

# TexBook-School

មាសបង្រៀនថ្នាក់បំប៉នលើមុខវិជ្ជា គណិត រូប គីមី

## វិញ្ញាសាគ្រឿងបាត់ដុប

### គណិតវិទ្យា (វិទ្យាសាស្ត្រ)

រៀបរៀងដោយ៖ សិស្សរៀន *Latex*

បង្រៀនដោយ៖ លោកគ្រូ ហ៊ីង វ៉ុលី



# មាតិកា

១	ហ៊ុន ធុន្ទី	១
២	ហ៊ុន ធុន្ទី	១១
៣	ហ៊ុន ធុន្ទី	២១
៤	ហ៊ុន ធុន្ទី	២៩
៥	ហ៊ុន ធុន្ទី	៣៧
៦	ហ៊ុន ធុន្ទី	៤៥
៧	បាត់ដំបង ២០២១	៥៣
៨	បាត់ដំបង ២០២២	៦១
៩	សារ៉ែន សុផ្លា	៦៩
១០	អ៊ុយ ប៊ុនថន	៧៩
១១	អ៊ុយ ចាន់ធា	៨៧
១២	អ៊ុយ បណ្ណបករ	៩៩
១៣	ជិត ជី	១០៩
១៤	ផល ផានុ	១១៧
១៥	ថា មករា	១២៩
១៦	ថា ឃ្លៀន	១៣៧
១៧	សេ មាណ	១៤៩
១៨	ឃ្លៀន សំណាង	១៥៧
១៩	Kim Hun	១៦៧
២០	សុខលាត	១៧៣



មណ្ឌលប្រឡង៖ \_\_\_\_\_  
 លេខបន្ទប់៖ \_\_\_\_\_ លេខតុ៖ \_\_\_\_\_  
 ឈ្មោះមេគ្រូជនៈ៖ \_\_\_\_\_  
 ឈ្មោះលេខាមេគ្រូជនៈ៖ \_\_\_\_\_

វិញ្ញាសារគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ៖ ហ៊ុន ឌុន្ទី



- I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖  
 ក.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( x^2 + \cos \frac{\pi x}{4} \right)$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{3} - 2 \cos x}$
- II. (១៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ ,  $x \neq 1$  ។  
 ក. កំណត់តម្លៃ  $a, b, c$  និង  $d$  ដើម្បីឱ្យ  $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x - 1}$  ។  
 ខ. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់  $I = \int_{-1}^0 f(x) dx$  ។
- III. (១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច  $z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$  ។  
 ក. គណនា  $z^2$  រួចសរសេរ  $z^2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។      ខ. ចូរសរសេរ  $z$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។  
 គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ  $\cos \frac{\pi}{8}$  និង  $\sin \frac{\pi}{8}$  ។
- IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងអាងចង្ហើមត្រីមួយមានត្រីពណ៌ក្រហម៤ និងត្រីពណ៌ស៣ក្បាល ។ គេចាប់ត្រី២ក្បាលមកដាក់ក្នុងអាងថ្មីដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖  
 A : ត្រីពណ៌ក្រហមទាំង២ក្បាល។      B : ត្រីពណ៌សទាំង២ក្បាល។      C : ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌។
- V. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E) : y'' - 2y' + 3y = 3x - 1$  ។  
 ក. ដោះស្រាយសមីការ  $y'' - 2y' + 3y = 0$  ។  
 ខ. កំណត់តម្លៃ  $a, b$  ដើម្បីឱ្យ  $y_p = ax + b$  ជាឆ្លើយនៃសមីការ  $(E)$  រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ  $(E)$  ។
- VI. (១០ពិន្ទុ) ប៉ារ៉ាបូល  $(P)$  មួយមានកំពូល  $V(1, -2)$  និងកំណុំ  $F(1, 0)$ ។  
 ក. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល  $(P)$  ។      ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស  $(\Delta)$  នៃ  $(P)$  ។  
 គ. សង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល  $(P)$  ។
- VII. (២០ពិន្ទុ) ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $A(-1, 0, 2), B(0, -1, 1)$  និង  $C(1, 2, -1)$  ។  
 ក. រកវ៉ិចទ័រ  $\overrightarrow{AB}$  និង  $\overrightarrow{AC}$  ។      ខ. សរសេរសមីការប្លង់  $(\alpha)$  កាត់តាមចំណុច  $A, B$  និង  $C$  ។  
 គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ  $ABC$  និងមាឌតេត្រាអែត  $OABC$  ។
- VIII. (៣០ពិន្ទុ) អនុគមន៍  $f$  កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x$  ដែល  $x \neq 0$  ដោយ  $f(x) = x - \frac{e^x}{e^x - 1}$  មានក្រាបតំណាង  $(C)$  ។  
 ក. គណនា  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប  $(C)$  ។  
 ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់  $d_1 : y = x$  ជាអាស៊ីមតូទ្រេតនៃក្រាប  $(C)$  ខាង  $-\infty$  រួចសិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប  $(C)$  និងបន្ទាត់  $d_1$  ។  
 គ. បង្ហាញថាចំពោះ  $x \neq 0$  គេបាន  $f(x) = x - 1 - \frac{1}{e^x - 1}$  ។ គណនា  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។  
 ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់  $d_2 : y = x - 1$  ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $(C)$  ខាង  $+\infty$  រួចសិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប  $(C)$  និងបន្ទាត់  $d_2$  ។  
 ង. គណនា  $f'(x)$  រួចបង្ហាញថា  $f'(x) > 0$  ចំពោះ  $x \neq 0$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  ។  
 ច. គណនា  $f(1)$  និង  $f(-1)$  ។ សង់បន្ទាត់  $d_1, d_2$  និងក្រាប  $(C)$  ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃក្នុងខ័ណ្ឌដោយក្រាប  $(C)$  បន្ទាត់  $d_1$  និងបន្ទាត់ឈរមានសមីការ  $x = 1$  និង  $x = 2$  ។ គេឱ្យ  $\frac{e}{e-1} = 1.6$  និង  $\frac{1}{1-e} = -0.6$  ។

## ជំនាញគណិតវិទ្យា

### I. គណនាលីមីត៖

$$ក. \lim_{x \rightarrow 2} \left( x^2 + \cos \frac{\pi x}{4} \right) = 2^2 + \cos \frac{2\pi}{4} = 4 + \cos \frac{\pi}{2} = 4$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \left( x^2 + \cos \frac{\pi x}{4} \right) = 4}$$

$$ខ. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 2x + 2}{x^2 - 1^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1) + 2(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1+2}{-1-1} = \frac{1}{-2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2}}$$

$$គ. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{3} - 2 \cos x} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{តាង } t = x - \frac{\pi}{6} \text{ នាំឲ្យ } x = t + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{បើ } x \rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ នាំឲ្យ } t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{\sqrt{3} - 2 \cos \left( t + \frac{\pi}{6} \right)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{\sqrt{3} - 2 \left( \cos t \cos \frac{\pi}{6} - \sin t \sin \frac{\pi}{6} \right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{\sqrt{3} - 2 \left( \cos t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin t \cdot \frac{1}{2} \right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{\sqrt{3} - \sqrt{3} \cos t + \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{\sqrt{3}(1 - \cos t) + \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \times 2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}}{\sqrt{3}(2 \sin^2 \frac{t}{2}) + 2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{t}{2}}{\sqrt{3} \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2}} = \frac{2 \times 1}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{3} - 2 \cos x} = 2}$$

$$II. \text{ គេមាន } f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{x - 1}, x \neq 1$$

$$ក. \text{ កំណត់តម្លៃ } a, b, c \text{ និង } d$$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{x - 1} &= \frac{x^3 - x^2 - x^2 + x + 2x - 2 + 1}{x - 1} \\ &= \frac{x^2(x - 1) - x(x - 1) + 2(x - 1) + 1}{x - 1} \\ &= x^2 - x + 2 + \frac{1}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\text{សមមូល } ax^2 + bx + c + \frac{d}{x - 1} = x^2 - x + 2 + \frac{1}{x - 1}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{a = 1, b = -1, c = 2 \text{ និង } d = 1}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ គេបាន } I &= \int_{-1}^0 \left( x^2 - x + 2 + \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x-1| \right]_{-1}^0 \\ &= (0 - 0 + 0 + \ln 1) - \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 + \ln 2 \right) \\ &= 0 - \left( \frac{-2-3-12}{6} + \ln 2 \right) = \frac{17}{6} - \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{I = \frac{17}{6} - \ln 2}$$

III. គេមាន  $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

1. គណនា  $z^2$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z^2 &= \left( \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \left( \sqrt{2+\sqrt{2}} \right)^2 + i^2 \left( \sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2 + 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}, i^2 = -1 \\ &= 2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} + 2i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} \end{aligned}$$

សរសេរ  $z^2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេបាន } z^2 = 4 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z^2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \text{ និង } z^2 = 4 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}$$

2. សរសេរ  $z$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z &= \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} \left( \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \sqrt{1+\cos \frac{\pi}{4}} + i\sqrt{1-\cos \frac{\pi}{4}} \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \sqrt{2\cos^2 \frac{\pi}{8}} + i\sqrt{2\sin^2 \frac{\pi}{8}} \right) = \sqrt{2} \left( \sqrt{2}\cos \frac{\pi}{8} + i\sqrt{2}\sin \frac{\pi}{8} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)}$$

3. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ  $\cos \frac{\pi}{8}$  និង  $\sin \frac{\pi}{8}$

$$\text{គេបាន } \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) = 2\cos \frac{\pi}{8} + i2\sin \frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ 2\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ និង } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

