

# 中国科学技术大学 2015-2016 学年第 1 学期

## 《单变量微积分》期末考试试卷

(闭卷 120 分钟 2016年1月15日)

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分 数								
评卷人								

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.  
 2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.  
 3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	评卷人

一、(本题 10 分, 每小题 5 分) 求不定积分.

(1)  $\int x^2 \arctan x dx$

(2)  $\int \frac{1}{x(1+x^4)} dx$

得分	评卷人

二、(本题 20 分, 每小题 5 分) 求积分.

(1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$

(2)  $\int_0^1 \frac{(1-x)^2 e^x}{(1+x^2)^2} dx$

(3)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{a^x + 1} dx \quad (a > 0)$

(4)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx$

得分	评卷人

三、(本题 10 分, 每小题 5 分) 求极限.

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+k}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t dt}{\ln(1+x^4)}$

得分	评卷人

四、(本题 20 分) 求在  $[0, +\infty)$  上的连续可微函数  $f(x)$ ,  $f(0) = 1$ , 使得对任意  $t > 0$ , 曲线段  $L: y = f(x), x \in [0, t]$  的弧长恰好等于  $L$  与两个坐标轴及垂直线  $x = t$  所围成的区域的面积. 并求  $L$  绕  $x$  轴旋转所得的旋转体的体积.

得分	评卷人

五、(本题 20 分, 每小题 10 分) 求微分方程的通解

(1)  $(\sin x)y'' - (\cos x)y' = \sin^2 x + 1.$

(2)  $y'' - 3y' + 2y = 2x.$

得分	评卷人

六、(本题 10 分) 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 且满足方程

$$f(x+a) = -f(x). \quad \text{求证: } \int_0^{2a} xf(x)dx = -a \int_0^a f(t)dt.$$

得分	评卷人

七、(本题 10 分) 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 且  $0 \leq f(x) \leq 1$ .

求证:  $2 \int_0^1 xf(x)dx \geq \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2$ , 并求使上式成为等式的连续函数.