}\,(Y) = 1$ 得到 $\mathrm{E}\,X^2 = \mathrm{E}\,Y^2 = 1$, 从而得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,U &= 3\mathrm{E}\,X - 4\mathrm{E}\,Y + 5 = 5, \\
\mathrm{E}\,(XY) &= \mathrm{E}\,X \cdot \mathrm{E}\,Y = 0, \\
\mathrm{Var}\,(U) &= \mathrm{E}\,(U - \mathrm{E}\,U)^2 = \mathrm{E}\,(3X - 4Y)^2 \\
&= 9\mathrm{E}\,X^2 + 16\mathrm{E}\,Y^2 - 24\mathrm{E}\,(XY) \\
&= 25.
\end{aligned}$$

于是 $U \sim N(5, 25)$.

§3.5 随机变量的方差

例3.5.2 设 X, Y 相互独立, 都服从标准正态分布, 求

$$U = 3X - 4Y + 5$$

的分布.

解 由 U 服从正态分布, 再从 $\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,Y = 0$, $\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Var}\,(Y) = 1$ 得到$\mathrm{E}\,X^2 = \mathrm{E}\,Y^2 = 1$, 从而得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,U &= 3\mathrm{E}\,X - 4\mathrm{E}\,Y + 5 = 5, \\
\mathrm{E}\,(XY) &= \mathrm{E}\,X \cdot \mathrm{E}\,Y = 0, \\
\mathrm{Var}\,(U) &= \mathrm{E}\,(U - \mathrm{E}\,U)^2 = \mathrm{E}\,(3X - 4Y)^2 \\
&= 9\mathrm{E}\,X^2 + 16\mathrm{E}\,Y^2 - 24\mathrm{E}\,(XY) \\
&= 25.
\end{aligned}$$

于是$U \sim N(5, 25)$.

§3.5 随机变量的方差

B. 方差的性质

定理3.5.2 设a, b, c 是常数, $\mathrm{E}\,X=\mu$, $\mathrm{Var}\,(X)<\infty$, $\mu_j=\mathrm{E}\,X_j$, $\mathrm{Var}\,(X_j)<\infty (1\leqslant j\leqslant n)$, 则

(1) $\mathrm{Var}\,(a+bX)=b^2\mathrm{Var}\,(X)$;

(2) $\mathrm{Var}\,(X)=\mathrm{E}\,(X-\mu)^2<\mathrm{E}\,(X-c)^2$, 只要常数 $c\neq\mu$;

(3) $\mathrm{Var}\,(X)=0$的充分必要条件是 $P(X=\mu)=1$;

(4) 当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立时,

$$\mathrm{Var}\,\Big(\sum_{j=1}^{n}X_j\Big)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Var}\,(X_j).$$

§3.5 随机变量的方差

*证明 (1) 由方差的定义得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(a+bX) &= \mathrm{E}\left[a+bX-(a+b\mathrm{E}\,X)\right]^2\\ &= \mathrm{E}\,[b^2(X-\mu)^2]\\ &= b^2\mathrm{Var}\,(X).\end{aligned}$$

(2) 对$c\neq\mu$, 由$\mathrm{E}\,(X-\mu)=0$得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\,(X-c)^2\\ &= \mathrm{E}\,(X-\mu+\mu-c)^2\\ &= \mathrm{E}\,(X-\mu)^2+2\mathrm{E}\,(X-\mu)(\mu-c)+\mathrm{E}\,(\mu-c)^2\\ &= \mathrm{Var}\,(X)+(\mu-c)^2>\mathrm{Var}\,(X).\end{aligned}$$

于是结论(2)成立.