IV. តាង  $S$  : គេចាប់ត្រីកោណមកដាក់ក្នុងអាងថ្មីដោយចែងនូវចេញពីត្រីសរុប ៧ក្បាល

$$\text{នាំឲ្យ } n(S) = C(7, 2) = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{5!6 \cdot 7}{5!2!} = 3 \cdot 7 \text{ ជម្រើស}$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A

$$\text{ព្រឹត្តិការណ៍ } A : \text{ត្រីពណ៌ក្រហមទាំង២ក្បាល នាំឲ្យ } n(A) = C(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{2!3 \cdot 4}{2!2!} = 2 \cdot 3 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ } A \text{ គឺ } p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{p(A) = \frac{2}{7}}$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B

$$\text{ព្រឹត្តិការណ៍ } B : \text{ត្រីពណ៌សទាំង២ក្បាល។ នាំឲ្យ } n(B) = C(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ } B \text{ គឺ } p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{3 \cdot 7} = \frac{1}{7}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{p(B) = \frac{1}{7}}$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C

$$\text{ព្រឹត្តិការណ៍ } C : \text{ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌។ នាំឲ្យ } n(C) = C(4, 1)C(3, 1) = 4 \cdot 3 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ } C \text{ គឺ } p(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{4}{7}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{p(C) = \frac{4}{7}}$$

V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) :  $y'' - 2y' + 3y = 3x - 1$

ក. ដោះស្រាយសមីការ  $y'' - 2y' + 3y = 0$

$$\text{មានសមីការសម្គាល់} \quad r^2 - 2r + 3 = 0$$

$$r^2 - 2r + 1 + 2 = 0$$

$$(r - 1)^2 - (i\sqrt{2})^2 = 0$$

$$(r - 1 - i\sqrt{2})(r - 1 + i\sqrt{2}) = 0$$

$$\text{នាំឲ្យ } \begin{cases} r - 1 - i\sqrt{2} = 0 \\ r - 1 + i\sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad \text{នាំឲ្យ } \begin{cases} r = 1 + i\sqrt{2} \\ r = 1 - i\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: ចម្លើយទូទៅគឺ } \boxed{y_c = (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x)e^x \text{ ដែល } A, B \in \mathbb{R}}$$

ខ. កំណត់តម្លៃ  $a, b$  ដើម្បីឲ្យ  $y_p = ax + b$  ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)

$$\text{នាំឲ្យ } y'_p = a \Rightarrow y''_p = 0 \text{ គេបាន } y''_p - 2y'_p + 3y = 3x - 1$$

$$0 - 2a + 3(ax + b) = 3x - 1$$

$$3ax + 3b - 2a = 3x - 1$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} 3a = 3 \\ 3b - 2a = -1 \end{cases} \quad \text{សមមូល } \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{-1 + 2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{a = 1 \text{ និង } b = \frac{1}{3}}$$

នាំឲ្យចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ  $y = y_c + y_p$



ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ  $(E) : y = x + \frac{1}{3} + (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x)e^x$  ដែល  $A, B \in \mathbb{R}$

VI. គេមានកំពូល  $V(1, -2)$  និងកំណុំ  $F(1, 0)$

ក. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល  $(P)$

ដោយកំពូល  $V$  និងកំណុំ  $F$  មានអាប់ស៊ីសដូចគ្នា

នោះប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះឈរ

សមីការស្តង់ដារមានរាង  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ កំពូល } & \begin{cases} V(1, -2) \\ V(h, k) \end{cases} \Rightarrow h = 1, k = -2 \\ \bullet \text{ កំណុំ } & \begin{cases} F(1, 0) \\ F(h, k + p) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} k + p &= 0 \\ -2 + p &= 0 \end{aligned} \\ & p = 2 \end{aligned}$$

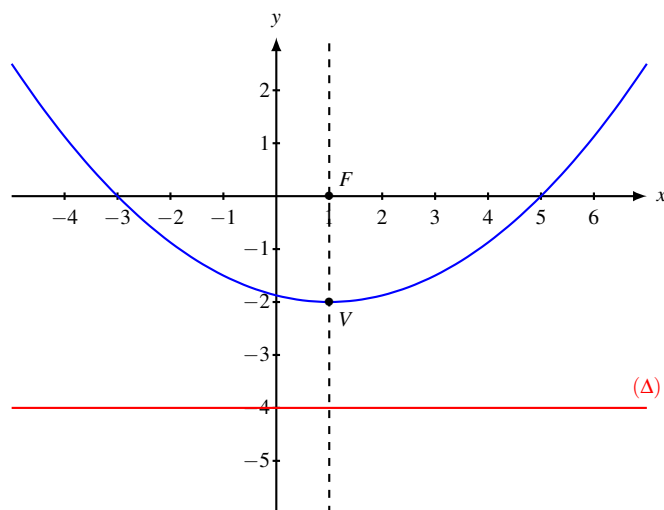
ដូច្នេះ សមីការស្តង់ដារគឺ  $(x - 1)^2 = 8(y + 2)$

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស  $(\Delta)$  នៃ  $(P)$

គេបាន  $(\Delta) : y = k - p = -2 - 2 = -4$

ដូច្នេះ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស  $(\Delta) : y = -4$

គ. សង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល  $(P)$



VII. គេមានចំណុច  $A(-1, 0, 2), B(0, -1, 1)$  និង  $C(1, 2, -1)$

ក. រកវ៉ិចទ័រ  $\overrightarrow{AB}$  និង  $\overrightarrow{AC}$

គេបាន  $\overrightarrow{AB} = (0 + 1, -1 - 0, 1 - 2) = (1, -1, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (1 + 1, 2 - 0, -1 - 2) = (2, 2, -3)$

ដូចនេះ  $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -1)$  និង  $\overrightarrow{AC} = (2, 2, -3)$

ខ. សរសេរសមីការប្លង់  $(\alpha)$  កាត់តាមចំណុច  $A, B$  និង  $C$

$$\begin{aligned}\vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \text{នាំឲ្យ} \quad &= (3+2)\vec{i} - (-3+1)\vec{j} + (2+2)\vec{k} \\ &= (5, 2, 4)\end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } (\alpha) : 5(x+1) + 2(y-0) + 4(z-2) = 0$$

$$5x + 2y + 4z + 5 - 8 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{សមីការប្លង់ } (\alpha) : 5x + 2y + 4z - 3 = 0}$$

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ  $ABC$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ } ABC \text{ គឺ } S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$$

រកមាឌតេត្រាអែត  $OABC$

$$\text{ដោយ } \vec{AO} = (0+1, 0-0, 0-2)$$

$$= (1, 0, -2)$$

$$\text{នាំឲ្យ } (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO} = (5)(1) + (2)(0) + (4)(-2)$$

$$= 5 - 8 = -3$$

$$\begin{aligned}\text{គេបានមាឌតេត្រាអែតគឺ } V_{OABC} &= \frac{|(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO}|}{6} \\ &= \frac{|-3|}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{មាឌតេត្រាអែតគឺ } V_{OABC} = \frac{1}{2} \text{ ឯកតាមាឌ}}$$

$$\text{VIII. គេមានក្រាប } (C) : f(x) = x - \frac{e^x}{e^x - 1}$$

ក. គណនា  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = +\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = -\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty$$

$$\text{និង } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = -\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប  $(C)$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm\infty \text{ នោះបន្ទាត់ } x = 0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}$$

ដូចនេះ:  $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 0 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)}}$

ខ. បង្ហាញថា  $d_1 : y = x$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង  $-\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \left( x - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{e^x}{e^x - 1} \right) = 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\boxed{d_1 : y = x \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង } -\infty}$

សិក្សាទីតាំងជ្រៀបរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់  $d_1$

$$\text{គេមាន } f(x) - y = -\frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$\text{បើ } x > 0 \text{ នោះ } e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \text{ គេបាន } \frac{e^x}{e^x - 1} > 0$$

$$-\frac{e^x}{e^x - 1} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) - y < 0$$

$$\text{បើ } x < 0 \text{ នោះ } e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \text{ គេបាន } \frac{e^x}{e^x - 1} < 0$$

$$-\frac{e^x}{e^x - 1} > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - y > 0$$

ដូចនេះ:  $\boxed{\text{បើ } x > 0 \text{ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ } d_1}$

$\boxed{\text{បើ } x < 0 \text{ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ } d_1}$

គ. បង្ហាញថាចំពោះ  $x \neq 0$  គេបាន  $f(x) = x - 1 - \frac{1}{e^x - 1}$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } f(x) &= x - \frac{e^x}{e^x - 1} \\ &= x - 1 + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1} \\ &= x - 1 + \frac{e^x - 1 - e^x}{e^x - 1} \\ &= x - 1 - \frac{1}{e^x - 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = x - 1 - \frac{1}{e^x - 1}}$$

គណនា  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 1 - \frac{1}{e^x - 1} \right) = +\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

ឃ. បង្ហាញថា  $d_2 : y = x - 1$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង  $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( x - 1 - \frac{1}{e^x - 1} \right) - (x - 1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\boxed{d_2 : y = x - 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង } +\infty}$

សិក្សាទីតាំងជ្រុងបរាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់  $d_2$

$$\text{គេមាន } f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1}$$

$$\text{បើ } x > 0 \text{ នោះ } e^x - 1 > 0 \text{ គេបាន } \frac{1}{e^x - 1} > 0$$

$$-\frac{1}{e^x - 1} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) - y < 0$$

$$\text{បើ } x < 0 \text{ នោះ } e^x - 1 < 0 \text{ គេបាន } \frac{1}{e^x - 1} < 0$$

$$-\frac{1}{e^x - 1} > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - y > 0$$

ដូចនេះ: បើ  $x > 0$  នោះក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងក្រោម  $d_2$   
បើ  $x < 0$  នោះក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងលើ  $d_2$

