កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសពិសេស

គណិតវិទ្យា

101

សម្រាប់

ត្រៀមប្រឡងគ្រូបឋមសិក្សា

ត្រៀមប្រឡង ចូលរៀនវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ NIE

ត្រៀមប្រឡង សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២

ត្រៀមប្រឡង អាហារូបករណ៍នានា

និពន្ធ និង រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន

សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យាសាលាមហាសាស្ត្រា

សេចក្តីរំលឹកគុណ

ខ្ញុំបាទសូមរំលឹកគុណដល់លោកឪពុក **លឹម ឆុន** និងអ្នកម្តាយ **សុខ ណាម** ដែលបានជួយបង្កើតរូបខ្ញុំមក ព្រមទាំងជួយចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សា ឲ្យខ្ញុំបាទមានលទ្ធភាពសិក្សាមកដល់សព្វថ្ងៃនេះ ។

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

សៀវភៅកម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសលីមីតនៃអនុគមន៍មួយក្បាលនេះ រៀបរៀងឡើងបានចប់រួចរាល់ ដោយសារមានការជួយជ្រោមជ្រែង និង ការជួយផ្តល់កម្លាំងចិត្តគាំទ្រ ពីសំណាក់អ្នកសិក្សា ក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន និងជាពិសេសខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណដល់ ៖

១-លោក **ថៃ ថាល់** លោក **យ៉ង់ ឆារី** និង លោក **អ៊ឹុម សំណាង** ដែលបានចូលរួមជួយត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ដែលធ្វើឲ្យសៀវភៅនេះកាន់តែមានសុក្រឹតភាព។

២-កញ្ញា **ម៉ៃ ថាវធី** ដែលបានស្ម័គ្រចិត្តជួយវាយអត្ថបទនេះឡើង ។

គណៈកម្មការនិពន្ធ

និពន្ធដោយលោក **លឹម ផល្គុន**

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ

លោក **ថៃ ថាល់** លោក **យ៉ង់ ធារី**

លោក **អ៊ឹង សំណាង**

អ្នករចនាក្រប

កញ្ញា **ម៉ៃ ថាវរី**

បច្ចេកទេសកុំព្យូទ័រ

លោក **លឹម ផល្គុន** កញ្ញា **ម៉ៃ ថាវរី**

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

កញ្ញា **ម៉ៃ ថាវរី**

អារម្ភកថា

សួស្តីប្រិយ៍មិត្តអ្នកសិក្សាគណិតវិទ្យាទាំងអស់ជាទីគោរពរាប់អាន សៀវភៅ **១០១ គម្រូចលំហាត់គណិតវិទ្យាជ្រើសរើស** *ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងនិងនិពន្ធឡើងក្នុងគោលបំណង ទុកជាឯកសា សម្រាប់សិស្សានុសិស្ស ដែលមានបំណងចង់ស្រាវជ្រាវ ពង្រឹងសមត្ថភាពយល់ដឹងឲ្យបានកាន់តែច្រើនទៅលើប្រភេទលំហាត់ពិបាកៗដែលត្រូវធ្វើការវិភាគគិតវែងឆ្ងាយ មុននិងធ្វើដំណោះស្រាយ ។ នៅក្នុងសៀវភៅនេះរួមមាន លំហាត់ជ្រើសរើសពិសេសដែលមានចំនួន ១០១លំហាត់មានដំណោះស្រាយគំរូច្បាស់លាស់ងាយយល់ និងផ្នែកចុងក្រោយមានលំហាត់អនុវត្តន៍ដ៏ច្រើនទៀតដែលគ្មានដំណោះស្រាយ ហើយទុកសម្រាប់អ្នកសិក្សាហ្វឹកហាត់ធ្វើដំណោះស្រាយដោយខ្លួនឯង។*

សៀវភៅនេះ មិនជាល្អហួសគេ ហួសឯងនោះទេ កំហុសឆ្គងទាំងបច្ចេកទេស និងអក្ខរាវិរុទ្ធប្រាកដជាកើតមានដោយអចេតនាមិនខានឡើយ ។ ហេតុនេះខ្ញុំបាទអ្នករៀបរៀងរង់ចាំជានិច្ចនូវរាល់មតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សា ក៏ដូចជាអ្នកស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាទាំងអស់ដោយក្តីរីករាយបំផុត ដើម្បីកែលំអសៀវភៅនេះ និង ស្នាដៃលើកក្រោយទៀតឲ្យបានកាន់តែល្អប្រសើរថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទអ្នករៀបរៀងសូមជូនពរចំពោះអ្នកសិក្សា និងអ្នកស្រាវជ្រាវទាំងអស់មានសុខភាពល្អ និង មានជ័យជំនះគ្រប់ពេលវេលា។

ភ្នំពេញថ្ងៃទី១២ ខែវិច្ឆិកា ឆ្នាំ២០១៦

អ្នករៀបរៀង និងនិពន្ធ លឹម ផល្គុន

សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យាសាលាមហាសាស្ត្រា

Tel: 017 250 290

ជំពូកទី១

កម្រងលំហាត់គណិតវិទ្យាជ្រើសរើស

1.ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យបាន $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5+ax^3+b}{x^2-1}=4$ ។

2.គេឲ្យសមភាព

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{3\pi}{2n+1}+......+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

ចូរបង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+..........+\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{\pi^2}{6}$ ។

3.គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$f(x)+\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4}-x)=\sin x+3\cos x$$

ចូរស្រាយថា $|f(x)|\le\sqrt{2}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

4.គេឱ្យអនុគមន៍ f និង g កំណត់គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$\begin{cases} f(x)+g(\frac{\pi}{2}-x)=2\sin x \\ 3f(\frac{\pi}{2}-x)-g(x)=2\cos x \end{cases}$$

ចូររកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ ។

5.ចំពោះ a និង b ជាចំនួនពិត សមីការ

$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ មានឫសយ៉ាងតិច

មួយជាចំនួនពិត។ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ a^2+b^2 ។

6.គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$u_1=\dfrac{7}{2}$ និង $u_{n+1}=u_n{}^2+u_n-\dfrac{1}{4}$ គ្រប់ $n\geq 1$

បង្ហាញថាគេអាចកំណត់ចំនួនពិត a ដែល $u_{n+1}+a=(u_n+a)^2$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

7.គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$2f(\frac{\pi}{2}-x)+f(\frac{\pi}{2}+x)=\sin x+3\sqrt{3}\cos x$$

កំណត់ចំនួនពិត r និង ϕ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$អាចសរសេរ ៖

$f(x)=r\sin(x+\phi)$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

8.គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$5f(x)-3\sin x\, f(\pi-x)=4\cos x$$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $f(x)$

9.គេឲ្យ x , y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ហើយ $a>0$ និងខុសពី 1 ។

ចូរស្រាយថា៖

$$\left(\log_a\frac{x}{y}\right)^3+\left(\log_a\frac{y}{z}\right)^3+\left(\log_a\frac{z}{x}\right)^3=3\log_a\frac{x}{y}\log_a\frac{y}{z}\log_a\frac{z}{x}$$

10.ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់ 1 ។ ចំនួន n នោះចែកនឹង 5 ឱ្យសំណល់ 2 ។

ក-បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ-រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3940 < n < 4000$ ។

11.ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ

$$\begin{cases} 5\,(\log_y x + \log_x y) = 26 \\ x\,y = 64 \end{cases}$$

12.ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} 4^x . 5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x . 6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$

13.ដោះស្រាយសមីការ $9^{x^2-x} + 3^{1-x^2} = 3^{(x-1)^2} + 1$

14.កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a , b , c ដើម្បីឱ្យបណ្តាសមីការខាងក្រោម

$\begin{cases} x^2 - 2ax + b = 0 \\ x^2 - 2bx + c = 0 \\ x^2 - 2cx + a = 0 \end{cases}$ មានឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

15.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a , b , c និងមានមុំក្នុង α , β , γ ។ បើ $\alpha = 3\beta$ ចូរបង្ហាញថា $(a-b)(a^2-b^2) = bc^2$ ។

16.ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន ៖

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1} + \frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1} + \frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1} \geq a+b+c+3$$

17.គេឱ្យអនុគមន៍ $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$

តាង $u_n=\dfrac{f(1)f(3)f(5)....f(2n-1)}{f(2)f(4)f(6)....f(2n)}$; $n\in\mathbb{N}$

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sqrt{u_n})$

18.គេឱ្យស្វីត (x_n)មួយកំណត់ដោយ ៖

$x_1=a$; $x_{n+1}=\dfrac{{x_n}^2}{b}+x_n$, $a>0$, $b>0$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{x_k}{x_{k+1}}\right)$ ។

19.គេមាន $y=a^{\frac{1}{1-\log_a x}}$ និង $z=a^{\frac{1}{1-\log_a y}}$ ។ចូរស្រាយថា $x=a^{\frac{1}{1-\log_a z}}$ ។

20.គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$\sin^2 B+\sin^2 C=1+\sin B\sin C\cos A$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

21.គេឲ្យអនុគមន៍ $y=\dfrac{x^2+2mx+3m-8}{2\,(x^2+1)}$

ដែល $x\in\mathbb{R}$ និង mជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

តើគេអាចកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍នេះអាចតាងឲ្យតម្លៃ

កូស៊ីនូសនៃមុំមួយបានឬទេ។

22.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in\mathbb{R}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\dfrac{a+b}{1+a+b})<f(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$។

23.ក.គណនា $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....+\frac{1}{(n-1)n}$ ដែល $n>2$

ខ.ដោយប្រើវិសមភាព $AM-GM$ នៃ $(n-1)$ ចំនួនខាងក្រោម ៖

$\frac{1}{1.2}\,;\frac{1}{2.3}\,;\frac{1}{3.4}\,;\frac{1}{(n-1)n}$ ចូរបង្ហាញថា $n^n < (\,n!\,)^2$ ។

24.គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a\,,b$ និង c ។

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

25.គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a\,,b$ និង c ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$

26.គេឱ្យសមីការ $x^2-x-3=0$ មានឫសតាងដោយ x_1 និង x_2 ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A=7x_1^{\,5}+19x_2^{\,4}$ ។

27.គេត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ។

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ

ហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC ។

ក. ស្រាយថា $IA.IB.IC=4R\,r^2$

ខ. ស្រាយថា $IA^2+IB^2+IC^2=r^2+p^2-8Rr$

គ. ស្រាយថា $\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1$ ។

28.គេឲ្យ $a\,,b\in[\,0,1\,]$ ។

ចូរស្រាយវិសមភាព $1-\frac{a+b}{2}+\frac{ab}{3}\ge\frac{1}{1+a+b}$ ។

29.គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបី ។

គេដឹងថា $P(x)+2$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^2$ ហើយ $P(x)-2$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^2$ ។ចូរកំនត់រកពហុធា $P(x)$ ។30.

30.គេឲ្យ a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព ៖

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$

31.គេឱ្យ a, b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $E=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$ ។

32.គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$

33.គេឲ្យ x ; y ; z ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6}\leq\frac{x+y+z}{3}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

34.គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន x ; y ; z ដែល $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}\leq\frac{1}{3}$ ។

35.ក.ចូរកំនត់លេខនៃអញ្ញាត a , b , c , d នៃចំនួន $\overline{abcd}$

បើគេដឹងថា $\overline{abcd}\times 9=\overline{dcba}$

ខ.ចំពោះតម្លៃ a , b , c , d ដែលបានរកឃើញខាងលើចូរបញ្ជាក់ថា

ចំនួន $\overline{abcd}$ និង $\overline{dcba}$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ។

36.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយថា $(1+\sin x)(1+\cos x)\leq \frac{3}{2}+\sqrt{2}$

37.ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1)+\frac{6}{\log_3(2^x+1)}=1+2\sqrt{\log_3(2^x+1)+\frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

38.ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x=\cot x-2\cot 2x$

ខ. ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n=\tan a+\frac{1}{2}\tan\frac{a}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2}+....+\frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

39.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ចូរបង្ហាញថា ៖

$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$

40.គេឱ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz=1$ ។

ចូរបង្ហាញវិសមភាព $\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\geq x+y+z$

41.ចូរគណនាផលបូក $S_n=\frac{2}{3+1}+\frac{2^2}{3^2+1}+.....+\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}$

42.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a វិជ្ជមាន ឬសូន្យចូរបង្ហាញថា ៖

$(a+1)^{a+2}\geq e^{2a}$ ដែល $e=2.7182$ ។

43.គេឱ្យផលបូក $S_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left[k\cos(\frac{k\pi}{n^2})\right]$

ក. បង្ហាញថា $\cos x\geq 1-\frac{x^2}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

44.គេឱ្យស្វ៊ីត (x_n)មួយកំណត់ដោយ ៖

$x_1 = 3$; $x_{n+1} = {x_n}^2 - 3x_n + 4$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $x_n \ge n+2$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។

ខ. តាង $y_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k - 1}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} y_n$ ។

45.គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = e^x.\cos x$

ក. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x) = \sqrt{2}\, e^x \cos(x + \frac{\pi}{4})$

ខ. ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនចូរបង្ហាថាដេរីវេទី n កំនត់ដោយ

$$f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n e^x.\cos(x + \frac{n\pi}{4})$$

46.គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ ៖

$a_0 = 4$, $a_1 = 9$ និង $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 3$ ដែល $n = 0, 1, 2, \ldots$

ចូរស្រាយថា a_n ជាការប្រោកដចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$ ។

47.គណនាផលបូក $S_n = \frac{1^3}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \ldots. + \frac{n^3}{2^n}$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

48.គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(n+1) - 2f(n) = \frac{n.2^{n+1}}{(n+1)!}$

គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ និង $f(o) = 1$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}[\frac{f(n)}{2^n}]$ ។

49.គេឱ្យ $x , y, z>0$ ដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\geq\frac{1}{4}$

50.បង្ហាញថា $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ ជាពហុគុណនៃ 9

ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

51.ចូរបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

52.គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq\frac{25}{2}$

53.ត្រីកោណមួយមានកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅរៀងគ្នា

ដោយ r និង R ។ចូរស្រាយថា $R\geq 2r$ ។

54.គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a , b , c ។

កំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC បើគេដឹងថា ៖

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

55.គេឱ្យ $x_1 , x_2 ,..., x_n$ (ដែល $n\geq 2$)ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+....+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1}\geq 1998$ ។

56.បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ $x\,;\ y\,;z$ ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2+y^2-8z=6$ ទេ ។

57.គេឲ្យស្វីតចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0=1$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt[3]{1+8{u_n}^3}}$

ចំពោះគ្រប់ $n=1\,,\,2\,,....,$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និងរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n}.u_n\right)$ ។

58.គេឱ្យ $a\,,\,b\,,c$ ជាចំនួនវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{1+a^2(b+c)}+\dfrac{1}{1+b^2(c+a)}+\dfrac{1}{1+c^2(a+b)}\le\dfrac{1}{abc}$

59.គេឱ្យ a និង b ជាពីរចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2=4$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{ab}{a+b+2}\le\sqrt{2}-1$

60.នៅក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែល $BC=a\,,AC=b\,,AB=c$

ចូរបង្ហាញថា $\sin\dfrac{A}{2}\le\dfrac{a}{b+c}$ រួចសរសេរទំនាក់ទំនងពីរទៀតដែលស្រដៀងគ្នា ។

61.គេឱ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$\begin{cases}f(1)=-2\\(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2)\end{cases}$$

ក. កំណត់រកអនុគមន៍ $f(x)$

ខ. កំណត់ x ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\sqrt{3}$ ។

62.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់គ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{-1;0\}$ ដោយ ៖

$x(2x+1)f(x)+f(\frac{1}{x})=x+1$ ។

ចូរគណនា $S=f(1)+f(2)+f(3)+....+f(2009)$

63.គេឲ្យ A ជាចំនួនមួយមានលេខប្រាំខ្ទង់ដែលលេខខ្ទង់វារៀបតាមលំដាប់

$x\,;\,x+1\,;\,x+2\,;\,x+1\,;\,x$ ហើយ B ជាចំនួនមួយមានលេខ

ប្រាំមួយខ្ទង់ដែលលេខខ្ទង់វារៀបតាមលំដាប់

$x\,;\,x+1\,;\,x+2\,;\,x+1\,;\,x-1\,;\,x$ ។

ចូរបង្ហាញថាបើ A ជាការេប្រាកដនោះ B ក៏ជាការេប្រាកដដែរ ។

64.គេឲ្យបីចំនួនគត់វិជ្ជមាន a , b , c ដែល $a+b+c=10$ ។

ចូររកតម្លៃធំបំផុតនៃ $P=a\times b\times c$ ។

65.គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ។ ចូរបង្ហាញថាបើ $\tan\frac{A}{3}$, $\tan\frac{B}{3}$, $\tan\frac{C}{3}$

ជាឫសសមីការ $(E):x^3+ax^2+bx+c=0$

នោះគេបាន $\sqrt{3}+a=\sqrt{3}b+c$ ។

66.ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x,y\in\mathbb{R}$ ។

67.គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a,a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx$, $q>0$, $q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖

ចូរគណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$ និង $J=\int_{-3}^{3}\frac{x^2-4|x|+3}{e^x+1}.dx$

68.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq 18$

69.គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $4abc=a+b+c+1$

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\geq 2(ab+bc+ca)$$

70.គណនាផលបូក

$S_n=1.1!+2.2!+3.3!+.....+n.n!$

ដែល $n!=n(n-1)(n-2)....3.2.1$ ។

71.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}$

72.គេពិនិត្យស្ទីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases}u_1=4\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n}\end{cases}$, $n\in\mathbb{N}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

73.គេឲ្យ n ចំនួន $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in (0,1)$ ហើយគេតាង

$t_n = n.\dfrac{a_1.a_2.a_3....a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}$ ។

ចូរស្រាយថា $\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k} t_n\right) \ge (n-1)n$ ។

74.ចូរស្រាយថា $\dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \ge xyz + \dfrac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$

ចំពោះគ្រប់ $x\,;\, y\,;\, z \ge 0$ ។

75.ចូរស្រាយថា $n(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+....+\dfrac{1}{n}) \ge (n+1)(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+....+\dfrac{1}{n+1})$

76.គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d ។

គេតាង $S_n = \dfrac{\cos a_1}{\cos d} + \dfrac{\cos a_2}{\cos^2 d} + \dfrac{\cos a_3}{\cos^3 d} + ... + \dfrac{\cos a_n}{\cos^n d}$ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, ...$

ចូរស្រាយថា $S_n = \dfrac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \dfrac{\sin a_1}{\sin d}$ ។

77.គេឲ្យសមីការ $(E):\ x^2 + 2(2m+3)x + 4m^2 + 8m + 8 = 0$

ក-ចូរកំនត់បណ្តាតម្លៃ $m \in \mathbb{N}$ ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឬស

ជាចំនួនគត់រឺឡាទីប ។

ខ-រកឬសដែលជាចំនួនគត់រឺឡាទីបរបស់សមីការ ។

78.គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំនៃរង្វង់ចារិកក្នុង និង ចារិកក្រៅ

ប្រស់ត្រីកោណកែង ABC មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $R \ge (1+\sqrt{2})\, r$ ។

79.គេឱ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=x+y+z$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x+y}{1+z^2}+\frac{y+z}{1+x^2}+\frac{z+x}{1+y^2}\geq\frac{27}{2xyz}$ ។

80.ចំនួនពិត $a,,b$, c , x , y , z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a\geq b\geq c>0$ និង $x\geq y\geq z>0$

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\geq\frac{3}{4}$$

81.គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$

ក-ចូរស្រាយថាបើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$ នោះគេបាន

$f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ខ-ក្នុងករណីនេះគេសន្មតថា $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$ ។

បើ $b>a$ ចំពោះគ្រប់ $\lambda\in\mathbb{R}$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a(\lambda^2-k)+b(\lambda+k)+c}{b-a}>k$$

ដែល k ជាចំនួនពិតថេរមួយដែលគេឲ្យ ។

គ-អនុវត្តន៍ ចំពោះគ្រប់ត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$

បើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$ នោះបង្ហាញថាគេមាន $\frac{a+b+a}{b-a}>3$ ។

82.គេឱ្យ a,b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}\geq\frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

83.ចូរបង្ហាញថា $\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$

ចំពោះគ្រប់ $0<x\,,\,y\,,\,z<1$ ។

84.គេឱ្យពហុធា $P(x)=2x^4+ax^2+bx+c$

កំណត់ $a\,,b,c$ ជាចំនួនពិតដោយដឹងថា $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-2$ ហើយ $P(x)$ចែកនឹង x^2-1 សល់ x ។

85.ចូរកំនត់គ្រប់គូតំលៃគត់មិនអវិជ្ជមាន $(\,x\,,\,y\,)$ បើគេដឹងថា ៖

$(xy-7)^2=x^2+y^2$ ។

86.គេឲ្យបួនចំនួនវិជ្ជមាន $a\,,\,b\,,\,c\,,\,d$ ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$87.