§3.5 随机变量的方差

*证明 (1) 由方差的定义得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(a+bX) &= \mathrm{E}\left[a+bX-(a+b\mathrm{E}\,X)\right]^2 \\
&= \mathrm{E}\,[b^2(X-\mu)^2] \\
&= b^2\mathrm{Var}\,(X).
\end{aligned}
$$

(2) 对$c \neq \mu$, 由$\mathrm{E}\,(X-\mu)=0$得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\,(X-c)^2 \\
&= \mathrm{E}\,(X-\mu+\mu-c)^2 \\
&= \mathrm{E}\,(X-\mu)^2 + 2\mathrm{E}\,(X-\mu)(\mu-c) + \mathrm{E}\,(\mu-c)^2 \\
&= \mathrm{Var}\,(X) + (\mu-c)^2 > \mathrm{Var}\,(X).
\end{aligned}
$$

于是结论(2)成立.

§3.5　随机变量的方差

*证明　(1)　由方差的定义得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(a+bX) &= \mathrm{E}\left[a+bX-(a+b\mathrm{E}\,X)\right]^2\\ &= \mathrm{E}\,[b^2(X-\mu)^2]\\ &= b^2\mathrm{Var}\,(X).\end{aligned}$$

(2)　对$c\neq\mu$, 由$\mathrm{E}\,(X-\mu)=0$得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\,(X-c)^2\\ &= \mathrm{E}\,(X-\mu+\mu-c)^2\\ &= \mathrm{E}\,(X-\mu)^2+2\mathrm{E}\,(X-\mu)(\mu-c)+\mathrm{E}\,(\mu-c)^2\\ &= \mathrm{Var}\,(X)+(\mu-c)^2>\mathrm{Var}\,(X).\end{aligned}$$

于是结论(2)成立.

§3.5 随机变量的方差

(3) 如果$\mathrm{E}\,(X-\mu)^2 = \mathrm{Var}\,(X) = 0$, 则由定理4.2的结论得到 $(X-\mu)^2 = 0$ a.s., 即 $X = \mu$ a.s.. 如果 $P(X=\mu)=1$, 则按定义 $\mathrm{E}\,(X-\mu)^2 = 1\cdot(\mu-\mu)^2 = 0$.

(4)的证明留给读者.

在性质(1)中取 $b=1$ 得到 $\mathrm{Var}\,(a+X) = \mathrm{Var}\,(X)$, 说明对随机变量进行常数平移后, 随机变量的分散程度不变; 取 $a=0$ 得到 $\mathrm{Var}\,(bX) = b^2\mathrm{Var}\,(X)$, 说明将 X 扩大 b 倍后, 标准差扩大 $|b|$ 倍. (2) 说明随机变量 X 在均方误差的意义下距离数学期望μ最近. (3) 说明除了以概率1等于常数的随机变量外, 任何随机变量的方差都大于零.

以后无特殊说明时, 都认为所述随机变量的方差大于零.

§3.5 随机变量的方差

(3) 如果$\mathrm{E}\,(X-\mu)^2=\mathrm{Var}\,(X)=0$, 则由定理4.2的结论得到 $(X-\mu)^2=0$ a.s., 即 $X=\mu$ a.s.. 如果 $P(X=\mu)=1$, 则按定义 $\mathrm{E}\,(X-\mu)^2=1\cdot(\mu-\mu)^2=0$.

(4)的证明留给读者.

在性质(1)中取 $b=1$ 得到 $\mathrm{Var}\,(a+X)=\mathrm{Var}\,(X)$, 说明对随机变量进行常数平移后, 随机变量的分散程度不变; 取 $a=0$ 得到 $\mathrm{Var}\,(bX)=b^2\mathrm{Var}\,(X)$, 说明将 X 扩大 b 倍后, 标准差扩大 $|b|$ 倍. (2) 说明随机变量 X 在均方误差的意义下距离数学期望μ最近. (3) 说明除了以概率1等于常数的随机变量外, 任何随机变量的方差都大于零.

以后无特殊说明时, 都认为所述随机变量的方差大于零.