ង. គណនា  $f'(x)$

$$\text{គេបាន } f'(x) = \left( x - 1 - \frac{1}{e^x - 1} \right)'$$

$$= 1 + \frac{(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2}$$

$$= 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$



$$\text{ដូចនេះ: } f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

បង្ហាញថា  $f'(x) > 0$  ចំពោះ  $x \neq 0$

$$\text{ដោយ } e^x > 0 \text{ និង } (e^x - 1)^2 > 0 \text{ នោះ } f'(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } f'(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

សង្កេតរកអថេរកោតនៃអនុគមន៍  $f$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$  $+\infty$		$-\infty$  $+\infty$

ច. គណនា  $f(1)$  និង  $f(-1)$

$$\text{គេបាន } f(1) = 1 - \frac{e}{e - 1} = 1 - 1.6 = -0.6$$

$$f(-1) = -1 - \frac{e^{-1}}{e^{-1} - 1} = -1 - \frac{\frac{1}{e}}{\frac{1}{e} - 1} = -1 - \frac{1}{1 - e} = -1 + 0.6 = -0.4$$

$$\text{ដូចនេះ: } f(1) = -0.6 \text{ និង } f(-1) = -0.4$$

សង់បន្ទាត់  $d_1 : y = x$

$x$	0	1
$y$	0	1

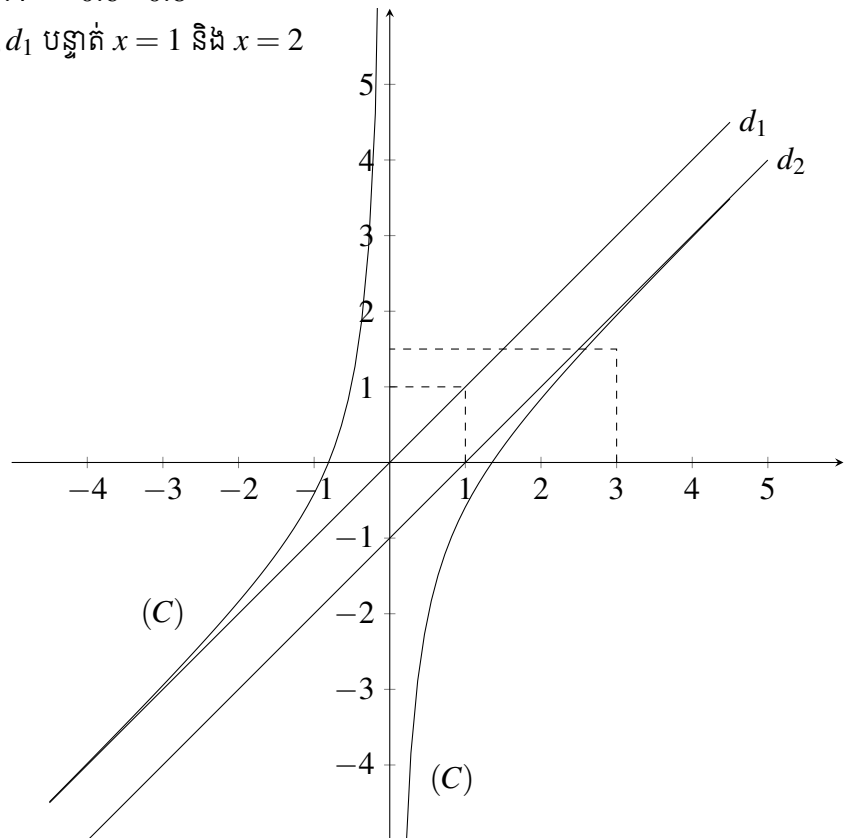
សង់បន្ទាត់  $d_2 : y = x - 1$

$x$	0	1
$y$	-1	0

សង់បន្ទាត់ (C) :  $f(x) = x - \frac{e^x}{e^x - 1}$

$x$	-2	-1	1	2
$y$	-1.8	-0.4	-0.6	0.8

គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយ (C),  $d_1$  បន្ទាត់  $x = 1$  និង  $x = 2$



$$\begin{aligned}
 \text{តាមក្រាបគេបាន } S &= \int_1^2 [y - f(x)] dx \\
 &= \int_1^2 \left[ x - \left( x - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) \right] dx \\
 &= \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx \\
 &= \ln |e^x - 1|_1^2 \\
 &= \ln |e^2 - 1| - \ln |e - 1| \\
 &= \ln \left| \frac{e^2 - 1}{e - 1} \right| \\
 &= \ln |e + 1|
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $S = \ln |e + 1|$  ឯកតាផ្ទៃ



មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះមេគ្រូជន:.....  
 ឈ្មោះលេខាមេគ្រូជន:.....

វិញ្ញាសារគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ហ៊ុន ឌុន្ទី



- I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖
- ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{x^2}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{\sqrt{x} - 1}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin 3x}$
- II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖
- ក.  $I = \int_1^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9) dx$       ខ.  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$       គ.  $K = \int_1^2 \frac{x}{(x^2 + 2)^2} dx$
- III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = -1 + i$  និង  $1 + i$  ។
- ក. គណនា  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$  និង  $z_1 \times z_2$  ។      ខ. សរសេរ  $z_1$  និង  $z_2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- គ. បង្ហាញថា  $z_1$  និង  $z_2$  ជាឫសរបស់សមីការ  $x^2 - 2xi - 2 = 0$  ។
- IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងវិទ្យាល័យមួយមានគ្រូគណិតវិទ្យាចំនួន ៩ នាក់ ក្នុងនោះមានគ្រូស្រីចំនួន ៤ នាក់ និងគ្រូប្រុសចំនួន ៥ នាក់។ គណៈគ្រប់គ្រងសាលាបានជ្រើសរើសគ្រូចំនួន ៣ នាក់ដោយចៃដន្យដើម្បីទៅធ្វើជាគណៈកម្មការកំណែ ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖
- A : គណៈកម្មការកំណែសុទ្ធតែជាគ្រូស្រី។      B : គណៈកម្មការកំណែគ្រូប្រុស ២ នាក់ និងគ្រូស្រី ១ នាក់។
- C : គណៈកម្មការកំណែគ្រូស្រីយ៉ាងតិច ២ នាក់។
- V. (៤០ពិន្ទុ)
1. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $P(2, 0, 1)$ ,  $Q(3, 4, -2)$  និង  $R(-1, 3, 2)$  ។
- ក. ចូរដៅចំណុច  $P, Q$  និង  $R$  ក្នុងតម្រុយតែមួយ។      ខ. រកទំហំ  $|\vec{PQ}|$ ,  $|\vec{PQ}|$  និង  $|\vec{QR}|$  ។
- គ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់  $(PQ)$  ។      ឃ. សរសេរសមីការប្លង់  $PQR$  ។
2. គេឲ្យសមីការទូទៅនៃអេលីប  $(E) : 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$  ។
- ក. រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប។
- ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង  $(E)$  និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយ។ សង់អេលីបនេះ។ (គេឲ្យ  $\frac{4\sqrt{2}}{3} = 1.9$ ) ។
3. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E) : y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$  ។
- ក. ដោះស្រាយសមីការ  $(F) : y'' - 3y' + 2y = 0$  ។
- ខ. ចូរកំណត់ចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  ដើម្បីឲ្យ  $y_p = ax + b$  ជាចម្លើយនៃ  $(E)$  រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ  $(E)$  ។
- VI. (៣៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍  $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$  មានក្រាបតំណាង  $(C)$  ។
1. ក. គណនា  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ។
- ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់  $(D) : y = x + 2$  ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $(C)$ ។ សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប  $(C)$  និងបន្ទាត់  $(D)$  ។
2. ក. បង្ហាញថាគ្រប់  $x \in \mathbb{R}$  គេបាន  $f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x + 3}$  ។
- ខ. គណនា  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់  $(\Delta) : y = x - 2$  ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $(C)$  ។ សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប  $(C)$  និងបន្ទាត់  $(\Delta)$  ។
3. ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់  $x \in \mathbb{R}$  គេបាន  $f'(x) = \left( \frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$  ។ សិក្សាសញ្ញានៃ  $f'(x)$  ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  ។
4. សង់បន្ទាត់  $(D), (\Delta)$  និងក្រាប  $(C)$  ក្នុងតម្រុយ  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  ។

## ជំនាញគណិតវិទ្យា

### I. គណនា

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{x^2} = \frac{\ln 1 + 1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{x^2} = 1}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{\sqrt{x}-1} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{2x-1}-1)[(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1](\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)[(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(\sqrt[3]{2x-1})^3 - 1](\sqrt{x}+1)}{[(\sqrt{x})^2 - 1][(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)[(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1]}$$

$$= \frac{2(\sqrt{1}+1)}{(\sqrt[3]{2(1)-1})^2 + \sqrt[3]{2(1)-1} + 1}$$

$$= \frac{2(2)}{1+1+1} = \frac{4}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{4}{3}}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\sin 3x \cdot (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{\sin 3x \cdot (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x \cdot (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \right]$$

$$= 1 \times \frac{2}{3(2)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x} = \frac{1}{3}}$$

### II. គណនា

$$\text{ក. } I = \int_1^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9) dx$$

$$= 4 \int_1^2 x^3 dx - 5 \int_1^2 x^2 dx + 6 \int_1^2 x dx + 9 \int_1^2 dx$$

$$= 4 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 - 5 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 + 6 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 + 9x \Big|_1^2$$

$$= x^4 \Big|_1^2 - \frac{5x^3}{3} \Big|_1^2 + 3x^2 \Big|_1^2 + 9x \Big|_1^2$$

$$= 2^4 - 1^4 - \left( \frac{5 \times 2^3}{3} - \frac{5 \times 1^3}{3} \right) + 3(2^2 - 1^2) + 9(2 - 1) = \frac{64}{3}$$



