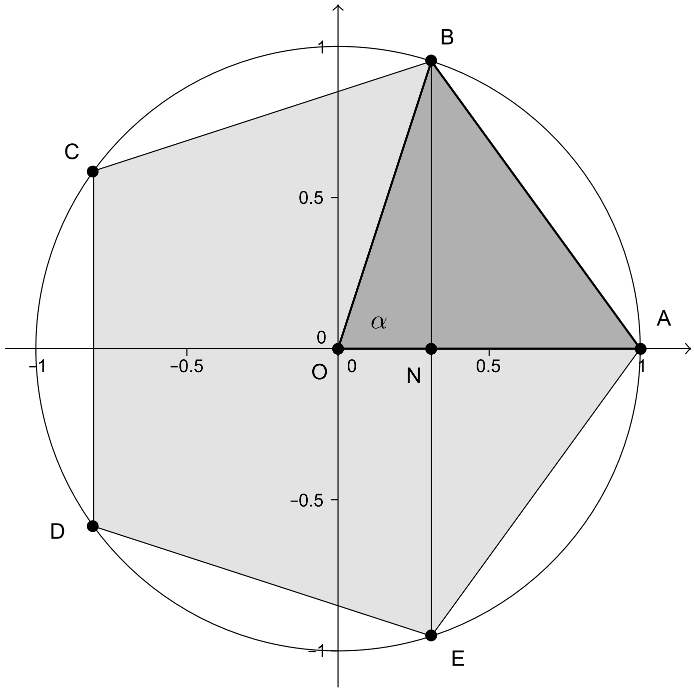
Konstrukcija pravilnog peterokuta

Kako bismo konstruirali pravilan peterokut, očito je kako moramo biti u stanju, koristeći samo šestar i ravnalo, konstruirati njegov karakterističan trokut, te onda nanijeti njegovu bazu pet puta na kružnicu koja za središte ima vrh nasuprotan bazi tog trokuta, a za polumjer duljinu krakova. No, za to moramo, također biti u stanju konstruirati ili sve stranice ili barem jedan kut karakterističnog trokuta. Kako duljina baze zapravo implicitno ovisi o veličini kuta, koncentrirat ćemo se na konstrukciju kuta α, kao što je prikazano na slici ispod.

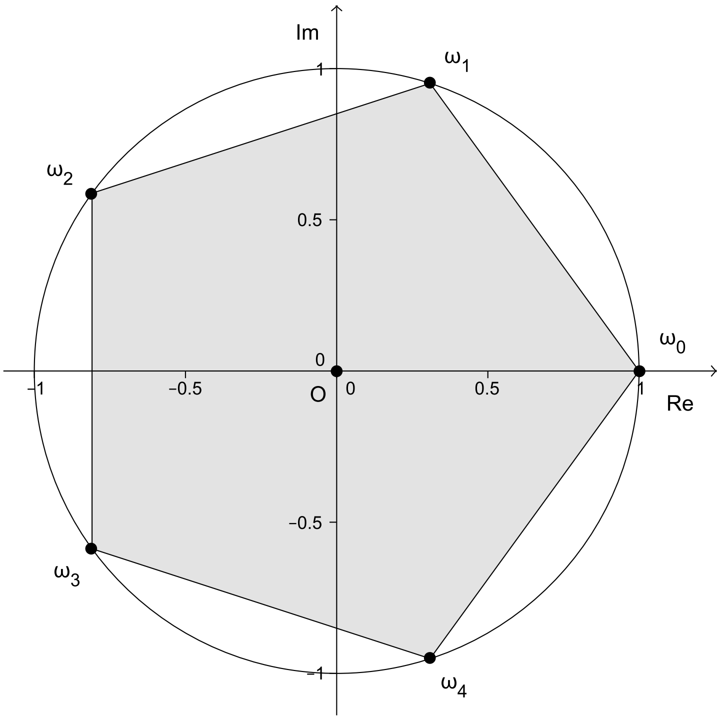


Slika 1: Peterokut i njegov karakterističan trokut.

Primijetimo kako smo označili i dužinu $\overline{BN}$, koja će biti kritična u našoj konstrukciji, jer siječe dužinu $\overline{OA}$ pod pravim kutom. To se može lako pokazati jer su trokuti OAB i OEA sukladni. Također su, kako vrijedi $|OB| = |OE|$ i kako je kut između pri vrhu O u oba trokuta veličine α, trokuti ONB i OEN sukladni. Stoga, kutovi $\angle NBO$ i $\angle OEN$ imaju jednake veličine, a isto tako i $\angle ONB$ i $\angle ENO$ (označimo kraće s γ_1 i γ_2). Kako γ_1 i γ_2 leže na istom pravcu, njihov zbroj mora biti 180°, i.e. mora biti $\gamma_1 + \gamma_2 = 180°$. Ali, $\gamma_1 = \gamma_2$ (označimo sad oba s γ), jer smo dokazali kako se radi o sukladnim trokutima pa mora vrijediti $2\gamma = 180°$, tj. $\gamma = 90°$. Iako ne znamo, u nekom smislu, konstruirati kut $\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$, možemo zaobići problem konstrukcijom dužine ON, a zatim okomice iz te dužine te onda nanijeti duljinu OB iz vrha O na BN, te tako zapravo dobiti kut α. No, duljina dužine ON je zapravo jednaka kosinusu kuta α. Stoga se naš problem svodi na izračunavanje kosinusa kuta od 72°. U ovom koraku činimo bitan prijelaz, koristeći činjenicu kako je $(\mathbb{C}, +) \cong (\mathbb{R}^2, +)$ (skup kompleksnih brojeva uz operaciju zbrajanja izomorfan je skupu vektora u ravnini također uz operaciju zbrajanja) te ćemo koristiti kompleksne korijene jednadžbe $x^5 - 1 = 0$ (označene s ω_k, gdje je $k = 0, \ldots, 4$). Kompleksni korijeni jednadžbe $x^5 - 1 = 0$ imaju zanimljivo svojstvo, a to je upravo činjenica da čine vrhove pravilnog peterokuta, što se može vidjeti iz formule za korijen kompleksnog broja (jer iz $x^5 - 1 = 0$ slijedi $x = \sqrt[5]{1}$):

$$\omega_k = \cos 2\pi \frac{k}{n} + i \sin 2\pi \frac{k}{n},$$

gdje je $k = 0, \ldots, n-1$ (u našem slučaju je $n = 5$). Primijetimo kako smo u gornjoj formuli iskoristili činjenicu da je $r = 1$ (koristimo jediničnu kružnicu) i $\arg 1 = 0$ (jer kompleksan broj $z = 1$ leži na realnoj osi pa mu je imaginaran dio jednak nuli). Isto tako primijetimo kako smo sigurni da će jedno rješenje jednadžbe $x^5 - 1 = 0$ biti $\omega_0 = 1$ jer je $1^5 - 1 = 1 - 1 = 0$. Distribucija temeljnih korijena za $n = 5$ u Gaussovoj ravnini može se jasnije vidjeti na slici ispod.



Slika 2: Rješenja jednadžbe $x^5 - 1 = 0$.

Važna opservacija je također da vrijedi $\omega_k = (\omega_1)^k$ (što se može lako pokazati po DeMoivreovoj formuli). Primijetimo kako je $\omega_k = \overline{\omega_{n-k}}$ (konjugirano kompleksan broj od z označavat ćemo s $\overline{z}$), što se također može vrlo lako pokazati:

$$
\begin{aligned}
\omega_{n-k} &= \cos 2\pi\frac{n-k}{n} + i\sin 2\pi\frac{n-k}{n} \\
&= \cos 2\pi - 2\pi\frac{k}{n} + i\sin 2\pi - 2\pi\frac{k}{n}.
\end{aligned}
$$

Koristeći činjenicu kako je $\cos 2\pi - x = \cos 2\pi \cos x + \sin 2\pi \sin x = \cos x$ i $\sin 2\pi - x = \sin 2\pi \cos x - \sin x \cos 2\pi = -\sin x$, imamo:

$$
\omega_{n-k} = \cos 2\pi\frac{k}{n} - i\sin 2\pi\frac{k}{n} = \overline{\omega_k}.
$$

Iz ovoga slijedi još bitnija činjenica, a to je da je $\omega_k + \omega_{n-k} = 2\cos 2\pi\frac{k}{n}$. Stoga, uzmemo li $k = 1$, i naravno $n = 5$, imamo $\omega_1 + \omega_4 = 2\cos 72^\circ$. Također, dobivamo realan broj i kada zbrojimo ω_2 i ω_3 (to se može i bolje uočiti ukoliko promotrimo zbrajanje kompleksnih brojeva kao zbrajanje vektora, što je zapravo "ista stvar"). Trenutno nas zanima samo veličina $\cos 72^\circ = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ jer iz nje, ukoliko želimo, možemo dobiti zapravo sve koordinate ovih korijena. Dalje, znamo da je, kako smo prethodno i napomenuli, jedno rješenje realan broj 1. Stoga slijedi da je polinom $x^n - 1$ djeljiv polinomom $x - 1$. Ukoliko ih podijelimo u kontekstu jednadžbe $x^n - 1 = 0$ dobivamo:

$$
(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) = 0.
$$

Dakle, mora vrijediti $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$ i kako smo argumentirali da je $\omega_k = (\omega_1)^k$ (ω_1 ćemo odsada, upravo zbog ovog svojstva, označavati samo s ω), mora vrijediti i $\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \ldots + \omega + 1 = 0$, tj. vrijedi sljedeća lema:

Lema. Za temeljne korijene reda n vrijedi:

$$
\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.
$$

Primijetimo da isto tako, onda vrijedi i:

$$
\sum_{k=1}^{n-1} \omega^k = -1.
$$

Vratimo se na naš peterokut. Označimo $x_1 = \omega_1 + \omega_4$ i $x_2 = \omega_2 + \omega_3$. Po prethodnoj lemi očito je kako vrijedi $x_1 + x_2 = -1$. Isto tako, uzmemo li umnožak ova dva realna broja, dobivamo:

$$x_1x_2 = \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \omega_4\omega_2 + \omega_4\omega_3.$$

Malo se igramo s oznakama, jer rekli smo kako je zapravo $\omega_k\omega_l = \omega^k\omega^l = \omega^{k+l} = \omega_{k+l}$ (opet se lako dokaže po formuli za množenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku, ukoliko je potrebno daljnje opravdanje). Stoga imamo:

$$x_1x_2 = \omega_3 + \omega_4 + \omega_6 + \omega_7.$$

Očito je $\omega^6 = \omega^{5+1} = \omega^5\omega^1 = \omega^0\omega^1 = \omega$, a isto tako i $\omega_7 = \omega_2$. Stoga je:

$$x_1x_2 = \omega_3 + \omega_4 + \omega_1 + \omega_2 = -1.$$

Sada znamo umnožak i zbroj od x_1 i x_2 pa njihove vrijednosti možemo pronaći pomoću kvadratne jednadžbe $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2 = 0$. Imamo, dakle, $x^2+x-1 = 0$. Rješenja su tada:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Preostaje jednostavno promisliti koje će rješenje odgovarati zbroju $\omega_1 + \omega_4$. Znamo kako je $-1-\sqrt{5} < 0$. No, zbroj kosinusa od ω_1 i ω_4 mora biti pozitivan (jer se nalaze na pozitivnoj strani realne osi, što se može vidjeti iz prethodne slike) pa očito mora biti:

$$\omega_1 + \omega_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

No, rekli smo kako je $\omega_1 + \omega_4 = 2\cos 72^\circ$, pa vrijedi:

$$\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Dakle, kako imamo samo korijene i operacije zbrajanja i množenja, dužinu $\overline{ON}$ (dakle, upravo ovaj kosinus) možemo konstruirati. No, potpunosti radi, izračunajmo točno vrijednosti ovih temeljnih korjena u radikalima. Znamo kako vrijedi $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos x^2}$ pa je stoga:

$$\sin 72^\circ = \pm\sqrt{1 - \frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Nadalje, želimo odrediti i ω_2 i ω_3. Kako je $\omega_2 + \omega_3 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos 36^\circ$ (sa slike se lako može vidjeti, a i pokazati da ω_2 i ω_3 s apscisom zatvaraju kut od 36°), vrijedi $\cos 36^\circ = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Dalje je

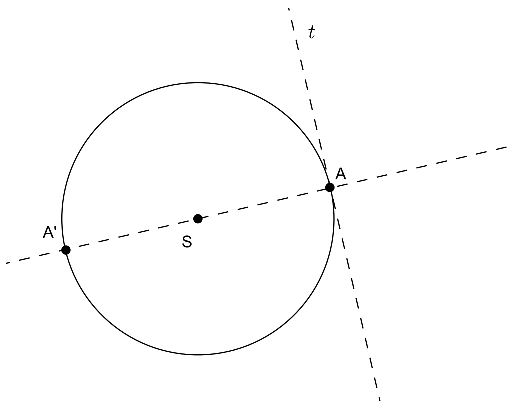
$$\sin 36^\circ = \pm\sqrt{1 - \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{16}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Dakle, pravilan peterokut upisan u jediničnu kružnicu u Gaussovom koordinatnom sustavu ima za vrhove sljedeće kompleksne brojeve:

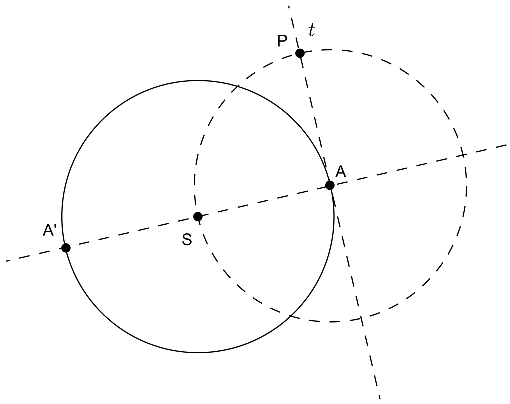
$$\begin{aligned}
\omega_0 &= 1, \\
\omega_1 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, \\
\omega_2 &= -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \\
\omega_3 &= -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \\
\omega_4 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.
\end{aligned}$$

Tako se problem konstrukcije peterokuta svodi na problem konstrukcije broja $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Dat ćemo jedan način konstrukcije:

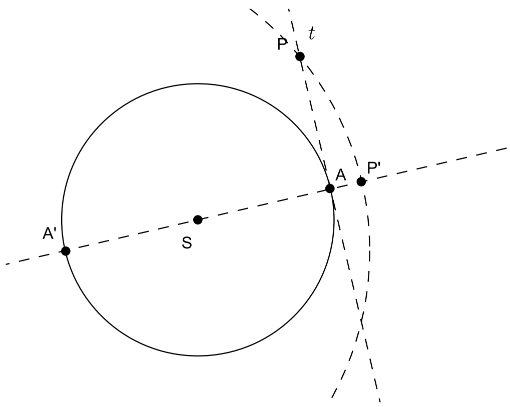
1. Prvo konstruiramo kružnicu K (nekog polumjera r) te promjer $A'A$ na istoj kružnici. U točki A povučemo tangentu t, odnosno okomicu na $A'A$.



