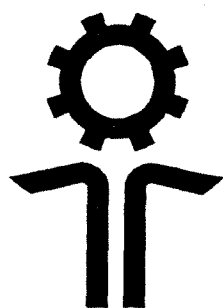


ELEKTROFYSIK (E-ANA 1)

SUPPLERENDE NOTER

EFTERÅR 1997

SØREN HASSING OG RENÉ SKOV HANSEN



INGENIØRHØJSKOLEN
ODENSE TEKNIKUM

Elektroafdelingen

kr. 32,00

Indhold.

Elektrisk energi og elektriske kræfter (SH/96)

Magnetisk energi og magnetiske kræfter (SH/90)

Magnetiske kredsløb (SH/96)

Én-fase transformatoren som kredsløbselement (SH/96)

Grænsebetingelser (RSH'96)

Forord.

Det foreliggende hæfte indeholder udvalgte emner i klassisk elektromagnetisme, som hører med til pensum i Elektrofysik (ELF 1206 + 2306). De behandlede emner er enten ikke er medtaget i den valgte fysiklærebog eller ikke behandlet tilstrækkeligt grundigt, set i forhold til pensum.

april 96

Søren Hassing & René Skov Hansen

SH/96

Elektrisk energi og elektriske kræfter.

Opbygning af et elektrisk felt kræver tilførsel af energi. Vi har tidligere vist [1], at den elektriske energi, der oplagres i en kondensator kan udtrykkes som,

$$U_{el} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot V = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \quad (1)$$

hvor C er kapaciteten, V er potentialforskellen mellem pladerne og Q er ladningen på den ene plade.

Energitætheden i det elektriske felt på stedet r , defineres på følgende måde,

$$u_{el} = \frac{dU_{el}}{dVol} \quad (2)$$

hvor dU_{el} er energiindholdet i et infinitesimalt volumen $dVol$.

Man kan vise [2], at energitætheden alment kan udtrykkes på følgende måde,

$$u_{el} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_o \cdot E^2(\vec{r}) \quad (3)$$

For elektriske felter i lineære dielektrika (d.v.s. med konstant dielektricitetskonstant, ϵ_{rel}) ændres (3) blot til ,

$$u_{el} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_o \epsilon_{rel} \cdot E^2(\vec{r}) \quad (4)$$

Det viser sig endvidere, at (3) og (4) også gælder når E -feltet varierer i tid.

Lgn.(3) og (4) tydeliggør det forhold, at energien er knyttet til det elektriske felt og ikke ligesom lgn. (1) antyder, kun forekommer når man har forelagt en kondensator.

Den elektriske energi U_{el} i et defineret område af rummet beregnes ved at integrere (3) eller (4) over det pågældende volumen.

Opgave 1:

a) Bestem et udtryk for den energi, der er oplagret pr. meter i isolationen af et koaksialkabel. Radius af henholdsvis inderleder og skærm er a og b . Isolationen har dielektricitetskonstanten ϵ_{rel} og det antages, at isolationen udfylder hele mellemrummet mellem inderleder og skærm. Kablet er ved hjælp af en potentialforskel mellem inderleder og skærm påført ladningstætheden λ [C/m].

Beregning af elektriske kræfter mellem ledere og dielektrika.

Beregning af kræfter mellem ledere og dielektrika foretages mest bekvemt v.h.j.a. den elektriske energi U_{el} . Figur 1 viser skematisk et system af to ledere af vilkårlig geometrisk form. Lederne har henholdsvis ladningen Q_1 og Q_2 . Mellem kan der være vacuum eller et lineært dielektrikum. Det antages, at den ene af lederne forskydes et lille stykke, $d\mathbf{r}$ under indvirkning af en ydre kraft \mathbf{F}_{ydre} . Det ydre arbejde er givet ved,

$$dW_{\text{ydre,mek}} = \vec{F}_{\text{ydre}} \cdot d\vec{r} \quad (5)$$

Det antages, at forskydningen foregår så langsomt, at man ikke behøver at tage hensyn accelerationen af den leder, der flyttes.

I figur 1a antages de to ledere at være galvanisk adskilte fra omverdenen, hvilket betyder, at man efter at have opladet lederne fra to ydre elektromotoriske kræfter V_1 og V_2 , har fjernet disse. I den proces, hvor man forskyder den ene leder stykket $d\mathbf{r}$ vil den samlede ladning altså være konstant og lig med $Q_1 + Q_2$.

I figur 1b er de ydre elektromotoriske kræfter derimod forbundet til lederne hele tiden d.v.s. også under forskydningen af den ene leder. I dette tilfælde vil ledernes potentialer da hele tiden være henholdsvis V_1 og V_2 . Ladningerne vil derimod ikke være konstante.

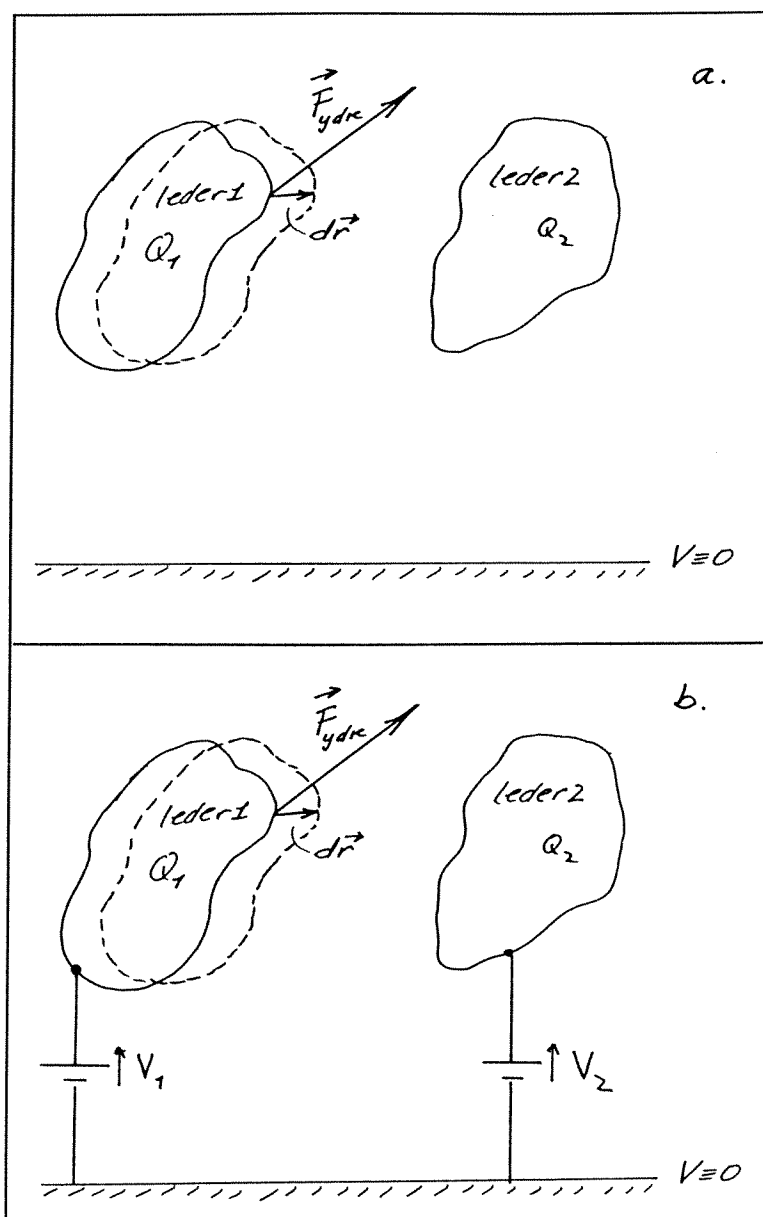
Vi ønsker, at bestemme et generelt udtryk for den elektriske feltkraft, der virker på leder 1 i de to situationer.

Tilfælde 1: Situationen med konstant ladning (figur 1a).

Da lederne er elektrisk isolerede fra omverdenen gælder følgende energirelation,

$$dW_{\text{ydre,mek}} = (dU_{\text{el}})_{Q=\text{konstant}} \quad (6)$$

hvor dU_{el} betegner ledernes tilvækst i elektrisk energi som følge af flytningen af den ene leder.



Figur 1. System af ledere under påvirkning af en ydre kraft. 1a: konstant samlet ladning. 1b: konstante potentialer.

Kombineres (5) og (6) får man umiddelbart at,

$$\vec{F}_{ydre} = (\vec{\nabla} U_{el})_{Q=\text{konstant}} \quad (7)$$

Da systemet, ifølge vores forudsætning om langsom bevægelse, hele tiden er i ligevægt ("quasi-static equilibrium") haves for den elektriske feltkraft,,

$$\vec{F}_{el} = - (\vec{\nabla} U_{el})_{Q=\text{konstant}} \quad (8)$$

Tilfælde 2: Situationen med konstante potentialer (figur 1b):

Da lederne hele tiden er forbundne til de ydre elektromotoriske kræfter er deres potentialer V_1 og V_2 konstante. For at holde potentialerne konstante må de ydre elektromotoriske kræfter under flytningen af leder 1 levere et arbejde, idet ladningen på de to ledere nødvendigvis må ændres.

Spørgsmål 1: Giv et argument for at ladningerne på lederne nødvendigvis må ændres.

Arbejdet, dW_{batt} , som de ydre elektromotoriske kræfter udfører er givet ved,

$$dW_{batt} = V_1 \cdot dQ_1 + V_2 \cdot dQ_2 \quad (9)$$

hvor dQ_1 og dQ_2 er de tilførte ladninger fra de elektromotoriske kræfter.

Den samlede elektriske energi af lederne kan ved anvendelse af (1) skrives,

$$U_{el} = \frac{1}{2} \cdot V_1 \cdot Q_1 + \frac{1}{2} \cdot V_2 \cdot Q_2 \quad (10)$$

For at bestemme ledernes energitilvækst differentieres (10) under hensyntagen til at ledernes potentialer er konstanter,

$$(dU_{el})_{V=\text{konstant}} = \frac{1}{2} \cdot V_1 \cdot dQ_1 + \frac{1}{2} \cdot V_2 \cdot dQ_2 \quad (11)$$

Sammenholdes lgn.(11) med (9) ser man, at der gælder følgende,

$$dW_{batt} = 2 \cdot (dU_{el})_{V=\text{konstant}} \quad (12)$$

De ydre elektromotoriske kræfter udfører altså, under de givne omstændigheder, et arbejde, som er dobbelt så stor som tilvæksten i ledernes elektriske energi.

Energibevarelsen for det samlede system af ledere og elektromotoriske kræfter lyder,

eller ved anvendelse af lgn.(12),

$$(dU_{el})_{V=\text{konstant}} = dW_{ydre,mek} + dW_{batt} \quad (13)$$

$$- (dU_{el})_{V=\text{konstant}} = dW_{ydre,mek} \quad (14)$$

Ved anvendelse af lgn.(5) fås,

$$\vec{F}_{ydre} = - (\vec{\nabla} U_{el})_{V=\text{konstant}} \quad (15)$$

Den elektriske feltkraft bliver da,

| |
|---|
| $\vec{F}_{el} = + (\vec{\nabla} U_{el})_{V=\text{konstant}} \quad (16)$ |
|---|

Ligningerne (8) og (16) har almen gyldighed i den forstand, at der ikke er forudsat noget specielt om ledernes geometri. Det eneste der er anvendt i de to situationer er, at der sker en ændring af ledersystemets energi (og kapacitet), som følge af den ydre påvirkning. Denne ændring kunne lige så godt have været fremkaldt af en ydre kraft på et stykke dielektrikum i nærheden af pladerne. Hvis man altså bevæger et stykke dielektrikum i nærheden af de to ledere under påvirkning af en ydre kraft, vil man også i dette tilfælde kunne bestemme den optrædende feltkraft ved anvendelse af (8) eller (16), afhængig af om $Q = \text{konstant}$ eller $V = \text{konstant}$.

Opgave 2:

Bestem kraften, der virker mellem de to plader i en simpel pladekondensator med pladeafstand d og pladeareal A , når kondensatoren er påtrykt

- a) en konstant ladning (d.v.s. opladet fra et batteri, som derefter er fjernet),
- b) en konstant potentialforskel (d.v.s. batteriet er tilsluttet hele tiden).
- c) Beregn kraften ved direkte anvendelse af Coulombs lov og sammenlign resultateterne.

SH/96

Referencer:

- [1] N.Jonassen, Elektro Magnetisme, Polyteknisk Forlag (1992).

Magnetisk energi og magnetiske kræfter.

Opbygning af et magnetisk felt kræver tilførsel af energi.

I det følgende vil vi opstille et udtryk for den magnetiske energi i et system af n koblede spoler. Ligesom i lærebogen [1], vil vi se bort fra virkningen af ferromagnetiske stoffer, d.v.s. vi vil antage at permeabiliteten μ er konstant. Endvidere vil vi antage, at spolerne er ikke-deformerbare (d.v.s. viklet af stift tråd).

Fig. 1 viser én spole med N vindinger forbundet i serie med et batteri med elektromotorisk kraft \mathcal{E}_{batt} og en modstand R , som symboliserer den samlede modstand i kredsen.

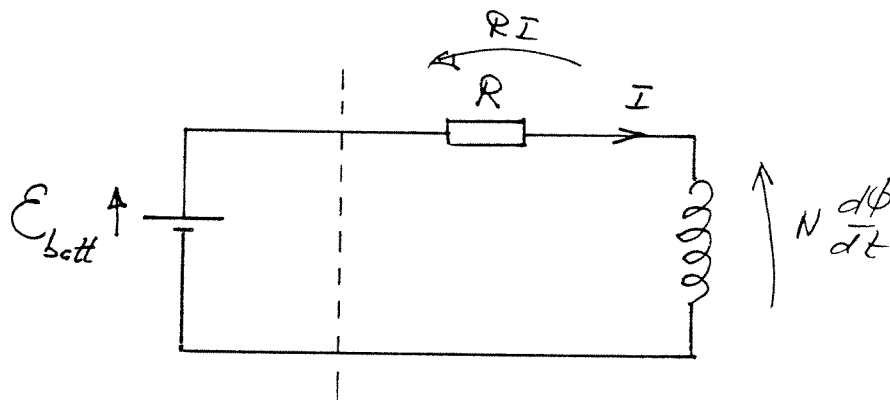


Fig. 1

Anvendes Kirchhoffs og Faradays love får vi ,

$$\mathcal{E}_{batt} = R \cdot I + N \frac{d\phi}{dt} \quad (1)$$

ganges på begge sider med $I \cdot dt$ fås ,

$$\mathcal{E}_{batt} \cdot I \cdot dt = RI^2 \cdot dt + NI d\phi \quad (2)$$

Ligning (2) udtrykker energibevarelse idet ,

Referencer:

$$\begin{aligned}
 dW_{\text{batt}} &= \mathcal{E}_{\text{batt}} I dt && \text{er det arbejde batteriet udfører for at drive} \\
 &&& \text{strømmen } I \text{ rundt i kredsen i } dt \text{ sekunder,} \\
 dW_{\text{Joule}} &= R I^2 dt && \text{er varmen der afsættes i modstanden} \\
 N \cdot I \cdot d\phi &&& \text{er det arbejde batteriet udfører på den indu-} \\
 &&& \text{cerede elektromotoriske kraft .}
 \end{aligned}$$

Ifølge kap. 36 gælder ,

$$N\phi = LI \quad (3)$$

hvor L er spolens induktans.

Hvis spolen er stationær (d.v.s. ubevægelig) kan der kun opstå en fluxændring i denne hvis strømmen I ændres d.v.s.,

$$\text{stationær spole :} \quad d\phi = \frac{L}{N} \cdot dI \quad (4)$$

d.v.s. (2) bliver ,

$$dW_{\text{batt}} = dW_{\text{Joule}} + LI dI \quad (5)$$

Når spolen er stationær er sidste led i (2) eller (5) lig med tilvæksten i magnetisk potentiel energi dU_B ,

$$\text{stationær spole :} \quad dU_B = NI d\phi = LI dI \quad (6)$$

I det følgende vil vi for overskuelighedens skyld se bort fra modstanden R .

Hvis vi i stedet for én spole har et system af n koblede spoler, må vi summere (2) over samtlige n spoler ,

$$n \text{ spoler :} \quad dW_{\text{batt}} = \sum_{j=1}^n N_j I_j d\phi_j \quad (7)$$

Lgn. (7) udtrykker altså det arbejde, som det ydre batteri udfører på samtlige inducerede elektromotoriske kræfter i systemet af n koblede spoler.

Fluxen gennem den j^{te} spole, ϕ_j er i analogi med (3) givet som,

$$N_j \phi_j = \sum_{k=1}^n M_{kj} \cdot I_k \quad (*) \quad (8)$$

hvor $k = j$: $M_{jj} = L_j$ (induktans)

$k \neq j$: M_{kj} (gensidig induktans)

Hvis alle spoler er stationære fås i lighed med (5),

$$\text{stationære spoler :} \quad dU_B = dW_{\text{batt}} = \sum_{j=1}^n I_j \sum_{k=1}^n M_{kj} \cdot dI_k \quad (9)$$

Vi ønsker nu at beregne energiindholdet i systemet af n spoler, U_B . Af regnetekniske grunde vil vi antage at spolerne er stationære i det tidsrum, hvor energien bygges op fra 0 (Joule) til U_B (Joule).

Med denne antagelse kan vi anvende (9).

Udtrykket for U_B vil imidlertid være alment gyldigt (hvilket følger af definitionen på begrebet potentiel energi), d.v.s. det kan anvendes som udgangspunkt for beregninger i tilfælde, hvor vi tillader én eller flere af spolerne at bevæge sig under indvirkning af de magnetiske kræfter. (se nedenfor).