ដូចនេះ:  $I = \frac{64}{3}$

$$\begin{aligned} ខ. J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin 2x)}{2} \right] \text{ ព្រោះ: } \frac{d(\sin 2x)}{dx} = 2 \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x dx = \frac{d(\sin 2x)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2(\frac{\pi}{2})}{2} \right] - \frac{1}{2} \left( 0 - \frac{\sin 0^\circ}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} \right) - 0 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $J = \frac{\pi}{4}$

គ. ដោយ  $\frac{d(x^2 + 2)}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{d(x^2 + 2)}{2} = x dx$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } K &= \int_1^2 \frac{x}{(x^2 + 2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= -\frac{1}{2(x^2 + 2)} \Big|_1^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^2 + 2} - \frac{1}{1^2 + 2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $K = \frac{1}{12}$

III. គេមាន  $z_1 = -1 + i$  និង  $z_2 = 1 + i$

$$\begin{aligned} \text{ក. គណនា } z_1 + z_2 &= -1 + i + 1 + i \\ &= 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= -1 + i - (1 + i) \\ &= -1 + i - 1 - i \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } z_1 \times z_2 &= (-1+i)(1+i) \\ &= -1-i+i+i^2, i^2 = -1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 + z_2 = 2i, z_1 - z_2 = -2 \text{ និង } z_1 \times z_2 = -2$$

ខ. សរសេរ  $z_1$  និង  $z_2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } z_1 &= -1+i \\ &= \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } z_2 &= 1+i \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \text{ និង } z_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

គ. បង្ហាញថា  $z_1$  និង  $z_2$  ជាឫសរបស់សមីការ  $x^2 - 2xi - 2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } z_1 &= -1+i \text{ គេបាន } (-1+i)^2 - 2(-1+i)i - 2 = (-1+i)(-1+i-2i) - 2 \\ &= (-1+i)(-1-i) - 2 \\ &= 1-i^2 - 2 \\ &= 1+1-2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } z_2 &= 1+i \text{ គេបាន } (1+i)^2 - 2(1+i)i - 2 = (1+i)(1+i-2i) - 2 \\ &= (1+i)(1-i) - 2 \\ &= 1-i^2 - 2 \\ &= 1+1-2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 \text{ និង } z_2 \text{ ជាឫសរបស់សមីការ } x^2 - 2xi - 2 = 0$$

IV. តាង  $S$  : ជាគណៈកម្មការកំណែចំនួន 3 នាក់ ដែលជ្រើសរើសចេញពីគ្រួសារបំប៉ន 9 នាក់

$$\text{នាំឲ្យ } n(S) = C(9,3) = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{6!7 \cdot 8 \cdot 9}{6!3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{6} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 3 \cdot 4 \cdot 7 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{ព្រឹត្តិការណ៍ } A : \text{ គណៈកម្មការកំណែសុទ្ធតែជាគ្រូស្រី នាំឲ្យ } n(A) = C(4,3) = \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{3!4}{3!} = 4 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន } p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1}{3 \times 7} = \frac{1}{21}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \text{ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ } A \text{ គឺ } p(A) = \frac{1}{21}$$

ព្រឹត្តិការណ៍  $B$  : គណៈកម្មការកំណែគ្រូប្រុស 2 នាក់ និងគ្រូស្រី 1

$$\text{នាំឲ្យ } n(B) = C(5,2) \cdot C(4,1) = \frac{5!}{(5-2)!2!} \times \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{3!4 \cdot 5}{3!2} \times \frac{3!4}{3!} = 34 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន } p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{34}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{17}{42}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ } B \text{ គឺ } p(B) = \frac{10}{21}}$$

និង ព្រឹត្តិការណ៍  $C$  : គណៈកម្មការកំណែត្រួស្រីយ៉ាងតិច 2 នាក់

$$\text{នាំឲ្យ } n(C) = C(4,2) \cdot C(5,1) + C(4,3) = \frac{4!}{(4-2)!2!} \times 5 + 4 = \frac{2!3 \cdot 4 \cdot 5}{2!2} + 4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 4 = 34 \text{ ជម្រើស}$$

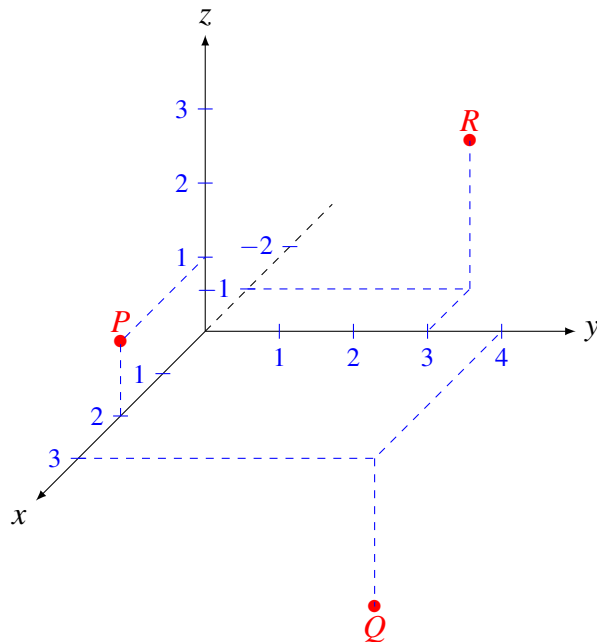
$$\text{គេបាន } p(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{34}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{34}{84} = \frac{17}{42}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ } C \text{ គឺ } p(C) = \frac{17}{42}}$$

V. (២៥ពិន្ទុ)

1. គេមានចំណុច  $P(2,0,1)$ ,  $Q(3,4,-2)$  និង  $R(-1,3,2)$

ក. ដៅចំណុច  $P, Q$  និង  $R$



ខ. រកវ៉ិចទ័រ  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $|\overrightarrow{PQ}|$  និង  $\overrightarrow{QR}$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{PQ} = (3-2, 4-0, -2-1)$$

$$= (1, 4, -3)$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{1+16+9}$$

$$= \sqrt{26} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\overrightarrow{QR} = (-1-3, 3-4, 2+2)$$

$$= (-4-1, 4)$$

គ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់  $(PQ)$

$$\text{គេបាន } (PQ) : \begin{cases} x = x_Q + x_{PQ} \cdot t \\ y = y_Q + y_{PQ} \cdot t \\ z = z_Q + z_{PQ} \cdot t \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ } (PQ) : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = -2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ឃ. សរសេរសមីការប្លង់  $PQR$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} = (-1, -4, 3) \text{ និង } \overrightarrow{QR} = (-4, -1, 4)$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឲ្យ } \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 3 \\ -4 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}[-4(4) - (-1)(3)] - \vec{j}[(-1)(4) - (-4)(3)] + \vec{k}[(-1)(-1) - (-4)(-4)] \\ &= \vec{i}(-16 + 3) - \vec{j}(-4 + 12) + \vec{k}(1 - 16) \\ &= (-13, -8, -15) \end{aligned}$$

$$\text{គេបានសមីការប្លង់ } (PQR) \text{ គឺ } -13(x - x_P) - 8(y - y_P) - 15(z - z_P) = 0$$

$$-13(x - 2) - 8(y - 0) - 15(z - 1) = 0$$

$$-13x + 26 - 8y - 15z + 15 = 0$$

$$-13x - 8y - 15z + 41 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការប្លង់ } PQR \text{ គឺ } 13x + 8y + 15z - 41 = 0$$

$$2. \text{ គេមាន } (E) : 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$$

ក. រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប

$$\text{គេបាន } 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$$

$$4x^2 - 8x + 9y^2 + 36y = -4$$

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) = -4$$

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 + 4y + 4 - 4) = -4$$

$$4(x - 1)^2 - 4 + 9(y + 2)^2 - 36 = -4$$

$$4(x - 1)^2 + 9(y + 2)^2 = 36$$

$$\frac{4(x - 1)^2}{36} + \frac{9(y + 2)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$$

$$\text{មានទម្រង់ } \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \text{ នោះអេលីបមានអ័ក្សធំដេក}$$

$$\text{នាំឲ្យ } h = 1, k = -2$$

$$\text{និង } a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$\text{ហើយ } c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

គេបាន

- ផ្ចិត  $I(h, k) = I(1, -2)$
- កំពូល  $\begin{cases} V_1(h - a, k) = V_1(1 - 3, -2) = V_1(-2, -2) \\ V_2(h + a, k) = V_2(1 + 3, -2) = V_2(4, -2) \end{cases}$
- កំណុំ  $\begin{cases} F_1(h - c, k) = F_1(1 - \sqrt{5}, -2) \\ F_2(h + c, k) = F_2(1 + \sqrt{5}, -2) \end{cases}$
- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{ដូច្នេះ: } \left\{ \begin{array}{l} \text{ផ្ចិត } I(1, -2) \\ \text{កំពូល } \begin{cases} V_1(-2, -2) \\ V_2(4, -2) \end{cases} \\ \text{កំណុំ } \begin{cases} F_1(1 - \sqrt{5}, -2) \\ F_2(1 + \sqrt{5}, -2) \end{cases} \end{array} \right. \text{ និង } e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង ( $E$ ) និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយ

- ចំណុចប្រសព្វរវាង ( $E$ ) និងអ័ក្ស ( $x'ox$ )  
 បើ  $y = 0$  គេបាន  $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(0+2)^2}{4} = 1$   

$$\frac{(x-1)^2}{9} + 1 = 1$$
  

$$\frac{(x-1)^2}{9} = 0$$
  

$$(x-1)^2 = 0$$
  

$$x-1 = 0$$
  

$$x = 1$$

គេបានចំណុចប្រសព្វគឺ  $(1, 0)$  ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាង ( $E$ ) និងអ័ក្ស ( $y'oy$ )  
 បើ  $x = 0$  គេបាន  $\frac{(0-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$   