87.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x})+i.(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x})$

ដែល x ជាចំនួនពិត។

ចូរកំនត់រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិចនេះ ។

88.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+.....+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}}}}$

ចូរកំនត់បណ្តាតម្លៃ $x\in\mathbb{N}$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$មានតម្លៃលេខជាចំនួនគត់ ។

89.ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

90.គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$

91.គេឱ្យ x និង y ជាចំនួនពិត ។

គេដឹងថា x^2+y^2 , x^3+y^3 និង x^4+y^4 ជាចំនួនសនិទាន ។

ចូរស្រាយថា xy និង $x+y$ ជាចំនួនសនិទាន ។

92.ចូរកំនត់ផ្នែកគត់នៃចំនួន $\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+....+\sqrt[3]{24}}}}$

(មាន n ឫសទីបី) ។

93.គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}$

94.គេឲ្យ a , b , c , d ជាបួនចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c+d=1$ ។

បង្ហាញថា $6(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$

95.ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9\\ (\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})=18\end{cases}$$

96.ចូរគណនា $S=\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}$

97.គេមាន $99^2 = 9801$, $999^2 = 998001$, $9999^2 = 99980001$

$99999^2 = 9999800001$ ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅនិងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះផង

98.គេឱ្យត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុង និង មុំផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$c^2 = 4ab\cos A\cos B$ ។

ចូរស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

99.គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតដែល $a, b, c \in (1, +\infty)$

ឬ $a, b, c \in (0, 1)$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b)$$

100.គេឱ្យ $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

101.គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយហើយតាង r និង R
រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹក

ក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \leq \frac{5}{8} + \frac{r}{4R}$$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី២

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី០១

ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យបាន $\lim_{x\to 1}\frac{x^5+ax^3+b}{x^2-1}=4$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b

ដើម្បីឲ្យបាន $\lim_{x\to 1}\frac{x^5+ax^3+b}{x^2-1}=4 \quad (1)$ លុះត្រាតែអង្គទីមួយមានរាងមិន

កំណត់ $\frac{0}{0}$ ពោលគឺគេត្រូវឲ្យ $x=1$ ជាឫសសមីការ $x^5+ax^3+b=0$

គេបាន $1+a+b=0$ ឬ $b=-1-a \ (2)$

យកសមីការ(2) ជំនួសក្នុង(1) គេបាន $\lim_{x\to 1}\frac{x^5+ax^3-1-a}{x^2-1}=4$

សមមូល $\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^5-1\right)+a\left(x^3-1\right)}{x^2-1}=4$

សមមូល $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)+a(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+1)}=4$

សមមូល $\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)+a\left(x^2+x+1\right)}{x+1}=4$

សមមូល $\frac{5+3a}{2}=4$ នាំឲ្យ $a=1$ ជួសក្នុង (2) គេបាន$b=-2$ ។

ដូចនេះ $a=1\,,\,b=-2$ ។

លំហាត់ទី០២

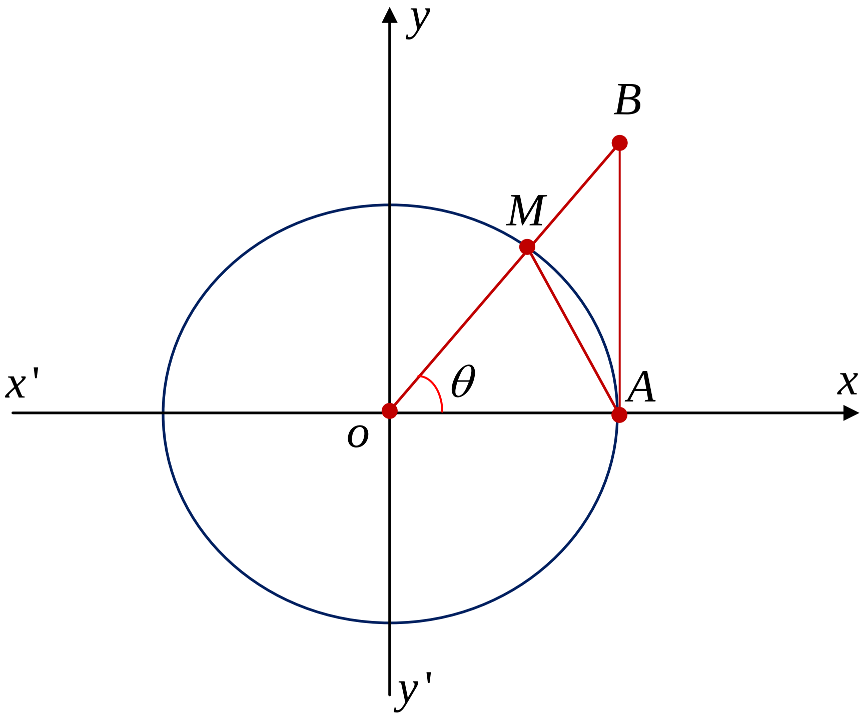
គេឲ្យសមភាព

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{3\pi}{2n+1}+......+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

ចូរបង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+..........+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+..........+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$



យើងមាន ៖

- ផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ OAM គឺ $S_1=\frac{1}{2}.OA.OM.\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$

- ផ្ទៃក្រលាចំរៀកថាស OMA គឺ $S_2 = \frac{1}{2}\theta . OA^2 = \frac{1}{2}\theta$

- ផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ OAB គឺ $S_3 = \frac{1}{2}OA.AB = \frac{1}{2}\tan\theta$

តាមរូបខាងលើចំពោះ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ គេមាន ៖ $S_1 < S_2 < S_3$

គេបាន $\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$

ឬ $\sin\theta < \theta < \tan\theta$

$$\frac{1}{\tan\theta} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cot\theta < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta$$

ដោយជំនួស $\theta = \frac{k\pi}{2n+1}$ គេបាន ៖

$$\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} < 1 + \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right] < \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2}\right] < \sum_{k=1}^{n}\left[1 + \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right] < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right) < n + \sum_{k=1}^{n}\left[\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right]$$

ដោយតាមបំរាប់គេមាន ៖

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\cot^2(\frac{k\pi}{2n+1})\right]$$

$$=\cot^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{3\pi}{2n+1}+......+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$=\frac{n(2n-1)}{3}$$

គេបាន $\frac{n(2n-1)}{3}<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right)<n+\frac{n(2n-1)}{3}=\frac{n(2n+2)}{3}$

ឬ $\frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}<\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right)<\frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}<\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right)<\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6}<\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right)<\frac{\pi^2}{6}$$

នាំឲ្យគេទាញ $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$ ។

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+..........+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$ ។

លំហាត់ទី០៣

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$f(x)+\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4}-x)=\sin x+3\cos x$$

ចូរស្រាយថា $|f(x)|\le\sqrt{2}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|f(x)|\le\sqrt{2}$

គេមាន $f(x)+\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4}-x)=\sin x+3\cos x \quad (1)$

ជំនួស x ដោយ $\frac{\pi}{4}-x$ ក្នុង (1) គេបាន ៖

$$f(\frac{\pi}{4}-x)+\sqrt{2}f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}-x)+3\cos(\frac{\pi}{4}-x)$$

$$f(\frac{\pi}{4}-x)+\sqrt{2}f(x)=\sqrt{2}\sin x+2\sqrt{2}\cos x$$

$$\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4}-x)+2f(x)=2\sin x+4\cos x \quad (2)$$

ដកសមីការ (2) និង (1)អង្គ និងអង្គគេបាន $f(x)=\sin x+\cos x$

ហេតុនេះ $|f(x)|\le\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}=\sqrt{2}$

ដូចនេះ $|f(x)|\le\sqrt{2}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

លំហាត់ទី០៤

គេឱ្យអនុគមន៍ f និង g កំណត់គ្រប់ $x \in IR$ ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$\begin{cases} f(x) + g(\frac{\pi}{2} - x) = 2\sin x \\ 3f(\frac{\pi}{2} - x) - g(x) = 2\cos x \end{cases}$$

ចូររកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$

គេមាន $\begin{cases} f(x) + g(\frac{\pi}{2} - x) = 2\sin x \quad (1) \\ 3f(\frac{\pi}{2} - x) - g(x) = 2\cos x \quad (2) \end{cases}$

ជំនួស x ដោយ $\frac{\pi}{2} - x$ ក្នុង (2) គេបាន ៖

$$3f(x) - g(\frac{\pi}{2} - x) = 2\cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$3f(x) - g(\frac{\pi}{2} - x) = 2\sin x \quad (3)$$

បូកសមីការ $(1) \& (3)$ គេបាន $4f(x) = 4\sin x$

គេទាញ $f(x) = \sin x$ ។

តាម (1) គេទាញបាន $g(\frac{\pi}{2} - x) = 2\sin x - f(x) = \sin x$

ជំនួស x ដោយ $\frac{\pi}{2}-x$ គេបាន $g(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$

ដូចនេះ $f(x)=\sin x$; $g(x)=\cos x$ ។

លំហាត់ទី០៥

ចំពោះ a និង b ជាចំនួនពិត សមីការ

$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ មានឫសយ៉ាងតិច

មួយជាចំនួនពិត។ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ a^2+b^2 ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ a^2+b^2

គេមាន $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះ នឹង $x^2\neq 0$ គេបាន ៖

$$x^2+ax+b+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+a(x+\frac{1}{x})+b=0$$

$$(x+\frac{1}{x})^2+a(x+\frac{1}{x})+b-2=0$$

តាង $z=x+\frac{1}{x}$ សមីការនេះអាចសរសេរ ៖

$z^2+az+b-2=0$ ឬ $az+b=2-z^2$ (1)

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេមាន ៖

$(az+b)^2 \le (a^2+b^2)(z^2+1) \ (2)$

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន ៖

$(a^2+b^2)(z^2+1) \ge (2-z^2)^2$

$$a^2+b^2 \ge \frac{(2-z^2)^2}{z^2+1}$$

$$a^2+b^2 \ge \frac{[3-(1+z^2)]^2}{z^2+1}$$

$$a^2+b^2 \ge z^2-5+\frac{9}{z^2+1}$$

យក $t=z^2$ ដោយ $z=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$

នោះ $|z| \ge \frac{|x^2+1|}{|x|} \ge \frac{|2x|}{|x|}=2$ ហើយ $t=z^2=|z|^2 \ge 4$

គេបាន $a^2+b^2 \ge t-5+\frac{9}{t+1}$

តាងអនុគមន៍ $f(t)=t-5+\frac{9}{t+1}$

គេបាន $f'(t)=1-\frac{9}{(t+1)^2}=\frac{(t+4)(t-2)}{(t+1)^2}>0 \forall t \ge 4$

គេទាញបាន $f(t)$ ជាអនុគមន៍កើនគ្រប់ $t \ge 4$ ។

តាមលក្ខណៈនៃអនុគមន៍កើនគេបាន $f(t) \ge f(4)$

តែ $f(4)=4-5+\frac{9}{4+1}=-1+\frac{9}{5}=\frac{4}{5}$ នោះ $f(t) \ge \frac{4}{5}$

គេទាញបាន $a^2+b^2 \geq f(t) \geq \frac{4}{5}$

ដូចនេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ a^2+b^2 ស្មើនឹង $\frac{4}{5}$ ។

លំហាត់ទី០៦

គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$u_1 = \frac{7}{2}$ និង $u_{n+1} = u_n{}^2 + u_n - \frac{1}{4}$ គ្រប់ $n \geq 1$

បង្ហាញថាគេអាចកំណត់ចំនួនពិត a ដែល $u_{n+1} + a = (u_n + a)^2$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត a

គេមាន $u_{n+1} = u_n{}^2 + u_n - \frac{1}{4}$ (1)

ហើយ $u_{n+1} + a = (u_n + a)^2$ (2)

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$$u_n{}^2 + u_n - \frac{1}{4} + a = (u_n + a)^2$$

$$u_n{}^2 + u_n - \frac{1}{4} + a = u_n{}^2 + 2au_n + a^2$$

$$(1-2a)u_n = a^2 - a + \frac{1}{4}$$

សមីការនេះពិតជានិច្ចចំពោះគ្រប់តម្លៃ n លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{cases} 1-2a=0 \\ a^2-a+\dfrac{1}{4}=0 \end{cases}$$ នាំឱ្យ $a=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $a=\dfrac{1}{2}$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

ចំពោះ $a=\dfrac{1}{2}$ គេបាន $u_{n+1}+\dfrac{1}{2}=(u_n+\dfrac{1}{2})^2$

គេទាញ $\ln(u_{n+1}+\dfrac{1}{2})=2\ln(u_n+\dfrac{1}{2})$ (3)

តាង $v_n=\ln(u_n+\dfrac{1}{2})\Rightarrow v_{n+1}=\ln(u_{n+1}+\dfrac{1}{2})$

តាម (3) គេបាន $v_{n+1}=2v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានផលធៀបរួម $q=2$ និង $v_1=\ln(u_1+\dfrac{1}{2})=\ln 4$

គេបាន $v_n=v_1\times q^{n-1}=2^{n-1}\ln 4=2^n\ln 2=\ln 2^{2^n}$

ដោយ $v_n=\ln(u_n+\dfrac{1}{2})$ គេទាញ $u_n+\dfrac{1}{2}=2^{2^n}$

ដូចនេះ $v_n=2^{2^n}-\dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី០៧

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$2f(\frac{\pi}{2}-x)+f(\frac{\pi}{2}+x)=\sin x+3\sqrt{3}\cos x$$

កំណត់ចំនួនពិត r និង ϕ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ អាចសរសេរ ៖

$f(x)=r\sin(x+\phi)$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត r និង ϕ

គេមាន $2f(\frac{\pi}{2}-x)+f(\frac{\pi}{2}+x)=\sin x+3\sqrt{3}\cos x$ (1)

ជំនួស x ដោយ $-x$ គេបាន ៖

$$2f(\frac{\pi}{2}+x)+f(\frac{\pi}{2}-x)=-\sin x+3\sqrt{3}\cos x$$

$$4f(\frac{\pi}{2}+x)+2f(\frac{\pi}{2}-x)=-2\sin x+6\sqrt{3}\cos x \quad (2)$$

ដកសមីការ (2) និង (1) អង្គ និងអង្គគេបាន

$$3f(\frac{\pi}{2}+x)=-3\sin x+3\sqrt{3}\cos x$$

ឬ $f(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ (3)

ជំនួស x ដោយ $-\frac{\pi}{2}+x$ គេបាន ៖

$$f(x) = -\sin(-\frac{\pi}{2} + x) + \sqrt{3}\cos(-\frac{\pi}{2} + x)$$

$$f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$$

$$f(x) = 2(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)$$

$$f(x) = 2(\sin x \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos x)$$

$$f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$$

ដោយប្រៀបធៀបជាមួយនឹង $f(x) = r\sin(x + \phi)$

ដូចនេះ $r = 2$; $\phi = \dfrac{\pi}{6}$ ។

លំហាត់ទី០៨

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$5f(x) - 3\sin x\, f(\pi - x) = 4\cos x$$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $f(x)$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $f(x)$

$$5f(x) - 3\sin x\, f(\pi - x) = 4\cos x \quad (1)$$

ជំនួស x ដោយ $\pi - x$ ក្នុង (1) គេបាន ៖

$5f(\pi - x) - 3\sin(\pi - x).f(x) = 4\cos(\pi - x)$

$5f(\pi - x) - 3\sin x.f(x) = -4\cos x$

$f(\pi - x) - \dfrac{3\sin x}{5}.f(x) = -\dfrac{4\cos x}{5}$

$3\sin x.f(\pi - x) - \dfrac{9\sin^2 x}{5}f(x) = -\dfrac{12\sin x\cos x}{5}$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$(5 - \dfrac{9\sin^2 x}{5})f(x) = \dfrac{4\cos x(5 - 3\sin x)}{5}$

$$f(x) = \frac{4\cos x(5 - 3\sin x)}{(25 - 9\sin^2 x)}$$

$f(x) = \dfrac{4\cos x(5 - 3\sin x)}{(5 + 3\sin x)(5 - 3\sin x)}$

$f(x) = \dfrac{4\cos x}{5 + 3\sin x}$

$(5 + 3\sin x)f(x) = 4\cos x$

$5f(x) + 3f(x)\sin x = 4\cos x$

$4\cos x - 3f(x)\sin x = 5f(x)$ (1)

តាមវិសមភាព $Cauchy - Schwarz$ គេបាន ៖

$|4\cos x - 3f(x)\sin x| \le \sqrt{16 + 9f^2(x)}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន ៖

$|5f(x)| \le \sqrt{16 + 9f^2(x)}$

$25f^2(x) \le 16 + 9f^2(x)$

$f^2(x) \le 1$

$|f(x)| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le f(x) \le 1$

ដូចនេះ $f_{\min}(x) = -1$ និង $f_{\max}(x) = 1$ ។

លំហាត់ទី០៩

គេឲ្យ $x\,,\,y\,,\,z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ហើយ $a>0$ និងខុសពី ១ ។

ចូរស្រាយថា៖

$$\left(\log_a\frac{x}{y}\right)^3+\left(\log_a\frac{y}{z}\right)^3+\left(\log_a\frac{z}{x}\right)^3=3\log_a\frac{x}{y}\log_a\frac{y}{z}\log_a\frac{z}{x}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា៖

$$\left(\log_a\frac{x}{y}\right)^3+\left(\log_a\frac{y}{z}\right)^3+\left(\log_a\frac{z}{x}\right)^3=3\log_a\frac{x}{y}\log_a\frac{y}{z}\log_a\frac{z}{x}$$

តាង $p=\log_a\frac{x}{y}\ ,\ q=\log_a\frac{y}{z}\ ,\ r=\log_a\frac{z}{x}$

គេមាន $p+q+r=\log_a\frac{x}{y}+\log_a\frac{y}{z}+\log_a\frac{z}{x}$

$$p+q+r=\log_a\left(\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}\right)=\log_a 1=0$$

$$p+q=-r$$

លើកអង្គទាំងពីរជាគូប $(p+q)^3=-r^3$

ឬ $p^3+3pq(p+q)+q^3=-r^3$ ដោយ $p+q=-r$

គេទាញ $p^3+q^3+r^3=3pqr$

ដូចនេះ $\left(\log_a\frac{x}{y}\right)^3+\left(\log_a\frac{y}{z}\right)^3+\left(\log_a\frac{z}{x}\right)^3=3\log_a\frac{x}{y}\log_a\frac{y}{z}\log_a\frac{z}{x}$

លំហាត់ទី១០

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់ 1 ។ ចំនួន nនោះចែកនឹង 5 ឱ្យសំណល់ 2 ។

ក-បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ-រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3940 < n < 4000$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ឧបមាថា n ចែកនឹង 8 ឱ្យផលចែក $q_1 \in IN$ និងសំណល់ 1

និង ចំនួន nនោះចែកនឹង 5 ឱ្យផលចែក $q_2 \in IN$ និងសំណល់ 2 ។

តាមអឺគ្លីត យើងបាន $\begin{cases} n = 8q_1 + 1 \\ n = 5q_2 + 2 \end{cases} \left| \begin{matrix} (-15) \\ (16) \end{matrix} \right.$

ឬ $\begin{cases} -15n = -120q_1 - 15 & (1) \\ 16n = 80q_2 + 32 & (2) \end{cases}$

បូកសមីការ (1) និង (2)

យើងបាន $n = 80q_2 - 120q_1 + 17 = 40\,q + 17$

ដែល $q = 2q_2 - 3q_1$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $n = 40q + 17$ បញ្ជាក់ថាបើចំនួន nនោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ $r = 17$

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3940 < n < 4000$

យើងមាន $n = 40q + 17$ ដោយ $3940 < n < 4000$

គេទាញ $3940 < 40q + 17 < 4000$

ឬ $98 + \dfrac{3}{40} < n < 100 + \dfrac{17}{40}$

ដោយ $q \in IN$ នាំឱ្យគេទាញបាន $q = \{ 99 , 100\}$

ហើយ $n = \{ 3977 , 4017 \}$ ។

<u>លំហាត់ទី១១</u>

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ

$$\begin{cases} 5 (\log_y x + \log_x y) = 26 \\ x y = 64 \end{cases}$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ

$$\begin{cases} 5 (\log_y x + \log_x y) = 26 & (1) \\ x y = 64 & (2) \end{cases}$$

លក្ខខ័ណ្ឌ $\begin{cases} x > 0 , y > 0 \\ x \neq 1, y \neq 1 \end{cases}$

សមីការ (1)អាចសរសេរ $\log_y x + \dfrac{1}{\log_y x} = \dfrac{26}{5}$

ឬ $(\log_y x)^2 - \dfrac{26}{5} .\log_y x + 1 = 0$ តាង $t = \log_y x$

គេបាន $t^2-\frac{26}{5}t+1=0$, $\Delta'=\frac{169}{25}-1=\frac{144}{25}$

នាំឱ្យ $t_1=\frac{13}{5}-\frac{12}{5}=\frac{1}{5}$, $t_2=\frac{13}{5}+\frac{12}{5}=5$

- ចំពោះ $t=\frac{1}{5}$ គេបាន $\log_y x=\frac{1}{5}$ នាំឱ្យ $x=y^{\frac{1}{5}}$ (3)

យក (3) ជួសក្នុង (2) គេបាន $y.y^{\frac{1}{5}}=64$ នាំឱ្យ $y=32$

ហើយតាម (3) គេបាន $x=(32)^{\frac{1}{5}}=2$ ។

- ចំពោះ $t=5$ គេបាន $\log_y x=5$ នាំឱ្យ $x=y^5$ (4)

យក (4) ជួសក្នុង (2) គេបាន $y.y^5=64$ នាំឱ្យ $y=2$

ហើយតាម (4) គេបាន $x=2^5=32$ ។

ដូចនេះប្រព័ន្ធមានគូចម្លើយ $(x=2\ ,\ y=32\ )$ ឬ $(x=32\ ,\ y=2)$

លំហាត់ទី១២

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} 4^x.5^y=\frac{1}{400} \\ 5^x.6^y=\frac{1}{900} \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} 4^x.5^y=\frac{1}{400} \\ 5^x.6^y=\frac{1}{900} \end{cases}$

យើងមាន $\ln(4^x.5^y) = \ln(\frac{1}{400})$

ឬ $x\ln 4 + y\ln 5 = -2\ln 4 - 2\ln 5 \quad (1)$

ហើយ $\ln(5^x.6^y) = \ln(\frac{1}{900})$

ឬ $x\ln 5 + y\ln 6 = -2\ln 6 - 2\ln 5 \quad (2)$

តាម $(1)\&(2)$ គេបានប្រព័ន្ធ ខាងក្រោម

$$\begin{cases} x\ln 4 + y\ln 5 = -2\ln 4 - 2\ln 5 \\ x\ln 5 + y\ln 6 = -2\ln 6 - 2\ln 5 \end{cases} \left| \begin{array}{l} (-\ln 6) \\ (\ln 5) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} -x\ln 4.\ln 6 - y\ln 5.\ln 6 = 2\ln 4.\ln 6 + 2\ln 5.\ln 6 & (3) \\ x\ln^2 5 + y\ln 5.\ln 6 = -2\ln 6.\ln 5 - 2\ln^2 5 & (4) \end{cases}$$

បូកសមីការ $(3)\&(4)$ គេបាន

$(\ln^2 5 - \ln 4.\ln 6)x = 2(\ln 4.\ln 6 -.\ln^2 5)$ នាំឱ្យ $x = -2$

តាមសមីការ $4^x.5^y = \frac{1}{400}$ គេទាញ $4^{-2}.5^y = \frac{1}{400}$

នាំឱ្យគេទាញ $y = -2$ ។

ដូចនេះប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ $x = -2$, $y = -2$ ។

លំហាត់ទី១៣

ដោះស្រាយសមីការ $9^{x^2-x}+3^{1-x^2}=3^{(x-1)^2}+1$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$9^{x^2-x}+3^{1-x^2}=3^{(x-1)^2}+1$ មានន័យគ្រប់ $x\in IR$

សមីការអាចសរសេរ $3^{2(x^2-x)}+3^{1-x^2}=3^{(x-1)^2}+1$

តាង $3^{2(x^2-x)}=X$ និង $3^{1-x^2}=Y$ ដែល $X>0\ ,Y>0$

គេបាន $X.Y=3^{2(x^2-x)+1-x^2}=3^{(x-1)^2}$

សមីការក្លាយជា $X+Y=X.Y+1$

$$(X-XY)-(1-Y)=0$$
$$X(1-Y)-(1-Y)=0$$
$$(X-1)(1-Y)=0$$

គេទាញ $\left[\begin{array}{l} X=1 \\ Y=1 \end{array}\right.$ សមមូល $\left[\begin{array}{l} 3^{2(x^2-x)}=1 \\ 3^{1-x^2}=1 \end{array}\right.$

សមមូល $\left[\begin{array}{l} 2(x^2-x)=0 \\ 1-x^2=0 \end{array}\right.$

គេទាញឫស $x\in\{\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ \}$ ។

លំហាត់ទី១៤

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a , b , c ដើម្បីឱ្យបណ្តាសមីការខាងក្រោម

$$\begin{cases} x^2-2ax+b=0 \\ x^2-2bx+c=0 \\ x^2-2cx+a=0 \end{cases}$$ មានឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a , b , c

ដើម្បីឱ្យសមីការទាំងអស់មានឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមានលុះត្រាតែ

ឌីសគ្រីមីណង់ទាំងអស់ a^2-b , b^2-c , c^2-a សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ។

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c គេមាន $a^2-b\geq(a-1)^2$

គេទាញ $b\geq 2a-1$ ។ ដូចគ្នាដែរគេទាញ $c\geq 2b-1$ និង $a\geq 2c-1$

គេបាន $\begin{cases} b\geq 2a-1 \\ c\geq 2b-1 \\ a\geq 2c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b\geq 8a-4 & (1) \\ 2c\geq 4b-2 & (2) \\ a\geq 2c-1 & (3) \end{cases}$

បូកវិសមភាព $(1),(2),(3)$ គេបាន $a\geq 8a-7$ នាំឱ្យ $a\leq 1$

ដោយ a ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះ $a=1$ ហើយដូចគ្នាដែរ $b=1$, $c=1$ ។

ដូចនេះ $(a,b,c)=(1,1,1)$ ជាចម្លើយតែមួយគត់ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a , b , c និងមានមុំក្នុង α , β , γ ។

បើ $\alpha = 3\beta$ ចូរបង្ហាញថា $(a-b)(a^2-b^2) = bc^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(a-b)(a^2-b^2) = bc^2$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$