For at beregne udtrykket for energien U_B vil vi forestille os at strømmene i hver spole vokser lige meget pr. sekund, hvilket vi kan udtrykke matematisk på følgende måde,

$$I_k(t) = I_k \cdot f(t) \quad (10)$$

hvor $I_k(t)$ er strømmen i den k^{te} spole til et vilkårligt tidspunkt t under energiopbygningen og I_k er slutværdien af strømmen.

$f(t)$ er en voksende funktion af tiden, med startværdi 0 og slutværdi 1.

*) Prøv for øvelsens skyld, at opskrive ligningerne for et system af 2 koblede spoler.

Differentieres (10) får vi ,

$$dI_k = I_k \cdot \frac{df}{dt} \cdot dt \quad (11)$$

(10) og (11) indsættes i (9) hvilket giver ,

$$dU_B = \sum_{j=1}^n I_j \cdot f(t) \sum_{k=1}^n M_{kj} I_k \cdot df \quad (12)$$

eller

$$dU_B = \left(\sum_{j=1}^n I_j \sum_{k=1}^n M_{kj} I_k \right) \cdot f df$$

(12) kan umiddelbart integreres til følgende ,

$$U_B = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n I_j \sum_{k=1}^n M_{kj} \cdot I_k \quad (13)$$

eller ved anvendelse af (8) ,

$$U_B = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n N_j I_j \phi_j \quad (13a)$$

Eksempel : 2 koblede spoler

Anvendes (13) får vi

$$U_B = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n I_j \cdot (M_{1j} \cdot I_1 + M_{2j} \cdot I_2) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_{1j} I_1 I_j + M_{2j} I_2 I_j$$

$$U_B = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

hvor vi har indført de "normale" betegnelser : $L_1 = M_{11}$, $L_2 = M_{22}$

og $M_{12} = M_{21} = M$.

Beregning af kræfter i et magnetisk system.

Vi vil nu beregne kraften, der virker på én af de n spoler udfra kendskabet til den magnetiske energi U_B , givet ved (13) eller (13a).

Antag at den pågældende spole forskydes et lille stykke $d\vec{r}$ samt at alle strømme holdes konstante. Det mekaniske arbejde dW_{mek} som vort system derved udfører er da ,

$$dW_{mek} = \vec{F}_{magn} \cdot d\vec{r} \quad (14)$$

Energibevarelse for det magnetiske system og batteriet er ensbetydende med,

$$dW_{batt} = dW_{mek} + dU_B \quad (15)$$

Energertilvæksten dU_B kan beregnes fra (13a) ved at differentiere udtrykket under den forudsætning af alle strømme er konstante, d.v.s.,

$$dU_B = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n N_j I_j d\phi_j \quad (16)$$

Ved at sammenligne (16) med (7) ser vi at der gælder følgende,

$$dW_{batt} = 2 \cdot dU_B \quad (17)$$

Indsættes dette resultat i (15) fås ,

$$dU_B = dW_{mek} \quad (18)$$

Vi ser altså, at den kraft der virker på den spole der flytter sig stykket $d\vec{r}$ kan udregnes som ,

$$\boxed{\vec{F}_{magn} = \text{grad } U_B} \quad (19)$$

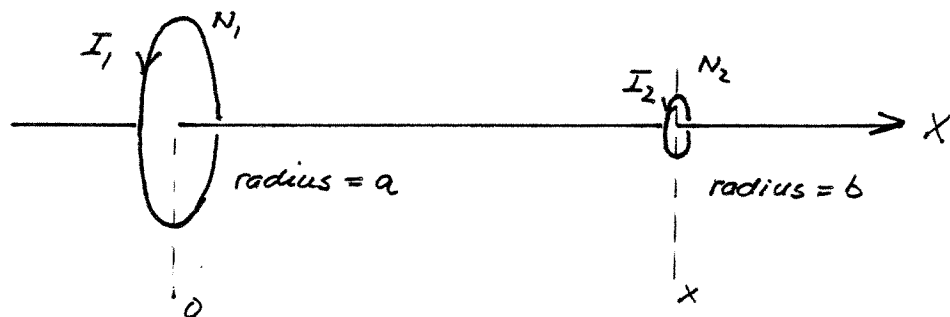
eller i 1-dimension hvor forskydningen f.eks. foregår langs x-aksen ,

$$\boxed{F_{magn,x} = \frac{dU_B}{dx}} \quad (20)$$

I det følgende gives 2 eksempler på anvendelsen af (20) .

Eksempel 1 Kraftpåvirkningen mellem 2 spoler

Figuren viser 2 flade spoler med vindingstal N_1 og N_2 anbragt på en fælles akse. Strømmene i de to spoler I_1 og I_2 er konstante. For simpelheds skyld vil vi antage at : $x \gg b$ således at der med god tilnærmelse gælder at B-feltet hidrørende fra spole 1 er konstant over spole 2's areal.



Problem : Beregn x-komponenten af den kraft der virker på spole 2 .

Løsning : L_1 og L_2 er uafhængige af den indbyrdes afstand mellem de to spoler, hvorimod den gensidige induktion M afhænger af x . V.h.j.a. kap. 34 og 36 finder man at M kan udtrykkes,

$$M(x) = \frac{N_1 N_2 \mu_0 a^2 b^2 \pi}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

(Vis dette!!).

Den magnetiske energi U_B er,

$$U_B = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + I_1 I_2 \cdot M(x)$$

hvorefter kraften findes ved at differentiere U_B ,

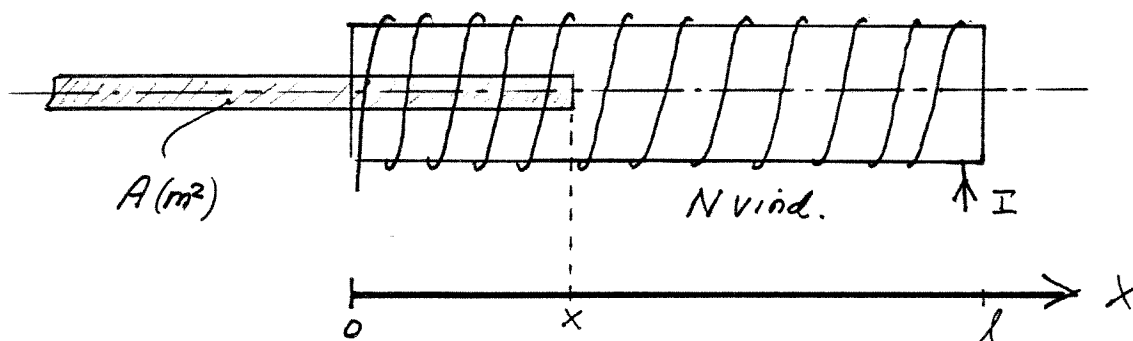
$$\bar{F}_x = I_1 I_2 \cdot \frac{dM}{dx} = -\frac{3}{2} I_1 I_2 \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2 \pi \frac{x}{(x^2 + a^2)^{5/2}}$$

Man bemærker at kraften på spole 2 er negativ, svarende til en tiltrækningskraft. (sammenlign § 34-4).

Eksempel 2

Kraften på en jernkerne af magnetisk blødt jern
(d.v.s. $K_m = \text{konstant}$).

Figuren viser en solenoide med N vindinger, som bærer en konstant strøm I . Længs spolens akse er anbragt en jernkerne.



Problem : Beregn kraften på jernkernen .

Løsning : På figuren er jernkernen ført stykket x ind i spolen. Vi forestiller os nu at jernkernen bevæges yderligere stykket dx ind i spolen.

Den tilhørende energitilvækst dU_B ses at være :

$$dU_B = \left(\frac{1}{2} \mu_0 K_m I^2 - \frac{1}{2} \mu_0 I^2 \right) \cdot A \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 I^2 (K_m - 1) \cdot A \cdot dx$$

hvor vi har anvendt det almene udtryk for energitætheden

$$u_B = \frac{1}{2} H \cdot B$$

samt relationen : $B = \mu_0 K_m H$.

Amperes lov giver : $H = \frac{N \cdot I}{l}$ d.v.s vi får ,

$$dU_B = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 I^2}{l^2} (K_m - 1) A \cdot dx$$

Kraften på jernkernen er da :

$$F_x = \frac{dU_B}{dx} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 I^2}{l^2} \cdot (K_m - 1) \cdot A$$

For $K_m > 1$ (f.eks. $K_m = 1000$ for blødt jern)
er kraften positiv, hvilket betyder at kernen trækkes ind i spolen.

Eksempel 3 En elektromagnets trækraft .

Figur 1 viser en simpel elektromagnet bestående af en U-formet jernkerne og et anker, adskilt af to luftgab. Jernkernen og ankeret antages at have samme tværsnitsareal A_j og være fremstillet af blødt jern, således at K_m kan regnes konstant. Middelvelglængden i jernet er ℓ_j og ankerets position er angivet ved koordinaten x . Det antages at luftgabets er så lille at vi kan se bort fra spredning.

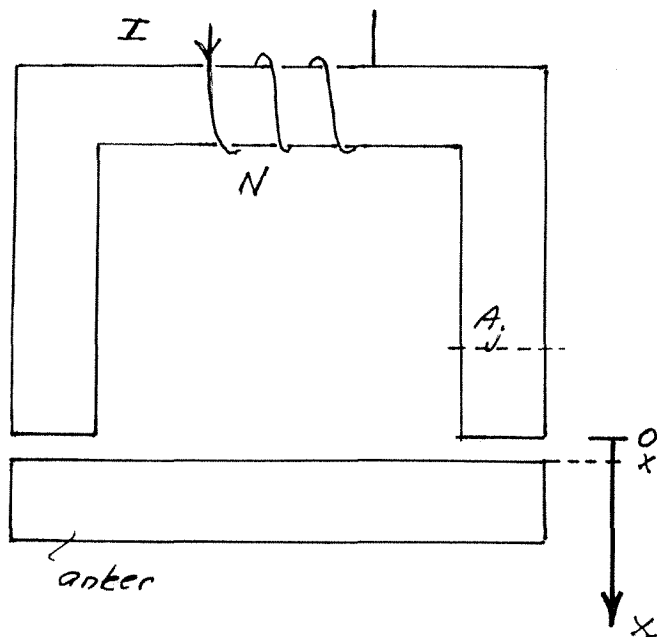


Fig. 1

Problem : Beregn den magnetiske kraft, der virker på ankeret i hvert luftgab.

Løsning : Amperes lov giver ,

$$H_j \cdot \ell_j + 2 \cdot H_s \cdot x = NI$$

$$H_j = \frac{B_j}{\mu_0 \mu_m} \quad , \quad H_s = \frac{B_s}{\mu_0}$$

(blødt jern)

ingen spredning i luftgabene betyder at $B_s = B_j$.
hvilket giver :

$$\frac{B_s}{\mu_0 \mu_m} \cdot l_j + 2 \cdot \frac{B_s}{\mu_0} \cdot x = \dots \quad IN$$

eller :

$$B_s(x) = \frac{\mu_0 IN}{\left(\frac{l_j}{\mu_m} + 2x\right)}$$

De følgende beregninger gælder for ét luftgab :

Den magnetiske energi $U_B = u_B \cdot \text{Vol.}$ bliver :

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \frac{(\mu_0 IN)^2}{\left(\frac{l_j}{\mu_m} + 2x\right)^2} \cdot A_j \cdot x$$

Den magnetiske kraft er iflg. (20), s.25 : $F_{\text{magn},x} = + \frac{dU_B}{dx}$
hvilket giver :

$$F_{\text{magn},x} = -\frac{A_j \cdot (\mu_0 IN)^2}{2\mu_0} \cdot \frac{1}{\left(\frac{l_j}{\mu_m} + 2x\right)^2} + x \cdot (-2) \cdot \frac{2}{\left(\frac{l_j}{\mu_m} + 2x\right)^3}$$

eller

$$F_{\text{magn},x} = - \frac{B_s^2}{2\mu_0} \cdot A_j \cdot \left(\frac{4x}{\frac{l_j}{\mu_m} + 2x} - 1 \right)$$

Vi bemærker, at kraften er negativ, hvilket betyder at kraften peger opad på Fig.1 . Ankeret vil med andre ord blive tiltrukket af resten af jernkernen.

Ofte vil K_m være så stor at man kan foretage følgende tilnærmelse : $\frac{l_j}{\mu_m} + 2x \approx 2x$

Taleks.: $K_m = 2000$, $l_j = 200 \text{ mm}$, $x \approx 3 \text{ mm}$ \Rightarrow

$\frac{l_j}{\mu_m} + 2x = 0,1 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-3}$: altså en fejl under 2% .

Indføres denne tilnærmelse i udtrykket for kraften fås :

$$F_{\text{magn},x} \approx - \frac{B_s^2}{2\mu_0} \cdot A_j$$

Størrelsen af den tiltrækkende kraft, der virker på ankeret pr. m² luftgab er altså i dette tilfælde lig med den magnetiske energitæthed i luftgabet .

Magnetiske kredsløb.

I en mængde af dagligdagens apparater, som f.eks. motorer, relæer, transformere, løftemagneter,..... indgår der "magnetiske kredsløb".

Et magnetisk kredsløb består typisk af én eller flere strømførende spoler, til frembringelse af det magnetiske felt, viklet omkring en jernkerne og kombineret med ét eller flere luftgab. Jernkernens primære formål er at styre det rumlige forløb af den magnetiske flux. Én eller flere af spolerne erstattes sommetider af permanente magneter.

I en magnetisk kreds med luftgab bevirker jernkernen, at man effektivt får overført magnetisk felt til luftgabene. I en transformer, hvor der normalt ikke er luftgab, sørger jernkernen for en effektiv magnetisk kobling mellem transformerens primærspole og sekundærspolerne. I resten af dette afsnit diskuteres magnetiske kredse med stationære magnetiske felter d.v.s. spolerne tænkes påtrykt dc-strømme. Med hensyn til spoler med vekselstrømme henvises til afsnittet om "Én-fase transformeren som kredsløbselement" og [1].

I forbindelse med dimensionering af apparater, hvori der indgår strømførende spoler og jernkerne, skal man bl.a. kunne beregne sammenhængen mellem B-feltet i luftgabene og den nødvendige strøm i spolerne. Det teoretiske udgangspunkt for enhver beregning på en magnetisk kreds er *Ampères lov*,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = (NI)_{\text{omsluttet}} \quad (1)$$

hvor \vec{H} er H-feltet langs integrationskurven defineret ved "skridtlængden" $d\vec{\ell}$ og $(NI)_{\text{omsluttet}}$ er det af integrationskurven omsluttete ampere-vindingstal.

Detaljerne i beregningerne vil afhænge af sammenhængen mellem B og H - felterne for jernkernen. For en ferromagnetisk jernkerne er denne sammenhæng ulineær og beskrives ved hjælp af hysteresekurven for det pågældende materiale [1]. Den ulineære sammenhæng mellem B og H felterne bevirker at den relative permeabilitet, μ_{re} , afhænger af H -feltet, hvilket gør beregningerne vanskeligere. Det faktum at den største værdi for μ_{re} ikke er uendelig stor (typisk: 500 - 10000, afhængig af jernlegering) bevirker desuden, at en lille del af den producerede magnetiske flux løber uden for jernkernen. De hertil svarende felter kaldes spredningsfelter (eller randfelter). Der vil være spredningsfelter omkring spolens vindinger og ved skarpe hjørner af jernkernen. I resten af jernkernen vil feltbilledet være homogent. Hvis jernvejen afbrydes af et luftgab vil det homogene feltforløb imidlertid forstyrres med den konsekvens, at det gennemsnitlige B -felt i luftgabene bliver mindre ("fluxfringing"). Den flux, der løber i jernkernen har en veldefineret geometri, nemlig jernkernens. Geometrien af

spredningsfluxen er derimod mindre veldefineret og som følge deraf vanskeligere at håndtere teoretisk.

Som følge af de nævnte forhold vil man ved praktiske beregninger indføre nogle simplificerende antagelser, og derpå forbedre regnemodellen indtil man opnår den nøjagtighed, som den aktuelle situation kræver.

Regnemodeller for magnetiske kredsløb.

I det følgende diskuteres følgende regnemodeller:

Regnemodel 1: Lineær approximation. Ingen spredning og fluxfringing.

Regnemodel 2: Ulineær model uden hysteres ("blødt jern").
Ingen spredning og fluxfringing.

Regnemodel 3: Ulineær model med hysteres ("hårdt jern"). Ingen spredning og fluxfringing.

Regnemodel 3a: Permanent magnet. Ingen spredning og fluxfringing.

Regnemodel 4: Kombinationer af 1, 2 og 3, hvor der i en vis udstrækning tages hensyn til spredning og fluxfringing.

Regnemodel 1. Lineær approximation. Ingen spredning og fluxfringing.

Figur 1 viser en simpel magnetisk kreds med et enkelt luftgab. Kredsen tænkes sammensat af forskellige materialer, hvis permeabilitet og geometriske dimensioner fremgår af figuren.