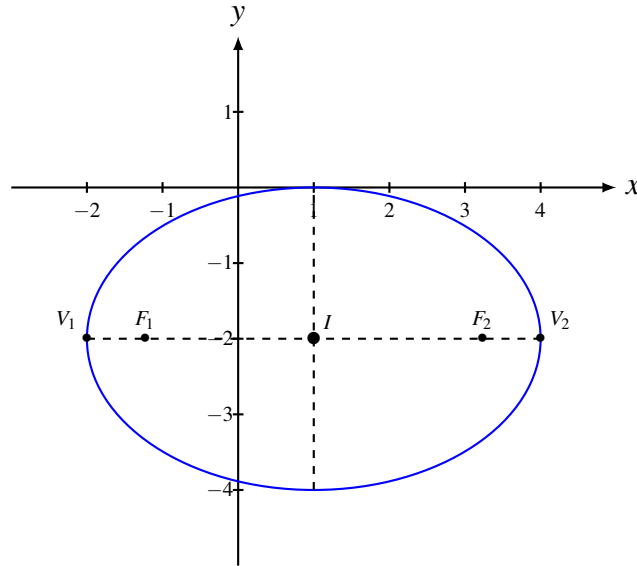
$$\frac{1}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$
  

$$\frac{(y+2)^2}{4} = \frac{8}{9}$$
  

$$9(y+2)^2 = 32$$
  

$$(y+2)^2 = \frac{32}{9}$$
  - $y+2 = -\sqrt{\frac{32}{9}} \Rightarrow y = -\frac{4\sqrt{2}}{3} - 2 = -1.9 - 2 = -3.9$
  - $y+2 = \sqrt{\frac{32}{9}} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2 = 1.9 - 2 = -0.1$
 គេបានចំណុចប្រសព្វមានពីរគឺ  $(-3.9, 0)$  និង  $(-0.1, 0)$  ។

ដូច្នេះ  $(E)$  កាត់អ័ក្ស  $(x'ox)$  ត្រង់  $(1, 0)$  និងកាត់អ័ក្ស  $(y'oy)$  ត្រង់  $(0, -3.9)$  និង  $(0, -0.1)$   
សង់អេលីបនេះ



3. គេមាន  $(E) : y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$  ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ  $(F) : y'' - 3y' + 2y = 0$

មានសមីការសម្គាល់  $r^2 - 3r + 2 = 0$

$$(r - 1)(r - 2) = 0$$

នាំឲ្យ  $r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$  ឬ  $r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ  $(F) : y_c = Ae^x + Be^{2x}$  ដែល  $A, B \in \mathbb{R}$

ខ. ចូរកំណត់ចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  ដើម្បីឲ្យ  $y_p = ax + b$  ជាចម្លើយនៃ  $(E)$

គេមាន  $y_p = ax + b \Rightarrow y'_p = a \Rightarrow y''_p = 0$

គេបាន  $y''_p - 3y'_p + 2y_p = 2x + 1$

$$0 - 3a + 2(ax + b) = 2x + 1$$

$$2ax + (-3a + 2b) = 2x + 1$$

$$\text{សមមូល} \begin{cases} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ -3a + 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1+3}{2} = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ  $y_p = x + 2$

រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ  $(E)$

គេបាន ចម្លើយទូទៅនៃ  $(E)$  គឺ  $y = y_c + y_p = x + 2 + Ae^x + Be^{2x}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ  $(E)$  គឺ  $y = x + 2 + Ae^x + Be^{2x}$  ដែល  $A, B \in \mathbb{R}$

VI. គេមានក្រាប  $(C)$  ដែល  $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$

1. ក. គណនា  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

គេបាន  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right) = -\infty$  ព្រោះ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 3} = 0$

ដូចនេះ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់  $(D) : y = x + 2$  ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $(C)$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \left( x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right) - (x + 2) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4e^x}{e^x + 3} = 0\end{aligned}$$

ដូចនេះ: បន្ទាត់  $(D) : y = x + 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $(C)$  ខាង  $-\infty$

សិក្សាទីតាំងរៀបរវាងក្រាប  $(C)$  និងបន្ទាត់  $(D)$

$$\text{គេមាន } f(x) - y = -\frac{4e^x}{e^x + 3} \text{ ដោយ } \begin{cases} e^x > 0 \\ e^x + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{ចំពោះ } x \in \mathbb{R} \text{ នាំឲ្យ } \frac{e^x}{e^x + 3} > 0$$

គេបាន  $f(x) - y < 0$

ដូចនេះ: ក្រាប  $C$  ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់  $(D)$  ជានិច្ច

2. ក. បង្ហាញថាគ្រប់  $x \in \mathbb{R}$  គេបាន  $f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x + 3}$

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } f(x) &= x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} = x + 2 - 4 + 4 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \\ &= x - 2 + \frac{4e^x + 12 - 4e^x}{e^x + 3} = x - 2 + \frac{12}{e^x + 3}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x + 3}}$$

ខ. គណនា  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 2 + \frac{12}{e^x + 3} \right) = +\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{e^x + 3} = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

បង្ហាញថាបន្ទាត់  $(\Delta) : y = x - 2$  ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $(C)$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( x - 2 + \frac{12}{e^x + 3} \right) - (x - 2) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{e^x + 3} = 0\end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $(\Delta) : y = x - 2$  ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $(C)$  ខាង  $+\infty$

សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប  $(C)$  និងបន្ទាត់  $(\Delta)$

$$\text{គេមាន } f(x) - y = \left( x - 2 + \frac{12}{e^x + 3} \right) - (x - 2) = \frac{12}{e^x + 3}$$

ដោយ  $e^x + 3 > 0$  ចំពោះ  $x \in \mathbb{R}$  គេបាន  $f(x) - y > 0$

ដូចនេះ: ក្រាប  $(C)$  ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់  $(\Delta)$  ចំពោះ  $x \in \mathbb{R}$

3. ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់  $x \in \mathbb{R}$  គេបាន  $f'(x) = \left( \frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$

$$\text{គេមាន } f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x + 3}$$

$$\text{នាំឲ្យ } f'(x) = 1 - \frac{12(e^x + 3)'}{(e^x + 3)^2} = \frac{e^{2x} + 6e^x + 9 - 12e^x}{(e^x + 3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} = \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2} = \left( \frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$$

$$\text{ដូចនេះ: } f'(x) = \left( \frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2 \text{ ចំពោះ } x \in \mathbb{R}$$

សិក្សាសញ្ញានៃ  $f'(x)$

ដោយ  $\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2 \geq 0$  ចំពោះ  $x \in \mathbb{R}$

បើ  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (e^x-3) = 0$

$$e^x - 3 = 0$$

$$e^x = 3$$

$$x = \ln 3$$

ដូចនេះ  $f'(x) > 0$  កាលណា  $x \in (-\infty, \ln 3) \cup (\ln 3, +\infty)$

ចំពោះ  $x = \ln 3$  នោះ  $f(\ln 3) = \ln 3 + 2 - \frac{4e^{\ln 3}}{e^{\ln 3} + 3} = \ln 3 + 2 - 2 = \ln 3$

សង្កេតរកអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$

$x$	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$

4. សង់បន្ទាត់  $(D) : y = x + 2$

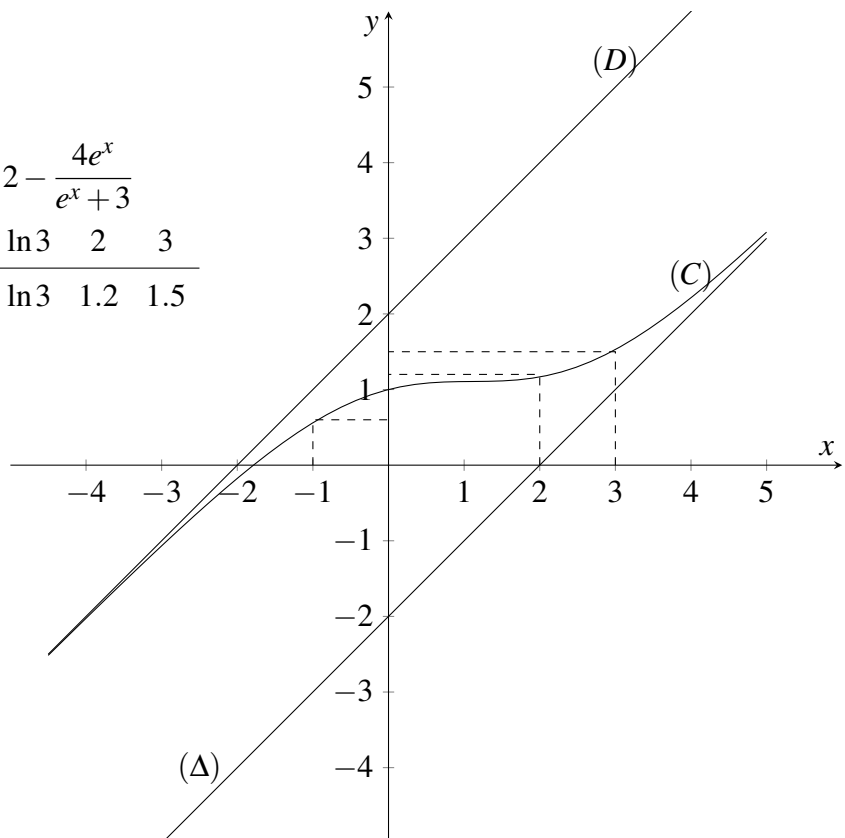
តារាងតម្លៃលេខ	$x$	-2	0
	$y$	0	2

សង់បន្ទាត់  $(\Delta) : y = x - 2$

តារាងតម្លៃលេខ	$x$	0	2
	$y$	-2	0


សង់បន្ទាត់  $(C) : f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$

តារាងតម្លៃលេខ	$x$	-1	0	$\ln 3$	2	3
	$y$	0.6	1	$\ln 3$	1.2	1.5





មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះមេគ្រូជន:.....  
 ឈ្មោះលេខាមេគ្រូជន:.....