§3.5　随机变量的方差

设$\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(X) < \infty$, $Y = (X - \mathrm{E}\,X)/\sigma$, 则

$$\mathrm{E}\,Y = 0,\ \ \mathrm{Var}\,(Y) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{Var}\,(X - \mathrm{E}\,X) = 1.$$

这时称 Y 是 X 的标准化. 特别地, 当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N(0, 1)$.

例3.5.3　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 有共同的方差 $\sigma^2 < \infty$, 则

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

§3.5　随机变量的方差

设$\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(X) < \infty$, $Y = (X - \mathrm{E}\,X)/\sigma$, 则

$$\mathrm{E}\,Y = 0,\ \ \mathrm{Var}\,(Y) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{Var}\,(X - \mathrm{E}\,X) = 1.$$

这时称 Y 是 X 的标准化. 特别地, 当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N(0, 1)$.

例3.5.3　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 有共同的方差 $\sigma^2 < \infty$, 则

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

§3.5 随机变量的方差

证明 用定理3.5.2的(1)和(4)得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right) &= \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Var}(X_j)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma^2\\
&= \frac{1}{n}\sigma^2.
\end{aligned}$$

§3.5 随机变量的方差

在例3.5.3中，如果X_i是第i次测量重量为μ的物体时的测量值，测量的均方误差是 $\mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2$. 当用 n 次测量的平均

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$$

作为 μ 的测量值时，方差降低 n 倍. 说明只要测量仪器没有系统偏差(指 $\mathrm{E}\,X=\mu$, 这时有 $\mathrm{E}\,\overline{X}_n=\mu$), 测量精度总可以通过多次测量的平均来改进.

下面是用方差的性质计算方差的例子.

§3.5 随机变量的方差

例3.5.4 设 $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, 则 $\mathrm{Var}\,(X) = npq$.

证明 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布, 都服从伯努利分布 $\mathcal{B}(1,p)$, 则 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. 利用 $\mathrm{Var}\,(X_i) = pq$ 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(X) &= \mathrm{Var}\,(Y) \\
&= \mathrm{Var}\,(X_1) + \mathrm{Var}\,(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}\,(X_n) \\
&= npq.
\end{aligned}$$

在金融领域, 若用X表示某项投资的收益, 则数学期望$\mathrm{E}\,X$是平均收益, 而方差$\mathrm{Var}\,(X)$可以描述投资风险. 这是因为方差越大, 收益X的不确定性越大.

§3.5 随机变量的方差

例3.5.4 设 $X \sim \mathcal{B}(n,p)$，则 $\mathrm{Var}\,(X) = npq$.

证明 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，都服从伯努利分布 $\mathcal{B}(1,p)$，则 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. 利用 $\mathrm{Var}\,(X_i) = pq$ 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(X) &= \mathrm{Var}\,(Y) \\ &= \mathrm{Var}\,(X_1) + \mathrm{Var}\,(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}\,(X_n) \\ &= npq.\end{aligned}$$

在金融领域，若用X表示某项投资的收益，则数学期望$\mathrm{E}\,X$是平均收益，而方差$\mathrm{Var}\,(X)$可以描述投资风险. 这是因为方差越大，收益X的不确定性越大.

§3.6 协方差和相关系数

§3.6 协方差和相关系数

A. 内积不等式

定理3.6.1(内积不等式) 设 $\mathrm{E}\, X^2 < \infty$, $\mathrm{E}\, Y^2 < \infty$, 则有

$$|\mathrm{E}\,(XY)| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\, X^2\, \mathrm{E}\, Y^2}, \qquad (3.6.1)$$

并且等号成立的充分必要条件是有不全为零的常数a, b, 使得

$$P(aX + bY = 0) = 1.$$

§3.6 协方差和相关系数

§3.6 协方差和相关系数

A. 内积不等式

定理3.6.1(内积不等式) 设 $\mathrm{E}\,X^2 < \infty$, $\mathrm{E}\,Y^2 < \infty$, 则有

$$|\mathrm{E}\,(XY)| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\,X^2\,\mathrm{E}\,Y^2}, \qquad (3.6.1)$$