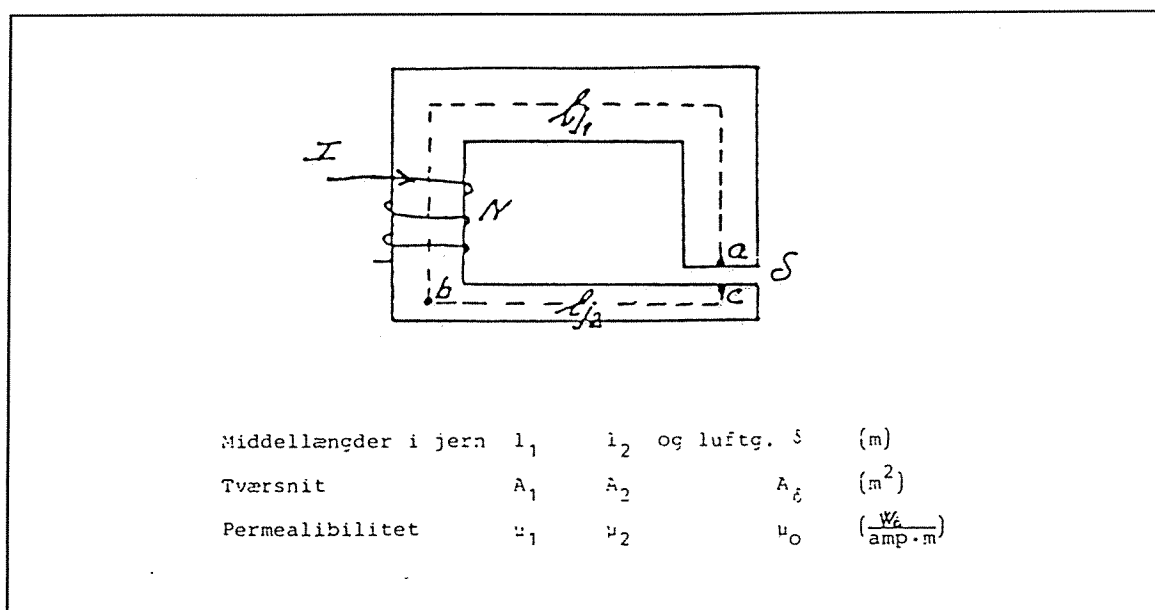
Anvendes Amperes lov på kredsen får man,

$$H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + H_\delta \delta = NI \quad (2)$$

Da permeabiliteterne μ_1 og μ_2 er antaget konstante får man ved at anvende den almentgyldige sammenhæng mellem B og H : $B = \mu H$ følgende udtryk,

$$\frac{B_1}{\mu_1} \cdot \ell_1 + \frac{B_2}{\mu_2} \cdot \ell_2 + \frac{B_\delta}{\mu_0} \cdot \delta = NI \quad (3)$$

Hvis der ses bort fra spredning vil der løbe den samme flux overalt i kredsen, hvilket udtrykkes gennem "flux-ligningen",



Figur 1. Magnetisk kreds med luftgab.

$$\phi = B_1 A_1 = B_2 A_2 = B_\delta A_\delta \quad (4)$$

hvor vi også har set bort fra fluxfringing i luftgabet.

Indsættes (4) i (2) fås,

$$NI = \phi \cdot \left(\frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_2}{\mu_2 A_2} + \frac{\delta}{\mu_0 A_\delta} \right) \quad (5)$$

Figur 2 viser til sammenligning et simpelt *elektrisk kredsløb* indeholdende en konstant elektromotorisk kraft \mathcal{E} , dc-strøm i og ohmske modstande R_1 , R_2 og R_3 .
Anvendes Ohms lov på kredsløbet på figur 2 fås let,

$$\mathcal{E} = i \cdot (R_1 + R_2 + R_3) \quad (6)$$

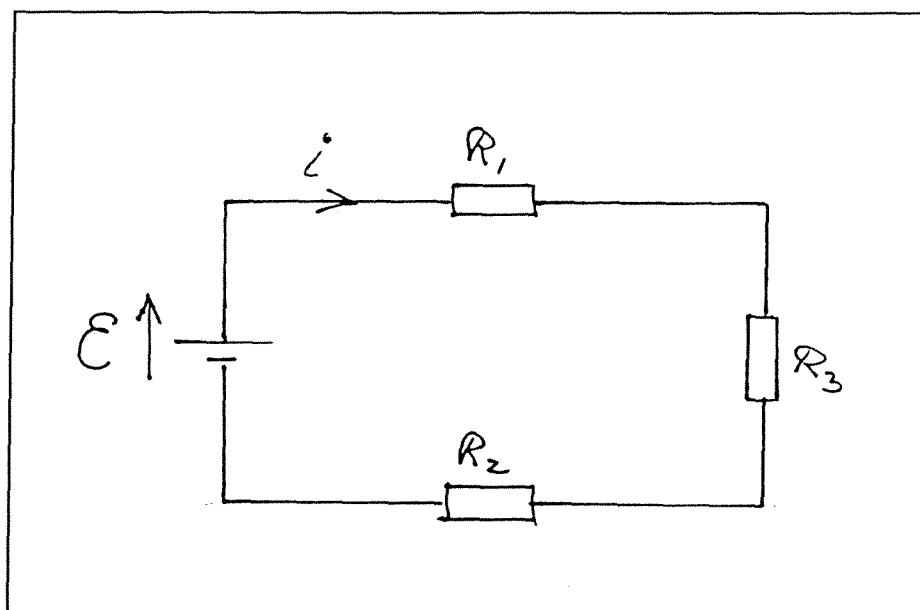
For et homogent modstandsmateriale med længden ℓ , tværsnitsarealet A og specifik ledningsevne σ gælder,

Ved sammenligning af (6) og (7) med (5) ses, at de har samme matematiske ^{form}, hvis følgende størrelser opfattes som analoge:

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\ell}{A} \quad (7)$$

magnetisk flux, ϕ analog til elektrisk strøm, i

ampere-vindingstal, NI analog til elektromotorisk kraft, \mathcal{E}



Figur 2. Elektrisk dc-kredsløb.

Man ser endvidere at størrelsen i parantesen i (5) udtrykker den "magnetiske modstand" i kredsen. "Magnetisk modstand" kaldes for *reluktans* og betegnes R_m . Altså,

$$R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\ell_j}{A_j} \quad (8)$$

Sammenlignes (8) med ses at permeabiliteten μ af et stof udtrykker stoffets specifikke magnetiske ledningsevne.

Da en lineær magnetisk kreds kan beskrives ved den samme type ligning som den tilsvarende elektriske kreds, følger der, at også Kirchoffs 1. og 2. ligning samt superpositionsprincippet må gælde i det magnetiske tilfælde. Beregninger på et magnetisk kredsløb med flere masker kan altså udføres på helt samme måde, som på et elektrisk kredsløb med tilsvarende geometri. Da Thevenin sætning for elektriske kredsløb er udledt udelukkende på basis superpositionsprincippet kan en tilsvarende sætning formuleres for et lineært magnetisk kredsløb.

Regnemodel 2. Ulinær model uden hysteresese. Ingen spredning og fluxfringing.

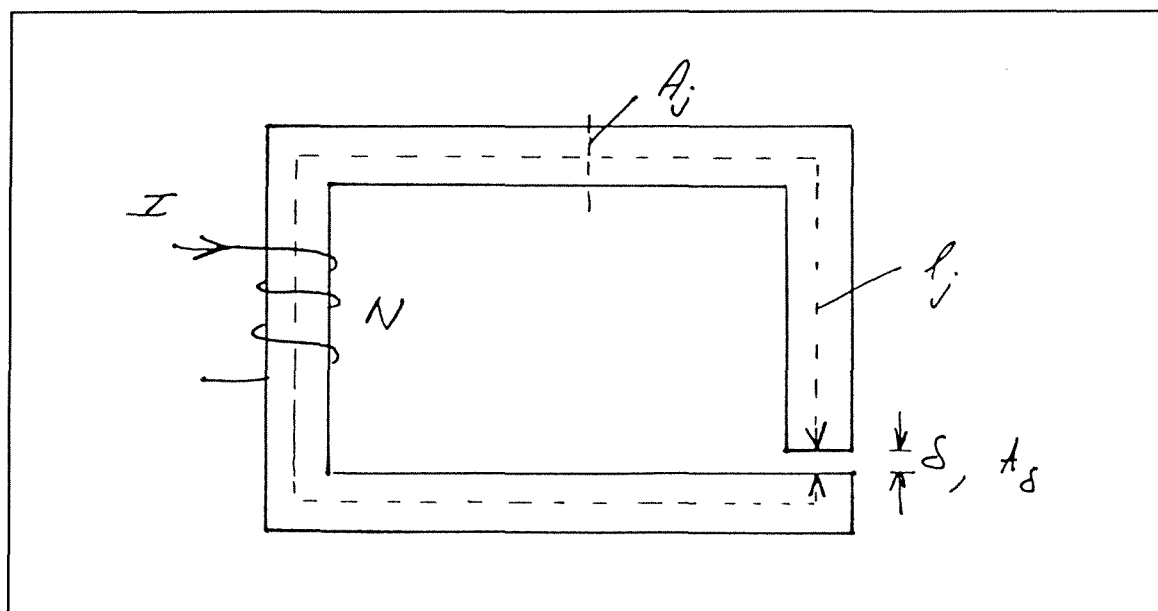
I denne model tages der højde for den ulineære sammenhæng mellem B og H felterne i jernkernen. Oplysninger herom er indeholdt i databladet for den pågældende jernlegering, hvis et sådant kan skaffes. Ofte er man henvist til selv at måle denne sammenhæng.

Hvis man stadig ønsker at se bort fra hysteresese kræver det at hysteresesekurven er tilstrækkelig smal. Ferromagnetiske materialer der har en smal hysteresesekurve kaldes "magnetisk blødt jern", medens stoffer med en bred hysteresesekurve kaldes "magnetisk hårdt jern". De mekaniske egenskaber følger de magnetiske egenskaber på den måde at magnetisk blødt jern er bøjeligt og let at bearbejde, medens magnetisk hårdt jern ikke er bøjeligt og let at bearbejde. Det er "skørt" ligesom støbejern.

APPENDIKS 1 indeholder oplysninger om udvalgte ferromagnetiske stoffer.

Heraf fremgår, at det remanente B -felt (B_r) har cirka samme størrelse for blødt jern og hårdt jern. De adskiller sig som nævnt ved bredden af hysteresesekurven, som udtrykkes ved H -feltet: H_c , som lidt misvisende kaldes "den koercitive kraft". Man ser bl.a. at H_c for almindeligt Si-holdigt jern ("transformerblik") er 24 A/m, medens H_c for jerntypen ALNICO V (som f.eks. anvendes til højttalermagneter) er 44000 A/m.

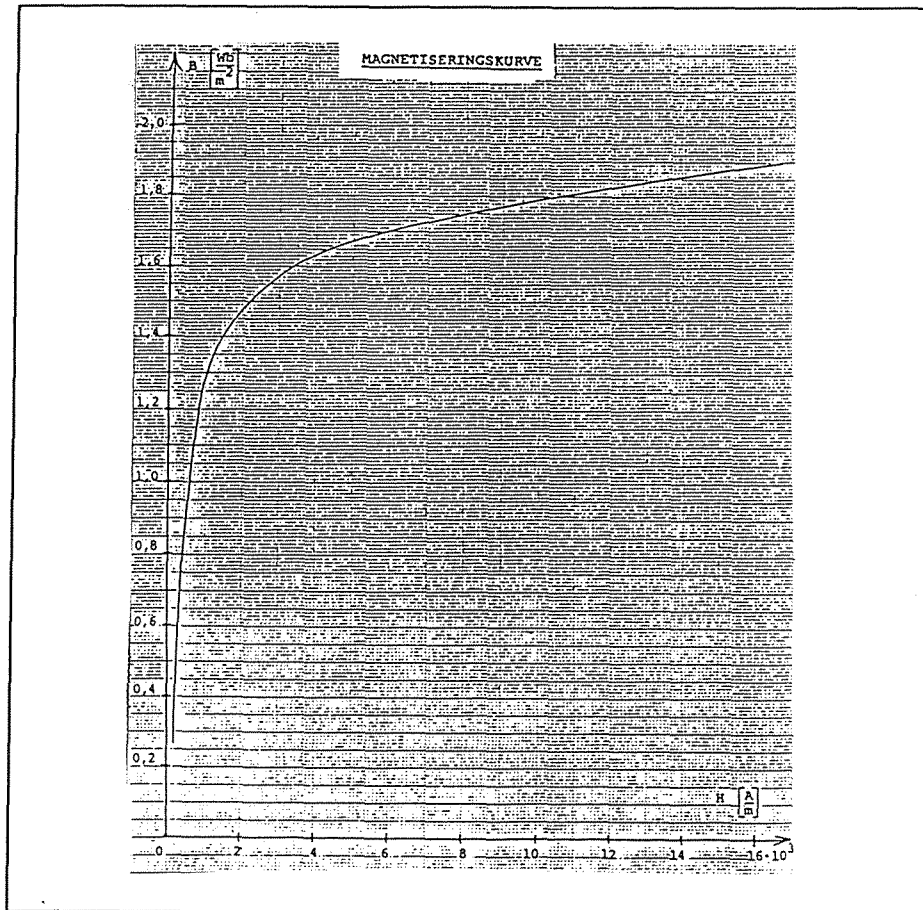
Figur 3 viser en magnetisk kreds, hvor vi forsimpelheds skyld har antaget, at jernkernen overalt har samme tværsnitsareal, A_j og at der kun er anvendt én type materiale.



Figur 3. Magnetisk kreds.

Figur 4 viser den del af hysteresesekurven, der kaldes "jomfrukurven" eller

"magnetiseringskurven". Denne sammenhæng mellem B og H felterne gælder egentlig kun i det tilfælde, hvor man øger H-feltet fra værdien til 0 til mætningsværdien. I regnemodel 2 anvendes denne kurve til at beskrive sammenhængen mellem B og H felterne ved stoffer, der har en smal hystresekurve, både når H forøges og formindskes. En konsekvens er, at man i denne model egentlig ser bort fra remanssen.



Figur 4. Typisk magnetiserings kurve for "blødt jern".

Amperes lov giver,

$$H_j \cdot \ell_j + H_\delta \cdot \delta = NI \quad (9)$$

Anvendes den lineære sammenhæng mellem B og H felterne i luftgabet samt fluxligningen fås,

$$H_j \cdot \ell_j + \frac{B_j A_j \delta}{A_\delta \mu_0} = NI \quad (10)$$

eller,

$$B_j = -(\mu_o \cdot \frac{A_\delta}{A_j} \cdot \frac{\ell_j}{\delta}) \cdot H_j + NI \cdot \frac{A_\delta \cdot \mu_o}{A_j \cdot \delta} \quad (11)$$

eller hvis der ses bort fra fluxfringing i luftgabet,

$$B_j = -(\mu_o \cdot \frac{\ell_j}{\delta}) \cdot H_j + NI \cdot \frac{\mu_o}{\delta} \quad (12)$$

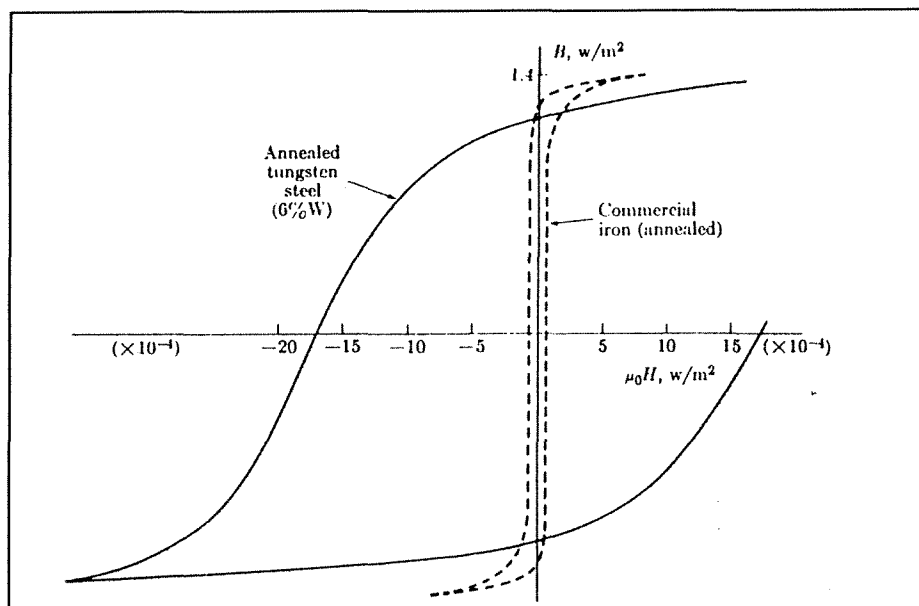
(11) og (12) fremstiller en ret linie i et (H_j, B_j) -koordinatsystem. Linien kaldes for arbejdslinien. Skæringen mellem arbejdslinien og jernets magnetiseringskurve kaldes arbejds punktet, idet det bestemmer det koordinatsæt (H_j, B_j) , som både tilfredsstiller f.eks lgn. (12) og sammenhængen mellem B_j og H_j givet ved magnetiseringskurven.

Opgave 1 Overvej hvad der sker med arbejds punktet når:

- luftgabet ændrer størrelse
- Ampere-vindingstallet ændres.

Regnemodel 3. Ulineær model med hysteresese. Ingen spredning og fluxfringing.

I regnemodel 3 tages der eksplicit hensyn hystresekurvens bredde. Figur 5 viser eksempler på hysteresekurver for magnetisk blødt jern og magnetisk hårdt jern.



Figur 5. Typiske hysteresekurver for magnetisk blødt og hårdt jern.