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ហ៊ុន វុទ្ធី 

- I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច  $z = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})i$  ។
1. គណនា  $z^2$  ជាទម្រង់ពីជគណិត ។
  2. សរសេរ  $z^2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុល និង អាកុយម៉ង់នៃ  $Z$  ។
  3. គណនាបូសទី 3 នៃ  $Z$  ។
- II. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $y'' - 3y' + 2y = 0$  ( $E$ ) ។ រកចម្លើយនៃសមីការ ( $E$ ) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើ 1 ត្រង់  $x = 1$  ។
- III. គណនាលីមីត
- ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 2x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{1 - \cos 6x}}{\sqrt{2}(\frac{\pi}{3} - x)}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$
- IV. គេមានអាំងតេក្រាល:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx$  និង  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x dx$  ។
- គណនា  $I + J$ ;  $I - J$  រួចទាញរក  $I$  និង  $J$  ។
- V. គេឱ្យ  $f$  ជាអនុគមន៍កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $f(x) = -x - 2 + \frac{4e^x}{1 + e^x}$  ហើយមានក្រាប  $C$  ។
1. គណនា  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $C$  កាលណា  $x \rightarrow -\infty$  ។
  2. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  ។ គណនា  $f'(0), f(0)$  សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។
  3. បង្ហាញថាគល់ 0 ជាចំណុចបេត់ និងជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប  $C$  ។
  4. គណនា  $f(3)$  ហើយសង់ក្រាប  $C$  គេឱ្យ  $(e^3 = 20)$  ។
- VI. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានមួយ គេមានចំណុច  $A(0, 0, 1); B(-1, -2, 0)$  និង  $C(2, 1, -1)$  ។
- ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ  $\vec{AB} \times \vec{AC}$  រួចបង្ហាញថា  $A, B, C$  រត់មិនត្រង់ជួរ ។
  - ខ. សរសេរសមីការប្លង់  $ABC$  ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ  $ABC$  ។
  - គ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់  $L$  ដែលកាត់តាម  $A$  ហើយកែងប្លង់  $ABC$  ។
  - ឃ. គណនា  $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}$  រួចទាញរកមាឌចតុមុខ  $OABC$  ។

## ដំណោះស្រាយ

I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច  $z = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})i$  ។

1. គណនា  $z^2$  ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } z^2 &= [(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})i]^2 \\ &= (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})i + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 i^2, i^2 = -1 \\ &= (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{12} + (\sqrt{2})^2 - 2[(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2]i - (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{12} - (\sqrt{2})^2\end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ } z^2 = -8\sqrt{3} - 8i$$

2. សរសេរ  $z^2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុល និង អាក្យម៉ង់នៃ  $Z$  ។

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } z^2 &= 16 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\ &= 16 \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \\ \text{នាំឱ្យ } z &= \sqrt{z} = \sqrt{16} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \\ &= 4 \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)\end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ } |z| = 4, \quad \arg(z) = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. គណនាឫសទី 3 នៃ  $Z$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{4} \left( \cos \frac{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2 \\ \text{ចំពោះ } k = 0 &\Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{4} \left( \cos \frac{7\pi}{36} + i \sin \frac{7\pi}{36} \right) \\ \text{ចំពោះ } k = 1 &\Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{4} \left( \cos \frac{31\pi}{36} + i \sin \frac{31\pi}{36} \right) \\ \text{ចំពោះ } k = 2 &\Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{4} \left( \cos \frac{55\pi}{36} + i \sin \frac{55\pi}{36} \right)\end{aligned}$$

II. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $y'' - 3y' + 2y = 0$  (E) ។

$$\text{គេមានសមីការសំគាល់ } \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\text{គេបាន } y = Ae^x + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

រកបង្ហាញនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើ 1 ត្រង់  $x = 1$

$$\text{មានន័យថា } y'(1) = 0, y(1) = 1$$

$$\text{គេមាន } y = Ae^x + Be^{2x} \Rightarrow y(1) = Ae + Be = 1 \quad (I)$$

$$y' = A^x + 2Be^{2x} \Rightarrow y'(1) = Ae + 2Be = 1 \quad (II)$$

$$\text{យកសមីការ (II) ដក (I) គេបាន } Be = 0 \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ Ae = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{e} \end{cases}$$

$$\text{ដូច្នេះ } y = \frac{1}{e} e^x = e^{x-1}$$

III. គណនាលីមីត

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 2x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x^6 + x^6 - x^5 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x - x + 1}{x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 2x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6(x-1) + x^5(x-1) - x^4(x-1) - x^3(x-1) - x^2(x-1) - x(x-1) - (x-1)}{x^2(x-1) - 2x(x-1) - 2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^6 + x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)}{(x-1)(x^2 - 2x - 2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{1 - \cos 6x}}{\sqrt{2} \left( \frac{\pi}{3} - x \right)} \\ \text{តាង } t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{3} \text{ បើ } t \rightarrow 0 \text{ នោះ } x \rightarrow \frac{\pi}{3} \\ \text{គេបាន } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 6(t + \frac{\pi}{3})}}{\sqrt{2} \left( \frac{\pi}{3} - (t + \frac{\pi}{3}) \right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 6t}}{-\sqrt{2}t} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 \sin^2 3t}}{-\sqrt{2}t} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} |\sin 3t|}{-\sqrt{2}t} \\ = \pm \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{3t} \times 3 \\ = \pm 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x})(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}{\sin^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 1 - \cos x}{\sin^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left( \frac{x}{2} \right)^2} \times \frac{x^2}{\sin^2 x} \times \frac{2}{4(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{2}{4(2\sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

IV. គេមានអាំងតេក្រាល:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx$  និង  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x dx$  ។

$$\begin{aligned} \text{គណនា } I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x \cos^4 x + \cos^2 x \sin^4 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x \cos x)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{\sin 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{8} \left[ x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{8} \left[ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\sin \pi}{4} \right) - \left( 0 - \frac{\sin 0}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } I + J = \frac{\pi}{32} \quad (I)$$

$$\begin{aligned} \text{គណនា } I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x \cos^4 x - \cos^2 x \sin^4 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x \cos x)^2 \cos 2x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x \frac{1}{2} \cos 2x dx \end{aligned}$$

$$\text{តាង } t = \sin 2x \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \cos 2x dx$$

$$\text{គេបាន } I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} [\sin^3 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{គេបាន } I - J = \frac{1}{3} \quad (II)$$

$$\text{យក (I)+(II): } 2I = \frac{\pi}{32} + \frac{1}{3} = \frac{3\pi - 32}{96} \Rightarrow I = \frac{3\pi - 32}{192} \Rightarrow J = \frac{1}{6}$$

V. គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $f(x) = -x - 2 + \frac{4e^x}{1 + e^x}$  ហើយមានក្រាប  $C$

$$1. \text{ គណនា } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -x - 2 + \frac{4e^x}{1 + e^x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x - 2 + \frac{4e^x}{1 + e^x} \right) = +\infty$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x - 2 + \frac{4e^x}{1 + e^x} - (-x - 2) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{1 + e^x} = 0$$

នាំឱ្យ  $y = -x - 2$  ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $C$  កាលណា  $x \rightarrow -\infty$

2. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } f'(x) &= \left(-x-2+\frac{4e^x}{1+e^x}\right)' \\ &= -1+4\cdot\frac{(e^x)'(1+e^x)-(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{-(1+e^x)^2+4e^x(1+e^x-e^x)}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{-1-2e^x-e^{2x}+4e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{-[(e^x)^2-2e^x+1]}{(1+e^x)^2} \\ &= -\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} < 0 \quad \text{ព្រោះ: } (1+e^x)^2 > 0, (e^x-1)^2 > 0\end{aligned}$$

នាំឱ្យ  $f$  ជាអនុគមន៍ចុះ  $\forall x \in \mathbb{R}$

សញ្ញានៃ  $f'(x)$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	

$$\text{គណនា } f'(0) = \frac{-e^0+2e^0-1}{(1+e^0)^2} = 0$$

$$f(0) = -0-2+\frac{4e^0}{1+e^0} = -2+\frac{4}{2} = 0$$

សង្កេតរកអថេរភាពនៃ  $f$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

3. បង្ហាញថាគល់ 0 ជាចំណុចរបត់កាលណា  $f''(0) = 0$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } f''(x) &= -\left[\frac{(e^x-1)^2}{(1+e^x)^2}\right]' \\ &= -\frac{[(e^x-1)^2]'(1+e^x)^2-[(1+e^x)^2]'(e^x-1)^2}{(1+e^x)^4} \\ &= -\frac{2(e^x-1)'(e^x-1)(1+e^x)^2-2(e^x+1)'(e^x+1)(e^x-1)^2}{(e^x+1)^4} \\ &= -\frac{2e^x(e^x-1)(1+e^x)-2e^x(e^x-1)^2}{(e^x+1)^3}\end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } f''(0) = -\frac{2e^0(e^0-1)(1+e^0)-2e^0(e^0-1)}{(e^0+1)^3}$$