គេបាន $(a-b)(a^2-b^2) = (a-b)^2(a+b)$

ដោយ $a-b = 2R(\sin\alpha - \sin\beta)$

$$= 2R(\sin 3\beta - \sin\beta)$$

$$= 4R\sin\beta\cos 2\beta$$

ហើយ $a+b = 2R(\sin\alpha + \sin\beta)$

$$= 2R(\sin 3\beta + \sin\beta)$$

$$= 4R\sin 2\beta\cos\beta$$

$$= 8R\sin\beta\cos^2\beta$$

គេបាន $(a-b)(a^2-b^2) = 16R^2\sin^2\beta\cos^2 2\beta . 8R\sin\beta\cos^2\beta$

$$= 8R^3\sin^2 4\beta\sin\beta$$

$$= 8R^3\sin^2(\pi - 4\beta)\sin\beta$$

$$= 8R^3\sin^2\gamma\sin\beta$$

ដូចនេះ $(a-b)(a^2-b^2) = bc^2$ ។

លំហាត់ទី១៦

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន ៖

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq a+b+c+3$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq a+b+c+3$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន

$$ca+c+a\geq 3\sqrt[3]{c^2a^2}\Rightarrow ca+c+a+1\geq 1+3\sqrt[3]{c^2a^2}$$

$$\Rightarrow (a+1)(c+1)\geq 1+3\sqrt[3]{c^2a^2}$$

គេទាញបាន $\dfrac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}\geq\dfrac{(b+1)^2}{c+1}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន

$$\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}\geq\frac{(c+1)^2}{a+1}\ (2)\quad ,\quad \frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq\frac{(a+1)^2}{b+1}\ (3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) គេបាន ៖

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq a+b+c+3$$

ព្រោះ $\dfrac{(b+1)^2}{c+1}+\dfrac{(c+1)^2}{a+1}+\dfrac{(a+1)^2}{b+1}\geq\dfrac{(a+b+c+3)^2}{a+b+c+3}=a+b+c+3$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$

តាង $u_n=\dfrac{f(1)f(3)f(5)....f(2n-1)}{f(2)f(4)f(6)....f(2n)}$; $n\in\mathbb{N}$

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sqrt{u_n})$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sqrt{u_n})$

គេមាន $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$

$$=[(n^2+1)+n]^2+1$$

$$=(n^2+1)^2+2n(n^2+1)+n^2+1$$

$$=(n^2+1)(n^2+1+2n+1)$$

$$=(n^2+1)[(n+1)^2+1]$$

គេមាន $u_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{f(2k-1)}{f(2k)}\right]=\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{[(2k-1)^2+1]\left(4k^2+1\right)}{(4k^2+1)[(2k+1)^2+1]}\right]$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{(2k-1)^2+1}{(2k+1)^2+1}\right]=\frac{2}{(2n+1)^2+1}$$

$$=\frac{2}{2(2n^2+2n+1)}=\frac{1}{2n^2+2n+1}$$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sqrt{u_n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{2n^2+2n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sqrt{u_n})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យស្វ៊ីត (x_n)មួយកំណត់ដោយ ៖

$x_1 = a$; $x_{n+1} = \dfrac{x_n^{\ 2}}{b} + x_n$, $a > 0$, $b > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{x_k}{x_{k+1}} \right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{x_k}{x_{k+1}} \right)$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$, $b > 0$គេមាន $x_{n+1} = \dfrac{x_n^{\ 2}}{b} + x_n > x_n$ (1)

ឧបមាថាស្វ៊ីត (x_n)មានលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n) = L > a$

គេបាន $L = \dfrac{L^2}{b} + L \Rightarrow L = 0$ (មិនអាច)

នាំឱ្យ (x_n) ជាស្វ៊ីតរីក (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ។

តាមសមីការ $x_{n+1} = \dfrac{x_n^{\ 2}}{b} + x_n \Rightarrow x_n^{\ 2} = b(x_{n+1} - x_n)$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $x_n x_{n+1}$ គេបាន $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} = b\left(\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_{n+1}} \right)$

គេបាន

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{x_{k+1}} \right) = b \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right) = b \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = \frac{b}{a}$$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេមាន $y=a^{\frac{1}{1-\log_a x}}$ និង $z=a^{\frac{1}{1-\log_a y}}$

ចូរស្រាយថា $x=a^{\frac{1}{1-\log_a z}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x=a^{\frac{1}{1-\log_a z}}$

គេមាន $y=a^{\frac{1}{1-\log_a x}}$ នាំឲ្យ $\log_a y=\dfrac{1}{1-\log_a x}$

គេទាញ $\log_a x=1-\dfrac{1}{\log_a y}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $z=a^{\frac{1}{1-\log_a y}}$ នាំឲ្យ $\log_a z=\dfrac{1}{1-\log_a y}$

គេទាញ $\log_a y=1-\dfrac{1}{\log_a z}$ (2)

យកទំនាក់ទំនង (2) ទៅជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\log_a x=1-\frac{1}{1-\dfrac{1}{\log_a z}}$$

$$\log_a x=1-\frac{\log_a z}{(\log_a z)-1}$$

$$\log_a x = \frac{\log_a z - 1 - \log_a z}{(\log_a z) - 1}$$

$$\log_a x = \frac{1}{1 - \log_a z}$$

គេទាញបាន $x = a^{\frac{1}{1-\log_a z}}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$\sin^2 B + \sin^2 C = 1 + \sin B \sin C \cos A$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសគេមាន $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

គេទាញ $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$

ដោយ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស)

គេទាញបាន ៖

$$4R^2 \sin^2 A = 4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A)$$

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A \quad (1)$$

តែ $\sin^2 B + \sin^2 C = 1 + \sin B \sin C \cos A$ (2)

យកសមីការ (2) ជួសនៅក្នុង (1) គេទាញ $\sin^2 A = 1$

នាំឲ្យ $A = 90^0$ ។ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែង ។

លំហាត់ទី២១

គេឲ្យអនុគមន៍ $y=\dfrac{x^2+2mx+3m-8}{2\,(x^2+1)}$

ដែល $x\in\mathbb{R}$ និង mជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

តើគេអាចកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍នេះអាចតាងឲ្យតម្លៃ

កូស៊ីនូសនៃមុំមួយបានឬទេ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃរបស់ m

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍នេះតាងឲ្យតម្លៃកូស៊ីនូសនៃមុំមួយលុះត្រាតែចំពោះ

គ្រប់ $x\in IR$ គេបាន $-1\ \le\ \dfrac{x^2+2mx+3m-8}{2(x^2+1)}\le 1$

ដោយគេមាន $2(x^2+1)>0\ ,\ \forall x\in IR$

គេទាញ $-2x^2-2\le x^2+2mx+3m-8\ \le 2x^2+2$

ឬ $\begin{cases} 3x^2+2mx+3m-6\ge 0 & (1) \\ x^2-2mx-3m+10\ge 0 & (2) \end{cases}$

ចំពោះ $(1):\ 3x^2+2mx+3m-6\ge 0$

សមមូល $\begin{cases} a=3>0 \\ \Delta'=m^2-9m+18\le 0 \end{cases}$

ដោយ $m^2-9m+18=(m-3)(m-6)$

គេបាន $\Delta' = (m-3)(m-6) \le 0$

នាំឲ្យ $3 \le m \le 6$ ឬ $m \in [3,6]$

ចំពោះ $(2)\ :\ x^2 - 2mx - 3m + 10 \ge 0$

សមមូល $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m - 10 \le 0 \end{cases}$

ដោយ $m^2 + 3m - 10 = (m-2)(m+5)$

គេបាន $\Delta' = (m-2)(m+5) \le 0$

នាំឲ្យ $-5 \le m \le 2$ ឬ $m \in [-5\ ,\ 2\ ]$

ដោយយកចម្លើយ $m \in [3,6]$ ប្រសព្វនឹង $m \in [-5\ ,\ 2\ ]$

នោះគេបាន $m \in \varphi$ ។

ដូចនេះគេមិនអាចកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍នេះអាចតាងឲ្យតម្លៃ

កូស៊ីនូសនៃមុំមួយបានទេ ។

<u>លំហាត់ទី២២</u>

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})\ ,\ x \in \mathbb{R}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\dfrac{a+b}{1+a+b}) < f(\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a > 0, b > 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})< f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

យើងមាន $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ ,\ x\in IR$

យើងបាន $f'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0\ ,\ \forall x\in IR$

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR។

ម្យ៉ាងទៀតចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ គេមាន ៖

$\frac{a}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}$ និង $\frac{b}{1+a+b}<\frac{b}{1+b}$

គេទាញ $\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ឬ $\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ដោយសារតែអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR

ហេតុនេះតាមលក្ខណះអនុគមន៍កើនគេបាន៖

$$\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$$

នាំឲ្យ $f(\dfrac{a+b}{1+a+b}) < f(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b})$

ដូចនេះ $f(\dfrac{a+b}{1+a+b}) < f(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0, b>0$ ។

លំហាត់ទី២៣

ក.គណនា $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+....+\dfrac{1}{(n-1)n}$ ដែល $n>2$

ខ.ដោយប្រើវិសមភាព $AM-GM$ នៃ $(n-1)$ ចំនួនខាងក្រោម ៖

$\dfrac{1}{1.2}$; $\dfrac{1}{2.3}$; $\dfrac{1}{3.4}$; $\dfrac{1}{(n-1)n}$ ចូរបង្ហាញថា $n^n < (n!)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+....+\dfrac{1}{(n-1)n}=\sum_{k=2}^{n}\left[\dfrac{1}{(k-1)k}\right]$

គេមាន $\dfrac{1}{(k-1)\,k}=\dfrac{k-(k-1)}{(k-1)k}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$

គេបាន $\sum_{k=2}^{n}\left[\dfrac{1}{(k-1)k}\right]=\sum_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}\right)=1-\dfrac{1}{n}$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+....+\dfrac{1}{(n-1)n}=1-\dfrac{1}{n}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $n^n < (n!)^2$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ ៖

$$a_1+a_2+a_3+.....+a_n \ge n\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3......a_n} \quad ;\forall a_k \ge 0$$

គេបាន ៖

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{(n-1)n} > (n-1)\sqrt[(n-1)]{\frac{1}{1.2}.\frac{1}{2.3}......\frac{1}{(n-1)n}}$$

$$1-\frac{1}{n} > (n-1)\sqrt[(n-1)]{\frac{1}{n!(n-1)!}}$$

$$\frac{n-1}{n} > (n-1)\sqrt[(n-1)]{\frac{1}{n!\,(n-1)!}}$$

$$\frac{1}{n} > \sqrt[(n-1)]{\frac{n}{(n!)^2}}$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} > \frac{n}{(n!)^2} \Rightarrow n^n < (n!)^2$$

ដូចនេះ $n^n < (n!)^2$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b និង c ។

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab \quad (1)$

$\dfrac{b^2+c^2}{2} \geq bc \quad (2)$

$\dfrac{c^2+a^2}{2} \geq ca \quad (3)$

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2}{2} \geq ab+bc+ca$$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b និង c ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (1)$

$b+c \geq 2\sqrt{bc} \quad (2)$

$c+a \geq 2\sqrt{ca} \quad (3)$

ធ្វើវិធីគុណ(1) , (2) និង (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca}$

ដូចនេះ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឱ្យសមីការ $x^2 - x - 3 = 0$ មានឫសតាងដោយ x_1 និង x_2 ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A = 7x_1^5 + 19x_2^4$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $A = 7x_1^5 + 19x_2^4$

ដោយ x_1 និង x_2 ជាឫសរបស់សមីការនោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1 - 3 = 0 \\ x_2^2 - x_2 - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases} x_1^2 = x_1 + 3 \\ x_2^2 = x_2 + 3 \end{cases}$$

$$A = 7x_1^5 + 19x_2^4 = 7x_1\left(x_1^2\right)^2 + 19\left(x_2^2\right)^2$$

$$= 7x_1(x_1+3)^2 + 19(x_2+3)^2$$

$$= 7x_1^3 + 42x_1^2 + 63x_1 + 19x_2^2 + 114x_2 + 171$$

$$= 7x_1(x_1+3) + 42(x_1+3) + 63x_1 + 19(x_2+3) + 114x_2 + 171$$

$$= 7x_1^2 + 21x_1 + 42x_1 + 126 + 63x_1 + 19x_2 + 57 + 114x_2 + 171$$

$$= 7(x_1+3) + 126x_1 + 133x_2 + 354$$

$$= 133(x_1+x_2) + 375$$

ដោយ $x_1 + x_2 = 1$ (តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត)

គេបាន $A = 133 + 375 = 508$

ដូចនេះ $A = 7x_1^5 + 19x_2^4 = 508$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ។

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ

ហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC ។

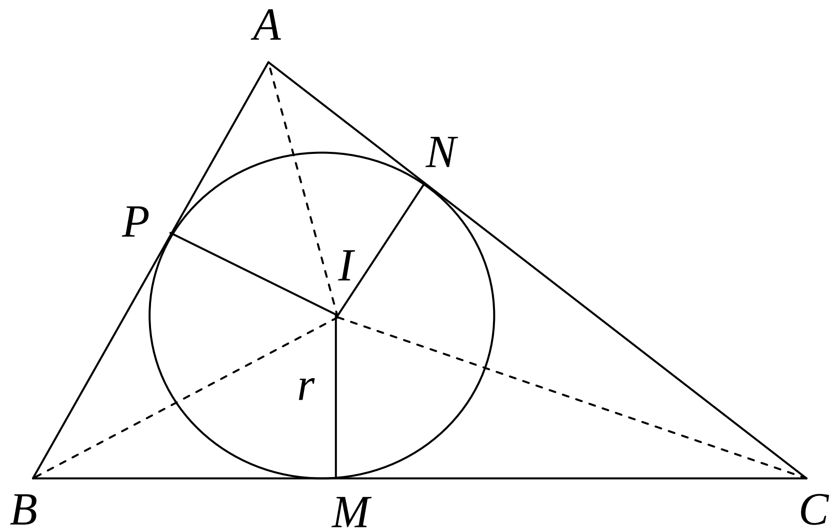
ក. ស្រាយថា $IA.IB.IC=4Rr^2$

ខ. ស្រាយថា $IA^2+IB^2+IC^2=r^2+p^2-8Rr$

គ. ស្រាយថា $\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $IA.IB.IC=4Rr^2$



យើងមាន $2p=AB+BC+CA$ (បរិមាត្រត្រីកោណ ABC)

ដោយ $AB=AP+PB=AP+BM$ ព្រោះ $PB=BM$

ហើយ $AC = AN + NC = AP + MC$ ព្រោះ $AN = NP, NC = MC$

គេបាន $AB + AC = 2AP + BM + MC = 2AP + BC$

គេទាញ $2p = 2AP + 2BC = 2AP + 2a$ នាំឱ្យ $AP = AN = p - a$

ដូចគ្នាដែរ $BM = BP = p - b$ និង $CM = CN = p - c$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង PAI គេមាន $\tan\frac{A}{2} = \frac{IP}{AP} = \frac{r}{p-a}$

គេទាញ $r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$ (i)

តាមរូបមន្តហេរុង $S = pr = \frac{1}{2}bc\sin A$ (ii)

តាម (i) និង (ii) គេបាន $p(p-a)\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}bc\sin A$

ឬ $p(p-a)\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{1}{2}bc(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2})$

គេទាញ $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$ នាំឱ្យ $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

ដោយ $\cos\frac{A}{2} = \frac{AP}{IA}$ (ក្នុងត្រីកោណកែង PAI)

គេទាញ $IA = \frac{AP}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{(p-a)\sqrt{bc}}{\sqrt{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{p-a}{p}.bc}$

ដូចគ្នាដែរ $IB = \sqrt{\frac{p-b}{p}.ca}$ និង $IC = \sqrt{\frac{p-c}{p}.ab}$

គេបាន $IA.IB.IC = abc\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}$

$$IA.IB.IC = \frac{abc}{p^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រលា $S = pr = \dfrac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

ដូចនេះ $IA.IB.IC = 4Rr^2$ ។

ខ. ស្រាយថា $IA^2 + IB^2 + IC^2 = r^2 + p^2 - 8Rr$

គេបាន $IA^2 + IB^2 + IC^2 = \dfrac{p-a}{p}bc + \dfrac{p-b}{p}ca + \dfrac{p-c}{p}ab$

$$= \frac{p(bc+ca+ab) - 3abc}{p}$$

$$= bc + ca + ab - 3\frac{abc}{p} \quad (*)$$

តាមរូបមន្ត ៖

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$$

គេទាញ $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

$$r^2 = \frac{p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p - abc}{p}$$

$$r^2 = \frac{p^3 - 2p^3 + (ab+bc+ca)p - abc}{p}$$

$$r^2 = \frac{-p^3 + (ab+bc+ca)p - abc}{p}$$

$$ab+bc+ca = r^2 + p^2 + \frac{abc}{p}$$

ដោយ $S = pr = \frac{abc}{4R}$ គេទាញ $\frac{abc}{p} = 4rR$

គេបាន $ab+bc+ca = r^2 + p^2 + 4r\,R \quad (**)$

តាម (*) និង (**) គេបាន ៖

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 = r^2 + p^2 + 4Rr - 3(4Rr)$$

ដូចនេះ $IA^2 + IB^2 + IC^2 = r^2 + p^2 - 8Rr$

គ. ស្រាយថា $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$

គេមាន $IA = \sqrt{\frac{p-a}{p}.bc}$, $IB = \sqrt{\frac{p-b}{p}.ca}$

និង $IC = \sqrt{\frac{p-c}{p}.ab}$

គេបាន $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = \frac{p-a+p-b+p-c}{p}$

$$\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = \frac{3p-(a+b+c)}{p} = 1$$

ដូចនេះ $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យ $a\ ,b\in\left[\,0,1\,\right]$ ។

ចូរស្រាយវិសមភាព $1-\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{ab}{3}\geq\dfrac{1}{1+a+b}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយវិសមភាព $1-\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{ab}{3}\geq\dfrac{1}{1+a+b}$

ដោយ $a\ ,b\in\left[\,0,1\,\right]$ នោះយើងតាង $a=\cos x\ ;\ b=\sin x$

ដែល $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ ។

យក $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$ ដែល $1\leq t\leq\sqrt{2}$

គេមាន $t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

វិសមភាពដែលត្រូវបង្ហាញសមមូលនឹង $1-\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2-1}{6}\geq\dfrac{1}{1+t}$

$$\Leftrightarrow\frac{3(2-t)(1+t)+(t^2-1)(1+t)-6}{6(t+1)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(t-1)(t^2-t+1)}{6(t+1)}\geq 0$$

ដោយ $t-1\geq 0$ និង $t^2-t+1=(t-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$

នោះ $\dfrac{(t-1)(t^2-t+1)}{6(t+1)}\geq 0$

ដូចនេះ $1-\frac{a+b}{2}+\frac{ab}{3}\geq\frac{1}{1+a+b}$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបី ។

គេដឹងថា $P(x)+2$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^2$

ហើយ $P(x)-2$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^2$ ។

ចូរកំនត់រកពហុធា $P(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកពហុធា $P(x)$ ៖

តាមបំរាប់គេអាចសរសេរ $\begin{cases} P(x)+2=(x+1)^2(ax+b) & (1) \\ P(x)-2=(x-1)^2(cx+d) & (2) \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} P(-1)+2=0 \\ P(1)-2=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} P(-1)=-2 \\ P(1)=2 \end{cases}$

ដោយធ្វើដេរីវេលើ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\begin{cases} P'(x)=2(x+1)(ax+b)+a(x+1)^2 \\ P'(x)=2(x-1)(cx+d)+c(x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'(x)=(x+1)[2(ax+b)+a(x+1)] & (3) \\ P'(x)=(x-1)[2(cx+d)+c(x-1) & (4) \end{cases}$$

តាម (3) នឹង (4) បញ្ជាក់ថា $P'(x)$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)(x-1)$

គេទាញ $P'(x)=k(x+1)(x-1)$

(ព្រោះ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី៣)

គេបាន $P(x)=k\int(x^2-1).dx=k(\frac{x^3}{3}-x)+r$

ចំពោះ $x=\pm1$ គេបាន $\begin{cases} P(-1)=\frac{2}{3}k+r=-2 \\ P(1)=-\frac{2}{3}k+r=2 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $k=3$, $r=0$

ដូចនេះ $P(x)=3\,(\frac{x^3}{3}-x)=x^3-3x$ ។

<u>លំហាត់ទី៣០</u>

គេឲ្យ a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព ៖

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$

តាង $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ ដែល $x,y,z>0$

វិសមភាព $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$

សមមូលទៅនឹងវិសមភាពខាងក្រោម ៖

$$(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z)\geq 0$$
$$x^3z+y^3x+z^3y-x^2yz-y^2zx-z^2xy\geq 0$$
$$x^3z+y^3x+z^3y\geq x^2yz+y^2zx+z^2xy$$
$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{z}\geq x+y+z$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz គេមាន ៖

$$(x+y+z)^2\leq (x+y+z)(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{z})$$

គេទាញ $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z$ ពិត ។

ដូចនេះ $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $E=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម E

គេមាន $\frac{a^2}{a+b}=\frac{a^2+ab-ab}{a+b}=a-\frac{ab}{a+b}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

គេបាន $\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{2\sqrt{ab}}$ ឬ $-\frac{ab}{a+b}\geq -\frac{\sqrt{ab}}{2}$

គេទាញ $\frac{a^2}{a+b}=a-\frac{ab}{a+b}\geq a-\frac{\sqrt{ab}}{2}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b^2}{b+c}\geq b-\frac{\sqrt{bc}}{2}$ (2) ; $\frac{c^2}{c+a}\geq c-\frac{\sqrt{ca}}{2}$ (3)

បូកវិសមភាព (1); (2) & (3) គេទទួលបាន ៖

$$E\geq a+b+c-\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2}=a+b+c-\frac{1}{2}$$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេមាន ៖

$$a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$$

គេទាញ $E\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ។ ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ E គឺ $E_{\min}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$$

គេមាន

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}=\frac{a^2b^2-a^2bc}{a+b}=\frac{(a^2b^2+ab^2c)-(a^2bc+ab^2c)}{a+b}$$

$$=\frac{ab^2(a+c)-abc(a+b)}{a+b}=ab^2.\frac{a+c}{a+b}-abc$$

គេបាន $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}=ab^2.\frac{a+c}{a+b}-abc$ (1)

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{b^2c(c-a)}{b+c}=bc^2\frac{b+a}{b+c}-abc$ (2)

និង $\frac{c^2a(a-b)}{c+a}=ca^2\frac{c+b}{c+a}$ (3)

បូកសមភាព (1),(2) និង (3) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$T=ab^2\frac{c+b}{a+b}+bc^2\frac{b+a}{b+c}+ca^2\frac{c+b}{c+a}-3abc$$

ដែល $T=\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$$ab^2\frac{c+b}{a+b}+bc^2\frac{b+a}{b+c}+ca^2\frac{c+b}{c+a}\geq 3abc$$

ឬ $ab^2\frac{c+b}{a+b}+bc^2\frac{b+a}{b+c}+ca^2\frac{c+b}{c+a}-3abc\geq 0$

ដូចនេះ $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យ $x\,;\,y\,;\,z$ ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6}\le\frac{x+y+z}{3}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ៖

$$\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6}\le\frac{x+y+z}{3}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

តាង $a=x^2+y^2+z^2$ និង $b=xy+yz+zx$

គេបាន $a+2b=(x+y+z)^2\Rightarrow x+y+z=\sqrt{a+2b}$

វិសមភាពសមមូល $\dfrac{a+b}{6}\le\dfrac{\sqrt{a+2b}}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}$

$\Leftrightarrow 3(a+b)^2\le 4a(a+2b)$

$\Leftrightarrow a^2+2ab-3b^2\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+3b)\ge 0$