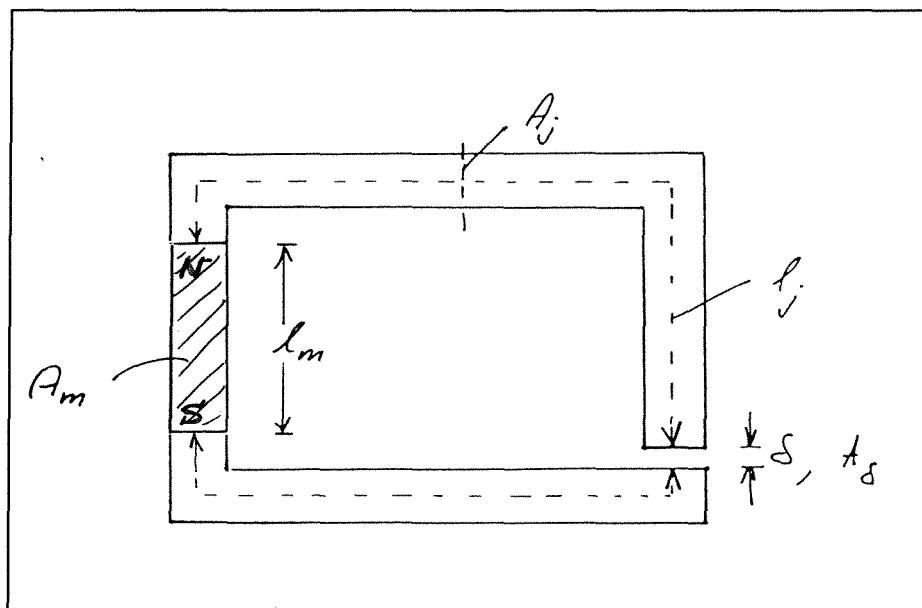
Data from R. M. Bozorth, *Ferromagnetism*, Van Nostrand, N. Y. 1951.

Lad os, som eksempel igen betragte den magnetiske kreds på figur 3. Arbejdsliniens ligning er uændret og givet ved lgn. (12). Den eneste principielle forskel mellem model 2 og model 3 bliver, at der i model 3 er tre mulige løsninger til arbejdspunktets placering. Hvilken løsning, der i en given situation er den søgte, afhænger af "hvordan vi bevæger os på hysteresekurven", d.v.s. af den forudgående værdi for H -feltet. Hvis man f.eks. ved, at jernkernen til at begynde med er umagnetiseret og man er ved øge H -feltet (v.h.j.a. strømmen), så bliver løsningen ligesom i model 2, skæringen med "jomfrukurven" (vist --- på figur 5). Hvis man derimod ved, at jernkernen har været drevet i mætning med positive B og H -felter, og man er ved at mindske H -feltet, så bliver løsningen skæringen mellem arbejdslinien og den venstre gren af hysteresekurven. Tilsvarende bliver løsningen skæringen på den højre gren, hvis jernet forudgående har været drevet i mætning med negative B og H -felter.

Det bør bemærkes, at hvis jernkernen ikke drives i mætning, så kommer arbejdspunktet til at ligge udenfor de på figur 5 viste hysteresekurver. Man skal huske, at hver gang man ændrer retning på H -feltet følger B -feltet en ny og mindre hysteresekurve. Følgen bliver, at hvis man starter et tilfældigt sted i B_j, H_j - koordinatsystemet, så kan det være vanskeligt helt præcist at forudsige, hvor arbejdspunktet havner.

Regnemodel 3a. Permanent magnet. Ingen spredning og fluxfringing.

Et speciealtilfælde af model 3 er vist på figur 6.



Figur 6. Magnetisk med permanent magnet.

Det på figur 6 viste kredsløb er identisk med det på figur 3, bortset fra at spolen er udskiftet med en permanent magnet med længden l_m og tværsnitsarealet $A_m = A_j$.

Kredsen består af 2 jernmaterialer. den permanente magnet, som er fremstillet af magnetisk hårdt jern og resten af jernkernen, som er fremstillet af magnetisk blødt jern.

Den simpleste beregning man kan lave for et sådant system, består i at man tager hensyn til hysteresekurven for den permanente magnet, men approximerer blødtjernsdelen med den lineære model (d.v.s. model 1, hvor $\mu_{rel} \approx \text{konstant}$). Som start anvendes et kvalificeret gæt på værdien af μ_{rel} .

Ønsker man efterfølgende at forbedre sine beregninger ved at tage hensyn til ulineariteten for blødtjernsdelen (d.v.s. model 2) må man lave en iterativ regneprocedure. Ud fra det først fundne arbejds punkt for den permanente magnet, kan man beregne B-feltet i blødtjernsdelen. Ved hjælp af blødtjernsdelen magnetiseringskurve kan man derpå finde det tilhørende H-felt og derpå beregne en ny (og bedre) værdi for μ_{rel} . Man gentager derpå de første beregninger med den ny værdi for μ_{rel} og bestemmer et nyt arbejds punkt for den permanente magnet. Proceduren gentages indtil regningerne konvergerer tilfredsstillende.

I praksis bør man altid gennemføre ovennævnte procedure mindst én gang for at kontrollere om det første gæt på μ_{rel} var rimeligt.

For at bestemme arbejds linien anvendes som hidtil Amperes lov. Da kredsen ikke indeholder nogen strømførende spole fås,

$$H_m \cdot \ell_m + H_j \cdot \ell_j + H_\delta \cdot \delta = 0 \quad (13)$$

Da både blødtjernsdelen antages lineær og vi desuden se bort fra spredning og fluxfringing i luftgabet kan (13) i lighed med tidligere omformes til følgende,

$$B_m = - \left(\frac{\mu_o \cdot \ell_m}{\ell_j / \mu_{rel} + \delta} \right) \cdot H_m \quad (14)$$

Arbejds linien (14) bestemmer, hvordan den permanente magnet arbejder, når den er koblet på den magnetiske kreds, figur 6. Man bemærker, at arbejds linien går gennem (0,0) samt B_m og H_m altid vil have modsat fortegn. Som følge heraf vil datablade for permanente magneter normalt kun give den del af hysteresekurven, der ligger i 2.kvadrant. Denne kurve kaldes "afmagnetiseringskurven".

I APPENDIKS 2 er vist typisk eksempel på afmagnetiseringskurver.

Ved dimensionering af magnetisk systemer, der indeholder en permanent magnet, vil det have interesse, at kunne optimere materialforbruget for et givet permanent magnet materiale, når magneten skal virke sammen med en given magnetisk kreds.

Optimering af arbejds punkt for permanent magnet.

Problem: -at finde et kriterium for det optimale arbejds punkt, som medfører at der anvendes mindst magnetmateriale, d.v.s. magneten skal have mindst volumen.

Givne størrelser:

- 1) B-feltet i luftgab, B_δ
- 2) luftgabets tværsnitsareal, A_δ
- 3) luftgabets størrelse, δ

Approximationer:

- a) ingen spredning og fluxfringing i luftgab,
- b) det antages at : $\ell_j / \mu_{rel} \ll \delta$

Magnetens volumen er givet som,

$$Vol_m = \ell_m \cdot A_m \quad (15)$$

Approximation b) indebærer at lgn.(13) kan skrives som,

$$\ell_m = - \frac{B_\delta \cdot \delta}{\mu_o \cdot H_m} \quad (16)$$

Flux-ligningen giver,

$$A_m = \frac{B_\delta \cdot A_\delta}{B_m} \quad (17)$$

Som indsat i (15) giver følgende,

$$Vol_m = - \frac{B_\delta^2 \cdot \delta \cdot A_\delta}{\mu_o} \cdot \frac{1}{H_m \cdot B_m} \quad (18)$$

Lgn.(18) viser, at magnetens volumen bliver mindst, hvis produktet af B og H -felterne i magneten bliver størst, under de givne omstændigheder (udtrykt i pkt. 1) , 2) og 3)). Produktet af H_m og B_m kaldes energiproduktet. Energiproduktet angives ofte i datablade for permanente magneter (jævnfør APPENDIKS 2).

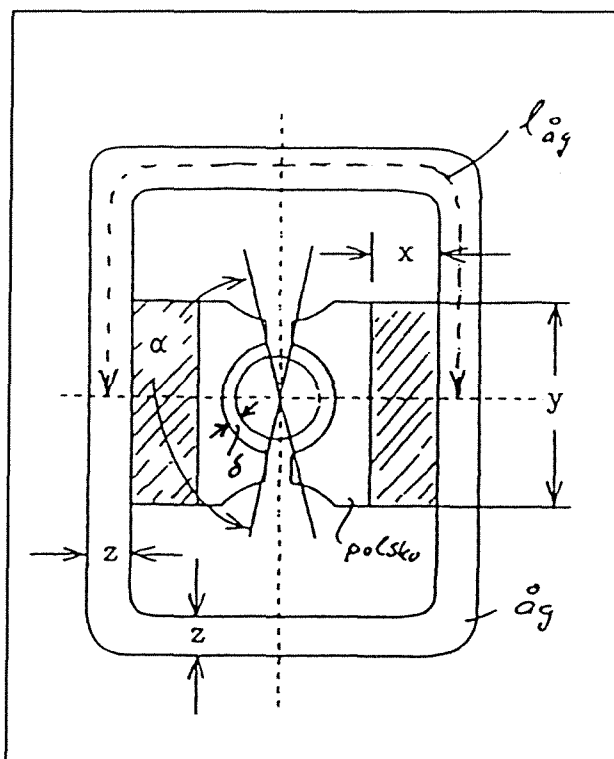
Opgave 2:

Til et drejespoleinstrument skal der anvendes et magnetsystem, som vist på figur 7. Kernen, polskoene og åget er magnetisk blødt jern med en relativ permeabilitet på 655. Magnetstykkerne (vist skraverede) er af jerntypen ALNI (Se datablad i Appendiks 2). Kernens diameter er $d = 15 \text{ mm}$ og luftspalten $\delta = 1,5 \text{ mm}$. Magnetstykkernes dimensioner kaldes x og y .

I øvrigt har alle magnetsystemets dele dimensionen $h = 20 \text{ mm}$ vinkelret på tegneplanen. I luftspalten og indenfor polbuen $\alpha = 150^\circ$ ønskes et B-felt på $0,38 \text{ T}$. På grund af spredning regnes der med 30% større flux i jernet end i luftspalten. I det følgende kan der ses bort fra de "magnetiske spændingsfald" i kernen og polskoene.

Middelvejlængden i åget $\ell_{ag} = 15 \text{ cm}$. B-feltet i åget vælges til 1 Tesla.

- Bestem udtryk for B og H felterne i magneten, som funktioner af henholdsvis y og x .
- Beregn x og y , således at volumet af det permanente magnetmateriale bliver minimum og beregn tykkelsen z af åget.



Figur 7. Magnetsystem til drejespoleinstrument (opgave 2).

$$H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + H_{\delta 1} \delta_1 + H_{\delta 2} \delta_2 = NI \quad (19)$$

Anvendes fluxligningen på henholdsvis luftgab 1 og luftgab 2 fås:

$$\Phi_1 = B_1 \cdot A_1 = \int \vec{B}_{\delta 1} \cdot d\vec{A}_{\delta 1} \quad (20)$$

og,

$$\Phi_2 = B_2 \cdot A_2 = \int \vec{B}_{\delta 2} \cdot d\vec{A}_{\delta 2} \quad (21)$$

For at kunne beregne fladeintegralerne er det nødvendigt at kende variationen af B-feltet henover en passende flade i hvert luftgab. B-feltsvariationen i et vilkårligt luftgab afhænger bl.a. af luftgabets geometriske udformning. For et luftgab med planparallelle polflader (figur 8) er spredningen af B-feltet bl.a. bestemt af forholdet mellem afstand (d.v.s. δ_1 og δ_2) og polfladernes kantlængder.

Variationen af B-feltet i et luftgab bestemmes mest hensigtsmæssigt ved måling med f.eks. en Hall-måler, der er anbragt i en holder, som v.h.j.a. mikrometerskruer kan forskydes i 3 på hinanden vinkelrette retninger. For jernkernen på figur 8 vælges at udregne fladeintegralerne over plane flader, anbragt parallelt med polfladerne og midtvejs mellem disse. Man kan i såfald nøjes med at udmåle den komponent af B-feltet, der står vinkelret på de valgte plane flader.

Måleeksempel 1:

Figur 9 viser den i måleeksemplet valgte kernestørrelse. Kantlængderne kaldes a_1 , a_2 og b .

Det anvendte luftgab havde størrelsen : $\delta = 10$ mm, hvilket giver følgende forhold:

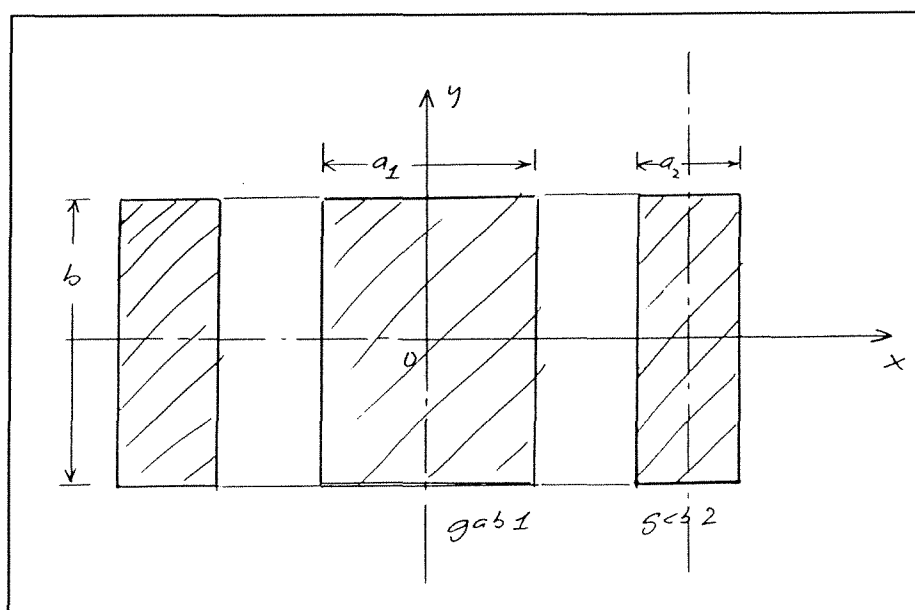
$$\delta/a_1 = 10/32 = 0,3125$$

$$\delta/a_2 = 10/16 = 0,625$$

$$\delta/b = 10/46 = 0,2174$$

Tegneplanen vist på figur 9 er integrationsplanen. B-feltets komponent vinkelret på denne plan, $B_z(x,y)$ blev udmålt langs de viste x og y akser.

$$\text{Målt værdi af } B_z(0,0) = 0,045 \text{ T}$$



Figur 9. Geometri for måleeksempel 1.

Måleresultaterne er vist på de figur 10 - 13, i form af grafer.

Figur 10 viser den relative feltvariation $B_z(x,0)/B_z(0,0)$ for begge luftgab.

Figur 11 et udsnit af $B_z(x,0)/B_z(0,0)$ for luftgab 2, målt med større følsomhed for Hall-måleren.

Figur 12 viser $B_z(0,y)/B_z(0,0)$ for luftgab 2, målt med samme følsomhed som på figur 11.

Figur 13 viser $B_z(0,y)/B_z(0,0)$ for luftgab 1, målt med samme følsomhed som anvendt på figur 10.

Opgave 3:

a) Diskutér feltfordelingerne i de to luftgab.

På grund af, at jernkernen mangler symmetri m.h.t. tværsnitsarealernes størrelser og luftgabenes forskellige placering i forhold til den strømførende spole (placeret på midtergrenen) kræves der flere målinger end de viste for at kunne en mere præcis kortlægning af feltfordelingen.

B-feltet i midten af luftgab 1 er : $B_z(0,0) = 0,045 \text{ T}$.

b) Beregn fluxen gennem luftgab 1, idet der tages hensyn til den målte feltfordeling.

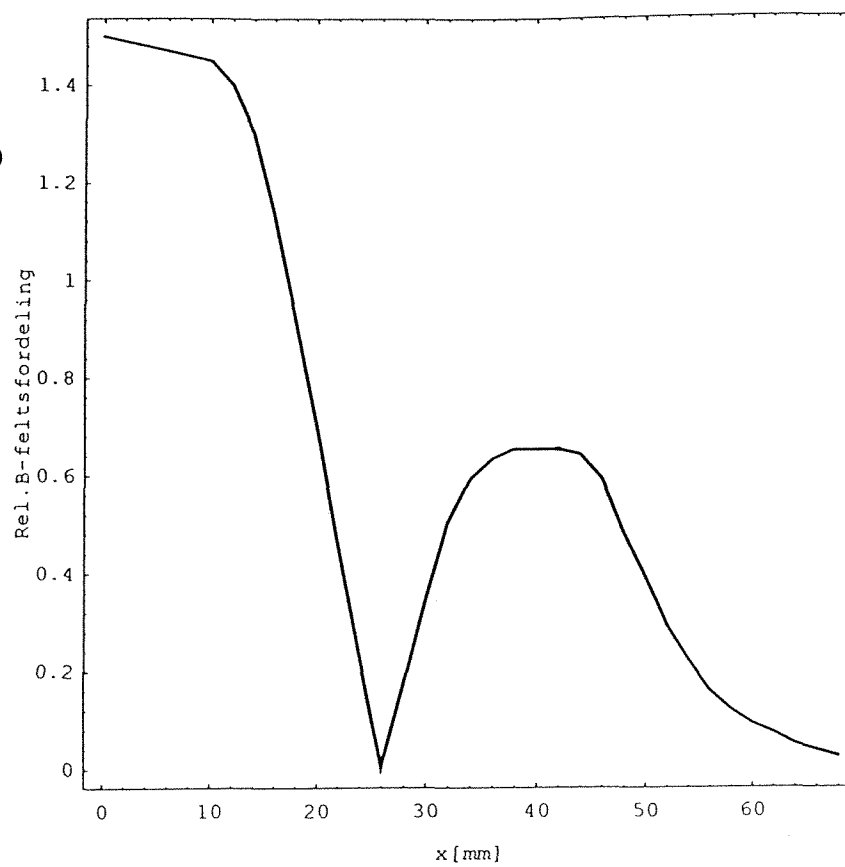
- b) Beregn fluxen gennem luftgab 1 , idet der tages hensyn til den målte feltfordeling.
- c) Beregn B-feltet i jernkernens midterste gren .
- d) Beregn fluxen gennem luftgab 2 , igen under hensyntagen til den målte feltfordeling.
Sammenlign resultatet med resultatet i sp.b). Kommentér .
- e) Beregn B-feltet i den ene sidegren af jernkernen.