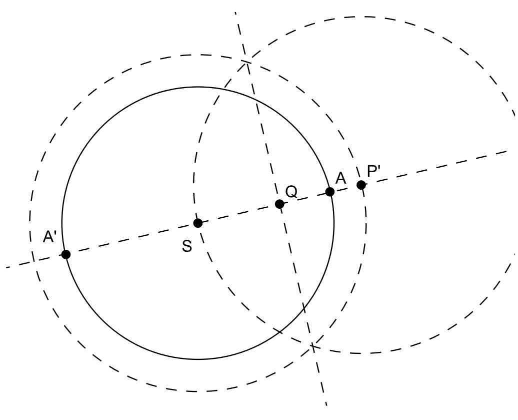
2. Na tangentu t nanesemo točku P tako da bude $|AP| = |SA|$. Time smo dobili pravokutan trokut (koji se i ne vidi na slici), s katetama r i $2r$. Njegova hipotenuza $\overline{A'P}$ će biti duljine $r\sqrt{5}$.



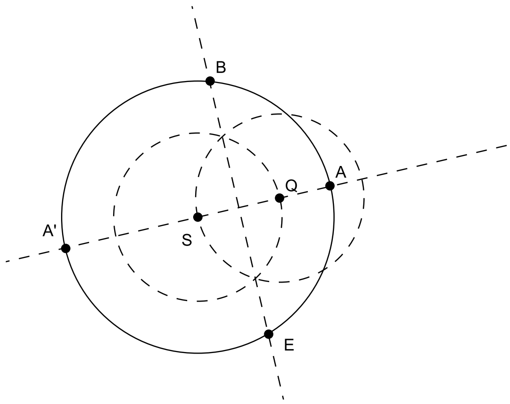
3. Nanesemo duljinu katete $\overline{A'P}$ na pravac $A'A$ kako bismo dobili točku P' takvu da je $|A'P'| = |A'P|$. Tada je $|SP'| = r\sqrt{5} - r = r(\sqrt{5} - 1)$.



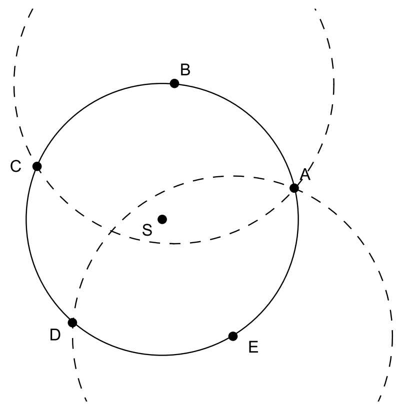
4. Pronađemo polovište Q dužine $\overline{SP'}$ te će tada biti $|SQ| = r\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



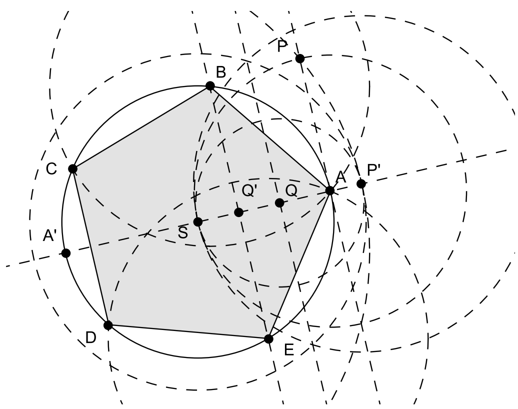
5. Nadalje, pronađemo simetralu dužine $\overline{SQ}$, te u točkama kojima siječe kružnicu K dobivamo dva vrha peterokuta, B i E. Očito je kako je udaljenost od S do te simetrale jednaka $r\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (što odgovara kosinusu kuta $\angle BSA$).



6. Na kraju, nanosimo duljinu dužine $\overline{AB}$ iz točke B na kružnicu K i dobivamo vrh C te također nanesemo duljinu dužine $\overline{EA}$ iz točke E i dobivamo vrh D. Dobili smo sve vrhove peterokuta.



7. Spojimo točke A, B, C, D i E te time završavamo konstrukciju pravilnog peterokuta. Na slici ispod prikazana je završena konstrukcija sa svim tragovima konstrukcije.



Svojstva pravilnog peterokuta

Ostalo je još prokomentirati odnos duljine stranice peterokuta a i polumjera njemu opisane kružnice r. Primijetimo kako za karakteristični trokut pravilnog peterokuta po kosinusovom poučku vrijedi:

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos 72°.$$

Iz toga možemo zaključiti kako je:

$$a = r\sqrt{2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Visina v karakterističnog trokuta na stranicu a je tada jednaka:

$$v = \sqrt{r^2 - r^2\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}.$$

Tada je površina karakterističnog trokuta jednaka:

$$P' = \frac{r^2}{4}\sqrt{\frac{5\sqrt{5}+15-5-3\sqrt{5}}{4}} = \frac{r^2}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Površina pravilnog peterokuta je tada jednaka peterostrukoj površini karakterističnog trokuta, tj. $P = 5P'$ ili preciznije:

$$P = r^2\frac{5}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

Kako je visina karakterističnog trokuta jednaka v, tada je "velika visina", odnosno visina spuštena iz vrha peterokuta na nasuprotnu stranicu jednostavno $w = r + v$, a to je:

$$w = r\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}.$$

Duljine svih dijagonala su jednakih veličina, što je lako dokazivo pomoću npr. SSS poučka o sukladnosti dvaju trokuta. Njihova duljina može se izračunati pomoću kosinusovog poučka:

$$d = \sqrt{2a^2\left(1-\cos 108^\circ\right)}.$$

Za to nam je potreban kosinus kuta od 108°. Znamo kosinus kuta od 72° i znamo kako je $108^\circ = 180^\circ - 72^\circ$. Dakle, tražimo:

$$\cos\left(180^\circ - 72^\circ\right) = \cos 180^\circ \cos 72^\circ + \sin 180^\circ \sin 72^\circ = -\cos 72^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Uvrštavajući to u formulu za d imamo:

$$d = a\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Definirajmo vektore koji čine stranice peterokuta (uzmimo da $A \in \mathbb{R}^2$ odgovara $\omega_0 \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{R}^2$ odgovara $\omega_1 \in \mathbb{C}$, itd.). Tada je:

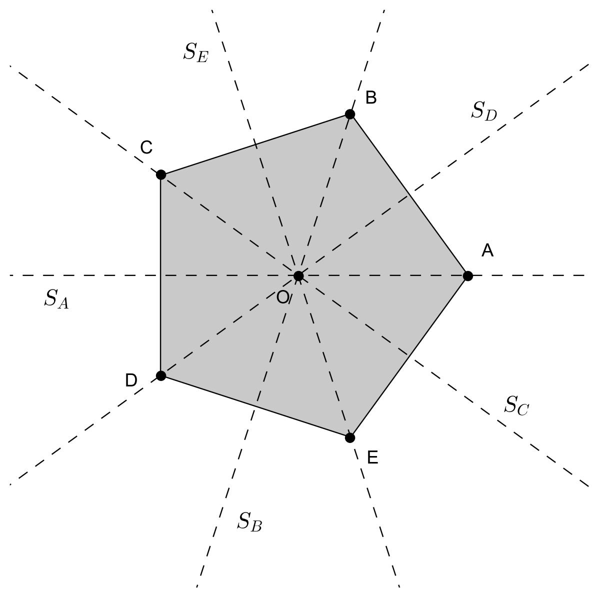
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \frac{\sqrt{5}-5}{4}\vec{i} + \frac{\vec{j}}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, \\
\overrightarrow{BC} &= -\frac{\sqrt{5}}{2}\vec{i} + \frac{\vec{j}}{2}\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CD} &= -\vec{j}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \\
\overrightarrow{DE} &= \frac{\sqrt{5}}{2}\vec{i} + \frac{\vec{j}}{2}\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right), \\
\overrightarrow{EA} &= \frac{5-\sqrt{5}}{4}\vec{i} + \frac{\vec{j}}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.
\end{aligned}$$

Napomenimo samo, prije nego pokažemo zašto su ovi vektori bitni u konstrukciji dodekaedra, kako unutrašnji kut pravilan peterokuta iznosi 72°. Kako se pravilan peterokut sastoji od pet karakterističnih trokuta, preostala dva kuta su $\frac{180^\circ-72^\circ}{2} = 54^\circ$. Kako svaki krak karakterističnog trokuta dijeli kut peterokuta na dva jednaka dijela, kut pravilnog peterokuta je jednak 108° (što se može pokazati i pomoću $\frac{540^\circ}{5}$).

Dihedralna grupa D_5

Navest ćemo još jedno bitno svojstvo pravilnog peterokuta koje zaslužuje svoje posebno poglavlje i nadam se kako će biti lijepa nadopuna mom radu iz apstraktne algebre. Naime, simetrije peterokuta čine jednu posebnu grupu koja se naziva dihedralna grupa i označava se s D_5 (grupa D_6 odgovara simetrijama šesterokuta, et cetera). Možemo primijetiti kako je peterokut sam po sebi zapravo invarijantan na rotacije oko ishodišta za kut od 72° jer ga takva rotacija preslikava u njega samog. No, to se također događa i za rotacije $2 \cdot 72^\circ$, $3 \cdot 72^\circ$, $4 \cdot 72^\circ$ i $5 \cdot 72^\circ = 360^\circ$. Posljednja rotacija će biti identiteta jer svaku točku preslika u sebe samu. Ove rotacije, za višekratnike kuta 72° označavat ćemo redom R, R^2 (rotacija za $2 \cdot 72^\circ$), R^3 i R^4. Neutralan element označit ćemo s E (i odgovarat će rotaciji R^5, tj. R^0). Primijetimo kako će svaka rotacija imati svoj inverz, a to je $(R^n)^{-1} = R^{-n} = R^{5-n}$, gdje je $n = 1, 2, 3, 4$. Dakle, bit će $R^{-1} = R^4$, $R^{-2} = R^3$, $R^{-3} = R^2$ i $R^{-4} = R$. Dalje imamo osne simetrije, tj. refleksije, koje su prikazane na slici ispod.



Slika 3: Osi simetrije pravilnog peterokuta.

Jasno je kako će svaka simetrija biti inverz sama sebi. No, mogu li se prikazati ostale simetrije pomoću kompozicije jedne fiksne simetrije (npr. osi simetrije koja se podudara s apscisom) i nekoliko rotacija? Uvedimo oznaku $S_A = S$. Lako je vidjeti kako vrijede sljedeće tablice permutacija:

$$S = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ A & E & D & C & B \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ B & C & D & E & A \end{pmatrix}.$$

Nadalje, sa slike se može vidjeti kako se S_B zapravo može prikazati kao:

$$S_B = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ C & B & A & E & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ C & D & E & A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ A & E & D & C & B \end{pmatrix} = R^2 S.$$

Ostale simetrije mogu se prikazati na sljedeći način:

$$S_C = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ E & D & C & B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ E & A & B & C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ A & E & D & C & B \end{pmatrix} = R^4 S.$$

$$S_D = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ B & A & E & D & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ B & C & D & E & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ A & E & D & C & B \end{pmatrix} = RS.$$

$$S_E = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ D & C & B & A & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ D & E & A & B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ A & E & D & C & B \end{pmatrix} = R^3 S.$$

Pogledajmo što se događa napravimo li prvo rotaciju, a zatim simetriju:

$$SR = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ A & E & D & C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ B & C & D & E & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ E & D & C & B & A \end{pmatrix} = R^4 S.$$

Iz ovih jednadžbi možemo pronaći i ostale kompozicije. Tako vrijedi:

$$\begin{aligned} SR^2 &= (SR)R = (R^4S)R = R^4(SR) = R^4R^4S = R^5R^3S = R^3S, \\ SR^3 &= (SR^2)R = (R^3S)R = R^3(SR) = R^3R^4S = R^2R^5S = R^2S, \\ SR^4 &= (SR^3)R = (R^2S)R = R^2(SR) = R^2R^4S = RR^5S = RS. \end{aligned}$$

Pokušamo li komponirati gornje izraze dalje s R, dobivamo još neke izraze koji nam možda budu od pomoći:

$$\begin{aligned} RSR &= R(SR) = R(R^4S) = R^5S = S, \\ RSR^2 &= R(R^3S) = R^4S, \\ RSR^3 &= R(R^2S) = R^3S, \\ RSR^4 &= R(RS) = R^2S. \end{aligned}$$

Konstruirajmo sada tablicu kompozicija:

$\circ$	E	R	R^2	R^3	R^4	S	RS	R^2S	R^3S	R^4S
E	E	R	R^2	R^3	R^4	S	RS	R^2S	R^3S	R^4S
R	R	R^2	R^3	R^4	E	RS	R^2S	R^3S	R^4S	S
R^2	R^2	R^3	R^4	E	R	R^2S	R^3S	R^4S	S	RS
R^3	R^3	R^4	E	R	R^2	R^3S	R^4S	S	RS	R^2S
R^4	R^4	E	R	R^2	R^3	R^4S	S	RS	R^2S	R^3S
S	S	R^4S	R^3S	R^2S	RS	E	R^4	R^3	R^2	R
RS	RS	S	R^4S	R^3S	R^2S	R	E	R^4	R^3	R^2
R^2S	R^2S	RS	S	R^4S	R^3S	R^2	R	E	R^4	R^3
R^3S	R^3S	R^2S	RS	S	R^4S	R^3	R^2	R	E	R^4
R^4S	R^4S	R^3S	R^2S	RS	S	R^4	R^3	R^2	R	E