ដោយ $a\ge 0\,,\,b\ge 0$ នោះ $a+3b\ge 0$

ហើយ $a-b=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

ឬ $a-b=\dfrac{1}{2}\Big[\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ \Big]\ge 0$

គេទាញ $(a-b)(a+3b)\ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6}\le\dfrac{x+y+z}{3}\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x\,;\,y\,;\,z$ ដែល $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}\le\frac{1}{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}\le\frac{1}{3}$

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយឲ្យឃើញថា $\frac{1}{x^3+2}\le\frac{2}{3(x^2+1)}$ ។

គេមាន $\frac{1}{x^3+2}\le\frac{2}{3(x^2+1)}\Leftrightarrow 2(x^3+2)\ge 3(x^2+1)$

$$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-2x^2-x^2+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1)\ge 0$$

ហេតុនេះ $\frac{1}{x^3+2}\le\frac{2}{3(x^2+1)}$ (1) ពិត

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{y^3+2}\le\frac{2}{3(y^2+1)}$ (2) និង $\frac{1}{z^3+2}\le\frac{2}{3(z^2+1)}$ (3)

បូកវិសមភាព (១) ្ស (២) និង (៣) គេបាន ៖

$$\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}\le\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\right)$$

ដោយ $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}\le\frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

ក.ចូរកំនត់លេខនៃអញ្ញាត a , b , c , d នៃចំនួន $\overline{abcd}$

បើគេដឹងថា ៖

$\overline{abcd}\times 9=\overline{dcba}$

ខ.ចំពោះតម្លៃ a , b , c , d ដែលបានរកឃើញខាងលើចូរបញ្ជាក់ថា

ចំនួន $\overline{abcd}$ និង $\overline{dcba}$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំនត់លេខនៃអញ្ញាត a , b , c , d ៖

គេមាន $\overline{abcd}\times 9=\overline{dcba}$ (1)

តាមទំនាក់ទំនង (1) គេទាញបានតម្លៃ a តែមួយគត់គឺ $a=1$ ។

ចំពោះ $a=1$ គេបាន $\overline{1bcd}\times 9=\overline{dcb1}$ (2)

តាមទំនាក់ទំនង (2) គេទាញបាន $d=9$ ព្រោះ $d\times 9=81$

មានលេខខាងចុងស្មើ 1 ។

ចំពោះ $d=9$ គេបាន $\overline{1bc9}\times 9=\overline{9cb1}$ (3)

តាមទំនាក់ទំនង (3) គេទាញបាន $b=0$

(ព្រោះ $b\times 9$ មិនអាចមានត្រាទុកទេ)

ចំពោះ $b=0$ គេបាន $\overline{10c9}\times 9=\overline{9c01}$ (3)

តាមទំនាក់ទំនង (3) គេទាញបាន $c=8$ ព្រោះ $c\times 9=8\times 9=72$

ថែម 8 ឲ្យលេខខាងចុងស្មើ 0 ។

ចំពោះ $c=8$ គេបាន $1089\times 9=9801$ ។

ដូចនេះ $a=1$, $b=0$, $c=8$, $d=9$ ។

ខ.បញ្ជាក់ថាចំនួន $\overline{abcd}$ និង $\overline{dcba}$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ៖

ចំពោះ $a=1$, $b=0$, $c=8$, $d=9$ គេបាន ៖

$\overline{abcd}=1089=33^2$ និង $\overline{dcba}=9801=99^2$

សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី៣៦

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយថា ៖

$$(1+\sin x)(1+\cos x)\le\frac{3}{2}+\sqrt{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+\sin x)(1+\cos x)\le\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

យើងមាន $(a-b)^2\ge 0$ ចំពោះគ្រប់ $a\,,b\in IR$

គេបាន $a^2-2ab+b^2\ge 0$

គេទាញ $a.b \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$

ដោយជ្រើសរើសយក $a=1+\sin x$ និង $b=1+\cos x$

គេបាន $(1+\sin x)(1+\cos x) \le \dfrac{(1+\sin x)^2+(1+\cos x)^2}{2}$

$$(1+\sin x)(1+\cos x) \le \frac{3+2(\sin x+\cos x)}{2} \quad (1)$$

គេមាន $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4}) \le \sqrt{2}$

តាម (1) គេទាញ $(1+\sin x)(1+\cos x) \le \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $(1+\sin x)(1+\cos x) \le \dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1)+\frac{6}{\log_3(2^x+1)}=1+2\sqrt{\log_3(2^x+1)+\frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1)+\frac{6}{\log_3(2^x+1)}=1+2\sqrt{\log_3(2^x+1)+\frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

តាង $t=\log_3(2^x+1)$ សមីការអាចសរសេរ ៖

$$t+\frac{6}{t}=1+2\sqrt{t+\frac{8}{t^2}}$$ ឬ $$\frac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\frac{(t+2)(t^2-2t+4)}{t^2}}$$

ឬ $$\frac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\frac{t+2}{t}.\frac{t^2-2t+4}{t}} \quad (1)$$

តាង $u=\frac{t+2}{t}$ និង $v=\frac{t^2-2t+4}{t}$ គេបាន $u+v=\frac{t^2-t+6}{t}$

សមីការ (1) អាចសរសេរ $u+v=2\sqrt{uv} \Leftrightarrow (\sqrt{u}-\sqrt{v})^2=0$

គេទាញ $u=v$ ឬ $\frac{t+2}{t}=\frac{t^2-2t+4}{t}$ ($t\neq 0$)

ឬ $t+2=t^2-2t+4$

ឬ $t^2-3t+2=0$ មានឬស $t_1=1\,;\,t_2=2$ ។

-ចំពោះ $t=1\Rightarrow \log_3(2^x+1)=1$

$\Rightarrow 2^x+1=3$

$\Rightarrow \quad 2^x=2$

$\Rightarrow \quad x=1$

-ចំពោះ $t=2\Rightarrow \log_3(2^x+1)=2$

$\Rightarrow 2^x+1=9$

$\Rightarrow \quad 2^x=8$

$\Rightarrow \quad x=3$

ដូចនេះសមីការមានឬស $x_1=1\,,\,x_2=3$ ។

លំហាត់ទី៣៨

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

ខ. ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

តាង $A = \cot x - 2\cot 2x$

ដោយ $\begin{cases} \cot x = \dfrac{1}{\tan x} \\ \cot 2x = \dfrac{1}{\tan 2x} = \dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x} \end{cases}$

គេបាន

$$A = \frac{1}{\tan x} - 2\left(\frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}\right)$$

$$= \frac{1-1+\tan^2 x}{\tan x} = \tan x$$

ដូចនេះ $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$ ។

ខ. គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\tan\frac{a}{2^k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{2^k}(\cot\frac{a}{2^k} - 2\cot\frac{a}{2^{k-1}})\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{a}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}}\cot\frac{a}{2^{k-1}}\right) = \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} - 2\cot 2a$$

ដូចនេះ $S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} - 2\cot 2a$

លំហាត់ទី៣៩

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ចូរបង្ហាញថា ៖

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$

យើងជ្រើសរើស $0 < x\ ,\ y\ ,\ z < \frac{\pi}{2}$ ដែល $\begin{cases} a = \sqrt{2}\tan x \\ b = \sqrt{2}\tan y \\ c = \sqrt{2}\tan z \end{cases}$

វិសមភាព $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$

សមមូលទៅនឹងវិសមភាពខាងក្រោម ៖

$$\frac{8}{\cos^2 x\cos^2 y\cos^2 z} \geq 18(\tan x\tan y + \tan y\tan z + \tan z\tan x)$$

$$\cos x\cos y\cos z(\sin x\sin y\cos z + \sin y\sin z\cos x + \sin z\sin x\cos y) \leq \frac{4}{9}$$

ដោយប្រើរូបមន្ត ៖

$$\cos(x+y+z)=\cos x\cos y\cos z-\sin x\sin y\cos z-\sin y\sin z\cos x$$
$$-\sin z\sin x\cos y$$

នោះគេអាចសរសេរ ៖

$$\cos x\cos y\cos z\left[\cos x\cos y\cos z-\cos(x+y+z)\right]\le\frac{4}{9}\quad(*)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ និង $Jensen$ យើងបាន ៖

$$\cos x\cos y\cos z\le\left(\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{3}\right)^3\le\cos^3 t$$

ដែល $t=\dfrac{x+y+z}{3}$ ។វិសមភាព (*) សមមូលទៅនឹងវិសមភាព ៖

$\cos^3 t(\cos^3 t-\cos 3t)\le\dfrac{4}{9}$ ដោយ $\cos 3t=4\cos^3 t-3\cos t$

នោះ $\cos^3 t(3\cos t-3\cos^3 t)\le\dfrac{4}{9}$

$$\cos^3 t(\cos t-\cos^3 t)\le\frac{4}{27}$$

$$\cos^4 t\ (1-\cos^2 t)\le\frac{4}{27}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$$\frac{\cos^2 t}{2}.\frac{\cos^2 t}{2}.(1-\cos^2 t)\le\left(\frac{\frac{\cos^2 t}{2}+\frac{\cos^2 t}{2}+1-\cos^2 t}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

គេទាញ $\cos^4 t(1-\cos^2 t)\le\dfrac{4}{27}$ ពិត ។

ដូចនេះវិសមភាពខាងដើមត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

លំហាត់ទី៤០

គេឱ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz=1$ ។

ចូរបង្ហាញវិសមភាព ៖

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\geq x+y+z$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញវិសមភាព ៖

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\geq x+y+z$$

របៀបទី១

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+z\geq 2|x+y-1|\geq 2(x+y-1)\ (1)$$

$$\frac{(y+z-1)^2}{x}+x\geq 2|y+z-1|\geq 2(y+z-1)\ \ (2)$$

$$\frac{(z+x-1)^2}{y}+y\geq 2|z+x-1|\geq 2(z+x-1)\ \ (3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2), (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\geq 3(x+y+z)-6$$

ដោយ $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$ ព្រោះ $xyz=1$

គេបាន $2(x+y+z)\ge 6$

ឬ $2(x+y+z)-6\ge 0$

ឬ $3(x+y+z)-6\ge x+y+z$

ដូចនេះ $\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\ge x+y+z$

របៀបទី២

គេតាង

$$T=\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}-(x+y+z)$$

ដោយប្រើវិសមភាព $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ គេបាន

$$T\ge\frac{\left[|x+y-1|+|y+z-1|+|z+x-1|\right]^2}{x+y+z}-(x+y+z)$$

$$T\ge\frac{(x+y-1+y+z-1+z+x-1)^2-(x+y+z)^2}{x+y+z}$$

$$T\ge\frac{(2x+2y+2z-3)^2-(x+y+z)^2}{x+y+z}$$

$$T\ge\frac{3(x+y+z-3)(x+y+z-1)}{x+y+z}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$ (ព្រោះ $xyz=1$)

គេទាញបាន $x+y+z-3\geq 0$ និង $x+y+z-1\geq 2$

ហេតុនេះ $T=\dfrac{3(x+y+z-3)(x+y+z-1)}{x+y+z}\geq 0$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{(x+y-1)^2}{z}+\dfrac{(y+z-1)^2}{x}+\dfrac{(z+x-1)^2}{y}\geq x+y+z$ ។

លំហាត់ទី៤១

ចូរគណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{2}{3+1}+\frac{2^2}{3^2+1}+.....+\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក ៖

គេមាន $S_n=\dfrac{2}{3+1}+\dfrac{2^2}{3^2+1}+.....+\dfrac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $x\neq 1$ យើងមាន ៖

$$\frac{1}{x+1}=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})-\frac{1}{x^2-1}$$

គេទាញ $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}$

យក $x=3^{2^k}$ គេបាន $\dfrac{1}{3^{2^k}+1}=\dfrac{1}{3^{2^k}-1}-\dfrac{2}{3^{2^{k+1}}-1}$

គុណនឹង 2^{k+1} គេបាន $\dfrac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=\dfrac{2^{k+1}}{3^{2^k}-1}-\dfrac{2^{k+2}}{3^{2^{k+1}}-1}$

គេបាន ៖

$$S_n=(\frac{2}{3-1}-\frac{2^2}{3^2-1})+(\frac{2^2}{3^2-1}-\frac{2^3}{3^{2^2}-1})+...+(\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}-1}-\frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1})$$

ដូចនេះ $S_n=1-\dfrac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}$ ។

លំហាត់ទី៤២

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a វិជ្ជមាន ឬសូន្យចូរបង្ហាញថា ៖

$(a+1)^{a+2} \geq e^{2a}$ ដែល $e = 2.7182$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(a+1)^{a+2} \geq e^{2a}$

គេបាន $\ln(a+1)^{a+2} \geq \ln e^{2a}$

$$(a+2)\ln(a+1) \geq 2a \text{ ឬ } \ln(a+1) \geq \frac{2a}{a+2}$$

តាងអនុគមន៍ $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$ គ្រប់ $x \geq 0$

គេបាន $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}$

$$= \frac{(x+2)^2 - 4(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \geq 0 \text{ , } \forall x \geq 0$$

ដូចនេះ $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$ ជាអនុគមន៍កើនគ្រប់ $x \geq 0$

គេបាន $a \geq 0 \Rightarrow f(a) \geq f(0) = 0$ ឬ $\ln(a+1) \geq \frac{2a}{a+2}$ ពិត

ដូចនេះ $(a+1)^{a+2} \geq e^{2a}$ ។

លំហាត់ទី៤៣

គេឱ្យផលបូក $S_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left[k\cos(\frac{k\pi}{n^2})\right]$

ក. បង្ហាញថា $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge 0$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge 0$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$ ចំពោះ $x\ge 0$

គេមាន $f'(x)=-\sin x+x=x-\sin x$

និង $f''(x)=1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\ge 0$, $\forall x\ge 0$

គេបាន $f'(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[\,0\,,+\infty)$

គេទាញ $f'(x)\ge f'(0)=0$ នាំឱ្យ $f(x)$ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[\,0\,,+\infty)$

ហេតុនេះ $f(x)\ge f(0)=1-1=0$

ដូចនេះ $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge 0$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}S_n$

ដោយគ្រប់ $x\in\mathbb{R}:\cos x\le 1$

ដូចនេះ $1-\frac{x^2}{2}\le\cos x\le 1$ គ្រប់ $x\ge 0$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $x\ge 0$ គេបាន $x-\frac{x^3}{2}\le x\cos x\le x$

ចំពោះ $n\in\mathbb{N}^*\,,\,k\in\mathbb{N}^*$ យក $x=\frac{k\pi}{n^2}$ គេបាន ៖

$$\frac{k\pi}{n^2}-\frac{k^3\pi^3}{n^6}\le\frac{k\pi}{n^2}\cos(\frac{k\pi}{n^2})\le\frac{k\pi}{n^2}$$

ឬ $\frac{k}{n^2}-\frac{k^3\pi^2}{n^6}\le\frac{k}{n^2}\cos(\frac{k\pi}{n^2})\le\frac{k}{n^2}$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)-\frac{\pi^2}{n^6}\sum_{k=1}^{n}(k^3)\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left[k\cos(\frac{k\pi}{n^2})\right]\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

$$\frac{n+1}{2n}-\frac{\pi^2}{n^4}.\frac{(n+1)^2}{4}\le S_n\le\frac{n+1}{2n}$$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}[\frac{n+1}{2n}-\frac{\pi^2}{n^4}.\frac{(n+1)^2}{4}]=\frac{1}{2}$; $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n+1}{2n})=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឱ្យស្វ៊ីត (x_n)មួយកំណត់ដោយ ៖

$x_1=3$; $x_{n+1}=x_n^2-3x_n+4$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $x_n\ge n+2$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។

ខ. តាង $y_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k-1}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}y_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $x_n \geq n+2$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

គេមាន $x_1 = 3 \geq 1+2$ ពិត

$$x_2 = x_1^{\ 2} - 3x_1 + 4 = 4 \geq 2+2 \text{ ពិត}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $x_k \geq k+2$

យើងនឹងស្រាយឱ្យឃើញថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $x_{k+1} \geq k+3$

គេមាន $x_{k+1} = x_k^{\ 2} - 3x_k + 4 = x_k(x_k - 3) + 4$

ដោយ $x_k \geq k+2$ និង $x_k - 3 \geq k-1$

គេបាន $x_{k+1} \geq (k+2)(k-1) + 4 = k^2 + k + 2 \geq k+3$ ពិត

ដូចនេះ $x_n \geq n+2$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$

គេមាន $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{x_k - 1} \right)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

តាមទំនាក់ទំនង $x_{k+1} = x_k^{\ 2} - 3x_k + 4 = (x_k - 1)(x_k - 2) + 2$

ឬ $x_{k+1} - 2 = (x_k - 1)(x_k - 2)$

គេបាន $\dfrac{1}{x_{k+1} - 2} = \dfrac{1}{(x_k - 1)(x_k - 2)} = \dfrac{1}{x_k - 2} - \dfrac{1}{x_k - 1}$

ឬ $\dfrac{1}{x_k - 1} = \dfrac{1}{x_k - 2} - \dfrac{1}{x_{k+1} - 2}$

គេបាន $y_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k - 2} - \frac{1}{x_{k+1} - 2}\right) = \frac{1}{x_1 - 2} - \frac{1}{x_{n+1} - 2} = 1 - \frac{1}{x_{n+1} - 2}$

ហេតុនេះ $\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{x_{n+1} - 2}) = 1$

ព្រោះ $x_n \geq n+2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ នោះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_{n+1} - 2} = 0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} y_n = 1$ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = e^x.\cos x$

ក. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x) = \sqrt{2}\, e^x \cos(x + \frac{\pi}{4})$

ខ. ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនចូរបង្ហាថាដេរីវេទី n កំនត់ដោយ

$$f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n e^x.\cos(x + \frac{n\pi}{4})$$

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x) = \sqrt{2}\, e^x \cos(x + \frac{\pi}{4})$

យើងមាន $f(x) = e^x \cos x$

យើងបាន $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$

$$= e^x(\cos x - \sin x)$$

$$= \sqrt{2}e^x(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)$$

$$= \sqrt{2}e^x(\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,e^x\cos(x+\frac{\pi}{4})$$

ដូចនេះ $f\,'(x) = \sqrt{2}\,e^x\cos(x+\frac{\pi}{4})$ ។

ខ. ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនថា $f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n e^x.\cos(x+\frac{n\pi}{4})$

យើងមាន $f\,'(x) = \sqrt{2}\,e^x.\cos(x+\frac{\pi}{4}) = f^{(1)}(x)$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $f^{(k)}(x) = \sqrt{2}^k e^x.\cos(x+\frac{k\pi}{4})$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ

$$f^{(k+1)}(x) = \sqrt{2}^{k+1} e^x\cos\left(x+\frac{(k+1)\pi}{4}\right)$$

យើងមាន $f^{(k+1)}(x) = (\ f^{(k)}(x))'$

$$= \sqrt{2}^k e^x\cos(x+\frac{k\pi}{4}) - \sqrt{2}^k e^x\sin(x+\frac{k\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2}^k e^x\left[\ \cos(x+\frac{k\pi}{4}) - \sin(x+\frac{k\pi}{4})\right]$$

ដោយ $\cos(x+\frac{k\pi}{4}) - \sin(x+\frac{k\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{(k+1)\pi}{4}\right)$

គេបាន $f^{(k+1)}(x) = \sqrt{2}^{k+1} e^x\cos\left(x+\frac{(k+1)\pi}{4}\right)$ ពិត ។

ដូចនេះ $f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n e^x.\cos(x+\frac{n\pi}{4})$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ ៖

$a_0 = 4$, $a_1 = 9$ និង $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 3$ ដែល $n = 0 , 1 , 2, ...$

ចូរស្រាយថា a_n ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា a_n ជាការេប្រាកដ

គេមាន $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 3$ (1)

តាងស្វ៊ីតចំនួនពិត $b_n = a_n + k$ ដែល k ជាចំនួនពិតថេរ ។

គេទាញ $a_n = b_n - k$, $a_{n+1} = b_{n+1} - k$, $a_{n+2} = b_{n+2} - k$

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ ៖

$$b_{n+2} - k = 6(b_{n+1} - k) - 8(b_n - k) + 3$$

$$b_{n+2} = 6b_{n+1} - 8b_n + 3k + 3 \qquad (2)$$

បើ $3k + 3 = 0 \Rightarrow k = -1$ នោះទំនាក់ទំនង (2) ក្លាយទៅជា ៖

$b_{n+2} = 6b_{n+1} - 8b_n$ មានសមីការសម្គាល់ $x^2 - 6x + 8 = 0$

មានឫស $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ ។

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $\begin{cases} x_n = b_{n+1} - 2b_n \\ y_n = b_{n+1} - 4b_n \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} x_{n+1} = b_{n+2} - 2b_{n+1} \\ y_{n+1} = b_{n+2} - 4b_{n+1} \end{cases}$ ដោយ $b_{n+2} = 6b_{n+1} - 8b_n$

នោះ $\begin{cases} x_{n+1} = 4(b_{n+1} - 2b_n) \\ y_{n+1} = 2(b_{n+1} - 4b_n) \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n \\ y_{n+1} = 2y_n \end{cases}$

គេទាញបាន (x_n) និង (y_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមានរេសុង រៀងគ្នា

$q_1 = 4$, $q_2 = 2$ ។

តាមរូបមន្ត $x_n = x_0.q_1^n$ និង $y_n = y_0.q_2^n$

ដោយ $x_0 = b_1 - 2b_0 = (a_1 + k) - 2(a_0 + k) = 2$

និង $y_0 = b_1 - 4b_0 = (a_1 + k) - 4(a_0 + k) = -4$

គេបាន $x_n = 2.4^n$ និង $y_n = -4.2^n$ ។

ដោយ $\begin{cases} x_n = b_{n+1} - 2b_n \\ y_n = b_{n+1} - 4b_n \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} b_{n+1} - 2b_n = 2.4^n \\ b_{n+1} - 4b_n = -4.2^n \end{cases}$

ធ្វើផលសងគេបាន $2b_n = 2.4^n + 4.2^n \Rightarrow b_n = 4^n + 2.2^n$

ដោយ $a_n = b_n - k = 4^n + 2.2^n + 1$ (ព្រោះ $k = -1$)

ដូចនេះ $a_n = (2^n + 1)^2$ ជាការប្រាកដគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី៤៧

គណនាផលបូក $S_n = \frac{1^3}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + ... + \frac{n^3}{2^n}$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក

គេមាន $S_n = \frac{1^3}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + ... + \frac{n^3}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^3}{2^k} \right)$

តាងអនុគមន៍ $f(k) = ak^3 + bk^2 + ck + d$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

$\frac{k^3}{2^k} = \frac{f(k)}{2^k} - \frac{f(k+1)}{2^{k+1}}$ ឬ $2k^3 = 2f(k) - f(k+1)$

$2k^3 = 2(ak^3 + bk^2 + ck + d) - [a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) + d]$

$2k^3 = ak^3 + (b-3a)k^2 + (c-3a-2b)k + d - a - b - c$

គេទាញ $\begin{cases} a = 2 \\ b - 3a = 0 \\ c - 3a - 2b = 0 \\ d - a - b - c = 0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a = 2, b = 6, c = 18, d = 26$

ហេតុនេះ $f(k) = 2k^3 + 6k^2 + 18k + 26$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{f(k)}{2^k} - \frac{f(k+1)}{2^{k+1}} \right] = \frac{f(1)}{2} - \frac{f(n+1)}{2^{n+1}}$

ដោយ $f(k) = 2k^3 + 6k^2 + 18k + 26$

គេបាន $f(1)=2+6+18+26=52$

ហើយ $f(n+1)=2(n+1)^3+6(n+1)^2+18(n+1)+26$

$$=2n^3+12n^2+36n+50$$

គេបាន $S_n=\dfrac{52}{2}-\dfrac{2n^3+12n^2+36n+52}{2^{n+1}}$

ដូចនេះ $S_n=26-\dfrac{n^3+6n^2+18n+26}{2^n}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=26$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(n+1)-2f(n)=\dfrac{n.2^{n+1}}{(n+1)!}$ គ្រប់ $n\in IN$