并且等号成立的充分必要条件是有不全为零的常数a, b, 使得

$$P(aX + bY = 0) = 1.$$

§3.6 协方差和相关系数

证明 对于不全为零的常数 a, b, 二次型

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,(aX+bY)^2 &= a^2\mathrm{E}\,X^2 + 2ab\mathrm{E}\,(XY) + b^2\mathrm{E}\,Y^2 \\ &= (a,b)\boldsymbol{\Sigma}(a,b)^{\mathrm{T}} \geqslant 0, \qquad (3.6.2)\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}\,X^2 & \mathrm{E}\,(XY) \\ \mathrm{E}\,(XY) & \mathrm{E}\,Y^2 \end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的半正定性得到 (3.6.1). 从 $\det(\boldsymbol{\Sigma}) = \mathrm{E}\,X^2\,\mathrm{E}\,Y^2 - [\mathrm{E}\,(XY)]^2$, 知道(3.6.1)中的等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\Sigma}$ 退化, 当且仅当有不全为零的常数 a, b 使 $\mathrm{E}\,(aX+bY)^2 = 0$, 当且仅当有不全为零的常数 a, b 使

$$P(aX+bY=0)=1.$$

§3.6　协方差和相关系数

例3.6.1　若 $\mathrm{E}\,X^2 < \infty$, 则 $\mathrm{E}\,|X| < \infty$.

证明　由内积不等式得到

$$\mathrm{E}\,|X| = \mathrm{E}\,|X| \cdot 1 \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\,X^2 \mathrm{E}\,1^2} = \sqrt{\mathrm{E}\,X^2} < \infty.$$

§3.6 协方差和相关系数

B. 协方差和相关系数

为了研究随机变量 X, Y 的关系，引入协方差和相关系数的定义. 设 $\sigma_X = \sqrt{\sigma_{XX}}$, $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_{YY}}$ 分别是 X, Y 的标准差.

定义3.6.1 设$\mu_X = \mathrm{E}\,X$, $\mu_Y = \mathrm{E}\,Y$.

(1) 当 σ_X, σ_Y 存在时，称

$$\mathrm{E}\,[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \qquad (3.6.3)$$

为随机变量 X, Y的协方差(covariance),记做 $\mathrm{Cov}\,(X,Y)$ 或 σ_{XY}. 当 $\mathrm{Cov}\,(X,Y)=0$ 时，称 X, Y 不相关.

(2) 当$0<\sigma_X\sigma_Y<\infty$, 称

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \qquad (3.6.4)$$

为 X, Y 的相关系数(correlation coefficient). 相关系数 ρ_{XY} 也常用 $\rho(X,Y)$ 表示.

§3.6　协方差和相关系数

B. 协方差和相关系数

为了研究随机变量 X, Y 的关系，引入协方差和相关系数的定义. 设 $\sigma_X = \sqrt{\sigma_{XX}}$, $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_{YY}}$ 分别是 X, Y 的标准差.

定义3.6.1　设$\mu_X = \mathrm{E}\,X$, $\mu_Y = \mathrm{E}\,Y$.

(1)　当 σ_X, σ_Y 存在时，称

$$\mathrm{E}\,[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \qquad (3.6.3)$$

为随机变量 X, Y的协方差(covariance),记做 $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$ 或 σ_{XY}. 当 $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0$ 时，称 X, Y 不相关.

(2)　当$0 < \sigma_X\sigma_Y < \infty$，称

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \qquad (3.6.4)$$

为 X, Y 的相关系数(correlation coefficient). 相关系数 ρ_{XY} 也常用 $\rho(X, Y)$ 表示.