Znamo kako operator rotacije $R_\theta \in SO(2)$ (gdje je θ kut rotacija, a $SO(2)$ specijalna ortogonalna grupa matrica dimenzija 2×2) u matričnom obliku možemo zapisati kao:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Tada je operator rotacije za 72°, $R \in SO(2)$ (ne zaboravimo kako je $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ i $\sin 72^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$) zadan matricom:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{4} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} & \frac{\sqrt{5}-1}{4} \end{bmatrix}.$$

Prokomentirajmo samo korisnost ove matrice. Znamo kako je temeljno rješenje od $x^5 - 1 = 0$ zapravo $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Sva ostala rješenja, odnosno korijene, možemo dobiti potenciranjem ovog korijena. Stoga možemo napisati:

$$R = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\omega) & \mathrm{Im}(\overline{\omega}) \\ \mathrm{Im}(\omega) & \mathrm{Re}(\omega) \end{bmatrix}, \qquad R^2 = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\omega^2) & \mathrm{Im}(\overline{\omega^2}) \\ \mathrm{Im}(\omega^2) & \mathrm{Re}(\omega^2) \end{bmatrix},$$

$$R^3 = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\omega^3) & \mathrm{Im}(\overline{\omega^3}) \\ \mathrm{Im}(\omega^3) & \mathrm{Re}(\omega^3) \end{bmatrix}, \qquad R^4 = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\omega^4) & \mathrm{Im}(\overline{\omega^4}) \\ \mathrm{Im}(\omega^4) & \mathrm{Re}(\omega^4) \end{bmatrix},$$

$$R^5 = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\omega^5) & \mathrm{Im}(\overline{\omega^5}) \\ \mathrm{Im}(\omega^5) & \mathrm{Re}(\omega^5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

No, primijetimo kako i operator osne simetrije S (ne zaboravimo kako smo za to uzeli simetriju obzirom na apscisu pa ćemo mijenjati samo predznak ordinati) možemo zapisati kao:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Autor ovog rada je već pokazao u svom radu apstraktne algebre kako je uistinu matrica operatora rotacije iz specijalne ortogonalne grupe, no vrijedi li to i za matricu operatora simetrije? Promotrimo transponiranu matricu matrice S:

$$S^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = S.$$

Kako bi vrijedilo $S \in O(2)$, tj. da je ova matrica u ortogonalnoj grupi matrica, mora biti $S^T S = SS^T = I$ (gdje je I jedinična matrica). Na našu sreću vrijedi $S^T = S$ pa mora biti $S^2 = I$. Iako znamo kako je to točno, možemo ipak lako provjeriti:

$$S^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Dakle, vrijedi $S \in O(2)$. No, je li $S \in SO(2)$? Za to nam je potreban još jedan uvjet, da to je $\det S = 1$. Lako je uočiti kako je $\det S = 1 \cdot (-1) - 0 = -1$ te stoga ne može biti da je $S \in SO(2)$. Najbolje što možemo reći jeste kako je $R, S \in O(2)$. Tada su i njihove proizvoljne kompozicije u $O(2)$ (što je dokazano u mom drugom radu). Napomenimo još kako smo uzeli zapravo $E = I$, a I je trivijalno u $SO(2)$ pa tako i u $O(2)$. Nadalje, neka je $D_5 = \{E, R, R^2, R^3, R^4, S, RS, R^2S, R^3S, R^4S\}$ skup. Pokazali smo kako su kompozicije svih elemenata iz D_5 opet u D_5 (a to je vidljivo iz gornje tablice), te kako svaki element iz D_5 ima inverz (komentirano odmah na početku poglavlja). Također, vrijedi $D_5 \subset O(2)$. Ova tri zanimljiva svojstva su upravo ono što nam je dovoljno da proglasimo D_5 uz operaciju kompozicije podgrupom od $O(2)$, a time i grupom (koja nažalost nije komutativna jer napraviti SR nije isto što i napraviti RS; očito iz $SR = R^4S$). Dakle uređeni par $(D_5, \circ)$ je nekomutativna grupa koja se naziva dihedralnom grupom (u našem slučaju za peterokut) i označava se jednostavno s D_5. Prokomentirajmo samo kako je ova grupa zapravo podgrupa od $O(2)$ generirana elementima $R, S \in O(2)$ uz definirajuće jednadžbe $R^4 = E$, $S^2 = E$ i $SR = R^4S$.

Možemo definirati jednu (recimo trivijalnu) podgrupu, vidljivu iz gornje tablice. To je podgrupa (označimo ju s $\mathcal{R}$) koja sadrži samo rotacije:

$\circ$	E	R	R^2	R^3	R^4
E	E	R	R^2	R^3	R^4
R	R	R^2	R^3	R^4	E
R^2	R^2	R^3	R^4	E	R
R^3	R^3	R^4	E	R	R^2
R^4	R^4	E	R	R^2	R^3

Primijetimo kako je ova grupa izomorfna grupi Ω (tj. vrijedi $\mathcal{R} \cong \Omega$) koju čine rješenja jednadžbe $x^5 - 1 = 0$ na kružnici (označimo samo $e = \omega^0$):

$\cdot$	e	ω	ω^2	ω^3	ω^4
e	e	ω	ω^2	ω^3	ω^4
ω	ω	ω^2	ω^3	ω^4	e
ω^2	ω^2	ω^3	ω^4	e	ω
ω^3	ω^3	ω^4	e	ω	ω^2
ω^4	ω^4	e	ω	ω^2	ω^3

Možemo pak primijetiti kako su obje grupe izomorfne grupi $(\mathbb{Z}_5, +)$. Još jedan način gledanja na grupu rotacija jeste preko permutacija. Uzmemo li oznaku $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ puta}} = f^n$ i definiramo li permutaciju

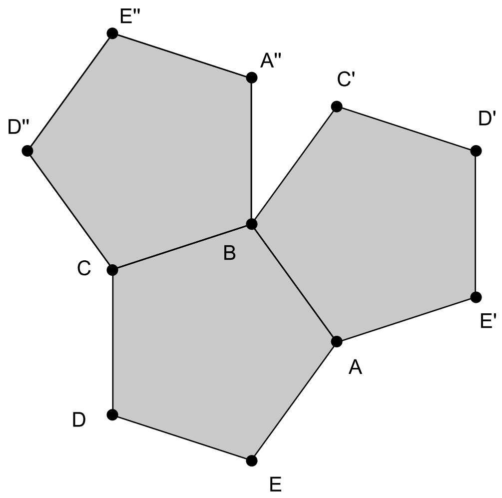
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

tada možemo lako vidjeti (još u izvodu dihedralne grupe D_5) kako će grupa permutacija $\mathcal{F} = \{\epsilon, f, f^2, f^3, f^4\}$ biti izomorfna grupi $\mathcal{R}$. Jedno bitno svojstvo ove podgrupe jeste to da je normalna podgrupa od D_5 jer je zatvorena na konjugaciju. Koji god $x \in \mathcal{R}$ i $y \in D_5$ uzeli, vrijedit će $yxy^{-1} \in \mathcal{R}$ (vidljivo u donjem desnom 5×5 bloku tablice od D_5). Ne moramo ni napomenuti kako je dihedralna grupa D_5 zapravo izomorfna grupi permutacija generiranoj permutacijama f (definirano iznad) i g, gdje je:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

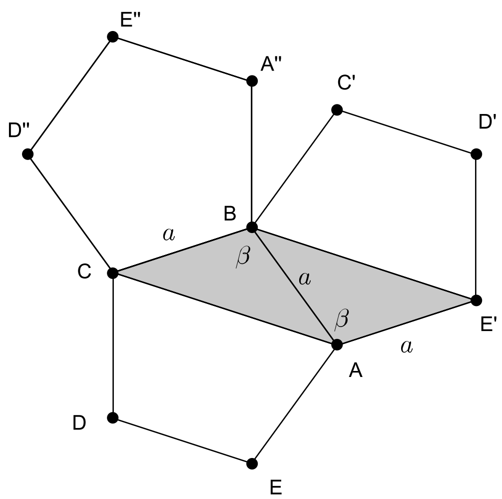
Konstrukcija dodekaedra

Prvo ćemo pokazati kako konstruirati jedan dio mreže u ravnini za konstrukciju dodekaedra, a kasnije ćemo pokazati da je pomoću te mreže (i malo linearne algebre) uistinu moguće konstruirati dodekaedar. Dodat ćemo šest novih točki, E', D' i C' te A'', E'' i D'', kao što je prikazano na slici ispod. Drugim riječima, nad svaku stranicu početnog pravilnog peterokuta konstruirat ćemo novi pravilni peterokut.



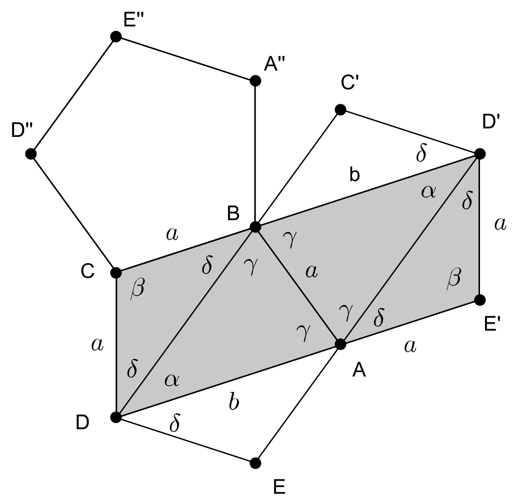
Slika 4: Fragment mreže peterokuta.

Pokažimo kako je $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AE'}$. Kako bi to vrijedilo, mora biti $|CB| = |AE'|$ (trivijalno) i $CB \parallel AE'$. Promotrimo sliku ispod.



Slika 5: Trokuti CAB i $AE'B$ u mreži peterokuta.

Na slici su naznačeni kutovi jednakih veličina ($\beta = 108°$) i stranice jednakih duljina (tj. a). Po stranica-kut-stranica poučku, očito je $CAB \cong AE'B$. Kako su ti trokuti jednakokračni ($|CB| = |BA| = |AE'| = a$), tada su i kutovi $\angle BCA$, $\angle CAB$ pa tako i $\angle ABE'$ te $\angle AE'B$ jednakih veličina. Iz toga slijedi i da su $\angle E'BC$ i $\angle CAE'$ jednakih veličina. Kako je $CAE'B$ četverokut kojemu su nasuprotni kutovi jednakih veličina i parovi nasuprotnih stranica jednakih duljina, radi se o paralelogramu pa je $CB \parallel AE$. Dakle, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AE'}$. Dokazat ćemo još i kako vrijedi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{D'E'}$ na sličan način pomoću slike ispod.



Slika 6: Četverokut $DED'C$ u mreži peterokuta.

Za početak, očito je kako su trokuti $AE'D'$ i $BC'D'$ sukladni (po stranica-kut-stranica poučku) pa su dijagonale $\overline{BD'}$ i $\overline{AD'}$ jednakih duljina (tj. b). Nadalje, po tome su sukladni i trokuti BAD' i DAB. Kut $\angle CBD'$ je tada veličine $\delta + 2\gamma$. No, $\beta = 108°$ pa je $\delta = 36°$. Tako je i $\alpha = 108° - 72° = 36°$. Zatim je $2\gamma = 180° - 36° = 144°$. Tako je $\delta + 2\gamma = 180°$. Dakle, radi se o četverokutu $DE'D'C$ kojemu su nasuprotni kutovi jednaki (β i $\delta + \alpha$), i dvije nasuprotne stranice jednake ($a + b$ i a) pa se radi o paralelogramu. Odavdje dobivamo ne samo $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{D'E'}$, već i $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BD'}$. Ovo je korisna činjenica jer se ostale točke u mreži mogu dobiti translacijom već poznatih točki početnog peterokuta za vektore koje određuju njegove stranice (ili pak dijagonale, po potrebi). Za ostale se vektore može dokazati analogno. Dakle, vrijedi:

$$
\begin{aligned}
E' &= A - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{5}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right), \\
D' &= E' - \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{5}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C' &= B + \overrightarrow{EA} = \left(1, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right), \\
A'' &= B - \overrightarrow{CD} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right), \\
E'' &= A'' - \overrightarrow{DE} = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right), \\
D'' &= C + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(-3, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

U svom radu o transformacijama u Euklidskom prostoru, pokazao sam kako se rotacija točke T oko pravca zadanog hvatištem H i vektorom smjera $\mathbf{v}$ za neki kut φ dobiva formulom:

$$
T_{\mathbf{v},\varphi} = T' + \mathbf{w}\cos\varphi + \mathbf{u}\frac{\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{u}\|}\sin\varphi,
$$

gdje je $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (vektorski produkt). Vektor $\mathbf{w} = \overrightarrow{T'T}$ je zadan formulom,

$$
\mathbf{w} = \overrightarrow{HT} - \mathbf{v}\frac{\langle \mathbf{v}, \overrightarrow{HT}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle},
$$

Za pravac koji će biti os rotacije koristit ćemo vektore $\overrightarrow{AB}$ (s hvatištem u A) i $\overrightarrow{BC}$ (s hvatištem u B). Za početak želimo rotirati točku C' oko pravca $t \to A + t\overrightarrow{AB}$. Taj je pravac zadan kao:

$$
t \to (1,0,0) + \frac{t}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-5}{2}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, 0\right).
$$

Za T uzimamo C', a za H uzimamo A pa je očito:

$$
\overrightarrow{HT} = \overrightarrow{AC'} = \left(1, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, 0\right) - (1,0,0) = \left(0, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, 0\right);
$$

Izračunajmo vektor $\mathbf{w}$ (za $\mathbf{v}$ naravno uzimamo $\overrightarrow{AB}$):

$$
\mathbf{w} = \overrightarrow{HT} - \overrightarrow{AB}\frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HT}\rangle}{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\rangle}.
$$

Skalarni produkt vektora $\overrightarrow{AB}$ sa samim sobom je lagano izračunati (kvadrat već izračunate duljine stranice peterokuta):

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = |AB|^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

Idući skalarni produkt isto nije teško izračunati budući da je jedna komponenta jednaka nuli:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HT} \rangle = \frac{5+\sqrt{5}}{4}.$$

Tada vrijedi:

$$\frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HT} \rangle}{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle} = \frac{5+\sqrt{5}}{2(5-\sqrt{5})} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}.$$

Vektor $\mathbf{w}$ sada iznosi:

$$\mathbf{w} = \left(0, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, 0\right) - \frac{3+\sqrt{5}}{8}\left(\frac{\sqrt{5}-5}{2}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, 0\right).$$