និង $f(o)=1$ ។ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}[\dfrac{f(n)}{2^n}]$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}[\dfrac{f(n)}{2^n}]$

គេមាន $f(n+1)-2f(n)=\dfrac{n.2^{n+1}}{(n+1)!}$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2^{n+1} គេបាន ៖

$$\frac{f(n+1)}{2^{n+1}}-\frac{f(n)}{2^n}=\frac{n}{(n+1)!}$$

ដោយ $\dfrac{n}{(n+1!}=\dfrac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{f(k+1)}{2^{k+1}}-\frac{f(k)}{2^k}\right]=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]$

$$\frac{f(n)}{2^n}-1=1-\frac{1}{n!} \text{ ឬ } \frac{f(n)}{2^n}=2-\frac{1}{n!}$$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f(n)}{2^n}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{n!}\right)=2$ ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)=0$ ។

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}[\frac{f(n)}{2^n}]=2$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឱ្យ $x\,,\,y,\,z>0$ ដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\geq\frac{1}{4}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\geq\frac{1}{4}$

គេពិនិត្យ $\frac{x^3}{(1-x)^2}=\frac{(x-2x^2+x^3)+(2x^2-x)}{(1-x)^2}$

$$=x+\frac{2x^2-x}{(1-x)^2}$$

$$=x+\frac{(9x^2-6x+1)-(1-2x+x^2)}{4(1-x)^2}$$

$$=x+\frac{(3x-1)^2-(1-x)^2}{4(1-x)^2}=x-\frac{1}{4}+\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2}$$

ដោយ $\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2} \geq 0$ នោះ $\frac{x^3}{(1-x)^2} \geq x - \frac{1}{4}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{y^3}{(1-y)^2} \geq y - \frac{1}{4}$ (2) និង $\frac{z^3}{(1-z)^2} \geq z - \frac{1}{4}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$\frac{x^3}{(1-x)^2} + \frac{y^3}{(1-y)^2} + \frac{z^3}{(1-z)^2} \geq x + y + z - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$ ពិត ។

លំហាត់ទី៥0

បង្ហាញថា $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ជាពហុគុណនៃ 9 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ជាពហុគុណនៃ 9

តាង $A_n = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

បើ $n = 1$ គេបាន $A_1 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 4 \times 9$ ពិត

ឧបមាថា $A_n = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9 \times k$ ពិត ($k \in IN^*$)

យើងនឹងស្រាយថា $A_{n+1} = (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$ ជាពហុគុណនៃ9ពិត

គេមាន $A_{n+1} - A_n = (n+3)^3 - n^3 = 9n^2 + 27n + 27$

គេទាញ $A_{n+1} = A_n + 9n^2 + 27n + 27 = 9(k + n^2 + 3n + 3)$ ពិត

ដូចនេះ $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ជាពហុគុណនៃ 9 ។

លំហាត់ទី៥១

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$$

យក $z=\cos\frac{\pi}{11}+i.\sin\frac{\pi}{11}$ ហើយ $\mathbf{z^{11}=-1}$

គេមាន $W=z+z^3+z^5+z^7+z^9=\frac{z^{11}-z}{z^2-1}=\frac{-1-z}{z^2-1}=\frac{1}{1-z}$

ដោយ $1-z=1-\cos\frac{\pi}{11}-i\sin\frac{\pi}{11}=2\sin\frac{\pi}{22}(\sin\frac{\pi}{22}-i\cos\frac{\pi}{22})$

គេបាន $W=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{22}(\sin\frac{\pi}{22}-i\cos\frac{\pi}{22})}$

$$W=\frac{\sin\frac{\pi}{22}+i\cos\frac{\pi}{22}}{2\sin\frac{\pi}{22}}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{22}$$

ដោយផ្នែកពិតនៃ W គឺ $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq\frac{25}{2}$

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១

បង្ហាញថា $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq\frac{25}{2}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ យើងបាន ៖

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq 2(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$$

តាង $X=2(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=\frac{2(a^2+1)(b^2+1)}{ab}=2ab+\frac{2(a^2+b^2+1)}{ab}$

ដោយ $a+b=1$ នាំឲ្យ $a^2+b^2=1-2ab$

គេបាន $X=2ab+\frac{2(2-2ab)}{ab}=2ab-4+\frac{4}{ab}$

តាង $t=ab$ ហើយ $0<t\leq\frac{1}{4}$ (ព្រោះ $t=ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}$)

គេបាន $X(t)=2t-4+\frac{4}{t}=2t+\frac{1}{8t}+\frac{31}{8t}-4$

ដោយ $2t+\frac{1}{8t}\geq 2\sqrt{2t.\frac{1}{8t}}=1$ ហើយ $t\leq\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{31}{8t}\geq\frac{31}{2}$

គេបាន $X(t)\geq 1+\frac{31}{2}-4=\frac{25}{2}$

ដូចនេះ $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq\frac{25}{2}$ ។

របៀបទី២

ដោយប្រើវិសមភាព $x^2+y^2\geq\frac{(x+y)^2}{2}$

គេបាន $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b})^2$

ដោយ $a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}=(a+b)+\frac{(a+b)}{ab}=1+\frac{1}{ab}$ ព្រោះ $a+b=1$

ហើយ $ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow 1+\frac{1}{ab}\geq 5$

ដូចនេះ $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq\frac{25}{2}$ ។

លំហាត់ទី៥៣

ត្រីកោណមួយមានកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅរៀងគ្នា r និង R ។

ចូរស្រាយថា $R\geq 2r$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $R\geq 2r$

យកត្រីកោណ ABC មានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$

តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ និង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ ។

តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែចំពោះគ្រប់ចំនុច X នៃប្លង់គេមាន ៖

$$a\,XA^2 + b\,XB^2 + c\,XC^2 = (a+b+c)\,XI^2 + abc$$

យក X នៅត្រង់ផ្ចិត O គេបាន ៖

$$a\,OA^2 + b\,OB^2 + c\,OC^2 = (a+b+c)OI^2 + abc$$

ដោយ $OA = OB = OC = R$ កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ

$$(a+b+c)\,R^2 = (a+b+c)OI^2 + abc$$

គេទាញ $OI^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c} = R^2 - \dfrac{abc}{2p}$

រូបមន្តផ្ទៃក្រឡា $S = pr = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow \dfrac{abc}{2p} = 2rR$

គេបាន $OI^2 = R^2 - 2rR = R(R-2r) \Rightarrow OI = \sqrt{R(R-2r)}$

ដោយ $OI \geq 0$ ដូចនេះ $R \geq 2r$ ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a , b , c ។

កំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC បើគេដឹងថា ៖

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

ដំណោះស្រាយ

ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន ៖

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ នាំឲ្យ $\frac{\cos A}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}$ (1)

ដូចគ្នាដែរគេទាញ $\frac{\cos B}{b}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}$ (2)

និង $\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$ (3)

បូកទំនាក់ទំនង (1) , (2) ,(3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

ដោយ $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

គេទាញបាន ៖

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{bc+ca+ab}{2abc}$$

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$$

$$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ac$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)=0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

គេទាញបានសមភាព $a=b=c$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

<u>**លំហាត់ទី៥៥**</u>

គេឱ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ (ដែល $n \geq 2$)ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+....+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1}\geq 1998$ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

បង្ហាញថា $\frac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1}\geq 1998$

គេមាន $\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+....+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$

ឬ $\frac{1998}{x_1+1998}+\frac{1998}{x_2+1998}+....+\frac{1998}{x_n+1998}=1$

តាង $y_i = \dfrac{1998}{x_i + 1}$ គេបាន $y_1 + y_2 + ... + y_n = 1$

គេទាញ $1 - y_i = \sum\limits_{j \neq i} (y_i)$ ដែល $1 \leq i \leq n$ និង $1 \leq j \leq n$

តាម $AM - GM$ គេមាន $\sum\limits_{j \neq i} (y_i) \geq (n-1) \sqrt[n-1]{\prod\limits_{j \neq i} (y_i)}$

គេបាន $1 - y_i \geq (n-1) \sqrt[n-1]{\prod\limits_{j \neq i} (y_i)}$

គេទាញ $\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - y_i) \geq (n-1)^n \prod\limits_{i=1}^{n} (y_i)$ ឬ $\prod\limits_{i=1}^{n} (\dfrac{1 - y_i}{y_i}) \geq (n-1)^n$

តែ $\dfrac{1 - y_i}{y_i} = \dfrac{x_i}{1998}$ នោះ $\dfrac{x_1 x_2 ... x_n}{1998^n} \geq (n-1)^n$ ឬ $\dfrac{\sqrt[n]{x_1 . x_2 ... x_n}}{n-1} \geq 1998$ ។

លំហាត់ទី៥៦

បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ $x\ ;\ y\ ; z$ ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$x^2 + y^2 - 8z = 6$ ទេ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ $x\ ;\ y\ ; z$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2 + y^2 - 8z = 6$ ទេ

យើងបាន $x^2 + y^2 = 2(4z + 3)$ (1)

យើងនឹងស្រាយថាសមីការ ១១ប គ្មានឫសជាចំនួនគត់ ។

-បើ x ជាចំនួនគូ និង y ជាចំនួនសេសនោះ $x^2 + y^2$ ជាចំនួនសេស

ដូចនេះសមីការ (1) គ្មានចម្លើយ (ព្រោះ $2(4z+3)$ ជាចំនួនគូ) ។

-បើ x ជាចំនួនសេសនិង y ជាចំនួនគូនោះ x^2+y^2 ជាចំនួនសេស

ដូចនេះសមីការ (1) គ្មានចម្លើយ(ព្រោះ $2(4z+3)$ ជាចំនួនគូ)។

-បើ x ជាចំនួនគូ y ជាចំនួនគូ នោះគេអាចតាង

$x=2m\ ;\ y=2n\quad (\ m\ ,n\in Z)$

សមីការ (1) អាចសរសេរ $(2m)^2+(2n)^2=2(4z+3)$

ឬ $2(m^2+n^2)=4z+3$ ជាសមីការគ្មានឬសក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

(ព្រោះ $2(m^2+n^2)$ ជាចំនួនគូ ហើយ $4z+3$ ជាចំនួនសេស)

-បើ x ជាចំនួនសេស y ជាចំនួនសេសនោះគេអាចតាង

$x=2m-1\ ;\ y=2n-1$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ m និង n ។

សមីការ (1) អាចសរសេរ $(2m-1)^2+(2n-1)^2=2(4z+3)$

ឬ $4m^2-4m+4n^2-4n+2=8z+6$

ឬ $m(m-1)+n(n-1)=2z+1$ ជាសមីការគ្មានឬសក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

(ព្រោះ $m(m-1)\ ;\ n(n-1)$ ជាចំនួនគូ ហើយ $2z+1$ ជាចំនួនសេស)

សរុបមកសមីការ $x^2+y^2-8z=6$ គ្មានចម្លើយក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

ដូចនេះ គ្មានចំនួនគត់ $x\ ;\ y\ ;\ z$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+y^2-8z=6$ ទេ ។

លំហាត់ទី៥៧

គេឲ្យស្វីតចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt[3]{1+8{u_n}^3}}$

ចំពោះគ្រប់ $n = 1\,,\,2\,,....,$។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និងរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n}.u_n\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt[3]{1+8{u_n}^3}}$

គេបាន $u_{n+1}^3 = \dfrac{{u_n}^3}{1+8{u_n}^3}$

ឬ $\dfrac{1}{u_{n+1}^3} = \dfrac{1}{{u_n}^3} + 8 \quad (1)$

តាងស្វីជំនួយ $v_n = \dfrac{1}{{u_n}^3} \Rightarrow v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}^3}$

តាម (1) គេបាន $v_{n+1} = v_n + 8$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n)ជាស្វីនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 8$ ។

គេបាន $v_n = v_0 + nd$ តែ $v_0 = \dfrac{1}{{u_0}^3} = 1$ គេទាញ $v_n = 1 + 8n$

តាមសមភាព $v_n = \dfrac{1}{{u_n}^3} \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{v_n}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8n+1}}$,

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8n+1}}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n}.u_n\right) = \dfrac{1}{2}$ ៕

លំហាត់ទី៥៨

គេឱ្យ a , b ,c ជាចំនួនវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$1=\frac{ab+bc+ca}{3}\ge\sqrt[3]{(abc)^2}$ ឬ $abc\le 1$ ។

គេមាន $\frac{1}{1+a^2(b+c)}=\frac{1}{1+a(ab+ac)}=\frac{1}{1+a(3-bc)}=\frac{1}{3a+(1-abc)}$

ដោយ $abc\le 1$ ឬ $1-abc\ge 0$ នោះ $\frac{1}{1+a^2(b+c)}\le\frac{1}{3a}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{1+b^2(c+a)}\le\frac{1}{3b}$ (2) , $\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3c}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) ; (2) និង (3) គេបាន

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}=\frac{ab+bc+ca}{3abc}$$

ដោយ $ab+bc+ca=3$

ដូចនេះ $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$ ។

លំហាត់ទី៥៩

គេឱ្យ a និង b ជាពីរចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2=4$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{ab}{a+b+2}\le\sqrt{2}-1$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{ab}{a+b+2}\le\sqrt{2}-1$

យើងមាន $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4+2ab$

គេទាញ $2ab=(a+b)^2-4=(a+b+2)(a+b-2)$

នាំឱ្យ $\dfrac{ab}{a+b+2}=\dfrac{a+b-2}{2}$

$$\frac{ab}{a+b+2}=\frac{a+b}{2}-1 \quad (1)$$

គេមាន $(a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)$

គេទាញ $(a+b)^2=2(a^2+b^2)-(a-b)^2\le 2(a^2+b^2)=8$

នាំឱ្យ $a+b\le 2\sqrt{2}$ ឬ $\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{2}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $\dfrac{ab}{a+b+2}\le\sqrt{2}-1$ ។

លំហាត់ទី៦០

នៅក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែល $BC=a\,,AC=b\,,AB=c$

ចូរបង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{b+c}$ រួចសរសេរទំនាក់ទំនងពីរទៀតដែល

ស្រដៀងគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{b+c}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

គេទាញ $a=2R\sin A\,,\ b=2R\sin B\,,\ c=2R\sin C$

គេមាន $\frac{a}{b+c}=\frac{2R\sin A}{2R\sin B+2R\sin C}$

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2})\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} \quad (1)$$

ដោយ $0\le |B-C|<\pi$ នោះ $0<\cos\frac{B-C}{2}\le 1$

តាម (1) គេទាញ $\frac{a}{b+c}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\ge \sin\frac{A}{2}$ ។

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{b+c}$ ។

ទំនាក់ទំនងពីរទៀតដែលស្រដៀងគ្នានេះគឺ ៖

$\sin\frac{B}{2}\le\frac{b}{c+a}$ និង $\sin\frac{C}{2}\le\frac{c}{a+b}$ ។

លំហាត់ទី៦១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$\begin{cases} f(1)=-2 \\ (x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2) \end{cases}$$

ក. កំណត់រកអនុគមន៍ $f(x)$

ខ. កំណត់ x ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់រកអនុគមន៍ $f(x)$

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2) \quad (1)$$

យក $x=1$, $y=1$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$-2f(0)=0$ នាំឱ្យ $f(0)=0$

តាង $x+y=u$ និង $x-y=v$ នោះ $\begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases}$

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ ៖

$uf(v)-vf(u)=uv(u^2-v^2)$

ចែកសមីការនេះនឹង $uv\neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{f(v)}{v}-\frac{f(u)}{u}=u^2-v^2$$

$$\frac{f(u)}{u}-u^2=\frac{f(v)}{v}-v^2$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\dfrac{f(x)}{x}-x^2$ ជាអនុគមន៍ថេរគ្រប់ $x\neq 0$

គេទាញ $\dfrac{f(x)}{x}-x^2=\dfrac{f(1)}{1}-1^2=-3$

ដូចនេះ $f(x)=x(x^2-3)$ ។

ខ. កំណត់ x ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\sqrt{3}$

គេបាន $x(x^2-3)=\sqrt{3}$

$x^3-3x=\sqrt{3}$ តាង $x=2\cos\phi$ គេបាន

$$8\cos^3\phi - 6\cos\phi = \sqrt{3}$$

$$2\cos 3\phi = \sqrt{3}$$

$$3\phi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad ,k = 0,1,2$$

គេទាញ $\phi \in \{\frac{\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}\}$

ដូចនេះ $x_1 = 2\cos\frac{\pi}{18}, x_2 = 2\cos\frac{13\pi}{18}, x_3 = 2\cos\frac{25\pi}{18}$

លំហាត់ទី៦២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់គ្រប់ $x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 0\}$ ដោយ ៖

$x(2x+1)f(x) + f(\frac{1}{x}) = x+1$ ។

ចូរគណនា $S = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2009)$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2009)$

គេមាន $x(2x+1)f(x) + f(\frac{1}{x}) = x+1$ (1)

ជំនួស x ដោយ $\frac{1}{x}$ ក្នុងសមីការ (1) គេបាន ៖

$$\frac{1}{x}(\frac{2}{x}+1)f(\frac{1}{x}) + f(x) = \frac{1}{x}+1$$

$$f(\frac{1}{x}) + \frac{x^2}{x+2}f(x) = \frac{x^2+x}{x+2} \quad (2)$$

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\left[x(2x+1)-\frac{x^2}{x+2}\right]\ f(x)=x+1-\frac{x^2+x}{x+2}$$

$$\frac{2x(x+1)^2}{x+2}\ f(x)=\frac{2x+2}{x+2}$$

គេទាញបាន $\mathbf{f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}$

គេបាន $S=\sum_{k=1}^{2009}[f(k)]=\sum_{k=1}^{2009}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{2009}=\frac{2008}{2009}$

ដូចនេះ $S=f(1)+f(2)+f(3)+....+f(2009)=\dfrac{2008}{2009}$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គេឲ្យ A ជាចំនួនមួយមានលេខប្រាំខ្ទង់ដែលលេខខ្ទង់វារៀបតាមលំដាប់

$x\ ;\ x+1\ ;\ x+2\ ;\ x+1\ ;\ x$ ហើយ B ជាចំនួនមួយមានលេខ

ប្រាំមួយខ្ទង់ដែលលេខខ្ទង់វារៀបតាមលំដាប់

$x\ ;\ x+1\ ;\ x+2\ ;\ x+1\ ;\ x-1\ ;\ x$ ។

ចូរបង្ហាញថាបើ A ជាការេប្រាកដនោះ B ក៏ជាការេប្រាកដដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ ៖

យើងមានលេខទាំងប្រាំខ្ទង់នៃ A រៀបតាមលំដាប់

$x\ ;\ x+1\ ;\ x+2\ ;\ x+1\ ;\ x$ នាំឲ្យ $0<x<x+1<x+2\le 9$

ឬ $0<x\le 7$ ។

-បើ $x=1$ នោះ $A=12321=111^2$

-បើ $x=2$ នោះ $A=23432$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

-បើ $x=3$ នោះ $A=34543$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

-បើ $x=4$ នោះ $A=45654$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

-បើ $x=5$ នោះ $A=56765$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

-បើ $x=6$ នោះ $A=67876$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

-បើ $x=7$ នោះ $A=78987$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

សរុបមកគេបាន $x=1$ ជាតម្លៃដែលឲ្យ A ជាការេប្រាកដ ។

ដោយ B លេខខ្ទង់វារៀបតាមលំដាប់ ៖

$x\ ;\ x+1\ ;\ x+2\ ;\ x+1\ ;\ x-1\ ;\ x$

នោះចំពោះ $x=1$ គេបាន $B=123201=351^2$ ជាការេប្រាកដ ។

ដូចនេះ បើ A ជាការេប្រាកដនោះ B ក៏ជាការេប្រាកដដែរ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេឲ្យបីចំនួនគត់វិជ្ជមាន a , b , c ដែល $a+b+c=10$ ។

ចូររកតម្លៃធំបំផុតនៃ $P=a\times b\times c$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃធំបំផុតនៃ $P=a\times b\times c$

យើងមាន $a+b+c=10$ នាំឲ្យ $c=10-a-b$

យើងបាន $P = ab(10-a-b) = -b\ a^2 + b\ (10-b)\ a$

តាង $P(a) = -ba^2 + (10b - b^2)\ a$

គេបាន $P'(a) = -2ab + 10b - b^2$

បើ $P'(a) = 0$ គេទាញបាន $a = 5 - \frac{b}{2}$

ដោយ $P''(a) = -2b < 0\ ,\ \forall b \in \mathbb{N}$

ហេតុនេះ P(a) មានតម្លៃអតិបរមាចំពោះតម្លៃ $a = 5 - \frac{b}{2}$ ។

ដោយ $a \in IN^*$ នោះ b ត្រូវតែជាចំនួនគូ

បើ $b = 2k$ នោះ $a = 5 - k$

ហើយ $c = 10 - (5-k) - 2k = 5 - k$

ដោយ $a\ ,\ b\ ,\ c \in \mathbb{N}$ នោះ $\begin{cases} a = 5 - k \geq 1 \\ b = 2k \geq 1 \\ c = 5 - k \geq 1 \end{cases}$ ឬ $1 \leq k \leq 4$

-ចំពោះ $k = 1$

គេបាន $a = 4\ , b = 2\ \ , c = 4$ នាំឲ្យ $P = 4 \times 2 \times 4 = 32$

-ចំពោះ $k = 2$

គេបាន $a = 3\ , b = 4\ \ , c = 3$ នាំឲ្យ $P = 3 \times 4 \times 3 = 36$

-ចំពោះ $k = 3$

គេបាន $a = 2\ , b = 6\ , c = 2$ នាំឲ្យ $P = 2 \times 6 \times 2 = 24$

-ចំពោះ $k=4$

គេបាន $a=1$, $b=8$, $c=1$ នាំឲ្យ $P=1\times8\times1=32$

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមានៃ $P=a.b.c$ ស្មើនឹង 36 ។

លំហាត់ទី៦៥

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ។ ចូរបង្ហាញថាបើ $\tan\frac{A}{3}$, $\tan\frac{B}{3}$, $\tan\frac{C}{3}$

ជាឬសសមីការ $(E): x^3+ax^2+bx+c=0$

នោះគេបាន $\sqrt{3}+a=\sqrt{3}b+c$ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ ៖

យើងមាន $A+B+C=\pi$

(ផលបូកមុំក្នុងត្រីកោណ ABC)

យើងបាន $\tan(\frac{A}{3}+\frac{B}{3}+\frac{C}{3})=\tan[(\frac{A}{3}+\frac{B}{3})+\frac{C}{3}]$

$$\tan(\frac{A+B+C}{3})=\frac{\tan(\frac{A}{3}+\frac{B}{3})+\tan\frac{C}{3}}{1-\tan(\frac{A}{3}+\frac{B}{3})\tan\frac{C}{3}}$$

$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\dfrac{\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{B}{3}}{1-\tan\frac{A}{3}\tan\frac{B}{3}}+\tan\frac{C}{3}}{1-\dfrac{\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{B}{3}}{1-\tan\frac{A}{3}\tan\frac{B}{3}}.\tan\frac{C}{3}}$$

$$\sqrt{3}=\frac{\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{B}{3}+\tan\frac{C}{3}-\tan\frac{A}{3}\tan\frac{B}{3}\tan\frac{C}{3}}{1-(\tan\frac{A}{3}\tan\frac{B}{3}+\tan\frac{A}{3}\tan\frac{C}{3}+\tan\frac{B}{3}\tan\frac{C}{3})} \quad (1)$$