§3.6　协方差和相关系数

下面是计算协方差的常用公式:

$$\sigma_{XY} = \mathrm{E}\,(XY) - (\mathrm{E}\,X)(\mathrm{E}\,Y). \qquad (3.6.5)$$

(3.6.5)的证明如下.

$$\begin{aligned}
\sigma_{XY} &= \mathrm{E}\,[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\
&= \mathrm{E}\,(XY - \mu_X Y - X\mu_Y + \mu_X\mu_Y) \\
&= \mathrm{E}\,(XY) - \mu_X\mu_Y - \mu_X\mu_Y + \mu_X\mu_Y \\
&= \mathrm{E}\,(XY) - (\mathrm{E}\,X)(\mathrm{E}\,Y).
\end{aligned}$$

从(3.6.4)和内积不等式马上得到相关系数的性质如下.

§3.6　协方差和相关系数

定理3.6.2　设ρ_{XY} 是X，Y的相关系数，则有

(1)　$|\rho_{XY}| \leqslant 1$;

(2)　$|\rho_{XY}| = 1$的充分必要条件是有常数a，b使得

$$P(Y = a + bX) = 1;$$

(3)　如果 X，Y 独立，则 X，Y不相关.

从定理3.6.2 (2)看出，当$|\rho_{XY}| = 1$ 成立时，X，Y 有线性关系. 这时称 X，Y 线性相关.

§3.6 协方差和相关系数

例3.6.2 设 (X,Y) 在单位圆 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ 内均匀分布，则X，Y不相关，也不独立.

证明 (X,Y) 有联合密度 $f(x,y)=\mathrm{I}[D]/\pi$，其中示性函数

$$\mathrm{I}[D]=\mathrm{I}[\,|x|\leqslant\sqrt{1-y^2}]\cdot\mathrm{I}[\,|y|\leqslant 1].$$

注意 x 在 $(-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2})$ 中的积分是0，用公式 (3.3.2) 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X &= \iint_{\mathrm{R}^2} xf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{I}[D]x\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}x\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{I}[\,|y|\leqslant 1]\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}0\,\mathrm{I}[\,|y|\leqslant 1]\,\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

§3.6 协方差和相关系数

例3.6.2 设 (X,Y) 在单位圆 $D=\{(x,y)|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ 内均匀分布，则X，Y不相关，也不独立.

证明 (X,Y) 有联合密度 $f(x,y)=\mathrm{I}[D]/\pi$，其中示性函数

$$\mathrm{I}[D]=\mathrm{I}[\,|x|\leqslant\sqrt{1-y^2}]\cdot\mathrm{I}[\,|y|\leqslant 1].$$

注意 x 在 $(-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2}\,)$ 中的积分是0，用公式 (3.3.2) 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,X &= \iint_{\mathrm{R}^2} xf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{I}[D]x\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{I}[\,|y|\leqslant 1]\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 0\,\mathrm{I}[\,|y|\leqslant 1]\,\mathrm{d}y = \ 0.
\end{aligned}$$

§3.6　协方差和相关系数

对称地得到$\mathrm{E}\,Y=0$. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(X,Y) &= \mathrm{E}\,(XY)\\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} y\Big(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{I}[\,|y|\leqslant 1]\,\mathrm{d}y\\ &= 0.\end{aligned}$$

所以 X,Y 不相关. 因为知道 X 取值 x 后, Y 在

$$[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}\,]$$

中取值, X,Y不独立.

§3.6 协方差和相关系数

相关系数 ρ_{XY}只表示了X, Y间的线性关系. 当 $\rho_{XY}=0$, 尽管称 X, Y 不相关, 它们之间还可以有其他的非线性关系. 例如当 $Y=X^2$, $X\sim N(0,1)$ 时, (X, Y) 的取值总在抛物线 $y=x^2$ 上, 但是 X, Y 不相关. 这是因为 X 的概率密度 $\varphi(x)$ 是偶函数, $x^3\varphi(x)$ 是奇函数, 所以

$$\mathrm{E}\,X^3=\int_{-\infty}^{\infty}x^3\varphi(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

于是得到

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y)=\mathrm{E}\,[X(Y-1)]=\mathrm{E}\,X^3-\mathrm{E}\,X=0.$$

§3.6 协方差和相关系数

C. 协方差矩阵

定义3.6.2 称随机向量 (X_1, X_2) 的协方差 $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ 构成的矩阵

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵. 因为$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, 所以协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$是 对称矩阵.