To je, nakon malo računanja, jednako:

$$\mathbf{w} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, 0\right).$$

Norma gornjeg vektora iznosi (začuđujuće jednostavno) $\|\mathbf{w}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Točka $T' = T - \mathbf{w}$ (kod nas je to $C_p' = C' - \mathbf{w}$) je tada dobivena kao:

$$C_p' = \frac{3+\sqrt{5}}{8}\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, 0\right).$$

Dalje, vektor $\mathbf{u}$ dobijemo kao vektorski produkt:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{5}-5}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ \frac{5+\sqrt{5}}{8} & \frac{5-\sqrt{5}}{8}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} & 0 \end{vmatrix}.$$

To je tada:

$$\mathbf{u} = \vec{k}\left(\frac{-(\sqrt{5}-5)^2}{32}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5+\sqrt{5}}{16}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right).$$

Kada zbrojimo ove članove dobivamo:

$$\mathbf{u} = \vec{k}\left(\frac{10\sqrt{5}-30}{32} - \frac{10+2\sqrt{5}}{32}\right)\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \vec{k}\left(\frac{\sqrt{5}-5}{4}\right)\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

No, problem je u tome što je $\sqrt{5} < 5$ pa vektor $\mathbf{u}$ ima negativnu aplikatu. Želimo vršiti rotaciju točke C' tako da aplikata rotacije bude pozitivna. Također, ovaj vektor nam za formulu treba biti normiran, a obzirom da ima samo aplikatu, bit će:

$$\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = (0, 0, -1).$$

Kako rotacija neće ovisiti o smjeru vektora $\overrightarrow{AB}$, njegov predznak u vektorskom produktu možemo promijeniti (i onda imati $\overrightarrow{BA}$) i tako dobiti $-\mathbf{u}$ a time i pozitivnu rotaciju. Pomnožimo li tada $(0, 0, 1)$ s $\|\mathbf{w}\|$, dobit ćemo $(0, 0, \frac{\sqrt{5}}{2})$. Stoga su koordinate nove točke, rotirane za neki kut φ u pozitivnom smjeru (smjer suprotan kretanju kazaljke na satu):

$$C'_{\overrightarrow{BA},\varphi} = C'_p + \mathbf{w}\cos\varphi + \mathbf{u}\frac{\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{u}\|}\sin\varphi.$$

Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti dobivamo:

$$\begin{aligned} C'_{\overrightarrow{BA},\varphi} = \quad & \frac{3+\sqrt{5}}{8}\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, 0\right) \\ + \quad & \frac{5-\sqrt{5}}{8}\left(\cos\varphi\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \cos\varphi\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, 0\right) \\ + \quad & \left(0, 0, \frac{\sqrt{5}}{2}\sin\varphi\right). \end{aligned}$$

Nakon malo sređivanja, to je:

$$C'_{\overrightarrow{BA},\varphi} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3-\sqrt{5}+(5+\sqrt{5})\cos\varphi \\ \left(3+\sqrt{5}+(5-\sqrt{5})\cos\varphi\right)\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\ 4\sqrt{5}\sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Također želimo dobiti formulu za rotaciju točke A'' oko pravca $t \to B + t\overrightarrow{BC}$ (opet ćemo morati uzeti $\overrightarrow{CB}$ kako bismo dobili pozitivan smjer rotacije pri rastu aplikate). Za početak imamo:

$$\overrightarrow{HT} = \overrightarrow{BA''} = \left(0, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right).$$

Tada je, nakon malo računanja (oznake $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$ su u prethodnom izvodu bile privremene pa će tako biti tretirane i ovdje):

$$\mathbf{w} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{5}-5, (5+\sqrt{5})\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, 0\right).$$

Norma vektora $\mathbf{w}$ iznosi:

$$\|\mathbf{w}\| = \frac{5+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$$

Dalje, kako su $\mathbf{w}, \overrightarrow{CB} \in \mathbb{R}^2$, njihov normiran vektorski produkt pomnožen s $\|\mathbf{w}\|$ mora biti:

$$\mathbf{u}\frac{\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \left(0, 0, \frac{5+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right).$$

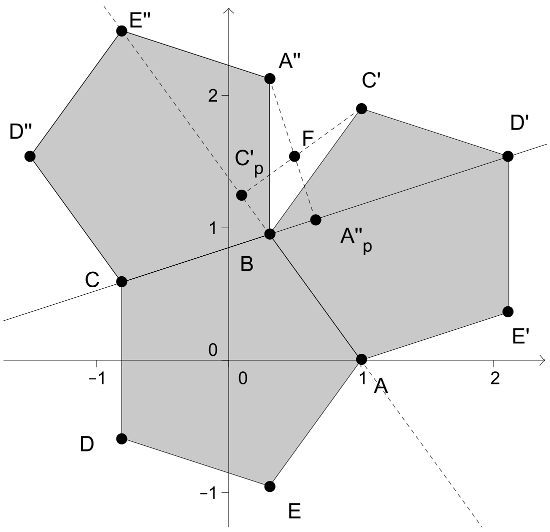
Projekcija točke A'' na pravac BC tada je:

$$A''_p = \frac{1}{8}\left(3+\sqrt{5}, (3-\sqrt{5})\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} + 4\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, 0\right).$$

I točka A'' rotirana za φ je napokon zadana formulom:

$$A''_{\overrightarrow{CB},\varphi} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3+\sqrt{5}+(\sqrt{5}-5)\cos\varphi \\ (3-\sqrt{5}+(5+\sqrt{5})\cos\varphi)\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} + 4\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\ 2(5+\sqrt{5})\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Na slici ispod se vidi što smo zapravo htjeli postići (u xy-ravnini). Rotirajući točke $C'_{\overrightarrow{BA},\varphi}$ i $A''_{\overrightarrow{CB},\varphi}$ oko pravaca AB i BC želimo pokazati kako možemo uistinu dobiti točku F.



Slika 7: Točka F dodekaedra.

Ono što sada želimo jeste definirati funkciju koja će za neki kut φ vraćati udaljenost između $C'_{\overrightarrow{BA},\varphi}$ i $A''_{\overrightarrow{CB},\varphi}$. To će, dakle biti funkcija oblika $f : [0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}$ zadana kao $f(\varphi) = d\left(C'_{\overrightarrow{BA},\varphi}, A''_{\overrightarrow{CB},\varphi}\right)^2$, gdje je $d(A, B)$ standardna Euklidska udaljenost između točki $A, B \in \mathbb{R}^3$. Primijetimo kako nećemo uzimati korijen, jer nas ne zanima *sama* udaljenost, već *samo* kut φ kada je udaljenost između točki jednaka nuli. Isto tako nećemo uzimati u obzir ni faktor $\frac{1}{8}$ ispred točki jer opet, ne zanima nas točna udaljenost u svakom trenutku rotacije, već nas zanima samo kut kada je udaljenost nula. Dakle, nakon malo računanja imamo:

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= 5 - \sqrt{5} + 10\cos\varphi - 10\sqrt{5}\cos\varphi + 25(\cos\varphi)^2 - 5\sqrt{5}(\cos\varphi)^2 \\ &\quad +20(\sin\varphi)^2 - 5\sqrt{2(3-\sqrt{5})}(\sin\varphi)^2 - 5\sqrt{10(3-\sqrt{5})}(\sin\varphi)^2. \end{aligned}$$

Iskoristimo činjenicu da je $(\sin\varphi)^2 = 1 - (\cos\varphi)^2$. To je tada:

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= 25 - \sqrt{5} - 5\sqrt{2(3-\sqrt{5})} - 5\sqrt{10(3-\sqrt{5})} + 10\cos\varphi - 10\sqrt{5}\cos\varphi \\ &\quad +5(\cos\varphi)^2 - 5\sqrt{5}(\cos\varphi)^2 + 5\sqrt{2(3-\sqrt{5})}(\cos\varphi)^2 + 5\sqrt{10(3-\sqrt{5})}(\cos\varphi)^2. \end{aligned}$$

Promotrimo izraz koji se pojavljuje uz $(\cos\varphi)^2$:

$$\begin{aligned} & 5\left(1 - \sqrt{5} + \sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{10}\sqrt{3-\sqrt{5}}\right) \\ = \ & 5\left(1 - \sqrt{5} + \sqrt{2}\left(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{5}\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)\right) \end{aligned}$$

Daljnjim sređivanjem, to je:

$$
\begin{aligned}
& 5\left(1-\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})\right) \\
= \; & 5\left(1-\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{(3-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}\right)
\end{aligned}
$$

Koristeći kvadrat binoma, a zatim razliku kvadrata, napokon imamo:

$$
\begin{aligned}
= \; & 5\left(1-\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{(3-\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}\right) \\
= \; & 5\left(1-\sqrt{5}+2\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}\right) \\
= \; & 5\left(1-\sqrt{5}+4\right)=5\left(5-\sqrt{5}\right).
\end{aligned}
$$

Grupirajući ostale članove dobivamo:

$$f(\varphi)=5(5-\sqrt{5})(\cos\varphi)^2+10(1-\sqrt{5})\cos\varphi+5-\sqrt{5}.$$

No, već smo rekli kako nas zanima slučaj kada je $f(\varphi)=0$. Stoga uzmemo supstituciju $x=\cos\varphi$ i dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$5(5-\sqrt{5})x^2+10(1-\sqrt{5})x+5-\sqrt{5}=0.$$

Stvari se pojednostave ukoliko podijelimo cijelu jednadžbu s $(5-\sqrt{5})$ pa je tada:

$$5x^2-2\sqrt{5}x+1=0.$$

Koristeći formulu za kvadratnu jednadžbu dobivamo:

$$x_{1,2}=\frac{2\sqrt{5}\pm\sqrt{20-20}}{10}.$$

Diskriminanta je jednaka nuli pa imamo samo jedno rješenje, tj. $x=\frac{\sqrt{5}}{5}$. Tada je, vraćajući supstituciju, $\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$, a tako i (uzet ćemo pozitivnu vrijednost jer se želimo kretati u pozitivnom smjeru - sinus određuje aplikatu u našim točkama) $\sin\varphi=\sqrt{1-\frac{5}{25}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Uvrštavanjem vrijednosti $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ u formule za $C'_{\overrightarrow{BA},\varphi}$ i $A''_{\overrightarrow{CB},\varphi}$ dobivamo (jednu) točku F s koordinatama:

$$F = \left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, 1\right).$$

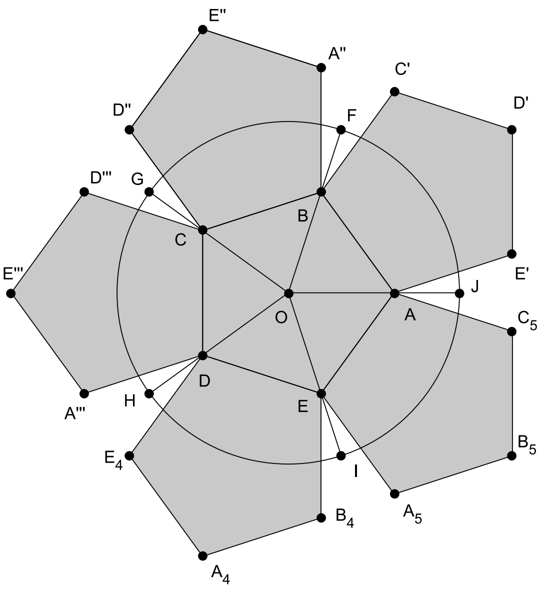
Izlučimo li $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i zatim racionaliziramo, imamo:

$$F = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Napravimo li projekciju ove točke na xy-ravninu, dobit ćemo:

$$F' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right).$$

Podsjetimo li se malo točki peterokuta, očito je $F' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}B$, što će reći da su projekcija od F, točka B i ishodište kolinearni. Koristeći simetriju peterokuta (prisjetimo se grupe D_5), ostale točke (G, H, I i J) možemo dobiti na isti način (vidi sliku ispod). To možemo napraviti upravo zbog činjenice što, iako se koristimo koordinatnim sustavom, općenito je nebitno koje smo dvije stranice odabrali za razvoj mreže peterokuta. Sve stranice i vrhovi dodekaedra su međusobno neraspoznatljivi (do na koordinate).



Slika 8: Nove točke dodekaedra.

Zapišimo prvo F na drugačiji način (prisjetimo se kako je ω temeljno rješenje jednadžbe $x^5 - 1 = 0$):

$$F = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\mathrm{Re}(\omega), \mathrm{Im}(\omega), 2\mathrm{Re}(\omega)\right).$$

Tada ostale točke (radi potpunosti dodat ćemo na popis i F) moraju biti (ne zaboravimo kako zapravo rotiramo samo prve dvije koordinate, aplikata ostaje ista):

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\mathrm{Re}(\omega), \mathrm{Im}(\omega), 2\mathrm{Re}(\omega)\right),\\
G &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\mathrm{Re}(\omega^2), \mathrm{Im}(\omega^2), 2\mathrm{Re}(\omega)\right),\\
H &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\mathrm{Re}(\omega^3), \mathrm{Im}(\omega^3), 2\mathrm{Re}(\omega)\right),\\
I &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\mathrm{Re}(\omega^4), \mathrm{Im}(\omega^4), 2\mathrm{Re}(\omega)\right),\\
J &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\mathrm{Re}(\omega^0), \mathrm{Im}(\omega^0), 2\mathrm{Re}(\omega)\right).
\end{aligned}$$

Preciznije, koordinate su tada, trivijalno:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),\\
G &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),\\
H &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),\\
I &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),\\
J &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(1, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Sada kada smo zapravo "savili" ovih pet peterokuta oko odgovarajućih stranica našeg početnog peterokuta za kut kojemu je kosinus $\frac{1}{\sqrt{5}}$, a sinus pozitivan, zapravo smo zaboravili odrediti koordinate točki D', E'', E''', A_4 i B_5 (vidi sliku iznad) nakon "savijanja". Izračunat ćemo samo koordinate točke E'' rotirane za $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ oko pravca CB (koristeći vektor $\overrightarrow{CB}$) s hvatištem u C i zatim koristiti svojstva simetrije peterokuta kako bismo dobili ostale četiri točke. Izračunajmo vektor $\overrightarrow{HT} = \overrightarrow{CE''}$. To je:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE''} &= \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, 0\right) \\ &= \left(0, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, 0\right).\end{aligned}$$

Zatim, vektor $\mathbf{w}$ dobivamo kao:

$$\mathbf{w} = \left(0, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, 0\right) - \overrightarrow{CB}\frac{\left\langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE''}\right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CB}\right\rangle}.$$