ដោយ $\tan\frac{A}{3}$, $\tan\frac{B}{3}$, $\tan\frac{C}{3}$ ជាឫសរបស់សមីការ (E)

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវៀែតគេមានទំនាក់ទំនង ៖

$$\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{B}{3}+\tan\frac{C}{3}=-a \quad (2)$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=b \quad (3)$$

$$\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}=-c \qquad (4)$$

យកទំនាក់ទំនង (2) , (3) និង (4) ជួសក្នុងសមីការ(1)គេបាន ៖

$$\sqrt{3}=\frac{-a+c}{1-b}$$

ឬ $\sqrt{3}-\sqrt{3}\,b=-a+c$

ដូចនេះ $\sqrt{3}+a=\sqrt{3}b+c$ ។

លំហាត់ទី៦៦

ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x, y \in \mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}$

គេបាន $\sin\frac{2\pi}{10}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10})=\cos\frac{3\pi}{10}$

តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ ៖

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$ និង $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=3\cos\frac{\pi}{10}-4\cos^3\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4(1-\sin^2\frac{\pi}{10})$$

ឬ $4\sin^2\frac{\pi}{10}-2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$ តាង $t=\sin\frac{\pi}{10}>0$

គេបាន $4t^2-2t-1=0$, $\Delta'=1+4=5>0$

គេទាញឫស $t_1=\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$ (មិនយក) , $t_2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ។

ដោយ $\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}=1$

នាំឲ្យ $\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ។

ខ. ស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

តាងអនុគមន៍ $f(x;y)=x^2+(x-y)^2-4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គេបាន ៖

$$f(x;y)=x^2+x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - 4(x^2 + y^2)\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - (x^2 + y^2)\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{5}}{2}\, x^2 - 2xy - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, y^2$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\, x^2 + 2xy + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, y^2 \right)$$

$$= -\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\, x + \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\, y \right)^2 \le 0 \ , \forall x, y \in IR$$

ដូចនេះ $x^2 + (x-y)^2 \le 4(x^2 + y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$ ។

<u>លំហាត់ទី៦៧</u>

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a, a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a} \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_{0}^{a} f(x).dx$, $q > 0$, $q \ne 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖

ចូរគណនា $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+3^x}.dx$ និង $J = \int_{-3}^{3} \frac{x^2 - 4|x| + 3}{e^x + 1}.dx$

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

គេមាន $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}+\int_{0}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}\ (1)$

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$

និងចំពោះ $x\in[-a,0]$ នាំឱ្យ $t\in[a,0]$

គេបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=-\int_{a}^{0}\frac{f(-t).dt}{1+q^{-t}}=\int_{0}^{a}\frac{q^t.f(-t)dt}{1+q^t}=\int_{0}^{a}\frac{q^x f(-x).dx}{1+q^x}$

ដោយ $f(x)$ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-x)=f(x)\ ,\ \forall x\in[-a,a]$

គេទាញបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x)}{1+q^x}.dx\ (2)$

យក (2) ទៅជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x).dx}{1+q^x}+\int_{0}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}$$

$$=\int_{0}^{a}\frac{(q^x+1)f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx$$

ដូចនេះ $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនាអាំងតេក្រាល

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$ ដោយ $\cos x$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេបាន ៖

$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$ ។

ដូចនេះ $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx=1$ ។

គណនា $J=\int_{-3}^{3}\frac{x^2-4|x|+3}{e^x+1}.dx$

ដោយ $f(x)=x^2-4|x|+3$ ជាអនុគមន៍គូព្រោះ $f(-x)=f(x)$

យើងបាន $J=\int_0^3\left(x^2-4|x|+3\right).dx$

$$=\int_0^3\left(x^2-4x+3\right).dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^3$$

$$=(9-18+9)-(0)=0$$

ដូចនេះ $J=\int_{-3}^{3}\frac{x^2-4|x|+3}{e^x+1}.dx=0$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq 18$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq 18$

តាង $\sum=\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}$

$$=\frac{\tan^2 A}{\cos A}+\frac{\tan^2 B}{\cos B}+\frac{\tan^2 C}{\cos C}$$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន ៖

$$\sum\geq\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)^2}{\cos A+\cos B+\cos C}\quad(1)$$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\tan x$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

គេបាន $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

$$f''(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)>0$$

តាមវិសមភាព $Jensen$ គេបាន ៖

$$f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

ឬ $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\tan(\frac{A+B+C}{3})=3\tan\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$

គេទាញ $(\tan A+\tan B+\tan C)^2 \geq 27$ (2)

តាងអនុគមន៍ $g(x)=\cos x$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

គេបាន $g'(x)=-\sin x$

$$g''(x)=-\cos x<0 \ ,\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

នាំឱ្យ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមវិសមភាព *Jensen* គេបាន ៖

$$g(A)+g(B)+g(C)\leq 3g(\frac{A+B+C}{3})$$

$$\cos A+\cos B+\cos C\leq 3\cos(\frac{A+B+C}{3})=3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$$

គេទាញ $\frac{1}{\cos A+\cos B+\cos C}\geq\frac{2}{3}$ (3)

គុណវិសមភាព $(2)\&(3)$ អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)^2}{\cos A+\cos B+\cos C}\geq\frac{27\times 2}{3}=18 \ (4)$$

តាម $(1)\&(4)$ គេទាញបាន $\sum\geq 18$ ។

ដូចនេះ $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq 18$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គេឲ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $4abc = a+b+c+1$

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c} \geq 2(ab+bc+ca)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ៖

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c} \geq 2(ab+bc+ca)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$4abc = a+b+c+1 \geq 4\sqrt[4]{abc}$ នាំឲ្យ $abc \geq 1$

គេទាញ $a+b+c = 4abc-1 \geq 3abc$ (1) (ព្រោះ $abc \geq 1$)

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c} \geq \frac{2bc}{a}+\frac{2ca}{b}+\frac{2ab}{c} \quad (2)$$

តាមវិសមភាព Cauchy - Schwarz គេមាន ៖

$$(ab+bc+ca)^2 \leq 3\left[(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\right]$$

ដោយ $\frac{2bc}{a}+\frac{2ca}{b}+\frac{2ab}{c} = \frac{2}{abc}[(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2]$

គេទាញ $\frac{2bc}{a}+\frac{2ca}{b}+\frac{2ab}{c} \geq \frac{2}{3abc}(ab+bc+ca)^2$ (3)

តាម (2) និង (3) គេទាញបាន៖

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\geq\frac{2}{3abc}(ab+bc+ca)^2\ (4)$$

យើងមាន $\begin{cases}(ab)^2+(bc)^2\geq 2ab^2c\\(bc)^2+(ca)^2\geq 2abc^2\\(ca)^2+(ab)^2\geq 2a^2bc\end{cases}$

គេបាន $2\,[\,(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\,]\geq 2abc(a+b+c)$

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geq abc(a+b+c)$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2(ab)(bc)+2(ab)(ca)+2(bc)(ca)$

គេបាន $(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)$

គេមាន $a+b+c\geq 3abc$ (តាម (1))

គេទាញ $(ab+bc+ca)^2\geq 9a^2b^2c^2$

ឬ $ab+bc+ca\geq 3abc$

នាំឲ្យ $\frac{2}{3abc}(ab+bc+ca)^2\geq 2(ab+bc+ca)\ (5)$

តាម (4) និង (5) គេទាញបាន ៖

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\geq 2(ab+bc+ca)$$ ។

លំហាត់ទី៧០

គណនាផលបូក

$S_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n!$

ដែល $n! = n(n-1)(n-2)....3.2.1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក

$S_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n!$

គេមាន $k.k! = [(k+1)-1].k!$

$k.k! = (k+1).k! - k!$

$k.k! = (k+1)! - k!$

គេបាន $S_n = (2!-1!) + (3!-2!) + (4!-3!) + ... + (n+1)! - n!$

ដូចនេះ $S_n = (n+1)! - 1$ ។

លំហាត់ទី៧១

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$

យើងមាន

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}=\frac{1}{2\sqrt{k+1}}$$

ឬ $\frac{1}{2\sqrt{k+1}}<\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

បើ $k=1$: $\frac{1}{2\sqrt{2}}<\sqrt{2}-1$

បើ $k=2$: $\frac{1}{2\sqrt{3}}<\sqrt{3}-\sqrt{2}$

បើ $k=3$: $\frac{1}{2\sqrt{4}}<\sqrt{4}-\sqrt{3}$

បើ $k=n$: $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

គេបាន $\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+.........+\frac{1}{\sqrt{n+1}})<\sqrt{n+1}-1$

គេទាញ $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+........+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}-2$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+.......+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}-1$$

$$<2\sqrt{n+1}$$

ដូចនេះ $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}$ ។

លំហាត់ទី៧២

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \quad , \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

គេបាន $\ln u_{n+1} = \frac{1}{2} \ln u_n$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $(\ln u_n)$ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$

តាមរូបមន្ត $\ln u_n = \ln u_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \ln 4 = \ln(4)^{\frac{1}{2^{n-1}}}$

ដូចនេះ $u_n = (4)^{\frac{1}{2^{n-1}}}$ ។

លំហាត់ទី៧៣

គេឲ្យ n ចំនួន $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in (0,1)$ ហើយគេតាង

$t_n = n.\frac{a_1.a_2.a_3....a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}$ ។

ចូរស្រាយថា $\sum_{k=1}^{n} \left(\log_{a_k} t_n\right) \ge (n-1)n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k} t_n\right) \geq (n-1)n$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គ្រប់ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in (0,1)$

គេមាន $\dfrac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$

គេទាញ $t_n \leq (a_1.a_2.a_3....a_n)^{\frac{n-1}{n}}$ ដោយ $0<a_k<1$

គេទាញ $\log_{a_k}(t_n) \geq \dfrac{n-1}{n}.\log_{a_k}(a_1.a_2...a_k)$

ឬ $\sum_{k=1}^{n}\left[\log_{a_k}(t_n)\right] \geq \dfrac{n-1}{n}.\sum_{k=1}^{n}\left[\log_{a_k}\left(a_1.a_2...a_k\right)\right]$ (*)

តាង $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\log_{a_k}(a_1.a_2....a_k)\right]$

$= n + (\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_1) + ... + (\log_{a_n} a_1 + \log_{a_1} a_n) + ... +$

$.... + (\log_{a_{n-1}} a_n + \log_{a_n} a_{n-1})$

តាមវិសមភាព $t+\dfrac{1}{t} \geq 2$, $\forall t>0$ គេទាញបាន ៖

$S_n \geq n + 2(n-1) + 2(n-2) + ... + 2\ ] = n^2$

តាមទំនាក់ទំនង (*) គេទាញបាន ៖

$\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k} t_n\right) \geq (n-1)n$ ។

លំហាត់ទី៧៤

ចូរស្រាយថា $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq xyz+\frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$

ចំពោះគ្រប់ $x\,;\,y\,;\,z\geq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq xyz+\frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$$

តាង $p=|(x-y)(y-z)(z-x)|$

គេមានឯកលក្ខណៈភាព

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\quad (i)$$

ចំពោះគ្រប់ $x\,;\,y\,;\,z\geq 0$ គេមាន ៖

$$x+y\geq |x-y|\,,\ y+z\geq |y-z|\,,\ z+x\geq |z-x|$$

គេបាន $2(x+y+z)\geq |x-y|+|y-z|+|z-x|$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន $2(x+y+z)\geq 3\sqrt[3]{p}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមានសមភាព

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{p^2}\quad (2)$$

ធ្វើវិធីគុណវិសមភាព (1) និង (2) គេទទួលបាន ៖

$$2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\geq \frac{9}{2}p$$

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\geq \frac{9}{4}p \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $x^3+y^3+z^3-3xyz\geq \frac{9}{4}p$

គេទាញ $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq xyz+\frac{3}{4}p$ ដោយ $p=|(x-y)(y-z)(z-x)|$

ដូចនេះ $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq xyz+\frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$ ។

<u>លំហាត់ទី៧៥</u>

ចូរស្រាយថា ៖

$$n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n})\geq (n+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n+1})$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ស្រាយថា

$$n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n})\geq (n+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n+1}) \quad (i)$$

តាង $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n}$

វិសមភាព (i) សមមូល $n(1+x)\geq (n+1)(x+\frac{1}{n+1})$

សមមូល $n+nx\geq nx+x+1$ ឬ $1+x\leq n$

គេមាន $1+x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\le 1+1+1+....+1=n$

គេបាន $1+x\le n$ ពិត

ដូចនេះ $n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n})\ge (n+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n+1})$ ។

លំហាត់ទី៧៦

គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d ។

គេតាង $S_n=\frac{\cos a_1}{\cos d}+\frac{\cos a_2}{\cos^2 d}+\frac{\cos a_3}{\cos^3 d}+...+\frac{\cos a_n}{\cos^n d}$ ចំពោះ $n=1,2,3,...$

ចូរស្រាយថា $S_n=\frac{\sin a_n}{\cos^n d\sin d}-\frac{\sin a_1}{\sin d}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $S_n=\frac{\sin a_n}{\cos^n d\sin d}-\frac{\sin a_1}{\sin d}$

ដោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d នោះ $a_{n+1}=a_n+d$

គេបាន $\sin a_{n+1}=\sin(a_n+d)=\sin a_n\cos d+\sin d\cos a_n$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n+1} d\ne 0$ គេបាន ៖

$$\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d}=\frac{\sin a_n\cos d+\sin d\cos a_n}{\cos^{n+1} d}$$

គេទាញ $\frac{\cos a_n}{\cos^n d}=\frac{\cos d}{\sin d}\left(\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d}-\frac{\sin a_n}{\cos^n d}\right)$

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \left[\frac{\cos d}{\sin d} \left(\frac{\sin a_{p+1}}{\cos^{p+1} d} - \frac{\sin a_p}{\cos^p d} \right) \right]$$

$$S_n = \frac{\cos d}{\sin d} \left(\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d} - \frac{\sin a_1}{\cos d} \right) = \frac{\sin a_{n+1}}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \dfrac{\sin a_1}{\sin d}$ ។

លំហាត់ទី៧៧

គេឲ្យសមីការ $(E):\ x^2 + 2(2m+3)x + 4m^2 + 8m + 8 = 0$

ក-ចូរកំនត់បណ្តាតម្លៃ $m \in \mathbb{N}$ ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឬស

ជាចំនួនគត់រឺឡាទីប ។

ខ-រកឬសដែលជាចំនួនគត់រឺឡាទីបរបស់សមីការ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ m

សមីការ $(E):\ x^2 + 2(2m+3)x + 4m^2 + 8m + 8 = 0$

គេមាន $\Delta' = (2m+3)^2 - (4m^2 + 8m + 8) = 4m + 1$

ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឬសជាចំនួនគត់រឺឡាទីបលុះត្រាតែ

$\Delta' = 4m + 1$ ជាការេប្រាកដ

មានន័យថា $4m + 1 = k^2 ,\ \forall k \in \mathbb{N}$

គេបាន $m=\dfrac{k^2-1}{4}$ តែដោយសារតែ $m\in\mathbb{N}$

ដូចនេះគេត្រូវឲ្យ k ជាចំនួនសេស

ពីព្រោះបើ $k=2p-1$, $\forall p\in\mathbb{N}$

នោះ $m=\dfrac{(2p-1)^2-1}{4}=p(p-1)$ ជាចំនួនគត់ ។

ដូចនេះ $m=p(p-1)$, $\forall p\in\mathbb{N}$ ។

ខ-រកឬសដែលជាចំនួនគត់រឺLទាហ្វីរបស់សមីការ

តាមសម្រាយខាងលើបើ $m=p(p-1)$, $\forall p\in\mathbb{N}$

គេបាន $\Delta'=4m+1=4p(p-1)+1=(2p-1)^2$

គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} x_1=-(2m+3)+(2p-1)=-2p^2+4p-4 \\ x_2=-(2m+3)-(2p-1)=-2p^2-2 \end{array}\right.$

ដូចនេះ $x_1=-2p^2+4p-4$, $x_2=-2p^2-2$, $\forall p\in\mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី៧៨

គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំនៃរង្វង់ចារិកក្នុង និង ចារិកក្រៅ

ប្រស់ត្រីកោណកែង ABC មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $R\geq(1+\sqrt{2})\,r$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $R\geq(1+\sqrt{2})\,r$

តាង $T=\cos A+\cos B+\cos C$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin\frac{A}{2}(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{B-C}{2})$$

$$=1-2\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{B+C}{2}-\cos\frac{B-C}{2})$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad(1)$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

ដោយ $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

គេបាន $a^2=b^2+c^2-2bc+4bc\sin^2\frac{A}{2}$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$

យក $p=\frac{a+b+c}{2}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}a-b+c=2(p-b)\\a+b-c=2(p-c)\end{cases}$

គេបាន $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{4(p-b)(p-c)}{4bc}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$

គេទាញ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

ដូចគ្នាដែរ $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$; $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$ (2)

តាមរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ៖

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\frac{abc}{4R}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} abc=4RS \\ (p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=\frac{S.p.r}{p}=S.r \end{cases}$

តាម (2) អាចសរសេរ ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R} \quad (3)$$

យកទំនាក់ទំនង (3) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R} \quad (4)$$

ដោយ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះគេអាចជ្រើសរើសយក $A=\frac{\pi}{2}$

ហើយ $B=\frac{\pi}{2}-C$ ជួសក្នុងទំនាក់ទំនង (4) គេបាន ៖

$$\cos\frac{\pi}{2}+\cos(\frac{\pi}{2}-C)+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

$$\sin C+\cos C=1+\frac{r}{R} \quad (5)$$

តាមទំនាក់ទំនង $\sin C+\cos C=\sqrt{2}\,\sin(\frac{\pi}{4}+C)\le\sqrt{2}$

នោះតាម (5) គេបាន $1+\frac{r}{R}\le\sqrt{2}$

នាំឲ្យ $R\ge\frac{r}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)r$

ដូចនេះ $R\ge(1+\sqrt{2})r$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពកាលណា ៖

$\sin C+\cos C=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+C)=\sqrt{2}$ នាំឲ្យ $C=\frac{\pi}{4}$ និង $B=\frac{\pi}{4}$

ពោលគឺត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

លំហាត់ទី៧៩

គេឱ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=x+y+z$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x+y}{1+z^2}+\frac{y+z}{1+x^2}+\frac{z+x}{1+y^2}\ge\frac{27}{2xyz}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{x+y}{1+z^2}+\frac{y+z}{1+x^2}+\frac{z+x}{1+y^2}\ge\frac{27}{2xyz}$

តាង $T=\frac{x+y}{1+z^2}+\frac{y+z}{1+x^2}+\frac{z+x}{1+y^2}$

ឬ $T=\frac{(x+y)^2}{x+y+z^2(x+y)}+\frac{(y+z)^2}{y+z+x^2(y+z)}+\frac{(z+x)^2}{z+x+y^2(z+x)}$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេមាន ៖

$$\frac{a_1^{\ 2}}{b_1}+\frac{a_2^{\ 2}}{b_2}+\frac{a_3^{\ 2}}{b_3}+....+\frac{a_n^{\ 2}}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+a_3+...+a_n)^2}{b_1+b_2+b_3+...+b_n}$$

គេបាន ៖

$$T\geq\frac{\left[(x+y)+(y+z)+(z+x)\right]^2}{2(x+y+z)+z^2(x+y)+x^2(y+z)+y^2(z+x)}$$

$$T\geq\frac{4(x+y+z)^2}{2xyz+z^2x+z^2y+x^2y+x^2z+y^2z+y^2x}$$

$$T\geq\frac{4(x+y+z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$$(x+y)+(y+z)+(z+x)\geq 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$2(x+y+z)\ \ \geq 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$8(x+y+z)^3\geq 27(x+y)(y+z)(z+x)$$

គេទាញ $\dfrac{4(x+y+z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq\dfrac{27}{2(x+y+z)}=\dfrac{27}{2xyz}$

នាំឱ្យ $T\geq\dfrac{27}{2xyz}$

ដូចនេះ $\dfrac{x+y}{1+z^2}+\dfrac{y+z}{1+x^2}+\dfrac{z+x}{1+y^2}\geq\dfrac{27}{2xyz}$ ។

លំហាត់ទី៨០

ចំនួនពិត $a, , b , c , x , y , z$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a \ge b \ge c > 0$ និង $x \ge y \ge z > 0$

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \frac{3}{4}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \frac{3}{4}$$

ដោយ $a \ge b \ge c > 0$ និង $x \ge y \ge z > 0$

គេបាន $(b-c)((z-y) = bz+cy-by-cz \le 0$ ឬ $bz+cy \le by+cz$

គេទាញ $(by+cz)(bz+cy) \le (by+cz)^2 \le 2(b^2y^2+c^2z^2)$

ហេតុនេះ $\dfrac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} \ge \dfrac{a^2x^2}{2(b^2y^2+c^2z^2)} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{X}{Y+Z}$ (1)

ដែល $X = a^2x^2$, $Y = b^2y^2$, $Z = c^2z^2$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន

$\dfrac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} \ge \dfrac{1}{2}.\dfrac{Y}{Z+X}$ (2) , $\dfrac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \dfrac{1}{2}.\dfrac{Z}{X+Y}$ (3)

តាង $T = \dfrac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\dfrac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\dfrac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}$

គេបាន $T \geq \frac{1}{2}(\frac{X}{Y+Z}+\frac{Y}{Z+X}+\frac{Z}{X+Y})$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$$(X+Y)+(Y+Z)+(Z+X) \geq 3\sqrt[3]{(X+Y)(Y+Z)(Z+X)}$$

ឬ $X+Y+Z \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{(X+Y)(Y+Z)(Z+X)} \quad (i)$

ហើយ $\frac{1}{Y+Z}+\frac{1}{Z+X}+\frac{1}{X+Y} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(X+Y)(Y+Z)(Z+X)}} \quad (ii)$

គុណវិសមភាព (i) និង (ii) អង្គ និង អង្គ គេបាន ៖

$$\frac{X+Y+Z}{Y+Z}+\frac{X+Y+Z}{Z+X}+\frac{X+Y+Z}{X+Y} \geq \frac{9}{2}$$

$$\frac{X}{Y+Z}+1+\frac{Y}{Z+X}+1+\frac{Z}{X+Y}+1 \geq \frac{9}{2}$$

$$\frac{X}{Y+Z}+\frac{Y}{Z+X}+\frac{Z}{X+Y} \geq \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

គេទាញ $T \geq \frac{3}{4}$ ពិត

ដូចនេះ

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4} \quad ។$$

លំហាត់ទី៨១

គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$

ក-ចូរស្រាយថាបើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$ នោះគេបាន

$f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ខ-ក្នុងករណីនេះគេសន្មតថា $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$ ។

បើ $b>a$ ចំពោះគ្រប់ $\lambda\in\mathbb{R}$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a(\lambda^2-k)+b(\lambda+k)+c}{b-a}>k$$

ដែល k ជាចំនួនពិតថេរមួយដែលគេឲ្យ ។

គ-អនុវត្តន៍ ចំពោះគ្រប់ត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$

បើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$ នោះបង្ហាញថាគេមាន $\dfrac{a+b+a}{b-a}>3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ស្រាយថាបើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$ នោះគេបាន

$f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

យើងមាន $f(x)=ax^2+bx+c$

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[(x)^2+2(x)(\frac{b}{2a})+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\ ,\ \Delta=b^2-4ac$$

យើងឃើញថាបើ $\Delta<0$ នោះ $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$

នាំឲ្យ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ ។

ហេតុនេះ $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ មានសញ្ញាដូច a

ហើយបើ $a>0$ នោះគេបាន ៖

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]>0\ ,\forall x\in IR$$ ។

ដូចនេះបើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$

នោះគេបាន $f(x)>0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ។

ខ-បង្ហាញថា $\frac{a(\lambda^2-k)+b(\lambda+k)+c}{b-a}>k$

តាមសម្រាយខាងលើបើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$

នោះ $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $\lambda\in\mathbb{R}$

គេបាន $f(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c>0$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $kb-ka$