$$f''(0) = 0$$

បង្ហាញថា 0 ជាផ្ចិតផ្គុំនៃក្រាប C

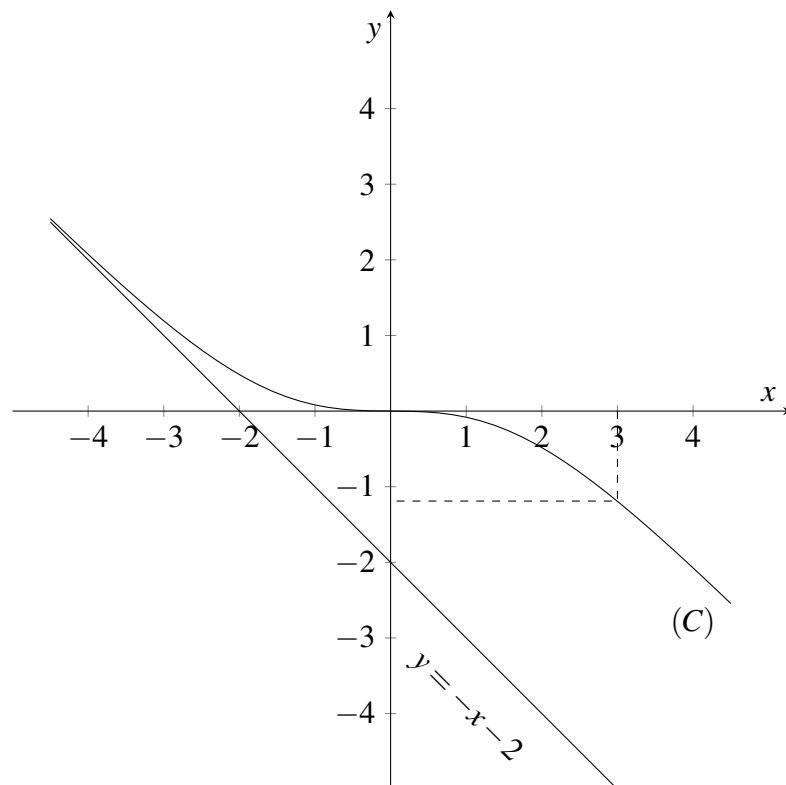
$$\begin{aligned} \text{ចំពោះ } \forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R} \text{ គេបាន } f(-x) &= -(-x) - 2 + \frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ &= -\left[-x+2-\frac{\frac{4}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right] \\ &= -\left[-x-2+4-\frac{4}{e^x} \times \frac{e^x}{e^x+1}\right] \\ &= -\left[-x-2+\frac{4(e^x+1)-4}{1+e^x}\right] \\ &= -\left[-x-2+\frac{4e^x}{1+e^x}\right] \end{aligned}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍សេសដែលមានផ្ចិតផ្គុំ 0

$$4. \text{ គណនា } f(3) = -3 - 2 + \frac{4e^3}{1+e^3} = -5 + \frac{4 \times 20}{1+20} = \frac{-21(5) + 80}{21} = -\frac{25}{21}$$

សង់ក្រាប C



VI. នៅក្នុងតម្រុយ  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $A(0,0,1); B(-1,-2,0)$  និង  $C(2,1,-1)$  ។

1. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ  $\vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\text{ដោយ } \vec{AB} = (-1-0, -2-0, 0-1) = (-1, -2, -1)$$

$$\vec{AC} = (2+1, 1+2, -1-0) = (3, 3, -1)$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (2+3) \vec{i} - (1+3) \vec{j} + (-3+6) \vec{k} \\ &= 5 \vec{i} - 4 \vec{j} + 3 \vec{k} \end{aligned}$$

ដោយ  $\vec{AB} \times \vec{AC} \neq 0$  នោះ  $A, B, C$  តែមិនត្រង់ជួរ ។

2. សរសេរសមីការប្លង់  $ABC$

$$\text{គេបាន } (ABC) : 5(x-0) - 4(y-0) + 3(z-1) = 0$$

$$\text{ដូច្នេះ សមីការប្លង់ } (ABC) : 5x - 4y + 3z - 3 = 0$$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ  $ABC$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } S_{\triangle ABC} &= \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 3^2}}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា} \end{aligned}$$

3. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់  $L$  ដែលកាត់តាម  $A$  ហើយកែងប្លង់  $ABC$

$$\text{នាំឱ្យ រូបមន្តប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ } L \text{ ជា រូបមន្តទំលាក់ប្លង់ } (ABC) \text{ នោះ } \vec{u} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (5, -4, 3)$$

$$\text{គេបាន } L : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ } (L) : \begin{cases} x = 5t \\ y = -4t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

4. គណនា  $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}$

$$\text{ដោយ } \vec{OA} = A(0, 0, 1), \vec{OB} = B(-1, -2, 0), \vec{OC} = C(2, 1, -1)$$

$$\text{គេបាន } (\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យមាឌចតុមុខ } OABC \text{ គឺ } V_{OABC} &= \frac{|(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}|}{6} \\ &= \frac{|3|}{6} \\ &= \frac{1}{2} \text{ ឯកតាមាឌ} \end{aligned}$$





មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះបេក្ខជន:.....  
 ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន:.....

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ហ៊ីង វុទ្ធី



I. គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$  និង  $z_2 = 1 + i$  ។ គណនា  $\cos \frac{5\pi}{12}$  និង  $\sin \frac{5\pi}{12}$  ។

II. គណនាលីមីត

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x - 16}{x^2 + 3x - 10}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាល

$$1. I = \int \frac{3x^2 + 5x - 4}{(x-1)(x+1)^2} dx$$

$$2. J = \int \frac{3(x^2 - 2x + 3)}{(x-1)(x+2)^2} dx$$

$$3. K = \int \cos^3 x dx$$

IV. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ( $E$ ):  $y'' - 3y' + 2y = 4x^3 - 2x$  ។

1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូស្យែន  $y'' - 3y' + 2y = 0$  ។

2. បើ  $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ ( $E$ ) ចូរកំណត់ចំនួនពិត  $a, b, c$  និង  $d$  ។ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ( $E$ ) ។

V. គេឱ្យអនុគមន៍  $f(x) = \sqrt{3x+1}$  កំណត់លើ  $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$  ។

1. កំណត់តម្លៃអមនៃ  $f'(x)$  ចំពោះ  $\forall x \in [1, 5]$  ។

2.  $\forall x \in [1, 5]$  ចូរបង្ហាញថា  $\frac{3}{8}x + \frac{13}{8} \leq \sqrt{3x+1} \leq \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$  ។

VI.  $f$  ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ  $y = f(x) = x + e^{1-x}$  ហើយមានក្រាប  $C$  ។

ក. គណនា  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត  $L$  នៃក្រាប  $C$  ។

ខ. បង្ហាញថា  $f$  មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់  $x = 1$  ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។

គ. សង់ក្រាប  $C$  នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ។ គេយក  $e = 2.7$  ។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃក្នុងកំណត់ដោយក្រាប  $C$  អាស៊ីមតូតទ្រេត  $L$  បន្ទាត់ឈរ  $x = 1$  និង  $x = 2$  ។

VII. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេឱ្យបីចំណុច  $A(-2, 1, -3), B(1, 2, 3)$  និង  $C(2, -2, 1)$  ។

1. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់  $L$  ដែលកាត់តាម  $A$  ហើយស្របនឹង  $\vec{BC}$  ។

2. គណនា  $\vec{AB} \times \vec{AC}$  ។ រកសមីការប្លង់  $ABC$  ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ  $ABC$  ។

3. រកមាឌនៃតេត្រាអែត  $OABC$  ។

## ជំនាញគណិតវិទ្យា

I. គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$  និង  $z_2 = 1 + i$  ។ គណនា  $\cos \frac{5\pi}{12}$  និង  $\sin \frac{5\pi}{12}$

$$\text{ដោយ } z_1 = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{គេបាន } \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} &= \frac{\sqrt{2}(-1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{2(1 + i)(1 - i)} \\ &= \frac{\sqrt{2}(-1 + i + i\sqrt{3} - i^2\sqrt{3})}{2(1 - i^2)}, i^2 = -1 \end{aligned}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\text{ដូច្នេះ នាំឱ្យ } \boxed{\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ និង } \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$$

II. គណនាលីមីត

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x - 16}{x^2 + 3x - 10} = \frac{2^3 + 4(2) - 16}{2^2 + 3(2) - 10} = \frac{8 + 8 - 16}{4 + 6 - 10} = \frac{0}{0} \text{ រាងមិនកំណត់}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x - 16}{x^2 + 3x - 10} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 8x - 16}{x^2 - 2x + 5x - 10} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x - 2) + 2x(x - 2) + 8(x - 2)}{x(x - 2) + 5(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 8)}{(x - 2)(x + 5)} \\ &= \frac{2^2 + 2(2) + 8}{2 + 5} = \frac{16}{7} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x - 16}{x^2 + 3x - 10} = \frac{16}{7}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1} = \frac{2\sin^2 \frac{\pi}{6} - 3\sin \frac{\pi}{6} + 1}{4\sin^2 \frac{\pi}{6} - 1} = \frac{2(\frac{1}{2})^2 - 3(\frac{1}{2}) + 1}{4(\frac{1}{2})^2 - 1} = \frac{0}{0} \text{ រាងមិនកំណត់}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 2\sin x + 1}{(2\sin x)^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x(2\sin x - 1) - (2\sin x - 1)}{(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)}{(2\sin x + 1)(2\sin x - 1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - 1}{2(\frac{1}{2}) + 1} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}{4 \sin^2 x - 1} = -\frac{1}{4}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \text{ រាងមិនកំណត់}$$

$$\text{ដោយប្រើរូបមន្ត } \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2} [\cos 3x + \cos(-x)] \cos 3x}{x^2}, \cos(-x) = \cos x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2} (\cos 3x \cdot \cos 3x + \cos x \cdot \cos 3x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2} [\frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 0) + \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x)]}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4 - \cos 6x - 1 - \cos 4x - \cos 2x}{4}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x + 1 - \cos 4x + 1 - \cos 2x}{4x^2}, 1 - \cos ax = 2 \sin^2 \frac{ax}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 3x + 2 \sin^2 2x + 2 \sin^2 x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin^2 3x}{(3x)^2} \times 9 + \frac{\sin^2 2x}{(2x)^2} \times 4 + \frac{\sin^2 x}{x^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (9 + 4 + 1) = \frac{14}{2}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2} = 7$$