Prisjetimo se kako je:

$$\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, 0\right).$$

Skalarni produkt u nazivniku jednak je kvadratu duljine stranice peterokuta, a to je $|\overrightarrow{CB}|^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Dalje, skalarni produkt u brojniku je:

$$\left\langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE''}\right\rangle = \frac{5-\sqrt{5}}{4}.$$

Cijeli taj razlomak je očito jednak $\frac{1}{2}$. To je onda:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}, 3\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, 0\right).$$

Tada je:

$$\|\mathbf{w}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

Izračunajmo projekciju ove točke, to je $E''_p = E'' - \mathbf{w}$, dakle:

$$E''_p = \frac{1}{4}\left(-1, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, 0\right).$$

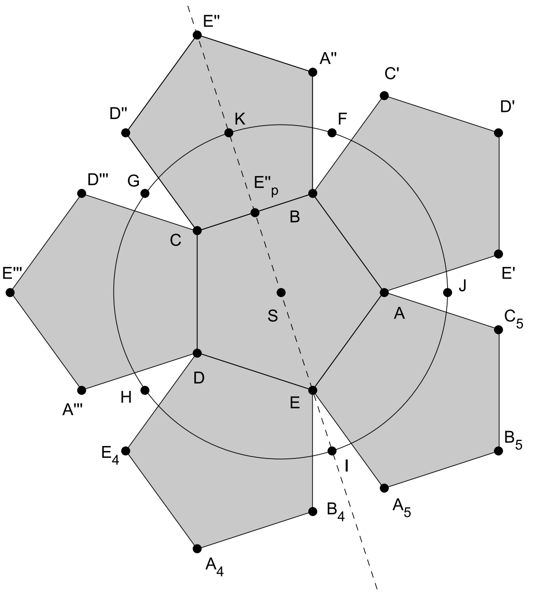
Nadalje, kako radimo cijelo vrijeme u xy ravnini, normiran vektor $\mathbf{u}$ će biti $(0, 0, 1)$. Pomnožen s normom vektora $\mathbf{w}$ to je:

$$\mathbf{u} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right).$$

Uvrstimo li to u formulu $K = E_p'' + \mathbf{w}\cos\varphi + \|\mathbf{w}\|\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\sin\varphi$, znajući kako je $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, a $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, imamo:

$$K = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5(5+\sqrt{5})} + \sqrt{5(25+11\sqrt{5})}}{10\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right).$$

No, na slici ispod vidimo kako možemo pretpostaviti da su točke S, K i I kolinearne, odnosno da je K zapravo skalirana točka E istim faktorom kao I uz razliku u predznaku.



Slika 9: Točka K dodekaedra.

Stoga ćemo podijeliti točku K s $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ i dobiti (nakon racionalizacije):

$$K = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right), -1\right).$$

Pokažimo kako će ordinata (ne računajući faktor ispred) točke K biti jednaka ordinati točke J (također bez faktora), a time i ordinati točke E. Stoga uzmimo ordinatu (bez negativnog predznaka):

$$x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}.$$

Primijetimo kako mora biti $x > 0$. Nakon kvadriranja, to je:

$$x^2 = \frac{1}{40}\left(15 + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10(3+\sqrt{5})}\right).$$

Daljnjim kvadriranjem (nakon premještanja korijena) dobivamo:

$$160x^4 - 24x^2(5+\sqrt{5}) + 5(3+\sqrt{5}) = 0.$$

Primijetimo kako je $(5+\sqrt{5})^2 = (30+10\sqrt{5}) = 10(3+\sqrt{5})$. Ova činjenica je jako korisna jer ćemo moći lako izlučiti korijen iz korijena u formuli za rješenja kvadratne jednadžbe. Stoga, pomnožimo gornju jednadžbu s 2, učinimo ovu malu izmjenu i uzmemo supstituciju $t = x^2$ pa imamo:

$$320t^2 - 48(5+\sqrt{5})t + (5+\sqrt{5})^2 = 0.$$

Koristeći formulu za rješenja kvadratne jednadžbe vrijedi:

$$t_{1,2} = \frac{48(5+\sqrt{5}) \pm \sqrt{2304(5+\sqrt{5})^2 - 1280(5+\sqrt{5})^2}}{640} = \frac{48(5+\sqrt{5}) \pm 32(5+\sqrt{5})}{640}.$$

Nakon pokraćivanja i izlučivanja zajedničkog faktora to je:

$$t_{1,2} = \frac{48(5+\sqrt{5}) \pm 32(5+\sqrt{5})}{640} = \frac{(5+\sqrt{5})(3\pm 2)}{40}.$$

Dakle, imamo $t_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ i $t_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{40}$. Od koristi će nam biti samo t_1 pa vraćajući supstituciju $t = x^2$, i.e. $x = \pm\sqrt{t}$, imamo:

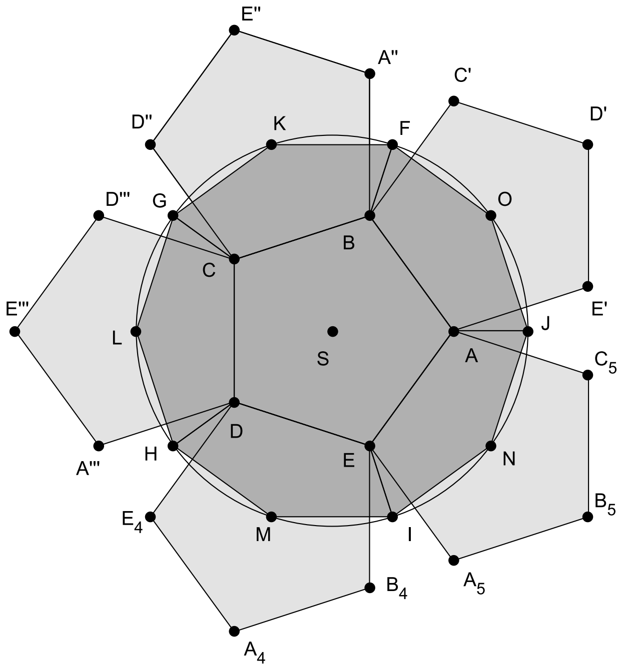
$$x = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

No, rekli smo na početku kako x mora biti pozitivan pa je tada:

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

Dakle, koordinate točke K su sada:

$$K=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4},-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},-1\right).$$



Slika 10: Projekcija dodekaedra na xy ravninu uz prethodnu mrežu peterokuta.

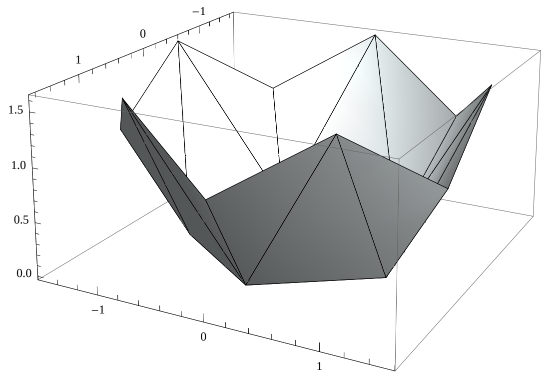
Primijetimo kako se ova točka, a i ostale, koristeći svojsta simetrije (vidi sliku iznad), opet može zapisati pomoću kompleksnih korijena $\omega,\ldots,\omega^4,\omega^5$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\mathrm{Re}(\omega^4),\mathrm{Im}(\omega^4),-\mathrm{Re}(\omega^0)\right),\\
L &= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\mathrm{Re}(\omega^0),\mathrm{Im}(\omega^0),-\mathrm{Re}(\omega^0)\right),\\
M &= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\mathrm{Re}(\omega),\mathrm{Im}(\omega),-\mathrm{Re}(\omega^0)\right),\\
N &= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\mathrm{Re}(\omega^2),\mathrm{Im}(\omega^2),-\mathrm{Re}(\omega^0)\right),\\
O &= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\mathrm{Re}(\omega^3),\mathrm{Im}(\omega^3),-\mathrm{Re}(\omega^0)\right).
\end{aligned}$$

Opet dajemo preciznije koordinate ovih točki:

$$
\begin{aligned}
K &= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, -1\right),\\
L &= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(1, 0, -1\right),\\
M &= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, -1\right),\\
N &= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, -1\right),\\
O &= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, -1\right).
\end{aligned}
$$

Na slici ispod prikazane su plohe koje ove točke zajedno čine.



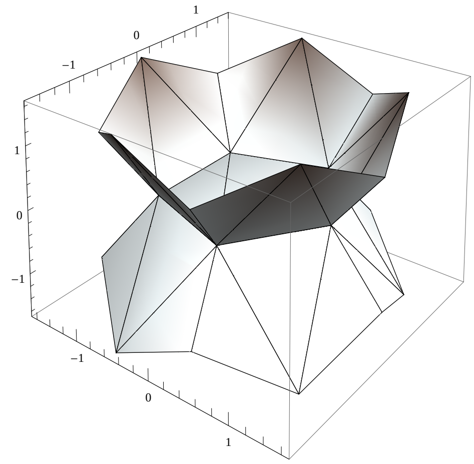
Slika 11: Donja polovica dodekaedra (točke iz $\mathcal{D}_1$).

Kako bismo dovršili konstrukciju dodekaedra, ne moramo računati sve ispočetka za gornju polovicu, već ćemo biti snalažljivi i "kopirati" donju polovicu, te ju zrcaliti obzirom na xy ravninu. No, tada se dodekaedar ne bi "uklopio", pa bismo ga morali rotirati za kut koji čine projekcije vektora $\overrightarrow{SJ}$ i $\overrightarrow{SO}$. Tada će se one točke koje su u donjoj polovici "više" točke uklopiti s onim točkama gornje polovice koje su bile "niže" prije zrcaljenja. Neka je $\mathcal{D}_1$ skup koji sadrži točke A,B,...,N,O. Za početak želimo da sve ove točke imaju obratne predznake u trećoj komponenti, tj. aplikati. To možemo postići množeći ih matricom simetrije:

$$
S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Definirajmo skup $\mathcal{D}_2$ koji sadrži sve točke iz $\mathcal{D}_1$ reflektirane oko xy ravnine, to jest:

$$(\forall X)\left(X \in \mathcal{D}_1 \to S_z X \in \mathcal{D}_2\right).$$



Slika 12: Točke iz $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$.

Pronađimo sada kut rotacije. Zapravo, ne moramo pronaći sam kut, već samo njegov kosinus i sinus, jer to je zapravo sve što nam je potrebno za rotaciju. Uzmimo projekciju od J i O (recimo vektore projekcija $\overrightarrow{SJ_p}$ i $\overrightarrow{SO_p}$), te uvrstimo u formulu za kosinus kuta. Prisjetimo se formule za kut između dva vektora:

$$\cos\psi = \frac{\left\langle \overrightarrow{SJ}, \overrightarrow{SO} \right\rangle}{|\overrightarrow{SJ}||\overrightarrow{SO}|}.$$

Projekcije ovih vektora su (primijetimo kako faktore ispred vektora možemo maknuti jer nam ipak treba samo kut):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SO_p} &= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right), \\ \overrightarrow{SJ_p} &= (1,0)\,. \end{aligned}$$

Kako su ovo zapravo "višekratnici" vektora $\overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SD}$ norme bez faktora koje smo uklonili su im jednake 1. Stoga je $|\overrightarrow{SO_p}| = |\overrightarrow{SJ_p}| = 1$ pa vrijedi:

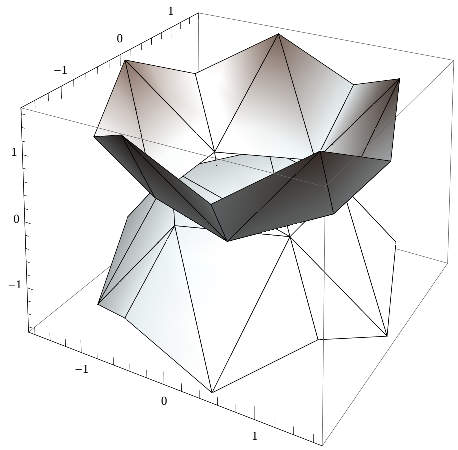
$$\cos\psi = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Također, znamo da je tada $\sin\psi = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Sve smo to mogli već vidjeti iz vektora $\overrightarrow{SO_p}$ jer zapravo $\overrightarrow{SJ_p}$ leži na apscisi. Napomenimo samo kako je očito da se radi o kutu od 36°. Stoga koristimo rotaciju:

$$R_{z,36^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{4} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} & \frac{\sqrt{5}+1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tada ćemo definirati skup $\mathcal{D}_3$ tako da vrijedi:

$$(\forall X)\,(X \in \mathcal{D}_1 \to R_{z,36^\circ} S_z X \in \mathcal{D}_2)\,.$$



Slika 13: Točke iz $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_3$.

Nakon rotacije, uzmemo točku $J_3 = R_{z,36^\circ} S_z J \in \mathcal{D}_3$. Ta će točka biti točno ispod točke $O \in \mathcal{D}_1$. Usporedimo njihove aplikate. Aplikata točke O iznosi $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dok aplikata točke J_3 iznosi $t_2 = -1$. Uzmemo njihovu razliku, to će biti:

$$t_1 - t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - (-1) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Pomaknemo li točke iz $\mathcal{D}_3$ za $t_1 - t_2$ po aplikati, poklopit će se O i J_3, a tako i ostale odgovarajuće točke (”više” s ”nižima” prije refleksije). Definiramo vektor translacije kao:

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

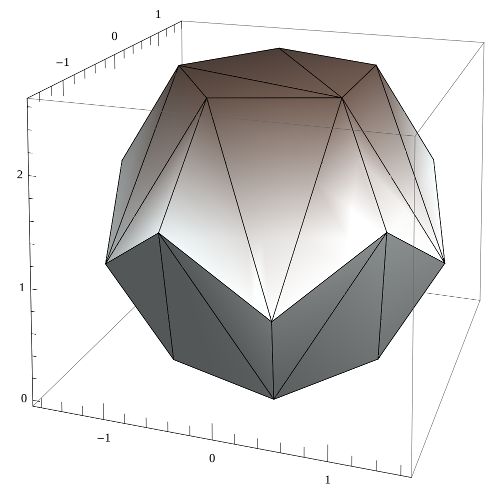
Sada definiramo napokon skup $\mathcal{D}_4$ tako da bude:

$$(\forall X)\,(X \in \mathcal{D}_1) \to (T + R_{z,36^\circ} S_z X \in \mathcal{D}_4)\,.$$

Definirajmo sada novi skup na sljedeći način:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup (\mathcal{D}_4 \backslash \mathcal{D}_1)\,.$$

Primijetimo kako smo uklonili iz skupa $\mathcal{D}_4$ one točke koje su se poklopile s točkama iz $\mathcal{D}_1$. Skup $\mathcal{D}$ sadrži sve točke koje definiraju naš dodekaedar prikazan na slici ispod. Napomenimo kako je $|\mathcal{D}| = 20$, tj. imamo ukupno 20 točki u dodekaedru. Kako imamo 12 strana, i.e. peterokuta, brojimo $5 \cdot 12$ točki. Ipak, brojali smo svaku tri puta (jer se u jednoj točki susreću tri brida dodekaedra), pa je to $5 \cdot 4 = 20$ točki).