定理3.6.3 设$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$有协方差矩阵$\boldsymbol{\Sigma}$, $\mathrm{E}\boldsymbol{X} = (\mu_1, \mu_2)$, 则

(1) $\boldsymbol{\Sigma}$ 是半正定矩阵;

(2) $\boldsymbol{\Sigma}$ 退化的充分必要条件是有不全为零的常数 a_1, a_2 使得

$$P\left(\sum_{i=1}^{2} a_i(X_i - \mu_i) = 0\right) = 1. \qquad (3.6.6)$$

§3.6 协方差和相关系数

C. 协方差矩阵

定义3.6.2 称随机向量 (X_1, X_2) 的协方差 $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ 构成的矩阵

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵. 因为$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, 所以协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$是 对称矩阵.

定理3.6.3 设$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$有协方差矩阵$\boldsymbol{\Sigma}$, $\mathrm{E}\,X = (\mu_1, \mu_2)$, 则

(1) $\boldsymbol{\Sigma}$ 是半正定矩阵;

(2) $\boldsymbol{\Sigma}$ 退化的充分必要条件是有不全为零的常数 a_1, a_2 使得

$$P\left(\sum_{i=1}^{2} a_i(X_i - \mu_i) = 0\right) = 1. \qquad (3.6.6)$$

§3.6 协方差和相关系数

证明 任取2维实向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_i a_j \sigma_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_i a_j \mathrm{E}\left[(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_i a_j (X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{2} a_i (X_i-\mu_i)\right]^2 \\
&\geqslant 0. \qquad\qquad (3.6.7)
\end{aligned}$$

§3.6 协方差和相关系数

所以 $\boldsymbol{\Sigma}$ 半正定. 从(6.7)看出, $\boldsymbol{\Sigma}$ 退化的充分必要条件是有非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ 使得

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{2} a_i(X_i-\mu_i)\right]^2=0.$$

§3.6　协方差和相关系数

所以 $\boldsymbol{\Sigma}$ 半正定. 从(6.7)看出, $\boldsymbol{\Sigma}$ 退化的充分必要条件是有非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ 使得

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{2} a_i(X_i-\mu_i)\right]^2=0.$$

§3.7 正态分布的参数计算

§3.7 正态分布的参数计算

现在回到正态分布的参数计算. 设 Y_1, Y_2 独立都服从标准正态分布, $ad-bc\neq 0$ 和

$$\begin{cases} X_1 = aY_1 + bY_2 + \mu_1, \\ X_2 = cY_1 + dY_2 + \mu_2, \end{cases} \tag{3.7.1}$$

则$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = ac + bd$.

$$(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2;\ \sigma_1^2, \sigma_2^2;\ \rho),$$

其中

$$\sigma_1^2 = a^2 + b^2,\ \sigma_2^2 = c^2 + d^2,\ \rho = (ac+bd)/(\sigma_1\sigma_2).$$

§3.7 正态分布的参数计算

容易计算

$$\begin{cases} \mathrm{E}\,X_1 = \mu_1, \quad \mathrm{E}\,X_2 = \mu_2, \\ \mathrm{Var}\,(X) = \sigma_1^2,\ \mathrm{Var}\,(Y) = \sigma_2^2, \\ \rho_{XY} = \rho. \end{cases} \tag{3.7.2}$$

§3.7　正态分布的参数计算

定理3.7.1　如果 $(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$，则(3.7.2)成立，且 X_1，X_2 独立的充要条件是 X_1, X_2 不相关.