Referencer:

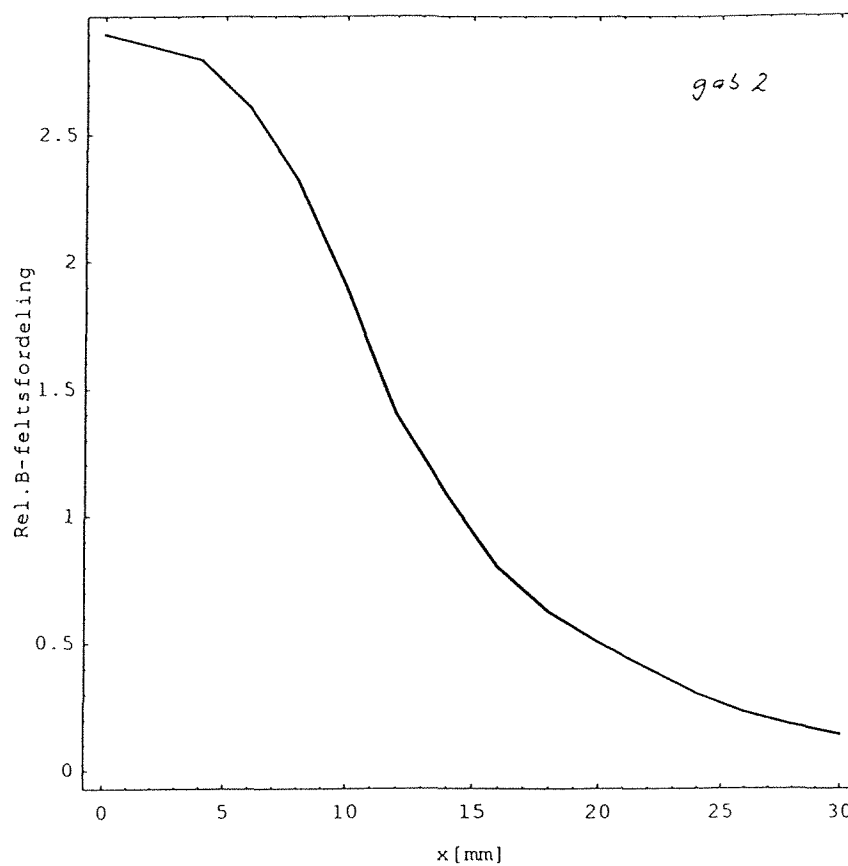
- [1] N.Jonassen, Elektro Magnetisme, Polyteknisk Forlag (1992).

Eksperimentelle data for udmåling af fluxfringing.

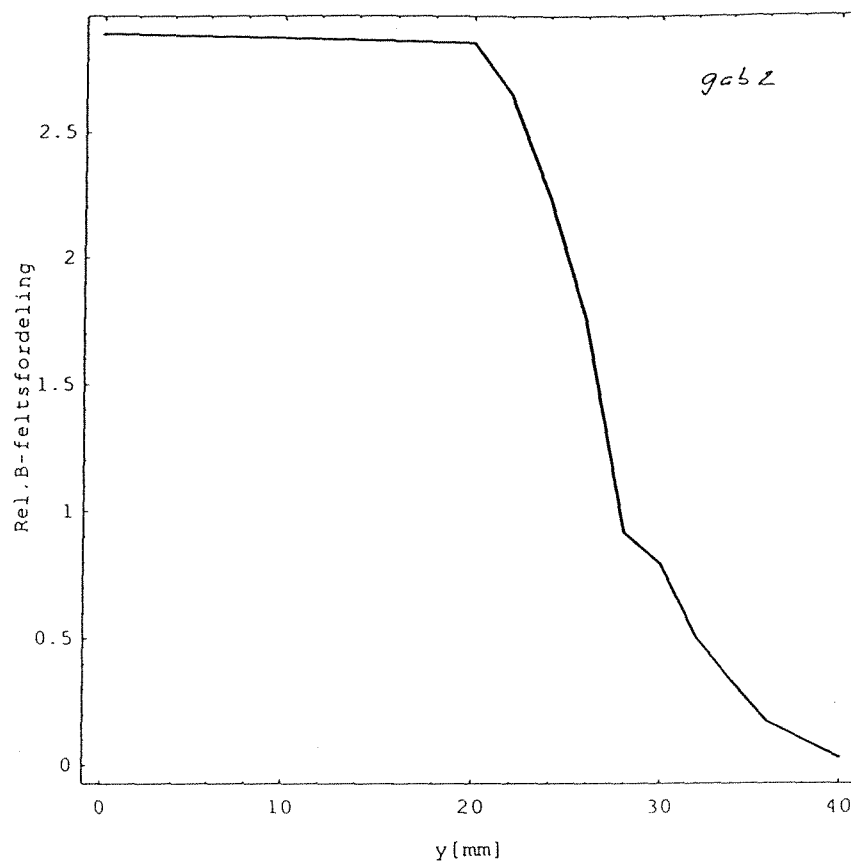
Figur 10



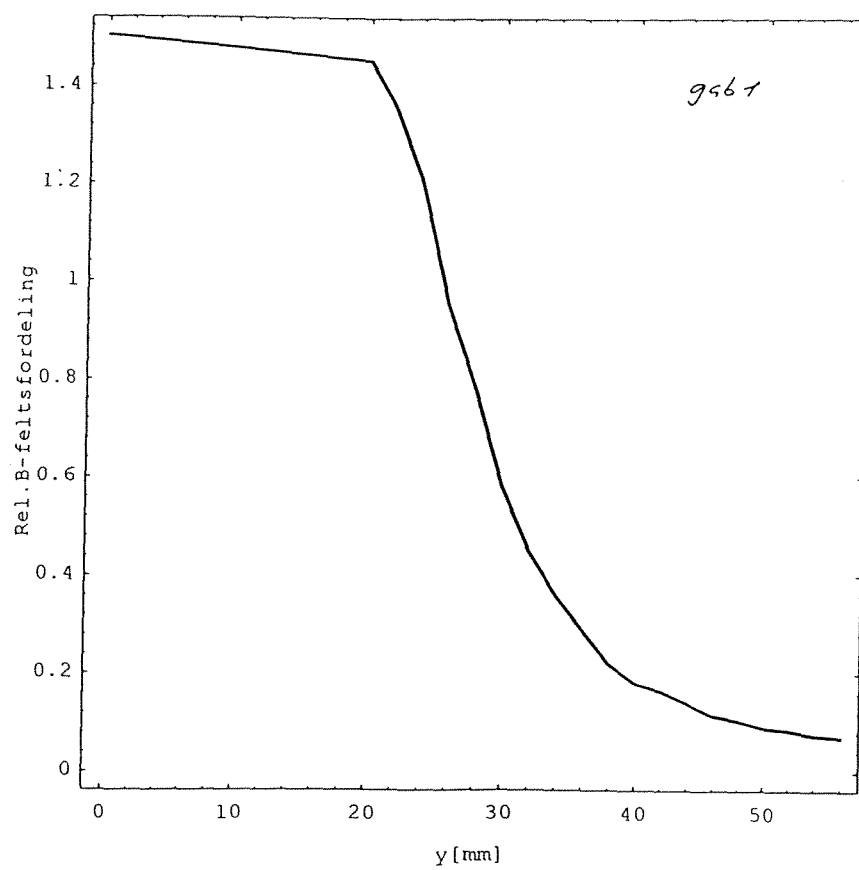
Figur 11



Figur 12



Figur 13



APPENDIKS 1 : Data for udvalgte magnetiske stoffer:

Table 9.2 Properties of magnetic materials and magnetic alloys

| Material (composition ¹) | Initial relative permeability, μ_i/μ_0 | Maximum relative permeability, μ_{max}/μ_0 | Coercive force H_c , A/m (Oe) | Residual field B_r , Wb/m ² (G) | Saturation field B_s , Wb/m ² (G) | Electrical conductivity ρ , $\times 10^{-8} \Omega \cdot m$ | Uses |
|--|---|--|--|--|---|--|-------------------------|
| Soft | | | | | | | |
| Commercial iron (0.2 imp. ²) | 250 | 9,000 | ≈ 80 (1) | 0.77 (7,700) | 2.15 (21,500) | 10 | Relays |
| Purified iron (0.05 imp.) | 10,000 | 200,000 | 4 (0.05) | — | 2.15 (21,500) | 10 | |
| Silicon-iron (4 Si) | 1,500 | 7,000 | 20 (0.25) | 0.5 (5,000) | 1.95 (19,500) | 60 | Transformers |
| Silicon-iron (3 Si) | 7,500 | 55,000 | 8 (0.1) | 0.95 (9,500) | 2 (20,000) | 50 | Transformers |
| Silicon-iron (3 Si) | — | 116,000 | 4.8 (0.06) | 1.22 (12,200) | 2 (20,100) | 50 | Transformers |
| Mu metal (5 Cu, 2 Cr, 77 Ni) | 20,000 | 100,000 | 4 (0.05) | 0.23 (2,300) | 0.65 (6,500) | 62 | Transformers |
| 78 Permalloy (78.5 Ni) | 8,000 | 100,000 | 4 (0.05) | 0.6 (6,000) | 1.08 (10,800) | 16 | Sensitive relays |
| Superalloy (79 Ni, 5 Mo) | 100,000 | 1,000,000 | 0.16 (0.002) | 0.5 (5,000) | 0.79 (7,900) | 60 | Transformers |
| Permendur (50 Cs) | 800 | 5,000 | 160 (2) | 1.4 (14,000) | 2.45 (24,500) | 7 | Electromagnets |
| Mn-Zn ferrite | 1,500 | 2,500 | 16 (0.2) | — | 0.34 (3,400) | 20×10^6 | Core material for coils |
| Ni-Zn ferrite | 2,500 | 5,000 | 8 (0.1) | — | 0.32 (3,200) | 10^{11} | |
| | | | | | | | |
| Material (composition) | Coercive force H_c , A/m $\times 10^3$ (Oe) | | Residual field B_r , Wb/m ² (G) | | Energy product $(BH)_{max}$, J/m ³ $\times 10^3$ (G \times Oe $\times 10^6$) | | Uses |
| Hard | | | | | | | |
| Carbon steel (0.9 C, 1 Mn) | 4 (50) | | 1 (10,000) | | 1.6 (0.2) | | Permanent magnets |
| Chromium steel (3.5 Cr, 1 C, 0.5 Mu) | 5.2 (66) | | 0.95 (9,500) | | 2.2 (0.27) | | |
| Alnico V (14 Ni, 24 Co, 8 Al, 3 Cu) | 44 (550) | | 1.2 (12,000) | | 40 (5) | | |
| Alnico VIII (15 Ni, 35 Co, 7 Al, 4 Cu, 5 Ti) | 126 (1,600) | | 1.04 (10,400) | | 44 (5.5) | | |
| Alnico IX | 126 (1,600) | | — | | 88 (11) | | |
| Iron powder (100% Fe) | 61 (770) | | 0.57 (5,700) | | 12.8 (1.6) | | |
| Iron powder (elongated) | 63 (790) | | 1.02 (10,200) | | 36 (4.5) | | |
| Ba ferrite (Ferroxdure) | 120 (1,500) | | 0.2 (2,000) | | 8 (1) | | |
| Cobalt-samarium | 560 (7,000) | | 0.84 (8,400) | | 128 (16) | | |

¹ Percent by weight; remainder is Fe.

Ref. M.A. Plonus Applied Electromagnetism
McGraw-Hill (1978).

APPENDIKS 2: Dataoplysninger for udvalgte permanente magnetmaterialer:

CAST ALNICO MAGNETS

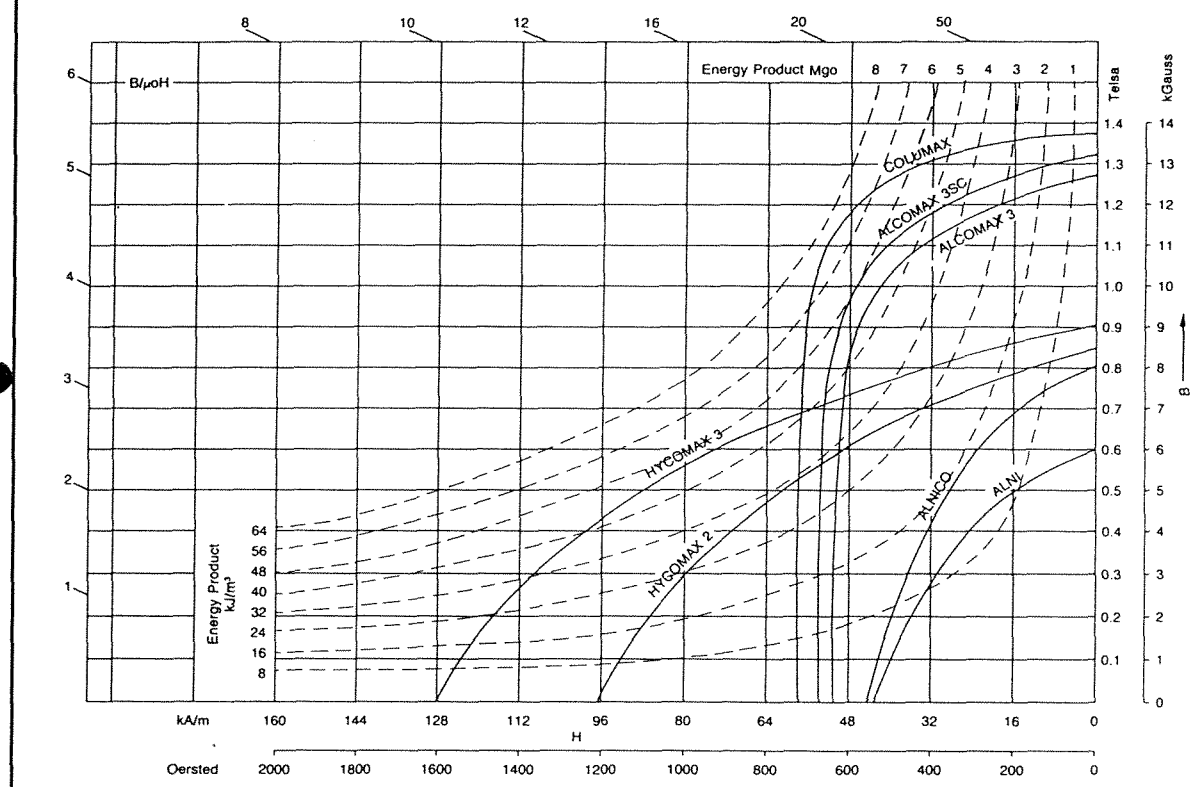
FERROPERM A/S

STUBBELED 7 · TRØRØD
DK-2950 VEDBÆK · DANMARK

TELEFON: 62 89 03 92
TELEFAX: 62 89 01 36
TELEX: 41192 FEROPA dk



Typical Demagnetisation Curves



TYPICAL MAGNETIC PERFORMANCE RANGE

| Material | Energy Product | | Remanence | | Coercive Force | | Mean Recoil Permeability | Equivalents | |
|----------------------------|-------------------|--------|-----------|-------|----------------|---------|--------------------------|-------------|------------|
| | BHmax | | Br | | BHc | | | U.S.A. | Germany |
| | kJ/m ³ | M.g.o. | Tesla | Gauss | kA/m | Oersted | μr | | |
| (Anisotropic) ALCOMAX 2 | 43 | 5.4 | 1.3 | 13000 | 46 | 580 | 2.6 | Alnico 5C | Alnico 500 |
| ALCOMAX 3 | 43 | 5.4 | 1.26 | 12600 | 52 | 650 | 3.1 | Alnico 5 | Alnico 500 |
| ALCOMAX 3.S.C. | 48 | 6.0 | 1.32 | 13200 | 56 | 700 | 2.8 | Alnico 5DG | Alnico 600 |
| COLUMAX | 60 | 7.5 | 1.35 | 13500 | 59 | 740 | 1.8 | Alnico 5-7 | Alnico 700 |
| ALCOMAX 4 | 36 | 4.5 | 1.15 | 11500 | 60 | 750 | 4.4 | Alnico 6 | Alnico 400 |
| HYCOMAX 2 | 32 | 4.0 | 0.85 | 8500 | 96 | 1200 | 2.8 | Alnico 8A | Alnico 350 |
| HYCOMAX 3 | 45 | 5.6 | 0.9 | 9000 | 125 | 1600 | 2.4 | Alnico 8B | Alnico 450 |
| (Isotropic) ALNI | 10 | 1.25 | 0.6 | 6000 | 44 | 550 | 5.0 | Alnico 1 | Alnico 120 |
| ALNICO | 13.5 | 1.7 | 0.8 | 8000 | 40 | 500 | 7.0 | Alnico 2 | Alnico 160 |

| | |
|-------------------------------|-----------|
| Density | 7.3 g/cm³ |
| Maximum Operating Temperature | 550°C |

| | |
|------------------------------------|--|
| Reversible Temperature Coefficient | Alcomax Alloys -0.02%/°C Hycomax Alloys -0.01%/°C |
| Curie Temperature | approximately 850°C |

SH/96

Én-fase transformatoren som kredsløbselement.

Formålet med dette afsnit er at give en introduktion til en kredsløbsmæssig behandling af transformatorer.

En væsentlig del af enhver kredsløbsanalyse består i at opstille passende kredsløbsmodeller, som beskriver de fysiske komponenter/systemer præcist nok i relation til den aktuelle anvendelsessituation.