គេបាន $a\lambda^2+b\lambda+c+kb-ka>kb-ka$

$$a(\lambda^2-k)+b(\lambda+k)+c>k\ (b-a)\quad (1)$$

ដោយ $b>a$ ឬ $b-a>0$

នោះយើងចែកទំនាក់ទំនង (1) នឹង $b-a$ វិជ្ជមាន

យើងបាន $\frac{a(\lambda^2-k)+b(\lambda+k)+c}{b-a}>k$

ជាវិសមភាពដែលត្រូវបង្ហាញ ។

គ-អនុវត្តន៍ បង្ហាញថា $\frac{a+b+a}{b-a}>3$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះគ្រប់ត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$

ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$

បើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$ នោះយើងមាន

$$\frac{a(\lambda^2-k)+b(\lambda+k)+c}{b-a}>k$$

ដែល $\lambda\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$ និង k :ថេរ ។

បើយើងជ្រើសរើស $k=3$ និង $\lambda=-2$

យើងបាន $\frac{a(4-3)+b(-2+3)}{b-a}>3$

ឬ $\frac{a+b+c}{b-a}>3$ ពិត ។

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$

ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$

បើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$

នោះបង្ហាញថាគេមាន $\frac{a+b+a}{b-a}>3$ ។

លំហាត់ទី៨២

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

ដំណោះស្រាយ

គេមានសមភាព ៖

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^5+b^5+c^5=(a+b+c)^5-5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

គេបាន ៖

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}=\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$

ឬ $3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq 2(a+b+c)^2$

ឬ $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$$ab+bc+ca \leq \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$ ។

លំហាត់ទី៨៣

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$

ចំពោះគ្រប់ $0<x\,,\,y\,,\,z<1$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1$ ដែល $0<x<1$

គេបាន $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ ហើយ $f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}>0$ ចំពោះ $0<x<1$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមទ្រឹស្តីបទ *Jensen* ចំពោះគ្រប់ $0<x\,,\,y\,,\,z<1$ គេបាន

$$f(x)+f(y)+f(z)\geq3\,f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

ដោយ $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$ នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើន ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$

គេទាញ $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq f(\sqrt[3]{xyz})$ ហេតុនេះ

$$f(x)+f(y)+f(z)\geq3f(\sqrt[3]{xyz})$$

ដូចនេះ $\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$ ។

លំហាត់ទី៨៤

គេឱ្យពហុធា $P(x)=2x^4+ax^2+bx+c$

កំណត់ $a\,,b,c$ ជាចំនួនពិតដោយដឹងថា $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-2$ ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង x^2-1 សល់ x ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ $a\,,b,c$ ជាចំនួនពិត

ដោយ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-2$ នោះ $P(2)=32+4a+2b+c=0$

គេទាញ $4a+2b+c=-32 \ (1)$

ម៉្យាងទៀត $P(x)$ ចែកនឹង x^2-1 សល់ x នោះ $P(x)=(x^2-1)q(x)+x$

គេបាន $P(1)=1$ និង $P(-1)=-1$

គេទាញបាន $P(1)=2+a+b+c=1$ ឬ $a+b+c=-1 \ (2)$

ហើយ $P(-1)=2+a-b+c=-1$ ឬ $a-b+c=-3 \ (3)$

ដកសមីការ (2) និង (3) គេបាន $2b=2$ នាំឱ្យ $b=1$ ។

តាម (1) និង (2) គេបាន $\begin{cases}4a+c=-34\\ a+c=-2\end{cases}$ នាំឱ្យ $a=-\frac{32}{3}$ និង $c=\frac{26}{3}$

ដូចនេះ $a=-\frac{32}{3}\,,\ b=1\,,\ c=\frac{26}{3}$ ។

លំហាត់ទី៨៥

ចូរកំនត់គ្រប់គូតំលៃគត់មិនអវិជ្ជមាន (x , y) បើគេដឹងថា ៖

$(xy-7)^2 = x^2+y^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់គូតំលៃគត់មិនអវិជ្ជមាន (x , y)

គេមាន $(xy-7)^2 = x^2+y^2$

$$x^2y^2-14xy+49 = x^2+y^2$$

$$(x^2y^2-12xy+36)+13 = (x^2+2xy+y^2)$$

$$(xy-6)^2+13 = (x+y)^2$$

$$(x+y)^2-(xy-6)^2 = 13$$

$$(x+y+xy-6)(x+y-xy+6) = 13$$

គេទាញ $\begin{cases} x+y+xy-6=13 \\ x+y-xy+6=1 \end{cases} \quad (S_1)$

ឬ $\begin{cases} x+y+xy-6=1 \\ x+y-xy+6=13 \end{cases} \quad (S_2)$

ឬ $\begin{cases} x+y+xy-6=-13 \\ x+y-xy+6=-1 \end{cases} \quad (S_3)$

ឬ $\begin{cases} x+y+xy-6=-1 \\ x+y-xy+6=-13 \end{cases} \quad (S_4)$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $(S_1); (S_2);(S_3);(S_4)$

គេទទួលបានគូចម្លើយ ៖

$(x , y) = \{ (0,7);(7,0);(3,4);(4,3) \}$ ។

លំហាត់ទី៨៦

គេឲ្យបួនចំនួនវិជ្ជមាន a , b , c , d ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

ចំពោះគ្រប់ $a>0\,,b>0$, $c>0\,,d>0$

យើងមាន $\begin{cases} a+b+c+d>a+b+c>a+c \\ a+b+c+d>b+c+d>b+d \\ a+b+c+d>c+d+a>c+a \\ a+b+c+d>d+a+b>b+d \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} \frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{a+c} \\ \frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b}{b+d} \\ \frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{c}{a+c} \\ \frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d}{b+d} \end{cases}$

ដោយបូកទំនាក់ទំនងទាំងនេះអង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៨៧

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})+i.(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})$

ដែល x ជាចំនួនពិត។

ចូរកំនត់រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិចនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិច

យើងបាន $|Z|=\sqrt{(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2+(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2}$

តាង $f(x)=(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2+(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2$

$$=\cos^4 x+2+\frac{1}{\cos^4 x}+\sin^4 x+2+\frac{1}{\sin^4 x}$$

$$=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x})$$

$$=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\sin^4 x\cos^4 x})$$

$$f(x)=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)(1+\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x})$$

$$=4+\left[(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right](1+\frac{16}{\sin^4 2x})$$

$$=4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})$$

ដោយគេមាន $\sin^2 2x \le 1$ នាំឲ្យ $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x \ge \frac{1}{2}$

និង $1+\frac{16}{\sin^4 2x} \ge 17$

គេទាញ $4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x}) \ge 4+\frac{17}{2}=\frac{25}{2}$

យើងបាន $f(x)=4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x}) \ge \frac{25}{2}$

ដោយ $|Z|=\sqrt{f(x)}$ គេទាញបាន $|Z| \ge \frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះម៉ូឌុលអប្បបរមានៃ Z គឺ $|Z|_{\min}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+.....+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}}}}$

ចូរកំនត់បណ្តាតម្លៃ $x \in \mathbb{N}$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$មានតម្លៃលេខ

ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ $x \in \mathbb{N}$

យើងមាន ៖

$$x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}+2.\frac{1}{2}\sqrt{x+\frac{1}{4}}.+(x+\frac{1}{4})$$

$$=(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}})^2$$

គេទាញបាន $f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ ។

សម្មតថាមានចំនួនគត់ $k\in\mathbb{N}$ ដែល $f(x)=k$

គេបាន $\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=k$

ឬ $x+\frac{1}{4}=(k-\frac{1}{2})^2=k^2-k+\frac{1}{4}$

គេទាញ $x=k(k-1)$

ដោយ $k\in\mathbb{N}$ នោះ $x=k(k-1)\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

ដូចនេះបណ្តាតម្លៃ x ដែលត្រូវរកនោះគឺ $x=k(k-1)$, $\forall k\in\mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី៨៩

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ដំណោះស្រាយ

$$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$$

តាង $E_n(x)=\cos^n x+\cos^n(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^n(x+\frac{4\pi}{3})$ (i)

តាមរូបមន្ត $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

គេទាញ $\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n-3} x$ គេបាន ៖

$$\cos^n x = \frac{3}{4}\cos^{n-2} x + \frac{1}{4}\cos 3x \cos^{n-3} x \ (1)$$

ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន ៖

$$\cos^n (x + \frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{4}\cos^{n-2}(x + \frac{2\pi}{3}) + \frac{1}{4}\cos 3x \cos^{n-3}(x + \frac{2\pi}{3}) \ (2)$$

$$\cos^n (x + \frac{4\pi}{3}) = \frac{3}{4}\cos^{n-2}(x + \frac{4\pi}{3}) + \frac{1}{4}\cos 3x \cos^{n-3}(x + \frac{4\pi}{3}) \ (3)$$

ដោយបូកសមីការ (1); (2) និង (3) គេបាន ៖

$$E_n(x) = \frac{3}{4}E_{n-2}(x) + \frac{1}{4}\cos 3x \, E_{n-3}(x) \quad (ii)$$

តាម (i) ចំពោះ $n = 0$; $n = 1$, $n = 2$ គេបាន ៖

$$E_0(x) = 3$$

$$E_1(x) = \cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(x + \frac{4\pi}{3})$$

$$E_1(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$$

$$E_2(x) = \cos^2 x + (-\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2 + (-\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2$$

$$E_2(x) = \frac{3}{2}\cos^2 x + \frac{3}{2}\sin^2 x = \frac{3}{2}$$

តាម (ii) ចំពោះ $n = 3$; $n = 4$, $n = 5$; $n = 7$ គេបាន

$$E_3(x)=\frac{3}{4}E_1(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_0(x)=\frac{3}{4}\cos 3x$$

$$E_4(x)=\frac{3}{4}E_2(x)+\frac{1}{4}\cos 3xE_1(x)=\frac{9}{8}$$

$$E_5(x)=\frac{3}{4}E_3(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_2(x)=\frac{9}{16}\cos 3x+\frac{3}{8}\cos 3x=\frac{15}{16}\cos 3x$$

$$E_7(x)=\frac{3}{4}E_5(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_4(x)=\frac{45}{64}\cos 3x+\frac{9}{32}\cos 3x=\frac{63}{64}\cos 3x$$

ដូចនេះ $\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$ ។

លំហាត់ទី៩០

គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$

យើងមាន $(a-1)^2=a^2-2a+1\ge 0$

គេទាញ $a^2+2\ge 2a+1$ នាំឲ្យ $\frac{a}{a^2+2}\le\frac{a}{2a+1}$

ស្រាយតាមរបៀបដូចគ្នា $\frac{b}{b^2+2}\le\frac{b}{2b+1}$; $\frac{c}{c^2+2}\le\frac{c}{2c+1}$

គេបាន $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}$ (1)

មាន $\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\right)$

ដោយ $\frac{1}{2a+1}=\frac{bc}{2abc+bc}=\frac{bc}{2+bc}$ (ព្រោះ $abc=1$)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{2b+1}=\frac{ac}{2+ac}$, $\frac{1}{2c+1}=\frac{ab}{2+ab}$

គេទាញ $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}=\frac{bc}{2+bc}+\frac{ac}{2+ac}+\frac{ab}{2+ab}$

ដោយ $\frac{bc}{2+bc}+\frac{ac}{2+ac}+\frac{ab}{2+ab}\geq\frac{(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab})^2}{6+bc+ca+ab}$

គេទាញ $\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}\leq\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab})^2}{6+bc+ca+ab}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\leq\frac{3}{2}-\frac{1}{2}.\frac{(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab})^2}{6+bc+ca+ab}\quad(3)$$

ជាបន្តទៅនេះយើងនឹងស្រាយថា $\frac{(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab})^2}{6+bc+ca+ab}\geq 1$

តាង $x=\sqrt{ab}$; $y=\sqrt{bc}$; $z=\sqrt{ac}$ ហើយ $xyz=abc=1$

វិសមភាពសមមូល $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{6+x+y+z}\geq 1$

$\Leftrightarrow(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\geq 6+x+y+z$

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})\geq 6$

តាមវិមសមភាព $AM-GM$ $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$

គេទាញ $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{6+x+y+z}\geq 1$ ពិតហើយ $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{6+x+y+z}\geq 1$ ពិត

ហេតុនេះតាម (3) គេបាន $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

ដូចនេះ $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$ ។

លំហាត់ទី៩១

គេឱ្យ x និង y ជាចំនួនពិត ។

គេដឹងថា x^2+y^2 , x^3+y^3 និង x^4+y^4 ជាចំនួនសនិទាន ។

ចូរស្រាយថា xy និង $x+y$ ជាចំនួនសនិទាន ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា xy និង $x+y$ ជាចំនួនសនិទាន

យើងមាន $x^2y^2=\frac{1}{2}\left[\ (x^2+y^2)^2-(x^4+y^4)\right]$ ជាចំនួនសនិទាន

$x^6+y^6=(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2)$ ជាចំនួនសនិទាន

ហើយ $x^3y^3=\frac{1}{2}\left[\ (x^3+y^3)^2-(x^6+y^6)\ \right]$ ជាចំនួនសនិទាន

យើងទាញបាន $xy=\frac{x^3y^3}{x^2y^2}$ ជាចំនួនសនិទាន ។

ម៉្យាងទៀត $x+y=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2-xy}$ ជាចំនួនសនិទាន ។

ដូចនេះ xy និង $x+y$ ជាចំនួនសនិទាន ។

លំហាត់ទី៩២

ចូរកំនត់ផ្នែកគត់នៃចំនួន $\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+....+\sqrt[3]{24}}}}$

(មាន n ឫសទីបី) ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ផ្នែកគត់

តាង $a_n=\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+....+\sqrt[3]{24}}}}$ ដែល $n\geq 1$

យើងមាន $a_1=\sqrt[3]{24}$ ដោយ $2<\sqrt[3]{24}<3$ នោះ $2<a_1<3$

សន្មតថាវាពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $2<a_k<3$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$ គឺ $2<a_{k+1}<3$

យើងមាន $a_{k+1}=\sqrt[3]{24+a_k}$ ដោយ $2<a_k<3$

នោះគេបាន $26<24+a_k<27$ ឬ $2<\sqrt[3]{26}<\sqrt[3]{24+a_k}<3$

នាំឱ្យ $2<a_{k+1}<3$ ពិត ។

គេបាន $2<a_n<3$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

ដូចនេះផ្នែកគត់នៃ $a_n=\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+....+\sqrt[3]{24}}}}$ គឺ $\lfloor a_n \rfloor=2$ ។

លំហាត់ទី៩៣

គេឱ្យ $a\,,b\,,c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $1+\dfrac{3}{a+b+c}\ge\dfrac{6}{ab+bc+ca}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $1+\dfrac{3}{a+b+c}\ge\dfrac{6}{ab+bc+ca}$

យើងតាង $a=\dfrac{1}{x}\,;b=\dfrac{1}{y}\,;c=\dfrac{1}{z}$ នោះវិសមភាពអាចសរសេរ ៖

$1+\dfrac{3}{xy+yz+zx}\ge\dfrac{6}{x+y+z}$ (ព្រោះ $xyz=\dfrac{1}{abc}=1$)

យើងមាន $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$

គេទាញ $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2xy+2yz+2zx$

គេបាន $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$

នាំឱ្យ $1+\dfrac{3}{xy+yz+zx}\ge 1+\dfrac{9}{(x+y+z)^2}\ge\dfrac{6}{x+y+z}$

ព្រោះ $1-\dfrac{6}{x+y+z}+\dfrac{9}{(x+y+z)^2}=\left(1-\dfrac{3}{x+y+z}\right)^2\ge 0$

ដូចនេះ $1+\dfrac{3}{a+b+c}\ge\dfrac{6}{ab+bc+ca}$ ។

លំហាត់ទី៩៤

គេឲ្យ a , b , c , d ជាបួនចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c+d=1$ ។

បង្ហាញថា $6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=6x^3-x^2$ មានក្រាបតំនាង (c)

គេមាន $f'(x)=12x^2-2x$

យកចំនុច $M\in(c)$មានអាប់ស៊ីស $x=\frac{1}{4}$ និងអរដោនេ $f(\frac{1}{4})=\frac{1}{32}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ M គឺ ៖

$$y-f(\frac{1}{4})=f'(\frac{1}{4})(x-\frac{1}{4})$$

$$y-\frac{1}{32}=\frac{5}{8}(x-\frac{1}{4})\Rightarrow y=\frac{5x}{8}-\frac{1}{8}$$

ចំពោះ $x>0$ គេមាន $f(x)-(\frac{5x}{8}-\frac{1}{8})=6(x-\frac{1}{4})^2(x+\frac{1}{3})\geq 0$

គេទាញ $6x^3-x^2\geq\frac{5x}{8}-\frac{1}{8}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

គេបាន $6(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2)\geq\frac{5}{8}(a+b+c+d)-\frac{4}{8}$

ដោយ $a+b+c+d=1$

ដូចនេះ$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៩៥

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9 \\ (\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})=18 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9 \\ (\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})=18 \end{cases}$$

ដោយប្រើឯកលក្ខណៈភាព

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})^3=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+3(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})$$

$$(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})^3=1+9+3(18)=64$$

គេទាញ $1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}=4$ ឬ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}=3$

គេបាន $(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})^3=27$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{y}}(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})=27$$

$$9+\frac{3}{\sqrt[3]{xy}}(3)=27$$

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{xy}}=3$$

$$xy=\frac{1}{8}$$

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9\\ xy=\frac{1}{8}\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x+y=\frac{9}{8}\\ xy=\frac{1}{8}\end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយសមីការវៀត $z^2-\frac{9}{8}z+\frac{1}{8}=0$

គេទទួលបានគូចម្លើយ ៖

($x=1\,,\ y=\frac{1}{8}$) ឬ ($x=\frac{1}{8}\,,\ y=1$) ។

លំហាត់ទី៩៦

ចូរគណនា $S=\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S=\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}$

តាមរូបមន្ត $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

ឬ $\cos^3 a = \frac{3}{4}\cos a + \frac{1}{4}\cos 3a$

កន្សោមដែលឲ្យអាចសរសេរជា ៖

$$S = \frac{3}{4}(\cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}) + \frac{1}{4}(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{7\pi}{3})$$

តាង $M = \cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}$

ដោយ $-\cos\frac{4\pi}{9} = \cos\frac{13\pi}{9}$

$M = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}$ គុណនឹង $2\sin\frac{\pi}{3}$ គេបាន

$$2M\ \sin\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{7\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{13\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$2\ .M\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{4\pi}{9} - \sin(-\frac{2\pi}{9}) + \sin\frac{10\pi}{9} - \sin\frac{4\pi}{9} + \sin\frac{16\pi}{9} - \sin\frac{10\pi}{9}$$

$$2\ M\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{2\pi}{9} + \sin\frac{16\pi}{9} = 2\ \sin\pi\ \cos(-\frac{7\pi}{9}) = 0$$

គេទាញបាន $M = 0$

តាង $N = \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

គេបាន $S = \frac{3}{4}M + \frac{1}{4}N = \frac{3}{8}$ ។

ដូចនេះ $S = \cos^3\frac{\pi}{9} - \cos^3\frac{4\pi}{9} + \cos^3\frac{7\pi}{9} = \frac{3}{8}$ ។

លំហាត់ទី៩៧

គេមាន $99^2 = 9801$, $999^2 = 998001$, $9999^2 = 99980001$

$99999^2 = 9999800001$ ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅនិងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះផង

ដំណោះស្រាយ

តាមបំរាប់គេមាន ៖

$99^2 = 9801$

$999^2 = 998001$

$9999^2 = 99980001$

$99999^2 = 9999800001$

តាមលំនាំនេះយើងអាចបង្កើតរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

$$\underbrace{999.....999}_{(n)}{}^2 = \underbrace{999.....999}_{(n-1)}8\underbrace{000.....000}_{(n-1)}1$$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ៖

យើងតាង $A = \underbrace{999.........999}_{(n-1)}8\underbrace{000.........000}_{(n-1)}1$

$$= \underbrace{999.........999}_{(n-1)} \times 10^{n+1} + 8.10^n + 1$$

$$= (10^{n-1} - 1)10^{n+1} + 8.10^n + 1$$

$$= 10^{2n} - 10^{n+1} + 8.10^n + 1$$

$$= 10^{2n} - 2.10^n + 1$$

$$= (10^n - 1)^2 = \underbrace{999...........999}_{(n)}{}^2$$

ដូចនេះគេបានរូបមន្ត $\underbrace{999.....999}_{(n)}{}^2 = \underbrace{999.....999}_{(n-1)}8\underbrace{000.....000}_{(n-1)}1$ ។

លំហាត់ទី៩៨

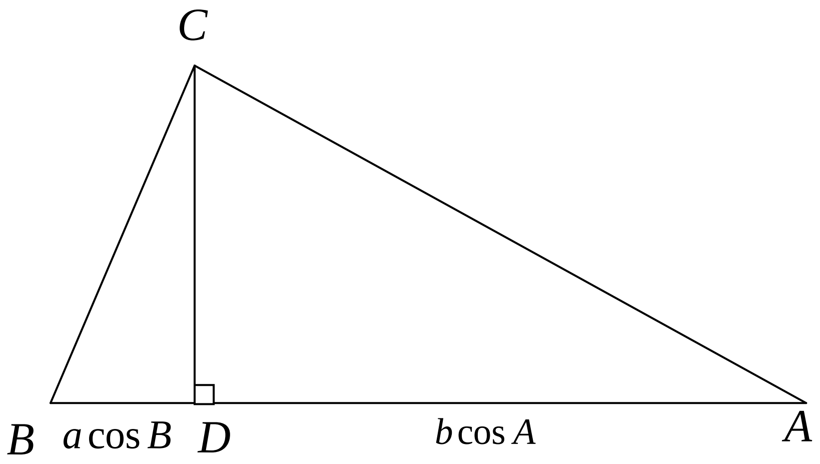
គេឱ្យត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុង និង មុំផ្ទៀងផ្ទាត់

$c^2 = 4ab\cos A\cos B$

ចូរស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត



ក្នុងត្រីកោណកែង CBD និង CAD យើងមាន ៖

$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{a}$ នោះ $BD = a\cos B$

$\cos A = \frac{DA}{AC} = \frac{DA}{b}$ នោះ $DA = b\cos A$

យើងមាន $BA = BD + DA$ ឬ $c = a\cos B + b\cos A$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន

$c^2 = a^2\cos^2 B + 2ab\cos A\cos B + b^2\cos^2 A$

ដោយ $c^2 = 4ab\cos A\cos B$

គេទាញ $a^2\cos^2 B+2ab\cos A\cos B+b^2\cos^2 A=4ab\cos A\cos B$

$$a^2\cos^2 B-2ab\cos A\cos B+b^2\cos^2 A=0$$

$$(a\cos B-b\cos A)^2=0$$

$$a\cos B-b\cos A=0$$

$$a\cos B=b\cos A$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

គេបាន $a=2R\sin A$ និង $b=2R\sin B$

ហេតុនេះ $2R\sin A\cos B=2R\sin B\cos A$

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}$$

$$\tan A=\tan B$$

នាំឱ្យ $A=B$ ។ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

លំហាត់ទី៩៩

គេឱ្យ $a\ ,b\ ,c$ ជាបីចំនួនពិតដែល $a,b\ ,c\in(1\ ,+\infty\ )$

ឬ $a\ ,b\ ,c\in(0\ ,1)$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab\ge 4(\log_{ab}c+\log_{bc}a+\log_{ca}b)$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab\ge 4(\log_{ab}c+\log_{bc}a+\log_{ca}b)$ (*)

