HM2 Praktikum 1

Alexander Stoeckl

May 2025

1 Aufgabe 2

Auslenkung w = w(x, t) einer schwingenden Welle in einer räumlichen Dimension mit Ortskoordinate x und Zeitkoordinate y.

$$\frac{\theta^2 w}{\theta t^2} = c^2 \frac{\theta^2 w}{\theta x^2}$$

c = konstante Geschwindigket der Welle

$$\frac{\theta^2 w}{\theta t^2} = \frac{\theta}{\theta t}(\frac{\theta w}{\theta t}); bzw. \frac{\theta^2 w}{\theta x^2} = \frac{\theta}{\theta x}(\frac{\theta w}{\theta x})$$

a) Zeigen sie durch manuelles partielles Ableiten, dass die folgenden Funktionen die Wellengleichung erfüllen.

1.1 Aufgabe 2.1

$$w(x, t) = sin(x + ct)$$

Partielle Ableitung 1 Ordnung nach t Kettenregel (u * v) = u'(v) * v'

$$u = sin(v) => u' = cos(v)$$

$$v = x + ct => v' = 0 + c$$

$$\frac{\theta w}{\theta t} = cos(x + ct) * t$$

Partielle Ableitung 2 Ordnung nach t Produktregel u * v = u' * v + u * v'

$$u = cos(x + ct) => u' =?$$

für U Kettenregel (u * v) = u'(v) * v' anwenden =

$$u_2 = cos(v_2) => u_2' = -sin(v_2)$$

$$v_2 = x + ct => v_2' = 0 + c$$

$$u = cos(x + ct) => u' = u_2'(v_2) * v_2' = -sin(x + ct) * c$$

$$v = c => v' = 0$$

$$\frac{\theta^2 w}{\theta t^2} = u' * v + u * v' = -sin(x + ct) * c * c = -sin(x + ct) * c^2$$

—

Partielle Ableitung 1 Ordnung nach x Kettenregel (u * v) = u'(v) * v'

$$u = sin(v) => u' = cos(v)$$

$$v = x + ct => v' = 1$$

$$\frac{\theta w}{\theta x} = u'(v) * v' = cos(x + ct)$$

Partielle Ableitung 2 Ordnung nach x Kettenregel (u * v) = u'(v) * v' anwenden =

$$u = cos(v) => u' = -sin(v)$$

$$v = x + ct => v' = 1$$

$$v = c => v' = 0$$

$$\frac{\theta^2 w}{\theta x^2} = u'(v) * v' = -sin(x + ct)$$

—

Einsetzen und überprüfen

$$\frac{\theta^2 w}{\theta t^2} = c^2 \frac{\theta^2 w}{\theta x^2}$$

$$-sin(x + ct) * c^2 = c^2 * -sin(x + ct)$$

Stimmt überein

1.2 Aufgabe 2.2

$$v(x, t) = sin(x + ct) + cos(2x + 2ct)$$

—

Partielle Ableitung 1 Ordnung nach t Erster Teil: Kettenregel (u * v) = u'(v) * v'

$$u = sin(v) => u' = cos(v)$$

$$v = x + ct => v' = c$$

$$u'(v) * v' = cos(x + ct) * c$$

Zweiter Teil: Kettenregel (u * v) = u'(v) * v'

$$u = cos(v) => u' = -sin(v)$$

$$v = 2x + 2ct => v' = 2c$$

$$u'(v) * v' = -sin(2x + 2ct) * 2c$$

$$\frac{\theta w}{\theta x} = cos(x + ct) * c - sin(2x + 2ct) * 2c = c(cos(x + ct) - 2sin(2x + 2ct))$$

Zweite Ableitung 2 Ordnung nach t

$$cos(x+ct)*c - sin(2x+2ct)*2c$$

Erster Teil cos(x+ct) * c:
Produktregel u' * v + u * v'

$$u = cos(x+ct) => u' = -sin(x+ct)*c$$

$$v = c => v' = 0$$

$$u' * v = -sin(x+ct)*c^2$$

Zweiter Teil sin(2x + 2ct) * 2c: Produktregel u * v = u' * v + u * v'

$$u = sin(2x+2ct) => u' = cos(2x+2ct)*2c$$

$$v = 2c => v' = 0$$

$$u' * v = 4*cos(2x+2ct)*c^2$$

$\frac{\theta^2 w}{\theta x^2} = -sin(x+ct)*c^2 - 4*cos(2x+2ct)*c^2 = -c^2(4cos(2x+2ct)+sin(x+ct))$

—

Partielle Ableitung 1 Ordnung nach x Erster Teil: Kettenregel (u * v) = u'(v) * v'

$$u = sin(v) => u' = cos(v)$$
$$v = x + ct => v' = 1$$
$$u'(v) * v' = cos(x + ct)$$

Zweiter Teil: Kettenregel (u * v) = u'(v) * v'

$$u = cos(v) => u' = -sin(v)$$
$$v = 2x + 2ct => v' = 2 + 0$$
$$u'(v) * v' = -2 * sin(2x + 2ct)$$

$$\frac{\theta w}{\theta x} = cos(x + ct) - 2 * sin(2x + 2ct)$$

Zweite Ableitung 2 Ordnung nach x

$$cos(x + ct) - 2 * sin(2x + 2ct)$$

Erster Teil: Kettenregel (u * v) = u'(v) * v'

$$u = cos(v) => u' = -sin(v)$$
$$v = x + ct => v' = 1$$
$$u'(v) * v' = -sin(x + ct)$$

Zweiter Teil: Produktregel u * v = u' * v + u * v'

$$u = 2 => u' = 0$$
$$v = sin(2x + 2ct) => v' =?$$

Kettenregel (u * v) = u'(v) * v'

$$sin(2x + 2ct)$$
$$u = sin(v) => u' = cos(v)$$
$$v = 2x + 2ct => v' = 2$$
$$u'(v) * v' = cos(2x + 2ct) * 2$$

Einsetzen =

$$u * v' = 2 * cos(2x + 2ct) * 2 = 4 * cos(2x + 2ct)$$

$$\frac{\theta^2 w}{\theta x^2} = -sin(x + ct) - 4 * cos(2x + 2ct)$$

Einsetzen und überprüfen

$$\frac{\theta^2 w}{\theta t^2} = c^2 \frac{\theta^2 w}{\theta x^2}$$
$$-c^2(4cos(2x + 2ct) + sin(x + ct)) = c^2(-sin(x + ct) - 4cos(2x + 2ct)$$
$$-c^2(4cos(2x + 2ct) + sin(x + ct)) = -c^2(sin(x + ct) + 4cos(2x + 2ct))$$

Stimmt überein