Eksempel 1 En transistor, der i et valgt arbejds punkt, påtrykkes et sinusformet signal med frekvens lavere en 100 kHz, vil kunne beskrives v.hj.a. kredsløbskomponenter, der er reelle. Hvis signalamplituden desuden er tilpas lille så vil kredsløbskomponenterne være konstanter, som fremkommer ved at erstatte transistorkarakteristikkerne med rette linier omkring arbejds punktet. Resultatet er, at sammenhængen mellem signalstrømme og signalspændinger på transistorens terminaler beskrives ved et lineært ligningssystem. En ofte anvendt model i "små-signalsituationen" er h-parameter modellen.

Hvis den samme transistor skal arbejde med store signalamplituder, således at næsten hele karakteristikfeltet tages i anvendelse, så må man konstruere en anden kredsløbsmodel, som tager hensyn til ulineariteten i transistoren. En model, der ofte anvendes til at beskrive transistoren i "stor-signal situationen" er Ebers-Moll modellen [1].

Én-fase transformatoren er et elektromagnetisk system, som i sin simpleste udformning består af to spoler (primærspolen og sekundærspolen), der er magnetisk koblete til hinanden. For at gøre koblingen så effektiv som mulig er spolerne viklet på en kerne af ferromagnetisk materiale. Som oftest er sekundærspolen galvanisk adskilt fra primærspolen. Teoretisk beskrives transformerens virkemåde ved at anvende Faradays induktionslov samt Kirchhoffs 2.lov på primærkredsen og sekundærkredsen. Resultatet er to koblete differentiaalligninger (se nedenfor). En fuldstændig beskrivelse vanskeliggøres af den ulineære sammenhæng mellem B og H felterne i jernkærnen. Ulineariteten medfører at induktanserne af de to spoler samt den gensidige induktans ikke er konstante størrelser, men afhænger af den spænding, der påtrykkes primærspolen. Set fra et kredsløbsmæssigt synspunkt er det desuden upraktisk, at have at gøre med et system, der ikke udgør et samlet elektrisk kredsløb, men består af to (eller flere) elektriske kredsløb, som er galvanisk adskildte, men alligevel ikke uafhængige idet energien overføres fra det ene til det andet via magnetisk kobling. Det er med andre ord ønskeligt at opstille kredsløbsmodeller, sammensat af sædvanlige kredsløbskomponenter, der beskriver

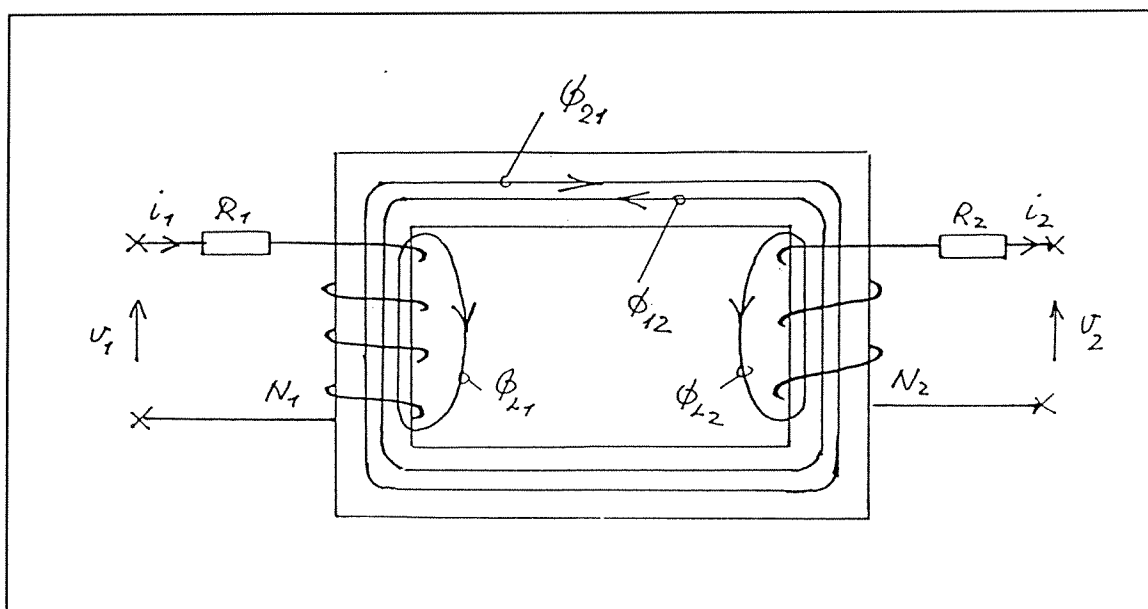
transformerens virkemåde under givne forudsætninger.

Opstilling af kredsløbsmodel for én-fase transformeren.

I det følgende opstilles en kredsløbsmodel for én-fase transformeren, som bygger på følgende forudsætninger:

1. lineær approximation for jernkernen, d.v.s. $\mu \approx$ konstant
2. ikke perfekt magnetisk kobling, d.v.s. der tages hensyn til spredningsfelter.
3. der tages hensyn til den ohmske modstand i primær og sekundærspolerne,
4. der tages hensyn til energitab i jernkernen, d.v.s. hysteres og hvirvelstrømstab.

Fig. 1 viser skematisk transformerens opbygning.



Figur 1. Skematisk opbygning af transformer. I praksis vil transformeren typisk være udformet med en lamelleret jernkerne, bestående af E-jern og I-jern, med begge spoler viklet på det midterste ben. Den aktuelle udformning er imidlertid ligegyldig hvad angår opstilling af ligningerne, der beskriver kredsløbsmodellen. Betydningen af de anvendte symboler fremgår af tekst.

I fig. 1 er R_1 og R_2 samt N_1 og N_2 henholdsvis trådmodstande og vindingstal af primær og sekundærspolerne. v_1 , i_1 og v_2 , i_2 betegner terminalspændinger og terminalstrømme på primær og sekundærsiden. De viste magnetiske fluxe er defineret på følgende måde:

Primærspole:

ϕ_{11} = samlet flux, der skyldes primærstrømmen i_1 ,

ϕ_{L1} = den del af ϕ_{11} , der kun gennemløber primærspolens N_1 vindinger ,

ϕ_{21} = den del af ϕ_{11} , der også gennemløber sekundærspolens N_2 vindinger .

Sekundærspole:

ϕ_{22} = samlet flux, der skyldes primærstrømmen i_2 ,

ϕ_{L2} = den del af ϕ_{22} , der kun gennemløber primærspolens N_2 vindinger ,

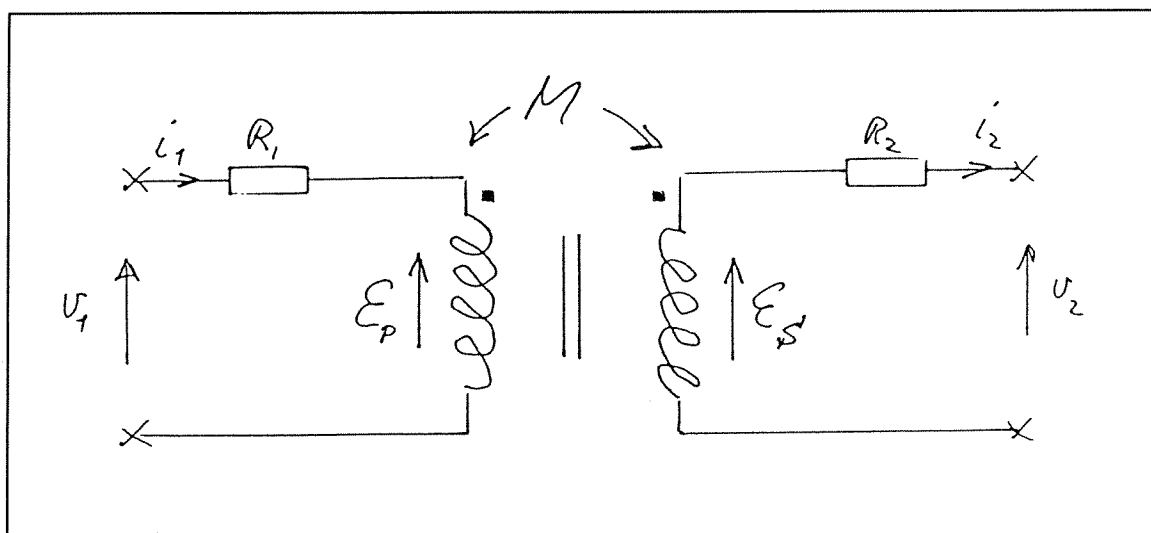
ϕ_{12} = den del af ϕ_{22} , der også gennemløber sekundærspolens N_1 vindinger .

Med disse definitioner haves:

$$\Phi_{11} = \Phi_{L1} + \Phi_{21} \quad (1)$$

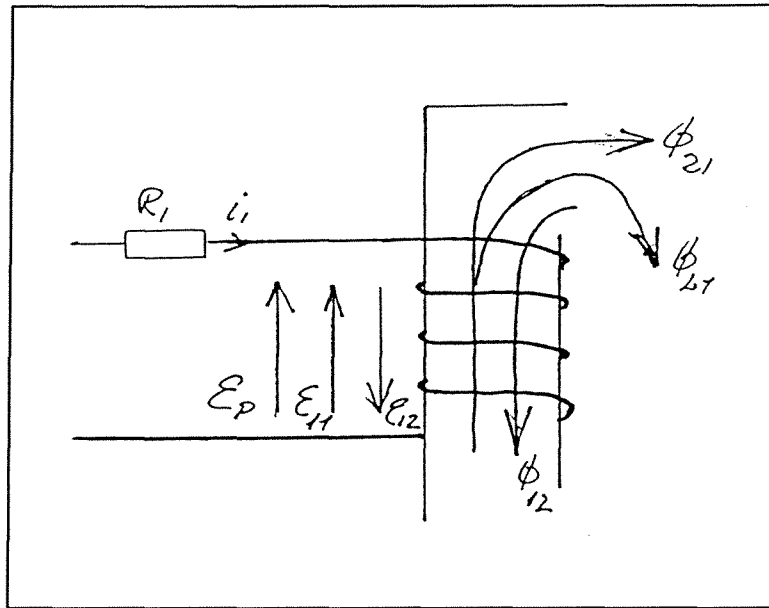
$$\Phi_{22} = \Phi_{L2} + \Phi_{12} \quad (2)$$

Fig.2 viser et diagram af transformeren på fig.1. De anvendte viklingsretninger er markeret med ■ . \mathcal{E}_p og \mathcal{E}_s betegner de elektromotoriske kræfter, der induceres i henholdsvis primær og sekundær spolerne.



Figur 2 . Diagram for transformeren på figur 1. Retningerne for de elektromotoriske kræfter \mathcal{E}_p og \mathcal{E}_s er angivet i overensstemmelse med Lenz's lov.

Figur 3 viser primærspolen med de tre magnetiske fluxe samt de elektromotoriske kræfter, der bidrager til \mathcal{E}_P .



Figur 3. Primærspole med magnetiske fluxe og elektromotoriske kræfter.

Ved hjælp af figur 3 fås,

$$\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_{11} - \mathcal{E}_{12} = N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} - N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad (3)$$

eller idet μ er antaget konstant,

$$\mathcal{E}_P = L_{11} \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad (4)$$

hvor

$$L_{11} = N_1 \frac{d\Phi_{11}}{di_1} \quad \text{og} \quad M = N_1 \frac{d\Phi_{12}}{di_2} \quad (5)$$

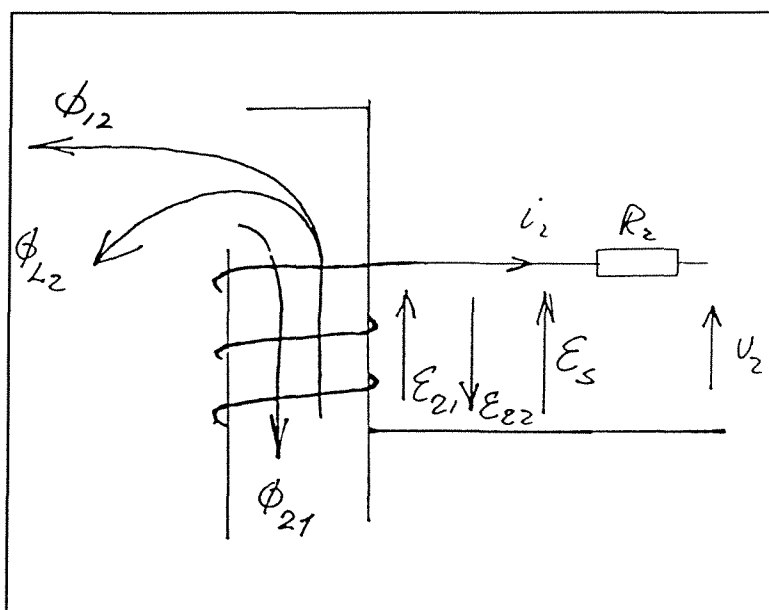
Anvendes Kirchoffs 2. lov på primærkredsen fås,

$$V_1 - \mathcal{E}_P = R_1 i_1 \quad (6)$$

Indsættes (4) i (6) fås,

$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 \quad (7)$$

Figur 4 viser primærspolen med de tre magnetiske fluxe samt de elektromotoriske kræfter, der bidrager til \mathcal{E}_s .



Figur 4 . Sekundærspole med magnetiske fluxe og elektromotoriske kræfter.

Ved hjælp af figur 4 og Kirchhoffs love fås,

$$\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_{21} - \mathcal{E}_{22} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} - N_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} \quad (8)$$

$$-v_2 = R_2 i_2 - \mathcal{E}_s \quad (9)$$

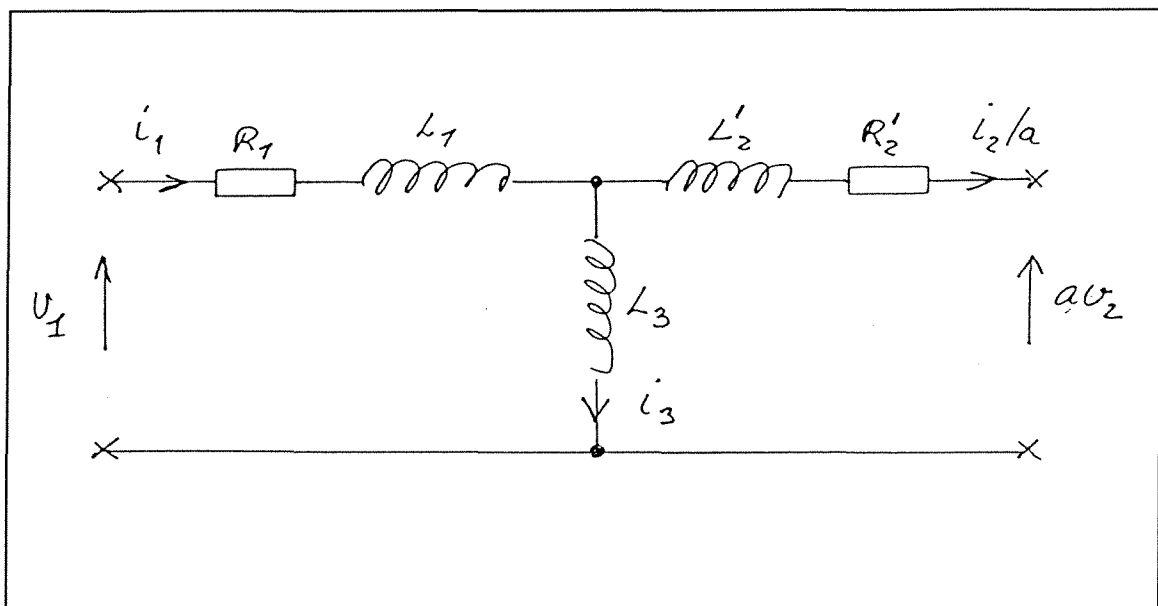
Anvendes som før at μ er konstant fås ved kombination af (8) og (9),

$$-v_2 = L_{22} \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 \quad (10)$$

Ligning (7) og (10) giver altså sammenhængen mellem terminalspændinger og strømme for den "fysiske transformer" på figur 1 .

Vi ønsker som nævnt at opstille en kredsløbsmodel, hvor der er galvanisk forbindelse mellem primærsiden og sekundærsiden og som er opbygget af modstande og induktanser.

Figur 5 viser et eksempel på en kredsløbsmodel, bestående af de omhske modstande R_1 , R'_2 samt induktanserne L_1 , L'_2 og L_3



Figur 5 . Kredsløbsmodel for én-fase transformer, hvor alle størrelser er henført til primærsiden (se tekst).

Modellen på figur 5 indeholder kun de korrekte terminalstørrelser v_1 og i_1 på primærsiden. På sekundærsiden er de oprindelige terminalstørrelser v_2 og i_2 udskiftet med følgende: $v_2 \rightarrow av_2$ og $i_2 \rightarrow i_2/a$, hvor $a = N_1/N_2$ er viklingsforholdet.

Grunden til dette variabelskift er, at man derved opnår at samtlige induktanser L_1 , L'_2 og L_3 altid vil være positive størrelser, d.v.s. opføre sig som sædvanlige induktanser.