Slika 14: Dodekaedar.

Preostalih pet točki koje leže u ravnini paralelne s bazom, tj. početnim peterokutom su:

$$\begin{aligned}
A' &= -\Big(\mathrm{Re}(\omega^3), \mathrm{Im}(\omega^3), -4\left(\mathrm{Re}(\omega^2)\right)^2\Big)\,,\\
B' &= -\Big(\mathrm{Re}(\omega^4), \mathrm{Im}(\omega^4), -4\left(\mathrm{Re}(\omega^2)\right)^2\Big)\,,\\
C' &= -\Big(\mathrm{Re}(\omega^0), \mathrm{Im}(\omega^0), -4\left(\mathrm{Re}(\omega^2)\right)^2\Big)\,,\\
D' &= -\Big(\mathrm{Re}(\omega), \mathrm{Im}(\omega), -4\left(\mathrm{Re}(\omega^2)\right)^2\Big)\,,\\
E' &= -\Big(\mathrm{Re}(\omega^2), \mathrm{Im}(\omega^2), -4\left(\mathrm{Re}(\omega^2)\right)^2\Big)\,.
\end{aligned}$$

Preciznije koordinate su:

$$
\begin{aligned}
A' &= -\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\\
B' &= -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\\
C' &= -\left(1, 0, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\\
D' &= -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\\
E' &= -\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),
\end{aligned}
$$

Ono što sada želimo jeste upisati dodekaedar u kuglu (ukoliko je to moguće). Primijetimo kako je razlika između aplikati "najnižih" i "najviših" točki jednaka $v = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Možemo pretpostaviti kako će se na polovici te visine nalaziti središte kugle. Apscisa i ordinata središta su naravno nula (jer su to apscisa i ordinata središta opisanih kružnica u ravninama $z = 0$ i $z = v$). Dakle bit će:

$$S = \left(0, 0, \frac{3+\sqrt{5}}{4}\right).$$

Preostaje nam odrediti polumjer, a za to moramo uzeti samo udaljenost od S do neke točke, recimo A. Imamo:

$$d(S, A) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + \left(0 - \frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{8}}.$$

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{3+\sqrt{5}}{4})^2 = \left(\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{8}}\right)^2.$$

To možemo malo srediti rješavanjem kvadrata:

$$x^2 + y^2 + z^2 - z\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{7+3\sqrt{5}}{8} = \frac{15+3\sqrt{5}}{8}.$$

Konačno, to je:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + z\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Dugotrajan je, ali ne težak, posao provjeriti kako će svaka točka ležati na sferi ove kugle (autor ostavlja to čitatelju na provjeru, ako ima vremena za izgubiti). No, ovaj dodekaedar koji smo dobili nadogradnjom nad rješenja jednadžbe $x^5 - 1 = 0$ možemo staviti i u bolji položaj, kada bismo translatirali središte kružnice u ishodište. To znači kako bismo htjeli uzeti $\mathcal{D}'$ takav da bude:

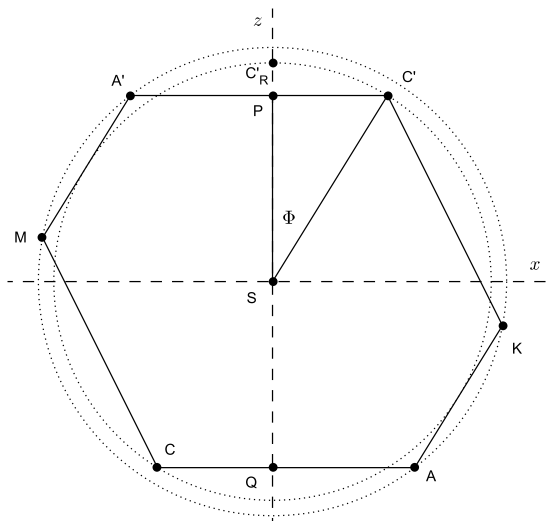
$$\mathcal{D}' = \mathcal{D} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{4} \end{bmatrix}.$$

Tada bi jednadžba dodekaedru (čiji su vrhovi $\mathcal{D}'$) opisane kružnice glasila:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{15+3\sqrt{5}}{8}.$$

Ukoliko bismo željeli, a uistinu to i želimo, da radijvektori vrhova dodekaedra, tj. točki iz $\mathcal{D}'$, budu normirani, pomnožit ćemo svaku točku iz prethodnog skupa s recipročnom vrijednošću polumjera iz gornjeg izraza:

$$\mathcal{D}_N = \frac{2}{15}\left(5-\sqrt{5}\right)\mathcal{D}' = \frac{2}{15}\left(5-\sqrt{5}\right)\left(\mathcal{D} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{4} \end{bmatrix}\right).$$



Slika 15: Ortogonalna projekcija dodekaedra na xz-ravninu.

No, začudo, želimo također i naš dodekaedar staviti u nezgodniji položaj. Na slici iznad je prikazana ortogonalna projekcija dodekaedra s vrhovima iz $\mathcal{D}_N$ na xz-ravninu. Želimo rotirati dodekaedar za kut Φ tako da točka C' dođe u položaj točke C'_R. Lako ćemo izračunati kut Φ (ili barem njegove sinuse i kosinuse). Sa slike je očito kako je trokut $SC'P$ pravokutan i kako je duljina dužine $\overline{PC'}$ zapravo jednaka duljini visine karakterističnog trokuta peterokuta te kako je $|SP|$ jednaka duljini polovice visine dodekaedra. Dakle, vrijedi:

$$\begin{aligned} |PC'| &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}, \\ |SP| &= \frac{3+\sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

Preko Pitagorinog poučka možemo odrediti $|SC'|$ te će tako biti:

$$|SC'| = \frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Sada možemo izračunati kosinus traženog kuta:

$$\cos\Phi = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

Tada vrijedi i (iz $\sin\Phi = \pm\sqrt{1-(\cos\Phi)^2}$):

$$\sin\Phi = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

Sada mislimo kako bismo mogli uvrstiti pozitivan sinus u rotacijsku matricu, no moram paziti da je naša želja kretati se od x osi prema z osi, a to je zapravo negativan smjer (provjeri npr. pravilom vijka da se radi o lijevo orijentiranom koordinatnom sustavu). Stoga uzimamo negativnu vrijednost. Dakle, imamo rotacijsku matricu:

$$R_{xz} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} & 0 & -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} & 0 & \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \end{bmatrix}.$$

Kada bismo uzeli sada skup vrhova $\mathcal{D}_R$ takav da vrijedi:

$$\mathcal{D}_R = \frac{2}{15}\left(5-\sqrt{5}\right)\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} & 0 & -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} & 0 & \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \end{bmatrix}\left(\mathcal{D} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{4} \end{bmatrix}\right),$$

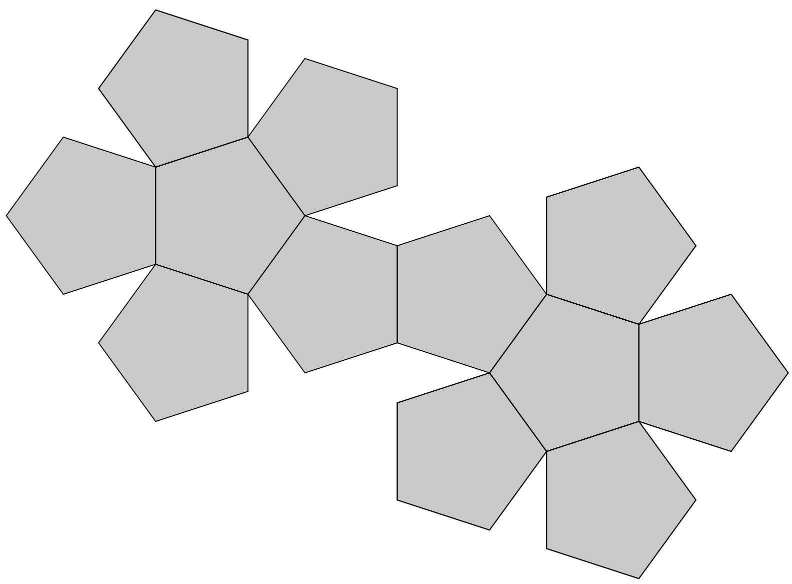
primijetili bismo kako imamo točke iz $\mathcal{D}_R$ oblika:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Stoga zapravo želimo skalirati vrhove dodekaedra za $\sqrt{3}$ (tako da dodekaedar zapravo bude upisan u kružnicu polumjera $\sqrt{3}$). Tada bismo dobili prilično zgodan način zapisivanja vrhova dodekaedra (dakle ako uzmemo točke iz $\mathcal{D}_S = \mathcal{D}_R\sqrt{3}$:

$$\begin{gathered} (\pm 1, \pm 1, \pm 1), \\ \left(0, \pm\frac{1}{\varphi}, \pm\varphi\right), \\ \left(\pm\frac{1}{\varphi}, \pm\varphi, 0\right), \\ \left(\pm\varphi, 0, \pm\frac{1}{\varphi}\right), \end{gathered}$$

gdje je φ zlatni rez, tj. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Slično je $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Na slici ispod dajemo jednu mrežu za konstrukciju dodekaedra.



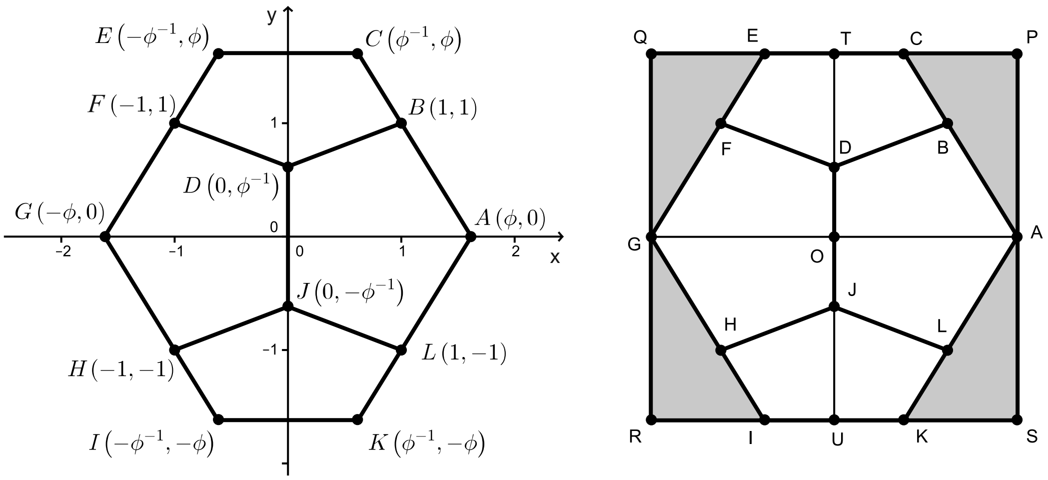
Slika 16: Mreža za konstrukciju dodekaedra.

Konstrukcija dodekaedra II

Napomenimo samo kako, ukoliko imamo dvije točke, $A = (x_A, y_A, z_A)$ i $B = (x_B, y_B, z_B)$, množenjem tih točki s $\lambda \in \mathbb{R}$, njihova Euklidska udaljenost se poveća $|\lambda|$ puta. Znamo kako je $d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$. No uzmemo li $\lambda A = (\lambda x_A, \lambda y_A, \lambda z_A)$ te $\lambda B = (\lambda x_B, \lambda y_B, \lambda z_B)$ imamo:

$$\begin{aligned} d(\lambda A, \lambda B) &= \sqrt{(\lambda x_A - \lambda x_B)^2 + (\lambda y_A - \lambda y_B)^2 + (\lambda z_A - \lambda z_B)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \left((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2\right)} \\ &= |\lambda| \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \lambda d(A,B). \end{aligned}$$

Stoga, svi međuodnosi točki, koje smo računali u peterokutu, unatoč rastezanju od $\sqrt{3}$ prilikom konstrukcije dodekaedra, ostaju u omjeru. Promotrimo sada projekciju dodekaedra na xy-ravninu.



Slika 17: Projekcija dodekaedra na xy-ravninu.