根据上述定理，已知某随机向量Y服从正态分布后，只要再计算它的数学期望、协方差和相关系数就得到具体的分布了.

§3.7 正态分布的参数计算

例3.7.1 设 $X \sim N(1,2)$, $Y \sim N(3,4)$, X, Y 独立, 求 $U = 4X + 3Y$, $V = 6X - 2Y$ 的联合分布和边缘分布.

解 (U, V) 服从二维正态分布. 利用 $\mathrm{E}\,X = 1$, $\mathrm{E}\,Y = 3$ 计算出

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,U &= 4\mathrm{E}\,X + 3\mathrm{E}\,Y = 4 + 3 \times 3 = 13,\\ \mathrm{E}\,V &= 6\mathrm{E}\,X - 2\mathrm{E}\,Y = 6 - 2 \times 3 = 0.\end{aligned}$$

因为 X, Y 独立, 所以从 $\sigma_X^2 = 2$, $\sigma_Y^2 = 4$ 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(U) &= 4^2\sigma_X^2 + 3^2\sigma_Y^2 = 16 \times 2 + 9 \times 4 = 68,\\ \mathrm{Var}\,(V) &= 6^2\sigma_X^2 + 2^2\sigma_Y^2 = 36 \times 2 + 4 \times 4 = 88.\end{aligned}$$

§3.7　正态分布的参数计算

例3.7.1　设 $X \sim N(1,2)$, $Y \sim N(3,4)$, X, Y 独立, 求 $U = 4X + 3Y$, $V = 6X - 2Y$ 的联合分布和边缘分布.

解　(U, V) 服从二维正态分布. 利用 $\mathrm{E}\,X = 1$, $\mathrm{E}\,Y = 3$ 计算出

$$\mathrm{E}\,U = 4\mathrm{E}\,X + 3\mathrm{E}\,Y = 4 + 3 \times 3 = 13,$$
$$\mathrm{E}\,V = 6\mathrm{E}\,X - 2\mathrm{E}\,Y = 6 - 2 \times 3 = 0.$$

因为 X, Y 独立, 所以从 $\sigma_X^2 = 2$, $\sigma_Y^2 = 4$ 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(U) &= 4^2\sigma_X^2 + 3^2\sigma_Y^2 = 16 \times 2 + 9 \times 4 = 68,\\ \mathrm{Var}\,(V) &= 6^2\sigma_X^2 + 2^2\sigma_Y^2 = 36 \times 2 + 4 \times 4 = 88.\end{aligned}$$

§3.7 正态分布的参数计算

因为 $X' = X - \mathrm{E}\,X$ 和 X 有相同的方差$\mathrm{E}\,(X')^2 = 2$, $Y' = Y - \mathrm{E}\,Y$ 和 Y 有相同的方差 $\mathrm{E}\,(Y')^2 = 4$, 且 X', Y' 独立, 所以 U, V 有协方差

$$\begin{aligned}
\sigma_{UV} &= \mathrm{E}\,(U - \mathrm{E}\,U)(V - \mathrm{E}\,V) = \mathrm{E}\,(4X' + 3Y')(6X' - 2Y') \\
&= 24\mathrm{E}\,(X')^2 - 6\mathrm{E}\,(Y')^2 + 10\mathrm{E}\,(X'Y') \\
&= 24 \times 2 - 6 \times 4 + 10 \times 0 \\
&= 24.
\end{aligned}$$

再计算 U, V 的相关系数如下:

$$\rho_{UV} = \sigma_{UV}/\sigma_U\sigma_V = 24/\sqrt{68 \times 88} = 0.31.$$

最后得到 $(U, V) \sim N(13, 0; 68, 88; 0.31)$. 则 $U \sim N(13, 68)$, $V \sim N(0, 88)$.