Ved anvendelse af Kirchoffs love på kredsløbsmodellen på figur 5 fås,

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} + R_1 i_1 \quad (11)$$

$$-av_2 = L_2' \frac{d(i_2/a)}{dt} - L_3 \frac{di_3}{dt} + R_2'(i_2/a) \quad (12)$$

$$i_1 = i_2/a + i_3 \quad (13)$$

Ved differentiation af (13) fås,

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{di_1}{dt} - \frac{d(i_2/a)}{dt} \quad (14)$$

som indsættes i (11) og (12), hvilket giver,

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_3 \frac{di_1}{dt} - L_3 \frac{d(i_2/a)}{dt} + R_1 i_1 \quad (15)$$

$$-av_2 = L_2' \frac{d(i_2/a)}{dt} + L_3 \frac{d(i_2/a)}{dt} - L_3 \frac{di_1}{dt} + R_2'(i_2/a) \quad (16)$$

For at kunne bestemme komponenterne i kredsløbsmodellen udtrykt ved de fysiske komponenter for transformeren, må man sammenligne (15) og (16) med de tilsvarende ligninger for den fysiske transformator, d.v.s. (7) og (10). Inden man kan foretage sammenligningen må man sørge for at de to ligningssæt indeholder de samme variable. For at opnå dette indføres de nye variable, av_2 og i_2/a i (7) og (10).

(7) omskrives ved at gange M-leddet med $1 = a/a$,

$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} - aM \frac{d(i_2/a)}{dt} + R_1 i_1 \quad (17)$$

(10) ganges på begge sider med a samtidig med at L_{22} og R_2' leddene ganges med $1 = a/a$,

$$-av_2 = a^2 L_{22} \frac{d(i_2/a)}{dt} - aM \frac{di_1}{dt} + a^2 R_2(i_2/a) \quad (18)$$

Ved sammenligning af (17) og (18) med (15) og (16) fås,

$$L_1 = L_{11} - aM \quad \text{og} \quad L_2' = a^2 L_{22} - aM \quad \text{og} \quad L_3 = aM \quad \text{og} \quad R_2' = a^2 R_2 \quad (19)$$

Kredsløbsmodellen på figur 5 med komponentværdierne givet ved (19) er karakteriseret ved at

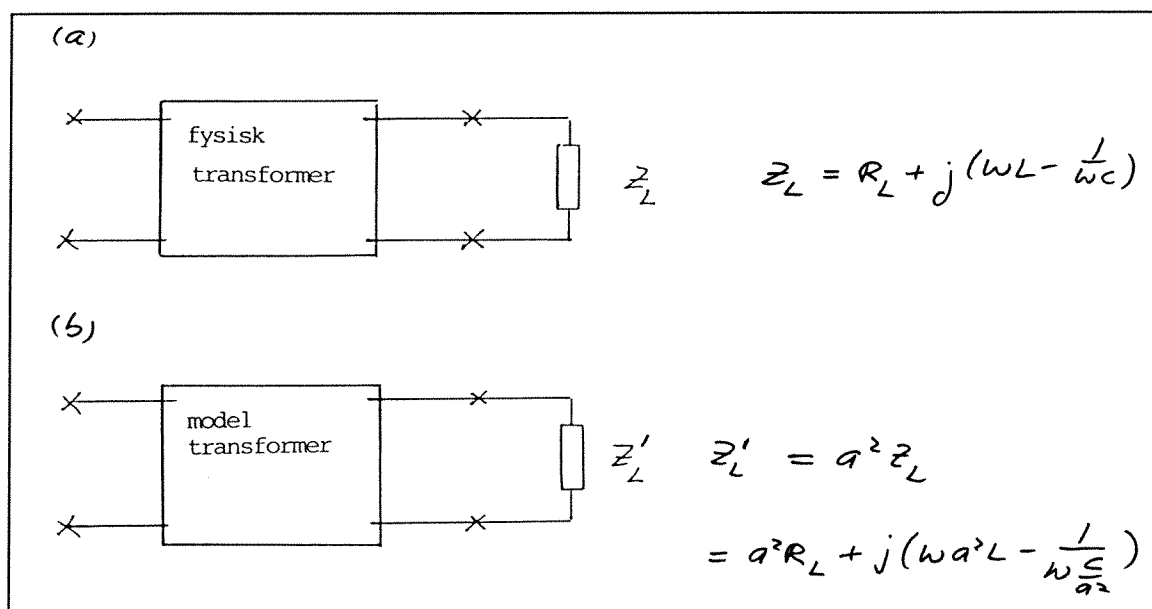
1. alle komponentværdier er altid positive og konstante størrelser (lineær approximation),
2. alle størrelser refererer til primærsiden.

Når modellen anvendes i beregninger må man som følge heraf sørge for at transformere den belastning, der anbringes på sekundærsiden af den fysiske transformer, til primærsiden inden den anbringes i modellen.

Eksempel 2:

På figur 6a er vist en fysisk transformer med belastning Z_L , hvor Z_L består af en serieforbindelse af en modstand, en induktans og en kapacitet.

Figur 6b viser kredsløbsmodellen med den samme belastning omregnet til primærsiden.

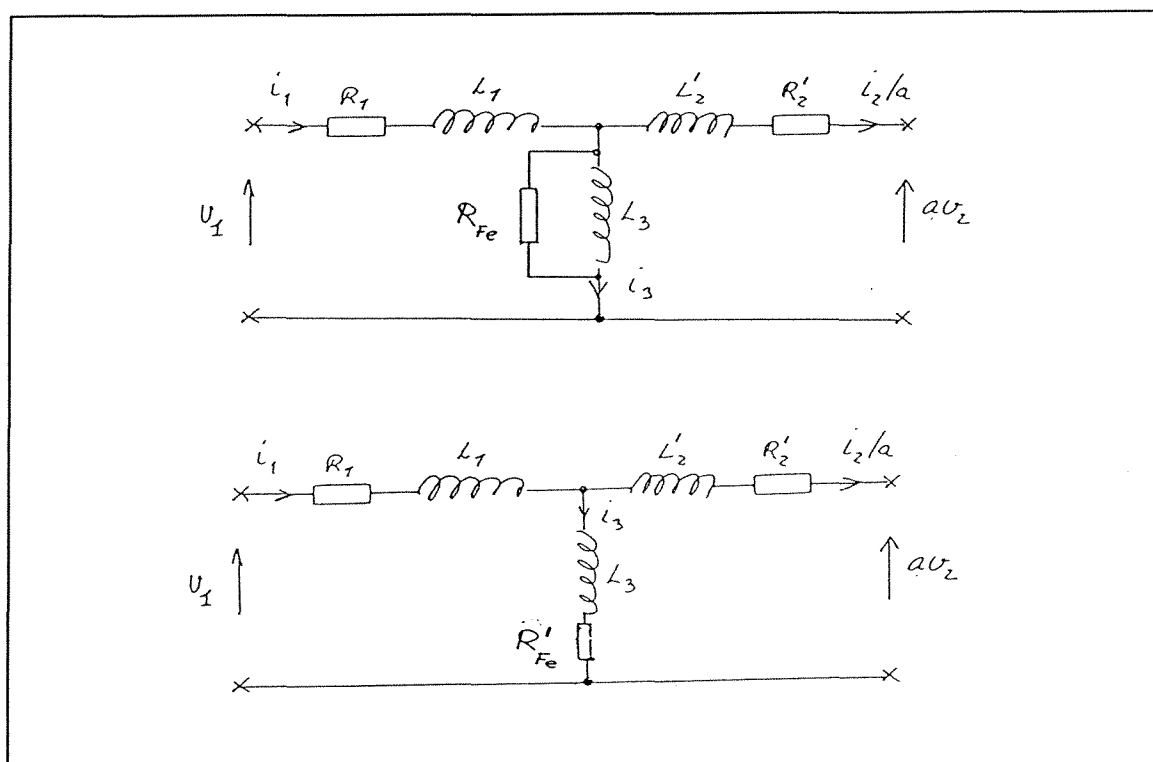


Figur 6. Fysisk transformer (a) og kredsløbsmodel (b) med belastning Z_L .

Opgave 1

Lav en kredsløbsmodel for transformeren på figur 1, hvor alle størrelser er henført til sekundærsiden og bestem sammenhængen mellem modelparametrene og parametrene for den fysiske transformer.

Kredsløbsmodellen på figur 5 tager ikke hensyn til de energitab, der finder sted i jernkernen. Modellen kan imidlertid let udvides til også at omfatte jerntabet ved blot at indføre en omhsk modstand, som vist enten på figur 7a eller 7b.



Figur 7. Kredsløbsmodeller med jerntab. Modstandene R_{Fe} og R'_{Fe} ækvivalerer det samlede jerntab. De to modstande har naturligvis ikke samme størrelse.

Energitabet i jernkernen består af to bidrag:

1. hysteresetab
2. hvirvelstrømstab.

Hysteresetab. Det kan vises [2] at den energi der afsættes i en jernkerne, når den gennemløber en hel magnetiseringscyklus er givet ved,

$$W_{hys} = A_{hys} \cdot Vol_{Fe} \quad (20)$$

hvor A_{hys} er hysteresekurvens areal og Vol_{Fe} er jernkernens volumen. Energien

bevirker at jernkernen opvarmes.

En jernkerne, der anvendes i en transformer udsættes for en vekselfelt og bør som følge heraf have en så smal hysteresekurve som muligt, for at mindske energitabet.

Når transformeren er påtrykt en spænding med frekvensen f vil den i jernkernen afsatte effekt P_{hys} kunne skrives som,

$$P_{hys} = W_{hys} \cdot f \quad (21)$$

Hvirvelstrømstab. Ethvert tværsnit af en transformerjernkerne vil gennemløbes af en tidsvariende flux, hvilket bevirker at der induceres elektromotoriske kræfter i jernkernen. Da jern er elektrisk ledende vil de inducerede elektromotoriske kræfter give anledning til elektrisk strømme i hvert jernkernetværsnit. På grund af jernens elektriske modstand vil strømmene opvarme jernkernen. Strømmene kaldes hvirvelstrømme eller "Eddy-currents". Effekttabet, som de giver anledning til kaldes hvirvelsstrømstab.

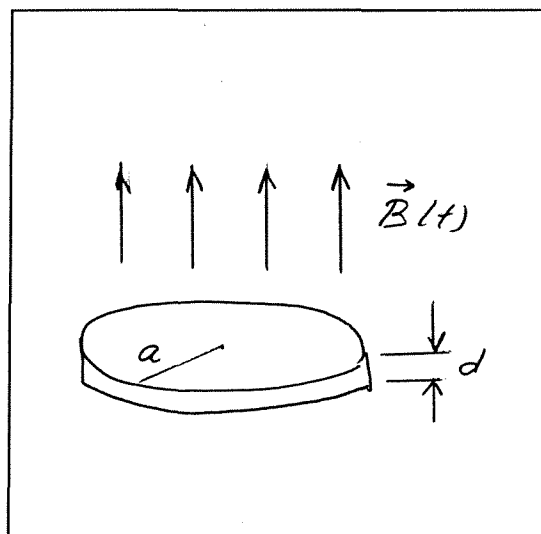
Man kan vise (se opgave 2) at middeffekten, der skyldes hvirvelstrømmene, er givet ved følgende udtryk,

$$P_{hvir} = k \cdot 1/\rho \cdot B_{max} \cdot f^2 \quad (22)$$

hvor ρ er den specifikke modstand af jernkernen, B_{max} er amplituden af B-feltet i jernkernen og f er som før frekvensen af den påtrykte spænding. Konstanten k afhænger af jernkernens form (cirkulært eller rektangulært tværsnit).

Opgave 2

Figur 8 viser et udsnit (i form af en tynd skive) af en jernkerne med cirkulært tværsnitsareal.



Jernskiven har radius a og tykkelsen d . B-feltet antages homogent over jerntværsnittet og at stå vinkelret på skiven. B-feltets tidsafhængighed er givet ved,

$$B(t) = B_{\max} \sin(2\pi f \cdot t) \quad (23)$$

- a) Udled et udtryk for middeleffekten, der afsættes i skiven og bestem derved konstanten i lgn.(22).
- b) Argumenter for at effekttabet bliver mindre hvis skiven deles i to halvdele langs en diameter og derpå limes sammen igen med en elektrisk isolerende lim.
- c) Hvilken konsekvens har resultatet i b) for udformning af jernkerner??

Den samlede energitab i jernkernen bliver ifølge (21) og (22),

$$P_{Fe} = W_{hys} \cdot f + k \cdot 1/\rho \cdot B_{\max}^2 \cdot f^2 \quad (24)$$

I forbindelse med praktiske anvendelser ville det være nyttigt, hvis hysteresetabet, ligesom hvirvelstrømstab, kunne udtrykkes ved B_{\max} . Ifølge [3] kan hysteresetabet udtrykkes på følgende måde,

$$P_{hys} = \eta \cdot f \cdot B_{\max}^{1.6} \cdot Vol_{Fe} \quad (25)$$

hvor η er en konstant, som afhænger af jernkernens indhold af andre legeringsstoffer. Ifølge [3] haves:

| Jerntype | η |
|--------------|---------------|
| Siliciumjern | 0.001 |
| blødt jern | 0.002 - 0.004 |
| hårdt jern | < 0.03 |

Lgn. (25) kaldes Steinmetz' ligning. Den er bestemt ud fra en lang række eksperimenter med jernkerner og gælder for B-felter i intervallet: 0.1 - 1.5 Tesla.

Det samlede jernstab kan v.hj.a. Steinmetz' ligning udtrykkes,

$$P_{Fe} = k_{hys} \cdot B_{max}^{1.6} \cdot f + k_{hvir} \cdot B_{max}^2 \cdot f^2 \quad (26)$$

hvor k_{hys} og k_{hvir} er konstanter, som man bestemmer eksperimentelt (se opgave 3).

Opgave 3

En transformer er påtrykt en spænding hvis frekvens er 35 Hz.
 Det samlede jerntab er målt til 1500 W .
 Frekvensen ændres nu til 60 Hz. Ved at regulere på
 spændingsforsyningen sørger man for at B-feltet er det samme som før.
 Det samlede jerntab måles igen og man finder : 3000 W .

- a) Bestem hysterese-tabet ved frekvensen 60 Hz.
- b) Bestem hvirvelstrømstabet ved 60 Hz.

Referencer:

- [1] E.V.Sørensen, Elementær Elektroteknik, Del 2: Transistorer.
Den Private Ingeniørfond (1978).
- [2] N. Jonassen, Elektro Magnetisme, Polyteknisk Forlag (1992).
- [3] M.A. Plonus, Applied Electromagnetics, McGraw-Hill (1978).

Grænsebetingelser

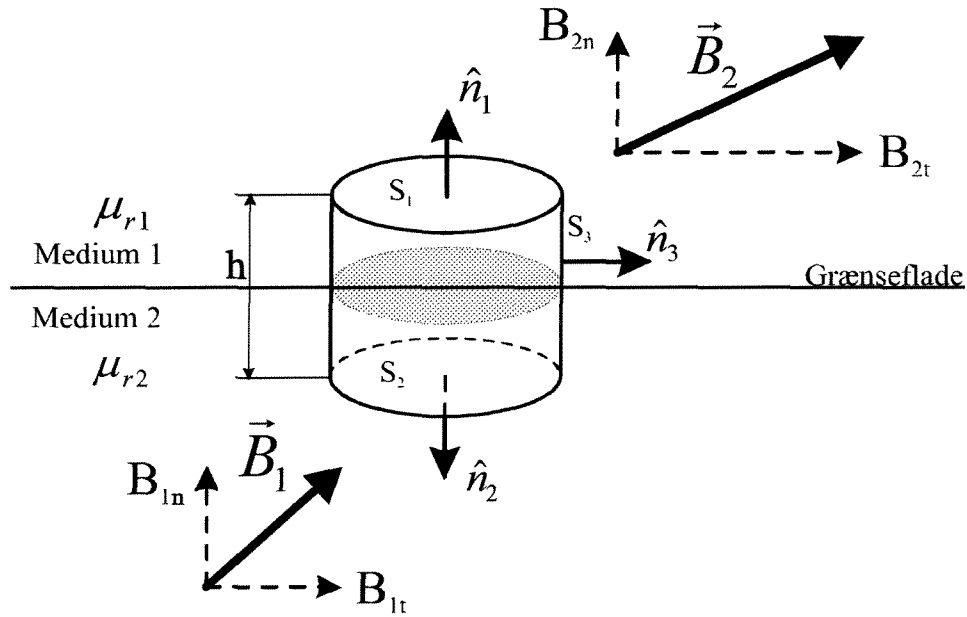
De grundlæggende fysiske love i elektromagnetismen er almengyldige. Lovene gælder således i vacuum såvel som i et magnetisk og/eller dielektrisk medium. Ethvert medium har en endelig størrelse, derfor vil de elektromagnetiske felter altid skulle krydse en grænseflade mellem mediet og vacuum eller et andet medium. Sammenhængen mellem de elektromagnetiske felter på hver side af grænsefladen er givet ved felternes *grænsebetingelser*. I dette tilskrift udledes grænsebetingelserne for de magnetiske- og de elektriske felter ud fra de grundlæggende love.

Grænsebetingelser for B- og H-felter

I det følgende opstilles grænsebetingelserne for den magnetiske induktion (B-feltet) og den magnetiske feltstyrke (H-feltet). Grænsebetingelsen for den magnetiske induktion fås ved at anvende Gauss' lov for B-felter.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (1)$$

Gauss' lov udtrykker matematisk, at den samlede B-flux gennem en lukket flade er lig med nul. Den lukkede flade vælges her at have form som en "lille" cylinder, se figur 1. Cylinderen er placeret i en grænsefladen således, at grænsefladen skærer cylinderens midte og cylinderens top og bund er parallelle med grænsefladen. Cylinderen har højden, h . Med udtrykket "lille" menes to ting: Udstrækningen af cylinderens endeflader lille i forhold til grænsefladens krumning og B-feltets variation langs grænsefladen. Grænsefladen regnes herefter for værende plan inden for cylinderens volume og B-feltet regnes konstant over cylinderens endeflader på hver side af grænsefladen. Ved beregningen af det lukkede flade-integrale i formel (1) deles cylinderens flade, S , op i tre delflader: S_1 og S_2 hhv. for cylinderens top og bund og S_3 for cylinderens krumme del. De tilhørende fladenormaler er vist på figur 1.



