HM2 Praktikum Serie 8

Alexander Stoeckl

April 2025

1 Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass ausgehend von der Trapezregel für ein Intervall [a, b]

$$Tf = \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

a) Die summierte Trapezregel in der Form gilt

$$Tf(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

wenn eine tabellierte, nicht äquidistante Wertetabelle $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ vorliegt mit $x_0 = a, x_n = b, y_i = f(x_i)$

b) die summierte Trapezregel in der Form gilt

$$Tf(h) = h(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$$

wenn das Intervall [a,b] aufgespalten wird in n äquidistante Subintervalle, wobei $x_i = a + ih, h = \frac{b-a}{n}, i = 0, ..., n$ also $x_0 = a$ und $x_n = b$

1.1 Lösung a)

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$Teilintervale : x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, ..., x_n = b$$

Trapezregel von Teilinterval:

$$\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Funktionsaurufe f(x) durch Rückgabewerte (y) ersetzen:

$$\frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Die Trapezregel auf alle Teilintervalle ausführen und zusammenaddieren:

$$Tf(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

1.2 Lösung b)

Trapezregel von Teilinterval:

$$\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Da die Teilintervalle äquidistant sind: $x_{i+1} - x_i = h$

$$\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot h$$

Die summierte Trapezregel durch aufsummieren:

$$Tf(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot h$$

H ausklammern:

$$Tf(h) = h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

Ausschreiben:

$$Tf(h) = h \cdot (\frac{f(x_0) + f(x_{x_1})}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_{x_2})}{2} + \frac{f(x_2) + f(x_{x_3})}{2} + ... + \frac{f(x_{x-1}) + f(x_{x_n})}{2})$$

Wir sehen: x_0 und x_n kommen einmal vor, der Rest immer zweimal, dementsprechend setzten wir für $x_0 = a$ und $x_n = b$ ein und erhalten:

$$Tf(h) = h(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$$

2 Aufgabe 2

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(v)} \, dv$$

$$R(v) = -v\sqrt{v}, m = 10kg, v(0) = 20m/s, v(t) = 5m/s$$

2.1 Lösung a) Summierte Rechtecksregel mit n = 5

$$t = \int_{20}^{5} \frac{10}{-v\sqrt{v}}\, dv = -\int_{5}^{20} 10v^{-3/2}\, dv$$

$$h = \frac{20-5}{5} = 3$$

$$Rf(h) = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2}))$$

Einsetzen:

$$Rf(h) = 3 \cdot (f(6.5) + f(9.5) + f(12.5) + f(15.5) + f(18.5))$$

$$Rf(h) = 3 \cdot (10*6.5^{-3/2} + 10*9.5^{-3/2} + 10*12.5^{-3/2} + 10*15.5^{-3/2} + 10*18.5^{-3/2}) = 4.382$$

2.2 Lösung b) Summierte Trapezregel mit n = 5

$$Tf(h) = h \cdot (\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$$

Ausschreiben:

$$Tf(h) = 3 \cdot (\frac{f(5)+f(20)}{2} + f(8) + f(11) + f(14) + f(17))$$

$$Tf(h) = 3 \cdot (\frac{10*5^{-3/2} + 10*20^{-3/2}}{2} + 10*8^{-3/2} + 10*11^{-3/2} + 10*14^{-3/2} + 10*17^{-3/2}) = 4.658$$

2.3 Lösung c) Summierte Simpsonregel mit n = 5

$$Sf(h) = \frac{h}{3}(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}) + \frac{1}{2}f(b))$$

$$Sf(h) = \frac{1}{2}f(5) + f(8) + f(11) + f(14) + f(17) +$$

$$2(\frac{f(5)+f(8)}{2} + \frac{f(8)+f(11)}{2} + \frac{f(11)+f(14)}{2} + \frac{f(14)+f(17)}{2} + \frac{f(17)+f(20)}{2}) + \frac{1}{2}f(20) = 4.658$$

2.4 Fehler

Exakter Wert des Integrals

$$-\int_{5}^{20} 10v^{-3/2}\,dv = -10\int_{5}^{20} v^{-1.5}\,dv = -10(\frac{1}{-0.5} * 20^{-0.5} - \frac{1}{-0.5} * 5^{-0.5})$$

$-10(-0.4472135955+0.894427191) = -10*0.4472135955 = -4.472135955 = 4.472135955$

exakter Fehler a Rechteck) 4.472135955 - 4.382 = 0.090135955
exakter Fehler b Trapez) 4.472135955 - 4.658 = 0.186864045
exakter Fehler c Simpson) 4.472135955 - 4.658 = 0.186864045