យើងយក d ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(1,+\infty)$ ឬ $(0,1)$ ។

តាមរូបមន្តប្តូរគោលគេបាន $\log_a bc = \dfrac{\log_d bc}{\log_d a} = \dfrac{\log_d b + \log_d c}{\log_d a}$

$\log_b ca = \dfrac{\log_d ca}{\log_d b} = \dfrac{\log_d c + \log_d a}{\log_d b}$; $\log_c ab = \dfrac{\log_d ab}{\log_d c} = \dfrac{\log_d a + \log_d b}{\log_d c}$

ដោយយក $x = \log_d a$, $y = \log_d b$, $z = \log_d c$ វិសមភាព $(*)$ សមមូល

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 4\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right)$$

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{y}{x} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{z}{y}\right) \geq \frac{4x}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{4z}{x+y} \quad (**)$$

តាមវិសមភាព $AM - HM$ គេមាន $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geq \dfrac{4}{y+z}$ នាំឱ្យ $\dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{z} \geq \dfrac{4x}{y+z}$

តាមវិសមភាពនេះគេទាញបាន $(**)$ ពិត ។

ដូចនេះ $\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b)$ ។

លំហាត់ទី១០០

គេឱ្យ $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - i\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A = i.\dfrac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\dfrac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $A = i.\dfrac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\dfrac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

យើងមាន $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - i\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$

តាង $Z=\frac{1}{\sqrt{3}}+i=\frac{1+i.\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$

តាមរូបមន្តដឺមរ័គេបាន $Z^n=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

ហើយ $\bar{Z}^n=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

គេទាញ $A=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)-\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

$$=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}-\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$$

ដូចនេះ $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ។

លំហាត់ទី១០១

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយហើយតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$$

តាង $a\,,b\,,c$ ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណ ABC ហើយយក $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

គេមាន $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

យើងបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

$$=1+4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

$$=1+4\frac{\frac{S^2}{p}}{4RS}=1+\frac{S}{pR}$$

$$=1+\frac{pr}{pR}=1+\frac{r}{R}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

$$1-2\sin^2\frac{A}{2}+1-2\sin^2\frac{B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}=1+\frac{r}{R}$$

$$3-2(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})=1+\frac{r}{R}$$

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-\frac{r}{2R}\quad(1)$$

តាមវិសមភាព Jensen យើងមាន ៖

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le 3\sin(\frac{A+B+C}{6})=3\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}\quad(2)$$

ដោយប្រើសមភាព $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$1-\frac{r}{2R}+2(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2})\le\frac{9}{4}$$

ឬ $2(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2})\le\frac{5}{4}+\frac{r}{2R}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី៣

កម្រងលំហាត់អនុវត្តន៍

1.គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=2^x(ax^2+bx+c)$

រក a , b , c ដែល $f(x+1)-f(x)=2^x x^2$ រួចទាញរកផលបូក ៖

$S_n=2.1^2+2^2.2^2+2^3.3^2+....+2^n.n^2$

2.ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{15}<\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}......\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$ ។

3.គេឲ្យ (x_n) និង (y_n) ជាស្វីតចំនួនពិតកំនត់លើ $\mathbb{N}$

ដោយ $x_0=5$, $y_0=1$ និងទំនាក់ទំនងកំនើន ៖

$x_{n+1}={x_n}^3+3x_n{y_n}^2$ និង $y_{n+1}=3{x_n}^2y_n+{y_n}^3$គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ចូរគណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

4.គេឲ្យពីរចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+a)(1+b)\geq(1+\sqrt{ab})^2$

អនុវត្តន៍ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ ៖

$f(x)=(1+4^{\sin^2 x})(1+4^{\cos^2 x})$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ។

5.គេឲ្យអនុគមន៍ ៖

$$f(x,y)=\frac{(x^2-y^2)(1-x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}\ ,\ x\ ;\ y\in\mathbb{R}$$

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ គេបាន $|f(x;y)|\le\frac{1}{4}$ ។

6.ចូរបង្ហាញថា $F=\frac{4n+17}{3n+13}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន

7.គេតាង r , R និង p រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង ជាកន្លះបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរបង្ហាញថាជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណនេះជាឫសរបស់សមីការ ៖

$$x^3-2px^2+(r^2+p^2+4rR)x-4prR=0$$ ។

8.សន្មតថា a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^{\log_3 7}=27$

$b^{\log_7 11}=49$ និង $c^{\log_{11}25}=\sqrt{11}$ ។

ចូរគណនា $a^{(\log_3 7)2}+b^{(\log_7 11)^2}+c^{(\log_{11}25)^2}$ ។

9.គេឲ្យ $a\ge 1$ និង $b\ge 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\le 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$

10.ចូរដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ ៖

$$\begin{cases}7x^3-3x^2y-21xy^2+26y^3=342\\9x^3-21x^2y+33xy^2-28y^3=344\end{cases}$$

11.គេឲ្យអនុគមន៍ f និង g កំនត់លើ $\mathbb{R}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$f(2x+1)+g(x-2)=x^2+9$ និង $x\ f(4x-1)-2g(2x-3)=25x-18$

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$

12.គេឲ្យ $A=\overline{a_n a_{n-1}.........a_1 a_0}$ និង $B=\overline{a_n a_{n-1}........a_1}-2\times a_0$

ស្រាយថា A ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ B ចែកដាច់នឹង 7 ។

13.គេឲ្យចំនួន $A=\overline{a_n a_{n-1}......a_2 a_1 a_0}$

ដែល $a_0\ ,\ a_1\ ,a_2\ ,.....,a_n$ ជាលេខ ។

ចូរស្រាយថាចំនួន A ចែកដាច់នឹង 6 កាលណា

$y=4(a_1+a_2+...+a_n)+a_0$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

14.គេឲ្យ $a\ ,\ b\ ,\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}+\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}\le 2$$

15.គេឱ្យស្វីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} a_1=1\ ,\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n\ \ ,\ n=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,... \end{cases}$$

គេតាងស្វីតចំនួនកុំផ្លិច $z_n=a_{n+1}-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}a_n$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។

ខ. ដាក់ $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត a_n ។ តើ (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបឬទេ ?

16.ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: IR \to IR$ ដោយដឹងថាសមភាព

$f\left(\lfloor x \rfloor y\right) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$ ពិតជានិច្ចគ្រប់ $x, y \in IR$ ។

($\lfloor a \rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់នៃ a) ។

17.គេឱ្យស្វ៊ីត $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}.dx$ ដែល $n \geq 0$

ក. បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ. គណនា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ចូរស្រាយថា $\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n-1)}$ ចំពោះ $n \geq 2$

រួចរក $\lim_{n \to +\infty} nI_n$ ។

18.គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^a \frac{x^4 dx}{x^n + a^n}$ ដែល $a > 0$ ។

កំណត់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a រួចគណនា I_n ចំពោះតម្លៃ

នៃ a ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

19.គេឧបមាថាសមីការ $8x^3 - 6x + 1 = 0$ មានឫសបី x_1, x_2, x_3

ចូរគណនា $S = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$ ។

20.ពីចំនួនពិតវិជ្ជមាន x និង y ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $4x + 3y = 11$

ចូរកំនត់រតម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍ ៖

$f(x, y) = (x+6)(y+7)(3x+2y)$

21.គេយក I តាងឲ្យចន្លោះ $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$ ។ ចូរកំនត់អនុគមន៍ f កំនត់លើ $[-1,1]$ បើគេដឹងថា $f(\sin 2x)=\sin x+\cos x$

រួចសម្រួល $f(\tan^2 x)$ ចំពោះគ្រប់ x ក្នុងចន្លោះ I ។

22.ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$$

ដែល r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

23.គេពិនិត្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n-4}{u_n-1}\end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

24.ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$L_n=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}}-2}{x-2}$$

(មាន n រ៉ាឌីកាល់) ។

25.គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារិកក្នុង និងចារិកក្រៅ

នៃត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក.ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

ខ.ចូរស្រាយថា $R\geq 2\,r$ ។

26.គេឲ្យ $2n$ ចំនួនពិត $a_1\,;\,a_2\,;.....;\,a_n\,;\,b_1\,;\,b_2\,;\,....;\,b_n$ ។

ចូរស្រាយថា ៖

$$(a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n)^2\leq(a_1{}^2+a_2{}^2+....+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+.....+b_n{}^2)$$

27.គេឱ្យ $x\,;\,y\,;\,z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq 2$$

28.គេសន្មតថា $x\,,\,y\in(-2\,,\,2\,)$ ហើយ $xy=-1$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $u=\dfrac{4}{4-x^2}+\dfrac{9}{9-y^2}$

29.គេឲ្យ θ ជាចំនួនពិតដែល $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\left(\sin\theta\right)^{\cos\theta}+\left(\cos\theta\right)^{\sin\theta}>1$

30.គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin A+\sin B+\sin C\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

ខ-បង្ហាញថា $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ ។

31.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2-2$ ដែល $x\in\mathbb{R}$

ក-គេយក $U_1=f(x)$ និង$U_{n+1}=f(U_n)$ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_n = f_n\Big[\ f\big[.......f\left[f(x)\right].......\big]\ \Big]$ ។

ខ-ស្រាយថាបើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

គ-គេតាង $V_n = U_n - \sqrt{{U_n}^2 - 4}$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ និង $x > 2$ ។

ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ចូរបង្ហាញថា $2V_{n+1} = {V_n}^2$ ។

ឃ-សន្មតថា $W_n = \ln V_n - \ln 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ចូររកប្រភេទនៃស្វីត W_n ។

ង-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកអនុគមន៍ ៖

$F_n(x) = f_n\Big[\ f\big[........f\left[\ f(x)\ \right].........\big]\ \Big]$ ។

32.ចំនួនមួយមានលេខបួនខ្ទង់ដែលលេខខ្ទង់វារៀបតាមលំដាប់

$a\ ;\ a\ ;\ b\ ;\ b$ ។

រកចំនួននោះបើគេដឹងថាវាជាការេប្រាកដ ។

33.គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត(U_n)កំនត់ដោយ$U_n = \sqrt{2}^n.\sin\dfrac{n\pi}{4}$

ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\dfrac{(n+1)\pi}{4} = \cos\dfrac{n\pi}{4} - \sin\dfrac{n\pi}{4}$

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n\cos\dfrac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\dfrac{(n+1)\pi}{4}$

គ-គណនាផលបូក ៖

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ជាអនុគមន៍នៃ n ។

34.គេឲ្យ n ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1;a_2;a_3;....;a_n$

ដែលផលគុណ $a_1.a_2.a_3....a_n=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+a_1)(1+a_2)....(1+a_n)\geq 2^n$

35.គេឲ្យ $0<a<\frac{\pi}{2}$ និង $0<b<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\left(\frac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2+\left(\frac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2=1$

លុះត្រាតែ $a=b$ ។

36.គេឲ្យសមីការ $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ មានឫសបួនវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$a/\ \ pr-16s\geq 0$

$b/\ \ q^2-36s\geq 0$

37.ដោះស្រាយសមីការ

$$2^{x^2+x}+\log_2 x=2^{x+1}$$

38.គេឲ្យស្វ៊ីត $U_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$

ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

ក-ចូរកំនត់ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ-ចូរបង្ហាញថា $U_1\times U_2\times U_3\times......\times U_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\pi}{3.2^n}}$ ។

គ-គេពិនិត្យស្វ៊ីត $V_n = 2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$ ។

ចូរគណនា V_n និង លីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ ។

39.គេឲ្យពីរចំនួន x និង y ខុសពីសូន្យ និង មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0$ ។

40.ចូរដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ ៖

$$\begin{cases} 4^x.3^{y+1}+27^y=171 \\ 8^x+2^x.3^{1+2y}=172 \end{cases}$$

41.គេឲ្យសមីការ (E): $x^2-2\sqrt{2+a^2+b^2}.x+(1+a)(1+b)=0$

ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិត ។

ក-ចូរកំនត់តម្លៃ a និង bដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឬសឌុប

រួចគណនាឬសឌុបនោះ ។

ខ-ក្រៅពីតម្លៃ a និង bខាងលើចូរបង្ហាញថាសមីការ(E)មានឬសពីរ

ជានិច្ចក្នុង $\mathbb{R}$ ។

42.គេឲ្យពហុធា $P_n(x)=1+c_1x+c_2x^2+.......+c_{n-1}x^{n-1}+x^n$

ដែល $c_1,c_2,c_3,.......,c_{n-1}\geq 0$ ។

សន្មតថាសមីការ $P_n(x)=0$ មាន n ឬសជាចំនួនពិតអវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $P_n(2)\geq 3^n$ ។

43.គេឲ្យ A , B , C ជារង្វាស់មុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C\le \frac{3}{2}$

ខ-ចូរបង្ហាញថា $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le \frac{9}{4}$

គ-ចូរបង្ហាញថា $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge \frac{3}{4}$

ឃ-ចូរបង្ហាញថា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

44.គេឲ្យ a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមានផ្ទៃក្រឡា

ស្មើនឹង S ។ ចូរស្រាយថា $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}\ S$ ។

45.គេឱ្យអនុគមន៍ $f(t)=(t)^{\ln^2 t+3\ln t+3}$ ដែល $t>0$ និង $t\ne 1$ ។

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=f(e)$ និងចំពោះគ្រប់

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេមាន $u_{n+1}=f(u_n)$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចូរស្រាយថា $1+\ln u_{n+1}=(1+\ln u_n)^3$

រួចទាញរកតួ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

46.ត្រីកោណមួយមានរង្វាស់ជ្រុងជាចំនួនគត់វិជ្ជមានហើយចារឹកក្រៅរង្វង់មួ
យមានរង្វាស់កាំ

ស្មើ 1 ។ ចូរកំណត់ជ្រុងនៃត្រីកោណនេះ រួចបង្ហាញថាវាមានមុំមួយស្មើ 90^o

47.ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន ៖

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1 \text{ ។}$$

48.គេឱ្យ x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ ។

ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq 1$$

49.បើចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2=3$ នោះចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{12}$$

50.គេមានចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leq\frac{3}{2}$ ។

51.បើ a , b , c ជា ចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $ab+bc+ca=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\frac{1}{abc}$ ។

52.ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m និង n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $3.2^m+1=n^2$

53.គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1, x_2, ..., x_n$ ហើយគេតាង

$S_n=x_1+x_2+...+x_n$ ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$(1+x_1)(1+x_2)....(1+x_n)\leq 1+S+\frac{S^2}{2!}+...+\frac{S^n}{n!}$$

54.គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0=5$ និង $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+n+5$ ($n\in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស្វីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

55.ក.ចូរស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

ខ.គណនាផលគុណ

$$P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$$

56.គេឲ្យស្វីត $\{a_n\}$ កំនត់ដោយ ៖

$a_0=1$ និង $a_{n+1}=a_0.a_1....a_n+4$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $a_n-\sqrt{a_{n+1}}=2$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។

57.គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2\ge 16$

58.គេឲ្យ

$$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}\ ,\ \sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}\ ,\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និង ស្រាយបញ្ជាក់

រូបមន្តនោះផង ។

59.ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$\sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}}<\frac{4n-1}{4n+1}<\sqrt{\frac{4n-1}{4n+3}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$

ខ.ទាញបង្ហាញថា ៖

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{3\times7\times11\times.......\times(4n-1)}{5\times9\times13\times.......\times(4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$$ ។

60.គេឲ្យ $a\,;b\,;c$ ជាបីចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។

ចូរបង្ហាញថា $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

61.គេមាន

$6^2-5^2=11$, $56^2-45^2=1111$, $556^2-445^2=111111$

$5556^2-4445^2=11111111$ ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះផង

62.ក.ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x$

ខ.ចូរគណនា $S_n=\frac{1}{\sin a}+\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{a}{2^2}}+....+\frac{1}{\sin\frac{a}{2^n}}$

63.គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$U_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $U_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-{U_n}^2}}{2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

64.គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ក.ចូរស្រាយថា $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

ខ.ទាញបញ្ជាក់ថា $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$ ។

65.ចូរកំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់វិជ្ជមាន $(a\ ,b\ )$ បើគេដឹងថាចំនួន ៖

$\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែរ ។

66.ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ \geq\ 1$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a\ ,b\ \ ,c$ ។

67.គេឲ្យ (a_n)ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល $a_1=\frac{1}{2}$

និងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានnយើងមាន $a_{n+1}=\frac{{a_n}^2}{{a_n}^2-a_n+1}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n យើងមាន ៖

$$a_1+a_2+a_3+.........+a_n\ <\ 1$$ ។

68.គេឲ្យ n ចំនួនពិត $a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;.......;\ a_n\ \geq 0$ ។

គេតាង $S_n=\frac{a_1+a_2+a_3+.....+a_n}{n}\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$

ចូរស្រាយថាបើ $S_{n+1}\geq\sqrt[n+1]{a_1.a_2.a_3.......a_na_{n+1}}$

នោះគេបាន $S_n\geq\sqrt[n]{a_1a_2a_3.....a_n}$ ។

69.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

ចូរស្រាយថា $\frac{\sqrt{3}}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\geq 2+\sqrt{3}$ ។

70.ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$6+\log_{\frac{1}{3}}(1+2^x)+\log_3{}^2(1+2^x)=2\sqrt{8+\log_3{}^3(1+2^x)}$$

71.គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{a+b\sin^2 x}+\dfrac{1}{c+b\cos^2 x}$

ដែល $a>0$, $b>0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $f(x)\geq\dfrac{4}{a+b+c}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

72.ចូរកំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $]0;\dfrac{\pi}{2}[$ ដោយដឹងថា ៖

$\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$ ។

73.ចូរបង្ហាញថា $\tan 3a-\tan 2a-\tan a=\tan 3a\tan 2a\tan a$

ដែល $a\neq\dfrac{k\pi}{2}$ គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ k ។

74.ចូរបង្ហាញថា $\left(1+\dfrac{a}{\sin x}\right)\left(1+\dfrac{b}{\cos x}\right)\geq\left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$

ចំពោះគ្រប់ $a>0$, $b>0$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

75.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots+\sqrt{12+\sqrt{12+x}}}}}-4}{x-4}$ មាន n ឬសការេ ។

76.គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង $u_{n+1} = \dfrac{u_n{}^4}{4u_n{}^3 + 6u_n{}^2 + 4u_n + 1}$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

ចូរបង្ហាញថា $1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)^4$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

77.គណនាតម្លៃ

$$A = (\sqrt{3} + \tan 1^o)(\sqrt{3} + \tan 2^o)(\sqrt{3} + \tan 3^o)...(\sqrt{3} + \tan 29^o)$$

78.ចូរកំនត់គ្រប់គូ $(m;n)$ នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានបើគេដឹងថា ៖

$m^2 + n^2 = 13(m+n)$ ។

79.ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន ៖

$A_n = 2^{6n+1} + 9^{n+1}$ ចែកដាច់នឹង11 ជានិច្ចចំពោះគ្រប់

ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

80.ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} \tan^4 x + 6\tan^2 x \tan^2 y + \tan^4 y = 28 \\ \tan^3 x \tan y + \tan x \tan^3 y = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

ដែល $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$ ។

81.គេឲ្យ a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយនិងតាង p

ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

82.គេឲ្យ $x\,;\,y\,;\,z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានមិនសូន្យ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq\frac{9}{x^2+y^2+z^2}$

83.គេពិនិត្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases}u_1=4\\ u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{2u_n-1}\end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

84.គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (U_n)កំនត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយ ៖

$$\begin{cases}U_0=\sqrt{2}\\ U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}\quad ,\, n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

ក.ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.គណនាផលគុណ $P_n=U_0\times U_1\times U_2\times ....\times U_n$ ។

85.គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (U_n)កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$U_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $U_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-{U_n}^2}}{2}}\quad ,\,\forall n\in\mathbb{N}$

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

86.គេឲ្យ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1}=\frac{{a_n}^2-5}{2(a_n+2)}$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n = \cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

87.ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$n(\sqrt[n]{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + n(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}})$$

88.គេឲ្យ m និង n ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{x^{mn}-1}{m} \geq \dfrac{x^n - 1}{x}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x ។

89.គេឲ្យ $x_n = 2^{2^n} + 1$ ចំពោះគ្រប់ $n = 1\ ,\ 2, 3, \ldots$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{2}{x_2} + \dfrac{2^2}{x_3} + \ldots. + \dfrac{2^{n-1}}{x_n} < \dfrac{1}{3}$

90.គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x+4}{x+1}$ ដែល $x \neq -1$ ។

គណនា $f_n[f[\ldots f[f(x)]\ldots]]$

91.គេមានស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ និង

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\sin a + \cos a)x_n + \dfrac{1}{2}\sin a(1 - \tan a)y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cos a(\cot a - 1)x_n + \dfrac{1}{2}(\sin a + \cos a)y_n \end{cases}$$

ដែល $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ និង $n = 0, 1, 2, \ldots.$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ តាង $u_n = x_n \cos a + y_n \sin a$ និង

$v_n = x_n \cos a - y_n \sin a$ ។

ចូរស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

92.គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in (-1,1)$ ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$f(x) - 2f(-x) = \ln(\frac{1-3x+3x^2-x^3}{1+3x+3x^2+x^3})$$

ចូររក $f(\cos\theta)$ ជាអនុគមន៍នៃ $t = \tan\frac{\theta}{2}$ ដែល $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

93.គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in IR$ ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$f(x) + 3f(-x) + 8 = 4(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2$$

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-2}{x^2}$

94.គេឱ្យអនុគមន៍លេខ f កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$f(1) = \frac{7}{5}$ និង $f(n+1) = \frac{13f(n)-16}{9f(n)-11}$ ដែល $n = 1, 2, 3, ...$

ក)គណនា $f(n)$ ។

ខ)ចូរស្រាយថា $f(n)$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

95.គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \sqrt{2+\cos\phi} + i\sqrt{2+\sin\phi}$ ដែល $\phi \in \mathbb{R}$

ក្នុងប្លង់កំផ្លិច $(o, \vec{i}, \vec{j})$ គេហៅ M ជាចំនុចរូបភាពនៃ z ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $r = OM$ ។

96.គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1, z_2, z_3 ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ និង $\frac{z_1^{\ 2}}{z_2 z_3} + \frac{z_2^{\ 2}}{z_1 z_3} + \frac{z_3^{\ 2}}{z_1 z_2} + 1 = 0$

ចូរស្រាយថា $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{1 , 2\}$ ។

97.គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ដែល } n \geq 1$$

ក. គេពិនិត្យស្វីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា (z_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា z_n

ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

98.គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx \quad \text{និង} \quad I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$$

99.គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់ក្នុងចន្លោះ $[\ 0 ; \pi]$

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_0^\pi xf(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x).dx$

ខ. អនុវត្តន៍ ចូរគណនា $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}.dx$

100.គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ $[a\,;b]$

ដែល $\forall x\in[\,a\,;b\,]:\ f(a+b-x)=f(x)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b x\,f(x).dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x).dx$ ។

អនុវត្តន៍

ចូរគណនា $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{3-\cos 2x}}.\,dx$ ។

101.គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$, $x>-1$

ក. បង្ហាញថា $f(\frac{1-t}{1+t})=\frac{1}{2}\frac{(1+t)^2}{1+t^2}-\frac{1}{2}(1+t)^2\,f(t)$

ដែល $0\le t\le 1$ ។

ខ. គណនា $I=\int_0^1 f(x).dx$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃ $J=\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}.dx$ ។

102.គេមានស្វីត (I_n)កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ដោយ ៖

$$I_n=\frac{1}{n!}.\int_0^1(1-x)^n.e^x.dx$$

ក-ចូរគណនាតួ I_1 ។

ខ-ចូរបញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n រួចទាញឱ្យបានថា ៖

$$I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$$ ។

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$

រួចទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$ ។