Primijetimo kako je duljina stranice kvadrata "opisanog" projekciji dodekaedra jednaka 2ϕ. Kako ćemo zapravo "rezbariti" dodekaedar iz kocke, bitnije nam je znati kolika će duljina brida dodekaedra biti u odnosu na brid kocke. Stoga uzmimo za duljinu brida kocke $2\phi a x$. Tada je duljina brida dodekaedra (duljina dužine $\overline{DJ}$) jednaka $|DJ| = \frac{2}{\pi} a x$ (vidi sliku iznad). Želimo da nam duljina brida kocke bude x, pa ćemo za a uzeti $a = \frac{1}{2\phi}$. Tada je duljina brida dodekaedra $|DJ| = \frac{1}{\phi^2} x$, gdje je x duljina brida kocke (npr. duljina $|SP|$). Izračunajmo $|DJ|$. Imamo:

$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Tada je:

$$\frac{1}{\phi^2} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Primijetimo kako je $|DJ|$ također duljina dužine $\overline{EC}$. Naravno, u odnosu na brid kocke to je $|DJ| = |EC| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}x$. Izračunajmo duljine $|QE|$ i $|CP|$. Očito je (sa slike) $|QE| = |CP|$. Imamo:

$$2|QE| = x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}x = \frac{2-3+\sqrt{5}}{2}x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x.$$

Dakle, vrijedi $|QE| = |CP| = \frac{\sqrt{5}-1}{4}x$. Pokazat ćemo samo kako su točke G, F i E kolinearne. Uzmemo li vektore $\overrightarrow{GF} = [-1+\phi, 1]^T$ i $\overrightarrow{GE} = [-\phi^{-1}+\phi, \phi]^T$ vidimo kako je zapravo $\overrightarrow{GE} = \phi^{-1}\overrightarrow{GF}$, jer je:

$$-\phi + \phi^2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Također je:

$$-\phi^{-1} + \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Sada, koristeći Pitagorin poučak, možemo vidjeti kako je:

$$|GE| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}x\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}x^2 + \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

No, nama je najbitnija konstrukcija dužina $\overline{DJ}$, $\overline{EC}$, $\overline{IK}$ itd. Nezgodna je konstrukcija ovih dužina jer uvijek moramo ostati unutar mjere manje od x. Stoga je, nakon malo razmišljanja, lakše zapisati:

$$|DJ| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}x = 2\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{4}x\right).$$

Ovako bismo mogli konstruirati lagano dužinu $\overline{DJ}$, no još bi bilo lakše konstruirati dužinu $\overline{QE}$, odnosno $\overline{TD}$ (koje su vidljivo jednakih duljina). Prvo što trebamo napraviti jeste konstruirati točku O (za grafički prikaz konstrukcije vidi sliku ispod) na svakoj strani kocke. To lagano napravimo praveći dijagonale kvadrata, kao što je prikazano na slici. Točke G i A, te T i U možemo dobiti lagano ukoliko povučemo paralele (ili okomice) na odgovarajuće stranice. Točku W konstruiramo kao polovište dužine $\overline{OT}$, njena je duljina $\frac{x}{4}$ (ne zaboravimo, u odnosu na duljinu brida kocke x). Ne moramo konstruirati točku W pomoću simetrale, dovoljno je napraviti dužinu $\overline{GP}$ i tamo gdje siječe $\overline{OT}$ bit će točka W. Jasno je kako će po Talesovom poučku biti:

$$\frac{|TW|}{|QG|} = \frac{|PT|}{|PQ|} = \frac{1}{2}.$$

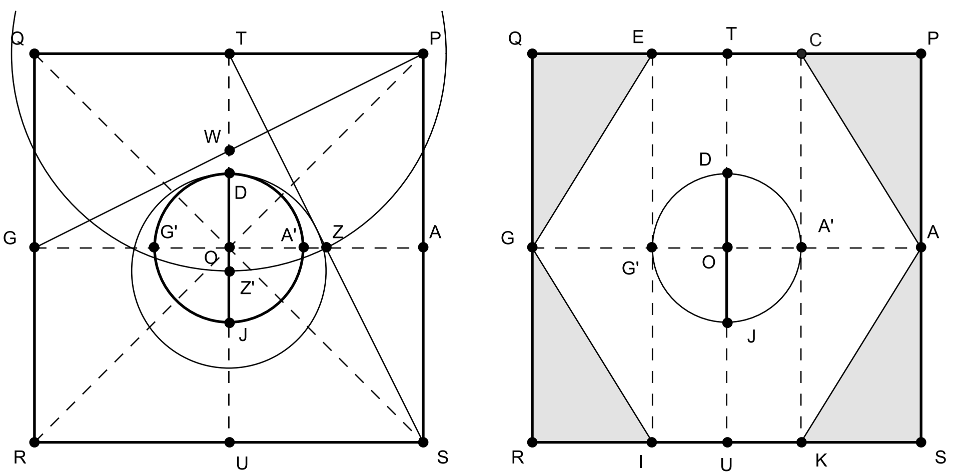
Dakle, vrijedi $2|TW| = |QG| = |OT|$. Zatim, ukoliko povučemo dužinu $\overline{TS}$, vidjet ćemo kako je njena duljina (zapravo ista kao i od $\overline{GP}$):

$$|TS| = \sqrt{\frac{x^2}{4} + x^2} = \sqrt{\frac{5x^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}x.$$

Konstruiramo polovište Z dužine $\overline{TS}$ (na isti način kao i za W). Pomoću Talesovog poučka vidimo kako vrijedi:

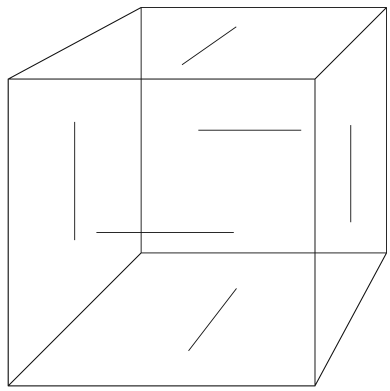
$$\frac{|TZ|}{|ZS|} = \frac{|PA|}{|AS|} = 1.$$

Stoga je $|TZ| = |ZS| = \frac{\sqrt{5}}{4}x$. Spustimo šestarom točku Z na dužinu $\overline{TU}$ (s vrhom u T) i dobivamo točku Z'. Vrijedi $|TZ'| = x\frac{\sqrt{5}}{4}x$. Zatim, uzmemo u šestar duljinu dužine $\overline{TW}$, zabodemo vrh šestara u točku Z' i nanesemo na dužinu $\overline{OT}$ točku D i bit će $|DT| = \frac{\sqrt{5}}{4}x - \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}x$. Uzmemo duljinu dužine $\overline{OD}$, zabodemo vrh šestara u točku O te nanesemo točku J s druge strane. Dobili smo traženu dužinu $\overline{DJ}$. Još je poželjno nanijeti odmah i točke G' i A' na istoj kružnici, ali na dužini $\overline{GA}$, kao što je prikazano na slici.



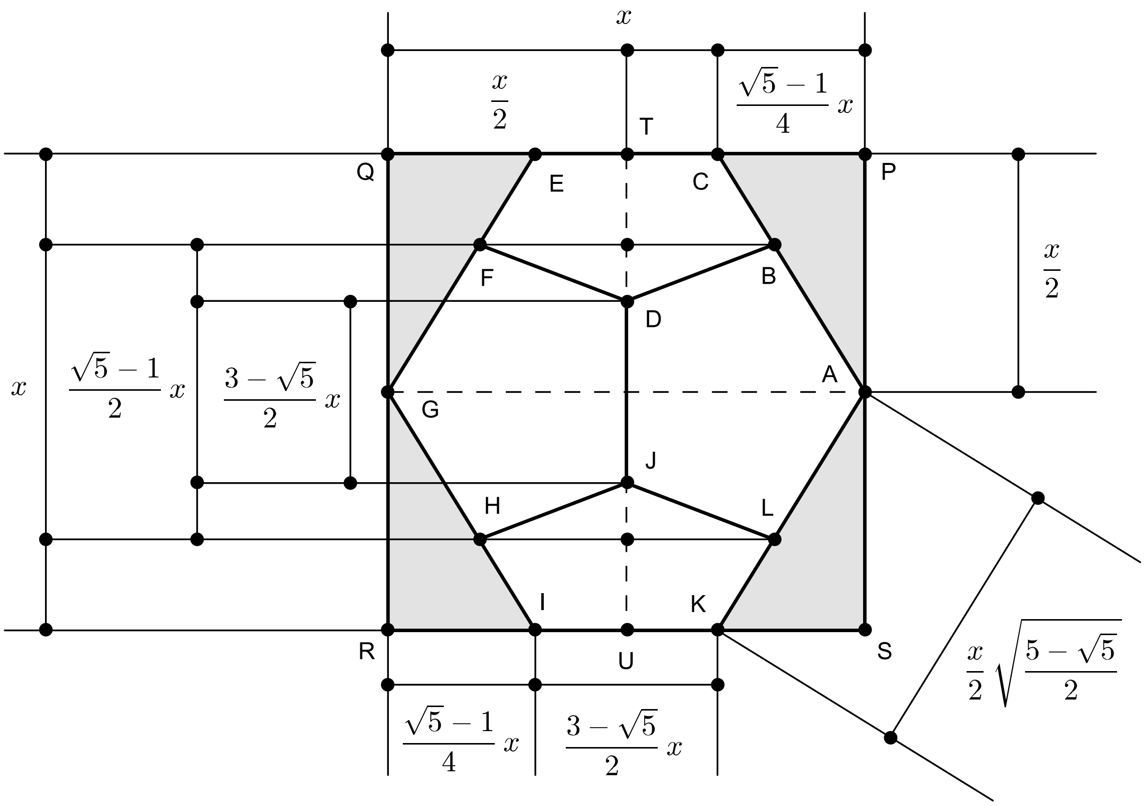
Slika 18: Konstrukcija dužine $\overline{DJ}$ te točki E, C, I i K.

Kada smo to napravili, potrebno je povući iz točki G' i A' paralele s dužinom $\overline{TU}$ kako bismo dobili točke E, C, I i K, kao što je prikazano na slici iznad. Zatim konstruiramo dužine $\overline{EG}$, $\overline{GI}$, $\overline{KA}$ i $\overline{AC}$. Po tim dužinama ćemo napraviti "rezove" kako bismo dobili šesterostranu prizmu. Ovaj postupak treba ponoviti na svakom bridu kocke (osim na nasuprotnoj strani strane na kojoj smo taj postupak već napravili; dakle, bit će potrebno ponoviti ovaj postupak tri puta uz moguće optimizacije i prečace prepuštene čitatelju) s tim da se treba paziti na raspored, bolje rečeno smjer, "kopija" dužina $\overline{DJ}$ koje će zapravo biti bridovi dodekaedra. Svake dvije dužine ("kopije" od $\overline{DJ}$) na susjednim stranama moraju biti okomite, dok dužine na nasuprotnim stranama kocke moraju biti paralelne i u istoj ravnini. Na slici ispod skiciran je alternirajući raspored bridova dodekaedra na stranama kocke.



Slika 19: Raspored bridova dodekaedra na kocki.

Radi potpunosti na slici na idućoj strani prikazat ćemo još jednom odnose duljina u dodekaedru spram duljine brida kocke. Iz ovoga se mogu vrlo lako napraviti i numerički izračuni danih duljina.



Slika 20: Odnosi duljina dodekaedra spram brida kocke.

Svojstva dodekaedra

Za početak ćemo spomenuti neka kombinatorna svojstva. Znamo, iz prethodnog izvoda, kako se dodekaedar sastoji od dvanaest pravilnih peterokuta. Dakle, broj njegovih strana je $F = 12$. Postavlja se pitanje koliko ima vrhova, bridova i dijagonala. Znamo kako dvije strane dijele samo jedan brid i kako svaka strana ima pet bridova. Dakle broj bridova je, za početak jednostavno $12 \cdot 5$. Ipak, kako smo za dvije strane brojili jedan brid dva puta, pa je stoga $B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 6 \cdot 5 = 30$. Sada, postoji dva načina da izbrojimo vrhove i iskoristit ćemo oba kako bismo bili sigurniji u naš rezultat. Prvi je pomoću bridova. Svaki brid sadrži dva vrha. Kako imamo 30 bridova to je $30 \cdot 2$ vrhova. No, stvar je u tome što se u jednom vrhu susreću tri brida, pa smo svaki vrh zapravo prebrojali tri puta. Stoga je broj vrhova $V = \frac{30 \cdot 2}{3} = 20$. To možemo provjeriti i promatrajući strane, dakle svaka od 12 strana ima 5 vrhova pa bi to bilo $5 \cdot 12$ vrhova. Kako se u svakom vrhu susreću tri strane, svaki vrh smo prebrojali 3 puta pa imamo $V = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20$. Vidimo kako se to uklapa u Eulerov identitet za poliedre $20 - 30 + 12 = -10 + 12 = 2$. Dalje se postavlja pitanje, koliko dijagonala možemo definirati u dodekaedru? Pa, promatrajući svaki vrh, kako se u njemu susreću tri brida, imat ćemo, iz svakog vrha po $20 \cdot (20 - 3)$ dijagonala, no svaku smo brojali po dva puta pa je to ukupno $\frac{20 \cdot (20-3)}{2} = 170$ dijagonala.

Oktaedralna grupa

U svom radu o algebri sam dao laganu motivaciju za prebrojavanje simetrija kocke i oktaedra. No, ovdje bih postavio temeljitiji dokaz i analizu oktaedralne grupe jer spada više u sferu geometrije nego u sferu algebre. Također, potrebno je više ilustracija koje usporavaju učitavanje datoteke, a obzirom da moj rad iz algebre, zasad, ima tri stotine stranica, jednostavnije je sve to staviti u datoteku gdje već ima mnogo ilustracija. Možda jednog dana, ako ne počinim samoubojstvo, uspijem napraviti neku knjižicu od svega toga. Za početak, definirat ćemo skup koji sadrži sve (i samo) vrhove kocke:

$$\mathcal{C} = \{(n, n, n) : \ n \in \{1, -1\}\}.$$

Na slikama, uvest ćemo sljedeće oznake tih vrhova:

$$\begin{array}{cccc} A(-1,-1,-1) & B(1,-1,-1) & C(1,1,-1) & D(-1,1,-1) \\ E(-1,-1,1) & F(1,-1,1) & G(1,1,1) & H(-1,1,1) \end{array}$$

Bitno je primijetiti, također, kako se susjedni vrhovi razlikuju samo za jedan negativan član. Stoga, možemo uvesti i particiju skupa $\mathcal{C}$, tako da je:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \{A\}, \\ \mathcal{C}_1 &= \{B, D, E\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{C, F, H\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{G\}. \end{aligned}$$

Ta se particija lako može inducirati relacijom ekvivalencije koju ćemo sada definirati. Za početak neka je $S_{\mathcal{C}}$ simetrična grupa nad $\mathcal{C}$. Neka je $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ funkcija definirana formulom $f(x, y, z) = (y, z, x)$. Lako je provjeriti da je f permutacija skupa $\mathcal{C}$ pa je $f \in S_{\mathcal{C}}$. Neka je $F = \langle f \rangle$. Kako je $f(x, y, z) = (y, z, x)$, tada je $f(f(x, y, z)) = f(y, z, x) = (z, x, y)$. Također, $f(f(f(x, y, z))) = f(f(y, z, x)) = f(z, x, y) = (x, y, z)$. Dakle, $|F| = \text{ord}\,(f) = 3$. Nadalje, definiramo relaciju $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{Z}$ tako da je $f^k.(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$. Ista relacija ekvivalencije (generalizirana na n) se koristi za dokaz malog Fermatovog teorema pomoću orbit-stabilizer teorema. Također, znat ćemo jesu li dva vrha, (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2), susjedna ako i samo ako za svaki $k \in \mathbb{Z}$, $f^k.(x_1, y_1, z_1) \neq (x_2, y_2, z_2)$. Sada ćemo pomoću orbit-stabilizer teorema pokazati da je grupa O (oktaedralna grupa) svih rotacija kocke (koje ju čine nepromijenjenom do na oznake vrhova) reda 24.