Figur 1. Grænsefladen mellem to medier er markeret med linien "Grænseflade". De to medier har de relative permitiviteter, μ_{r1} og μ_{r2} . Den magnetiske induktion i hvert medium er markeret på figuren. B-feltet i hvert medium er opdelt i en komponent normal til grænsefladen og en komponent tangential til overfladen. Den lukkede Gauss flade er valgt som en cylinder med top og bund i hvert sit medium. Cylinderen har højden, h , og endefladerne er markeret med hhv. S_1 og S_2 .

Integralet i formel (1) kan deles op i tre fladeintegraler:

$$\int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 dA + \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 dA + \int_{S_3} \vec{B}_3 \cdot \hat{n}_3 dA = 0 \quad (2)$$

Arealet, S_3 , er proportionalt med cylinderens højde. Ved grænsebetingelser forstås sammenhængen mellem felterne, som eksisterer lige akkurat på hver sin side af grænsefladen. Højen, h , af cylinderen kan derfor tillades at blive uendelig lille. For $h \rightarrow 0$ bliver den krumme del af cylinderens areal, S_3 , også lig med nul og integralet over S_3 i formel (2) går mod nul. Integralet bliver så

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 dA + \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 dA &= 0 \\ \Downarrow & \\ \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 &= - \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Det sidste udtryk fås når integralerne ophæves. Dette er tilladt idet cylinderens endeflader er lige store og det antages, at B-feltet er konstant over hele cylinderens endeflade. Af figur 1 ses, at $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$.

Indsættes dette i formel (3) fås, at normal komponenten af den magnetiske induktion er bevaret over grænsefladen:

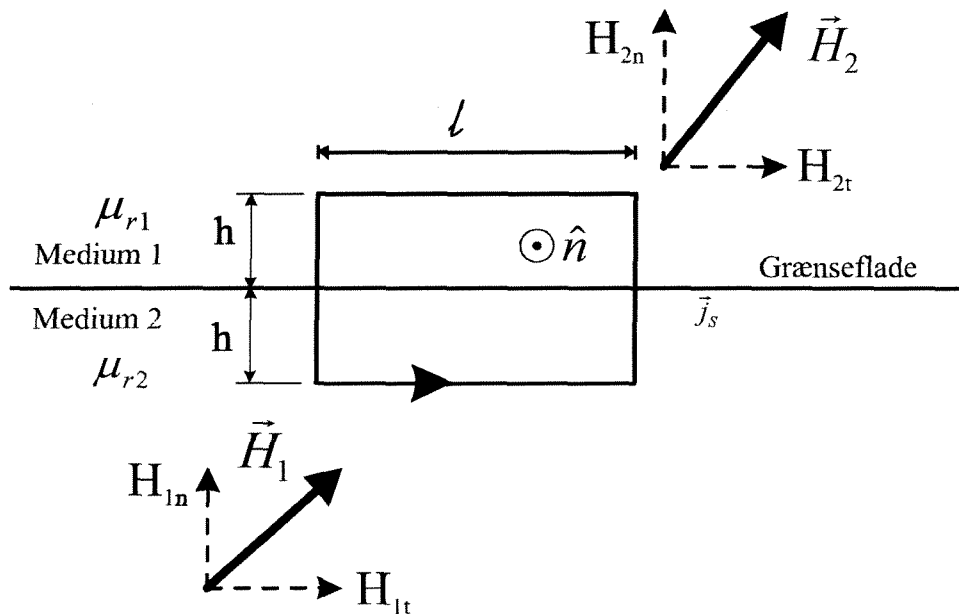
$$B_{1n} = B_{2n} \quad (4)$$

Tangentialkomponenten af den magnetiske induktion er ubestemt.

Grænsebetingelsen for den magnetiske feltstyrke fås ved at anvende Amperes sætning for H-felter:

$$\oint_k \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{oms, fri} \quad (5)$$

Integralet af H-feltet multipliceret med vejlængden om en lukket kurve er lig med de frie strømme, som kurven omslutter. Her vælges den lukkede kurve som en "lille" kurve bestående af fire lige stykker, der tilsammen omslutter en lille del af grænsefladen mellem to medier, se figur 2.



Figur 2. Grænsefladen mellem to medier er markeret med linien "Grænseflade". De to medier har de relative permitiviteter, μ_{r1} og μ_{r2} . Den magnetiske intensitet i hvert medium er markeret på figuren. H-feltet i hvert medium er opdelt i en komponent normal til grænsefladen og en komponent tangential til overfladen. Den lukkede kurve er valgt som fire lige stykker der tilsammen omslutter en del af grænsefladen. Integrationsretningen er markeret med en pil på kurven. j_s [A/m] er den frie strøm som løber i grænsefladen.

Her menes der tre ting med "lille": 1) Grænsefladen kan regnes plan inden for kurven. 2) De magnetiske induktioner i hvert medium kan regnes konstante langs kurvens lige stykker, og 3) højden, h , er infinitesimal således, at den lukkede kurve kun omslutter de frie overfladestrømme der løber i grænsefladen, \vec{j}_S [A/m]. For den viste kurve bliver integralet i formel (5) en sum over 6 led:

$$\begin{aligned} H_{1t}l + H_{1n}h + H_{2n}h - H_{2t}l - H_{2n}h - H_{1n}h &= \vec{j}_S \cdot \hat{n} l \\ \Downarrow \\ H_{1t}l - H_{2t}l &= \vec{j}_S \cdot \hat{n} l \end{aligned} \quad (6)$$

Forkortes længden, l , ud fås grænsebetingelsen for den magnetiske induktion.

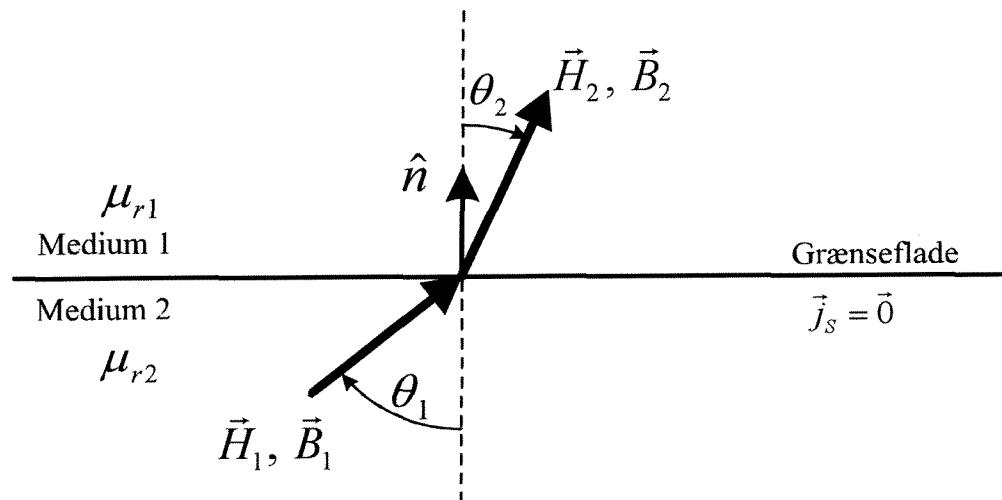
$$H_{1t} - H_{2t} = \vec{j}_S \cdot \hat{n} \quad (7)$$

Formel (7) udtrykker, at forskellen mellem tangential komponenterne af den magnetiske induktion er lig med den frie strømtæthed, som løber vinkelret på H-feltet.

Er der ingen frie strømme eller løber strømmen vinkelret på H-feltet, bliver grænsebetingelsen blot en bevarelse af H-feltets tangential komponent over overfladen:

$$H_{1t} = H_{2t} \quad ; \quad \vec{j}_S = \vec{0} \quad \text{eller} \quad \vec{j}_S \perp \hat{n} \quad (8)$$

I homogene og isotrope medier (μ_r har den samme skalare størrelse i hele mediet) er B-feltet parallelt med H-feltet. Generelt ændrer både B- og H-felterne størrelse og retning ved overgangen fra et medium til et andet. Dette kan betragtes som felternes brydning i grænsefladen. Ses der bort fra de frie overfladestrømme, kan der udledes en simpel sammenhæng mellem indfalds- og brydningsvinkelen for felterne. På figur 3 ses B- og H-felterne som vektorer ved grænsefladen.



Figur 3. Grænsefladen mellem to medier er markeret med linien "Grænseflade". De to medier har de relative permitiviteter, μ_{r1} og μ_{r2} . B- og H-felterne er vist med deres indfalds- og brydningsvinkel, θ_1 og θ_2 hhv. Der løber ingen frie strømme i grænsefladen $\vec{j}_s = \vec{0}$ [A/m]. \hat{n} er normalvektoren til grænsefladen.

Sammenholdes figur 3 med grænsebetingelserne, givet ved formel (4) og (8), fås følgende forbindelse mellem indfalds- og brydningsvinklen og de relative permitiviteter:

$$\frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} \quad (9)$$

Betragtes specielt overgangen fra et ferromagnetisk medium, med $\mu_{r2} \gg 1$, til vacuum, med $\mu_{r1} = 1$, ses af formel (9), at til en god approksimation bliver brydningsvinklen, θ_2 , lig med nul. Ovennævnte betyder, at de magnetiske feltlinier i vacuum går vinkelret ind på overfladen af det ferromagnetiske materiale.

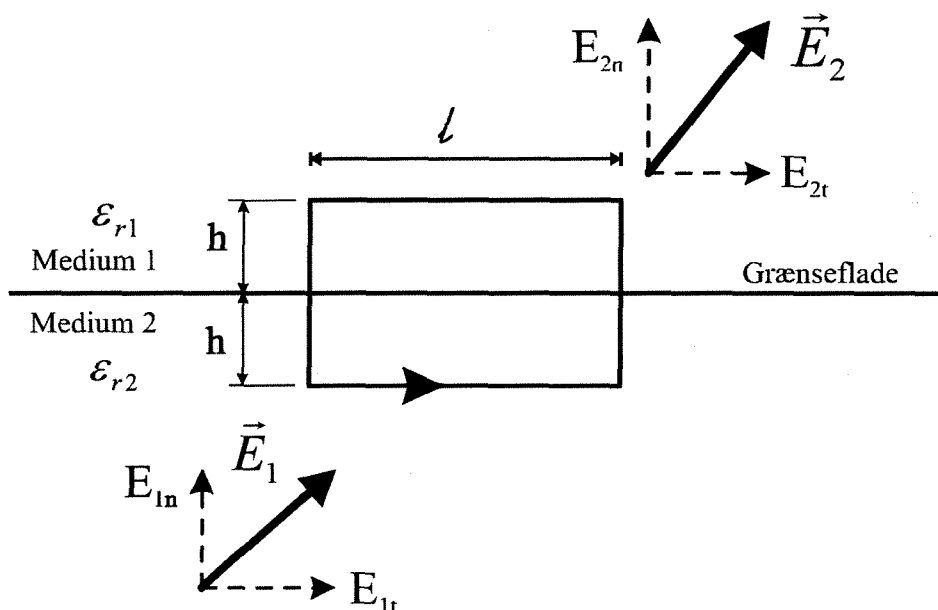
Øvelse 1: Eftersis formel (9).

Grænsebetingelser for E- og D-felter

Herunder opstilles grænsebetingelserne for det elektriske felt (E-feltet) og det elektriske forskydningsfelt (D-feltet). Integralet af det elektriske felt multipliceret med vejlængden langs en lukket kurve er lig med nul.

$$\oint_k \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (10)$$

Som for den magnetiske intensitet vælges at integrere langs en "lille" kurve som omslutter en del af grænsefladen mellem to medier, se figur 4.



Figur 4. Grænsefladen mellem to medier er markeret med linien "Grænseflade". De to medier har de relative dielektrisitetskonstanter, ϵ_{r1} og ϵ_{r2} . E-felterne i hver medium er opdelt i komponenter normal til grænsefladen og komponenter tangential til grænsefladen.

Betingelserne for den "lille" kurve er de samme som for den magnetiske intensitet. Integralet i formel (10) bliver:

$$E_{1t}l + E_{1n}h + E_{2n}h - E_{2t}l - E_{2n}h - E_{1n}h = 0 \quad (11)$$

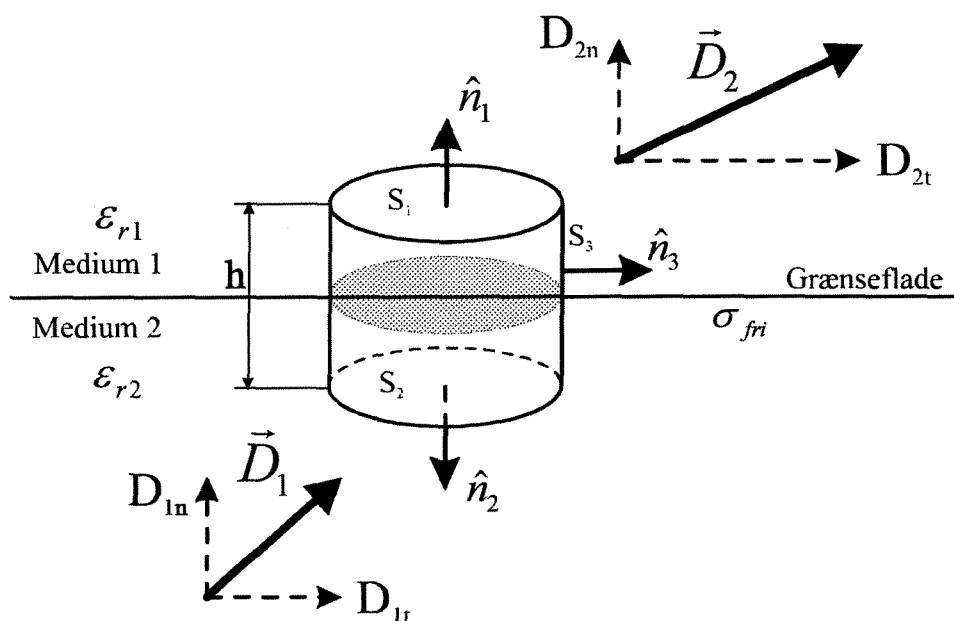
Heraf fås direkte grænsebetingelsen for det elektriske felt:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (12)$$

Grænsebetingelsen for det elektriske forskydningsfelt fås ved anvendelse af Gauss' lov for D-felter.

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{oms, fri} \quad (13)$$

Her vælges Gauss fladen, ligesom ved den magnetiske induktion, til en "lille" cylinder i grænsefladen, se figur 5



Figur 5. Grænsefladen mellem to medier er markeret med linien "Grænseflade". De to medier har de relative dielektricitetskonstanter, ϵ_{r1} og ϵ_{r2} . Det elektriske forskydningsfelt er markeret på figuren. D-feltet i hvert medium er opdelt i en komponent normal til grænsefladen og en komponent tangential til overfladen. Den lukkede Gauss flade er valgt som en cylinder med top og bund i hvert sit medium. Cylinderen har højden, h , og endefladerne er markeret med hhv. S_1 og S_2 . σ_{fri} er den frie ladningstæthed i grænsefladen [C/m^2].

Som ved udledningen af grænsebetingelsen for B-feltet menes der med "lille", at D-felterne i hvert medium kan regnes konstante over cylinderens endeflader. Ligeledes tillades cylinderens højde, h , at blive uendelig lille (gå imod nul). Gauss fladen omslutter herefter kun de frie ladninger i grænsefladen, σ_{fri} . Integreres Gauss' lov, formel (5), fås:

$$D_{1n} A - D_{2n} A = \sigma_{fri} A \quad (14)$$

Hvor A er arealet af cylinderens endeflader.

Endefladerens areal kan forkortes ud og grænsebetingelsen for det elektriske forskydningsfelt fås:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{fri} \quad (15)$$

Forskellen mellem normal komponenterne af D-feltet på hver side af grænsefladen er lig med den frie flade-ladningstæthed i grænsefladen. Er der ingen frie ladninger, er normal komponenten bevaret over grænsefladen:

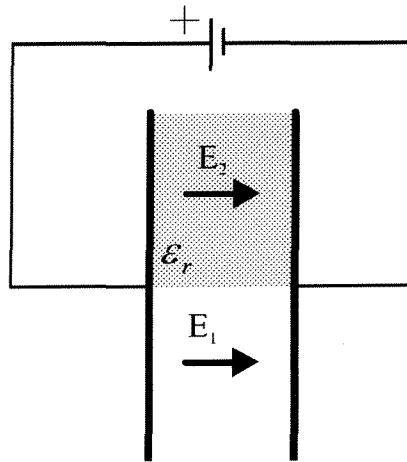
$$D_{1n} = D_{2n} \quad ; \quad \sigma_{fri} = 0 \quad (16)$$

Grænsebetingelsen kan også skrives som:

$$\epsilon_{r1} E_{1n} - \epsilon_{r2} E_{2n} = \sigma_{fri} \quad (17)$$

Øvelse 2:

På figuren herunder er vist en pladekondensator. Kondensatoren er fyldt med et dielektrikum i den ene halvdel og resten er i vacuum. Dielektrikummet har en relativ dielektricitetskonstant ϵ_r . Kondensatoren er tilsluttet en konstant potentialforskel.



- 1) Giv to argumenter for, at det elektriske felt i dielektrikummet er det samme som det elektriske felt i den halvdel af kondensatoren, der er i vacuum, $E_1 = E_2$.
- 2) Hvordan kan de to elektriske felter være ens, når det elektriske felt almindeligvis minskes i et dielektrikum?
- 3) Hvor vil der sandsynligvis først ske overslag, hvis potentialforskellen over konsatoren øges? - argumentér.