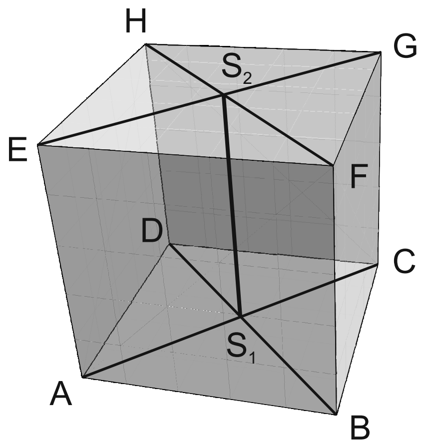
Primjedba. Primijetimo kako se ravnina π u Euklidskom prostoru može definirati na tri načina: (1) točkom T i normalom n (pravcem okomitim na tu ravninu) kao $\pi[T \perp n]$; (2) točkom T i pravcem p koji ne sadrži tu točku kao $\pi[T, p]$; (3) pomoću dva pravca p i q koji se sijeku ili su paralelni kao $\pi[p, q]$; (4) pomoću tri nekolinearne točke T_1, T_2 i T_3 kao $\pi[T_1, T_2, T_3]$. Očito je kako se prva, druga i treća definicija mogu izvesti iz četvrte.

Propozicija. Neka je zadan pravac p te točke T_1, T_2 i T_3 u Euklidskom prostoru. Neka je $T \in p$. Ako je $T_iT \perp p$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, tada su točke T, T_1, T_2 i T_3 koplanarne, tj. postoji ravnina π takva da je $\pi[T \perp p] = \pi[T_1, T_2, T_3]$.

Dokaz. Uzmimo ravninu $\pi[T \perp p]$. Ta ravnina sadrži sve pravce okomite na p koji prolaze točkom T, a tu spadaju i T_iT. Stoga imamo $T_1, T_2, T_3 \in \pi[T \perp p]$ pa je $\pi[T \perp p] = \pi[T_1, T_2, T_3]$.

□

Prva os rotacije, na slici ispod, koju ćemo promotriti jeste os koja se poklapa s aplikatom. Očito je kako je kut rotacije tada $\frac{\pi}{2}$ ili $90°$ pa možemo zapisati $r_z = (A\ B\ C\ D)(E\ F\ G\ H)$. Radi se o dva disjunktna ciklusa, oba duljine četiri, te je lako uočiti kako je $\operatorname{ord}(r_z) = 4$.



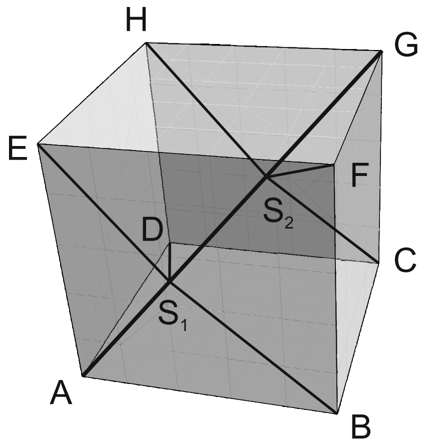
Slika 21: Aplikata kao os rotacije kocke.

Promotrimo os rotacije AG sa slike ispod i projekcije točki iz $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ na AG. Očito je kako, obzirom da je $A = (-1, -1, -1)$ i $G(1, 1, 1)$, točke A i G definiraju pravac $t \to t(1, 1, 1)$ $(1 \to (1, 1, 1), (-1) \to (-1, -1, -1))$ te kako taj pravac prolazi ishodištem (za $t = 0$ imamo $0 \to 0 \cdot (1, 1, 1)$, tj. $0 \to (0, 0, 0)$). Vektor smjera je dakle $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$. Promotrimo sada projekcije točki iz $\mathcal{C}_1$ na AG. Neka je S_1 projekcija točke

$B = (1, -1, -1)$ na AG. Očito je kako, jer $S_1 \in AG$, mora vrijediti $S_1 = q(1, 1, 1)$. Tada je $\overrightarrow{BS_1}$ jednak $(q-1, q+1, q+1)$. Vektor $\overrightarrow{BS_1}$ mora biti okomit na $\overrightarrow{AG}$ pa mora vrijediti i $(1, 1, 1)(q-1, q+1, q+1) = 0$ (skalarni produkt je nula). Iz toga imamo $q - 1 + q + 1 + q + 1 = 0$, tj. $3q + 1 = 0$. Dobili smo $q = -\frac{1}{3}$ pa je $S_1 = -\frac{1}{3}(1, 1, 1)$. Stoga, $\overrightarrow{BS_1} = \frac{2}{3}(-2, 1, 1)$. Lako se provjeri kako je $DS_1 \perp AG$ i $ES_1 \perp AG$. Također lako je vidjeti kako je $\overrightarrow{DS_1} = \frac{2}{3}(1, -2, 1)$ i $\overrightarrow{ES_1} = \frac{2}{3}(1, 1, -2)$. Kako su koordinate vektora $\overrightarrow{ES_1}$ i $\overrightarrow{DS_1}$ samo rotacije (u smislu permutacije) od $\overrightarrow{BS_1}$, te obzirom da je $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$, vrijedit će $ES_1 \perp AG$ i $DS_1 \perp AG$, te su po prethodnoj propoziciji točke B, D, E i S_1 koplanarne. Ta ravnina može se definirati kao $\pi[BS_1, DS_1](u, v) = -\frac{1}{3}(1, 1, 1) + u(-2, 1, 1) + v(1, -2, 1)$, tj.

$$\pi[B, D, E](u, v) = \pi[BS_1, DS_1](u, v) = \left(v - 2u - \frac{1}{3}, u - 2v - \frac{1}{3}, u + v - \frac{1}{3}\right).$$

Ta se ravnina može zapisati i kao $x + y + z + 1 = 0$ što je lako provjeriti rješavanjem sustava.



Slika 22: Dijagonala kocke kao os rotacije.

Slično se pokaže kako će projekcije točki iz $\mathcal{C}_\in$ na AG biti u jednoj točki $S_2 = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$. Vektori će biti $\overrightarrow{CS_2} = -\frac{2}{3}(1, 1, -2)$, $\overrightarrow{DS_2} = -\frac{2}{3}(1, -2, 1)$ i $\overrightarrow{CS_2} = -\frac{2}{3}(-2, 1, 1)$. Također će tada biti definirana i ravnina:

$$\pi[C, H, F](u, v) = \left(v - 2u + \frac{1}{3}, u - 2v + \frac{1}{3}, u + v + \frac{1}{3}\right).$$

Drugi zapis te ravnine je $x + y + z - 1 = 0$. Sumirano:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BS_1} &= \frac{2}{3}(-2,1,1) = -\overrightarrow{HS_2},\\ \overrightarrow{DS_1} &= \frac{2}{3}(1,-2,1) = -\overrightarrow{FS_2},\\ \overrightarrow{ES_1} &= \frac{2}{3}(1,1,-2) = -\overrightarrow{CS_2}.\end{aligned}$$

Pokušajmo izračunati kutove između ovih vektora. Imamo poznatu formulu $\cos\phi = \frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}$. Za to nam prvo, dakle, trebaju norme gornjih vektora. Tada je $\left|\overrightarrow{BS_1}\right| = \frac{2}{3}\sqrt{4+1+1} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$. Primijetimo kako su duljine svih vektora jednake, jer se koordinate točki u $\mathcal{C}_1$ razlikuju samo po različitom premještaju koordinata (ili za koeficijent -1 gledajući odgovarajuće vektore u $\mathcal{C}_2$). No, obzirom da će se koeficijent $\frac{2}{3}$ uzimati i u skalarnom produktu i u normi, možemo jednostavno promatrati (u formuli) vektor bez tog koeficijenta. Stoga imamo:

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{BS_1},\overrightarrow{DS_1}\right) = \frac{(-2,1,1)(1,-2,1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{-2-2+1}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Iz toga zaključujemo kako je $\angle\left(\overrightarrow{BS_1},\overrightarrow{DS_1}\right) = \frac{2\pi}{3}$ (ili 120°). Lako se provjeri kako je to kut između svaka dva vektora definirana točkama iz $\mathcal{C}_1$ i svaka dva vektora definirana točkama iz $\mathcal{C}_2$. Stoga, ukoliko koristimo pravac AG kao os rotacije kocke, primijetit ćemo da, obzirom da točke iz $\mathcal{C}_1$ leže u ravnini okomitoj na AG, a isto tako i točke i $\mathcal{C}_2$, pri rotaciji od 120° točke A i G ostaju fiksne, dok B prelazi u E, E u D te D u B, a točka C prelazi u F, F u H, a H u C. Stoga tu rotaciju, r_D, možemo zapisati pomoću grupne akcije kao $r_D = (B\ E\ D)(C\ F\ H)$. Obzirom da se radi o dva disjunktna ciklusa duljine 3, vrijedi $\operatorname{ord}(r_D) = 3$. Stoga, promatramo li točku A, vrijedit će $\operatorname{Stab}_{O_r}(A) = \{e, r_D, r_D^2\}$, gdje je O_r grupa koja sadrži sve rotacije kocke (koje preslikavaju vrh u vrh). Nijedna druga rotacija ne može ostaviti A fiksnom jer os rotacije mora prolaziti kroz točku A. Izračunajmo što se dogodi kada rotiramo kocku oko pravca AG a onda oko aplikate. Imamo:

$$r_z r_D = (A\ B\ C\ D)(E\ F\ G\ H)(B\ E\ D)(C\ F\ H) = (C\ G\ H\ D)(F\ E\ A\ B).$$

Promatrajući sliku možemo uočiti kako se radi o rotaciji oko ordinate, tj. $r_z r_D = r_y$. Možemo primijetiti kako točku A možemo preslikati u točke B, C i D pomoću r_z, r_z^2, r_z^3, istim redoslijedom, te kako možemo pomoću r_y^2 i r_y^3 preslikati točku A u F i E, istim redoslijedom. Izračunajmo rotaciju kocke za 240° oko osi AG:

$$r_D^2 = (B\ E\ D)(C\ F\ H)(B\ E\ D)(C\ F\ H) = (C\ H\ F)(B\ D\ E).$$

Tada nam sljedeća kompozicija rotacija govori kako možemo preslikati točku A u točku H:

$$r_D^2 r_z^2 = (C\ H\ F)(B\ D\ E)(A\ C)(B\ D)(E\ G)(F\ H) = (A\ H\ C)(B\ E\ G).$$

Primijetimo kako se gore radi o rotaciji oko pravca FD (dvije točke koje su fiksne). Primijetimo:

$$r_z^3 = (A\ B\ C\ D)(E\ F\ G\ H)(A\ C)(B\ D)(E\ G)(F\ H) = (A\ D\ C\ B)(E\ H\ G\ F).$$

Tada možemo uzeti:

$$r_z^3 r_D^2 r_z^2 = (A\ D\ C\ B)(E\ H\ G\ F)(A\ H\ C)(B\ E\ G) = (A\ G)(B\ H)(D\ C)(F\ E).$$

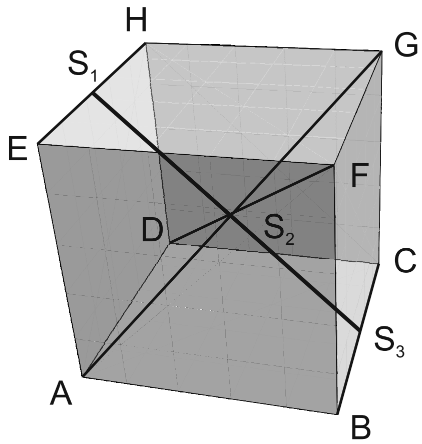
Vidimo kako gornja rotacija (koju ćemo uskoro opisati) preslikava A u G. Stoga smo pokazali kako točku A možemo preslikati u točku B pomoću r_z, u C pomoću r_z^2, u D pomoću r_z^3, u E pomoću $r_y^3 = (r_z r_D)^3$, u F pomoću $r_y^2 = (r_z r_D)^2$, u G pomoću $r_z^3 r_D^2 r_z^2$ i u H pomoću $r_D^2 r_z^2$. Stoga je $\mathrm{Orb}_{O_r}(A) = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$. Očito je kako $e \in O_r$ preslikava A u A. Po orbiter-stabilizer teoremu, tada vrijedi:

$$|O_r| = |\mathrm{Orb}_{O_r}(A)| \cdot |\mathrm{Stab}_{O_r}(A)| = 8 \cdot 3 = 24.$$

Nešto što će daleko pojednostavniti stvar jeste činjenica da oktaedralna grupa u stvari djeluje ne samo na svaki vrh posebno, nego na parove nasuprotnih vrhova. Stoga ćemo uvesti oznake:

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= \{A, G\}, \\
\overline{B} &= \{B, H\}, \\
\overline{C} &= \{C, E\}, \\
\overline{D} &= \{D, F\}.
\end{aligned}$$

Sada možemo primijetiti, i iz gornjih jednakosti i rezultata, kako je $r_z^3 r_D^2 r_z^2 = (\overline{C}\ \overline{D})$ (jer očito npr. $(A\ G)$ ne mijenja ništa jer opet ostaju oba vrha unutar $\overline{A}$). Primijetimo kako je sada $r_z = (\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D})$, $r_D^2 r_z^2 = (A\ H\ C)(B\ E\ G) = (\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C})$ i slično. Na slici ispod se jasnije vidi geometrijsko značenje transpozicije. Očito je kako će tada postojati i ostale transpozicije u oktaedralnoj grupi: $(\overline{A}\ \overline{B})$, $(\overline{A}\ \overline{C})$ i $(\overline{A}\ \overline{D})$. Obzirom da oktaedralna grupa mora sadržavati i sve ostale produkte ovih transpozicija (a znamo kako ovakve transpozicije generiraju simetričnu grupu četvrtog reda), te kako sadrži jednak broj elemenata kao i S_4, možemo zaključiti $O_r \cong S_4$.



Slika 23: Os rotacije koja djeluje kao transpozicija $(\overline{C}\ \overline{B})$.