### III. គណនាអាំងតេក្រាល

$$1. I = \int \frac{3x^2 + 5x - 4}{(x-1)(x+1)^2} dx$$

គេអាចសរសេរជា រាងកាណូនីច

$$\frac{3x^2 + 5x - 4}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$3x^2 + 5x - 4 = A(x^2 + 2x + 1) + B(x-1) + C(x^2 - 1)$$

$$3x^2 + 5x - 4 = Ax^2 + 2Ax + A + Bx - B + Cx^2 - C$$

$$3x^2 + 5x - 4 = (A+C)x^2 + (2A+B)x + (A-B-C)$$

$$\text{ផ្ទឹមមេគុណនៃអង្គទាំងពីរ គេបាន } \begin{cases} A+C=3 \\ 2A+B=5 \\ A-B-C=-4 \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ} \begin{cases} A=1 \\ B=3 \\ C=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{នោះគេបាន } I &= \int \frac{3x^2 + 5x - 4}{(x-1)(x+1)^2} dx = \int \left[ \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} \right] dx \\ &= \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2} + 2 \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + 2 \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ } I = \int \frac{3x^2 + 5x - 4}{(x-1)(x+1)^2} dx = \ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + 2\ln|x+1| + C$$

$$2. J = \int \frac{3(x^2 - 2x + 3)}{(x-1)(x+2)^2} dx$$

គេអាចសរសេរជា រាងកាណូនិច

$$\frac{3(x^2 - 2x + 3)}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$3(x^2 - 2x + 3) = A(x^2 + 4x + 4) + B(x-1) + C(x-1)(x+2)$$

$$3x^2 - 6x + 9 = Ax^2 + 4Ax + 4A + Bx - B + Cx^2 + Cx - 2C$$

$$3x^2 - 6x + 9 = (A+C)x^2 + (4A+B+C)x + (4A-B-2C)$$

$$\text{ផ្ទឹមមេគុណនៃអង្គទាំងពីរ គេបាន } \begin{cases} A+C=3 \\ 4A+B+C=-6 \\ 4A-B-2C=9 \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ} \begin{cases} A=\frac{2}{3} \\ B=-11 \\ C=\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{នោះគេបាន } J &= \int \frac{3(x^2 - 2x + 3)}{(x-1)(x+2)^2} dx = \int \left[ \frac{2}{3(x-1)} - \frac{11}{(x+2)^2} + \frac{7}{3(x+2)} \right] dx \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-1} - 11 \int \frac{dx}{(x+2)^2} + \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{11}{x+2} + \frac{7}{3} \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ } J = \int \frac{3(x^2 - 2x + 3)}{(x-1)(x+2)^2} dx = \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{11}{x+2} + \frac{7}{3} \ln|x+2| + C$$

$$3. K = \int \cos^3 x dx = \int \cos x (\cos^2 x) \text{ ដោយ } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ នោះ } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\text{គេបាន } K = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx = \int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x dx$$

$$\text{តាង } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\text{គេបាន } K = \int \cos x dx - \int t^2 dt = \sin x - \frac{t^3}{3} + C = \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\text{ដូច្នេះ } K = \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

IV. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) :  $y'' - 3y' + 2y = 4x^3 - 2x$

$$1. \text{ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូស្យែន } y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$\text{សមីការសំគាល់ } \lambda^2 - 3\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$\text{ដូច្នេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ } y_c = Ae^x + Be^{2x}$$

$$2. \text{ កំណត់ចំនួនពិត } a, b, c \text{ និង } d$$

$$\text{បើ } g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)}$$

$$\text{នោះ } g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow g''(x) = 6ax + 2b \text{ ជំនួសចូលសមីការ (E)}$$

$$\text{គេបាន } g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 4x^3 - 2x$$

$$6ax + 2b - 3(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 4x^3 - 2x$$

$$2ax^3 + (-9a + 2b)x^2 + (6a - 6b + 2c)x + (2b - 3c + 2d) = 4x^3 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a &= 4 \\ -9a + 2b &= 0 \\ 6a - 6b + 2c &= 2 \\ 2b - 3c + 2d &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 2 \\ b &= 9 \\ c &= 22 \\ d &= 24 \end{cases}$$

ដូច្នេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ  $y = y_c + g(x) = Ae^x + Be^x + 2x^3 + 9x^2 + 22x + 24, A, B \in \mathbb{R}$

V. គេឱ្យអនុគមន៍  $f(x) = \sqrt{3x+1}$  កំណត់លើ  $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

1. កំណត់តម្លៃអនុគមន៍  $f'(x)$  ចំពោះ  $\forall x \in [1, 5]$

$$\text{ដោយ } f'(x) = \frac{(3x+1)'}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}, f'(5) = \frac{3}{2\sqrt{16}} = \frac{3}{8}$$

ចំពោះ  $\forall x \in [1, 5]$  និង  $f'(1) > f'(5)$  នោះគេបាន  $f'(5) \leq f'(x) \leq f'(1)$

$$\text{ដូច្នេះ តម្លៃអនុគមន៍ } f'(x) \text{ គឺ } \frac{3}{8} \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$$

2. បង្ហាញថា  $\frac{3}{8}x + \frac{13}{8} \leq \sqrt{3x+1} \leq \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$  ចំពោះ  $\forall x \in [1, 5]$

ដោយ  $\frac{3}{8} \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$  តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់

$$\text{គេបាន } \frac{3}{8}(x-1) \leq f(x) - f(1) \leq \frac{3}{4}(x-1)$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{3}{8} \leq \sqrt{3x+1} - \sqrt{3(1)+1} \leq \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{3}{8} + 2 \leq \sqrt{3x+1} \leq \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 2$$

$$\text{ដូច្នេះ } \frac{3}{8}x + \frac{13}{8} \leq \sqrt{3x+1} \leq \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}, \forall x \in [1, 5]$$

VI.  $f$  ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ  $y = f(x) = x + e^{1-x}$  ហើយមានក្រាប  $C$  ។

ក. គណនា  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{1-x}) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{e}{e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{e^{-x}} + e\right) = +\infty$$

ដោយ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$  នោះគេបាន  $L: y = x$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $C$

ខ. បង្ហាញថា  $f$  មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់  $x = 1$

$$\text{គេបាន } f'(x) = (x + e^{1-x})' = 1 + (1-x)'e^{1-x} = 1 - e^{1-x}$$

$$\text{បើ } f'(x) = 0 \text{ នោះ } 1 - e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} = e^0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{បើ } f'(x) > 0 \text{ នោះ } 1 - e^{1-x} > 0 \Leftrightarrow e^{1-x} < e^0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Rightarrow x > 1$$

$$\text{បើ } f'(x) < 0 \text{ នោះ } 1 - e^{1-x} < 0 \Leftrightarrow e^{1-x} > e^0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Rightarrow x < 1$$

តារាងសញ្ញានៃ  $f'(x)$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$

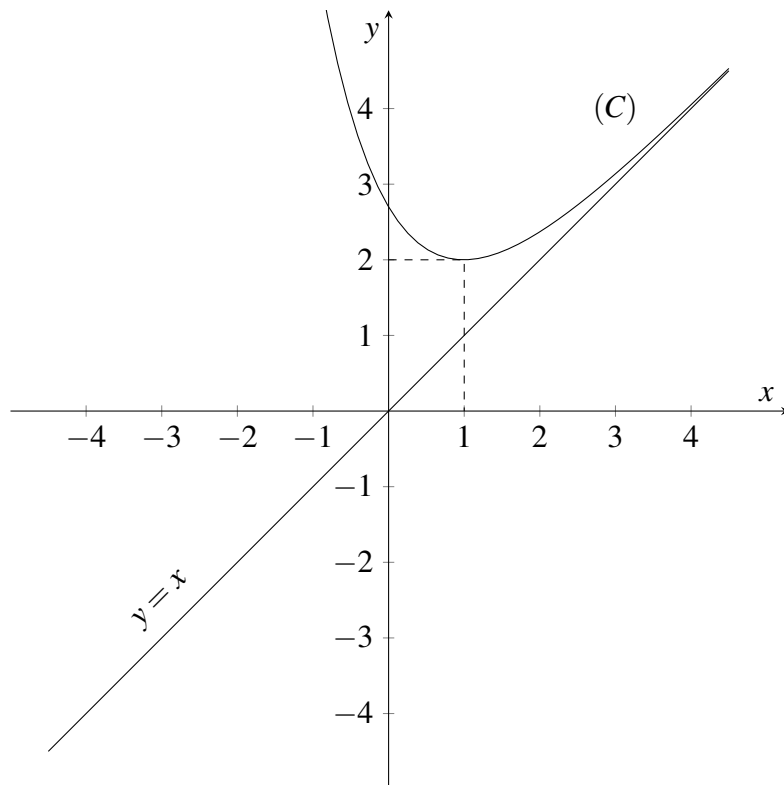
ដោយ  $f'(x)$  ប្តូរសញ្ញាពី  $-$  ទៅ  $+$  ត្រង់  $x = 1$  នោះ  $f$  មានអតិបរមាត្រង់  $x = 1$  គឺ  $f(1) = 1 + e^0 = 2$

សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$2$	$-\infty$

គ. សង់ក្រាប  $C$  នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ គេយក  $e = 2.7$

បើ  $x = 0$  នោះ  $y(0) = e$



ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកក្នុងកំណត់ដោយក្រាប  $C$  អាស៊ីមតូតទ្រេត  $L$  បន្ទាត់ឈរ  $x = 1$  និង  $x = 2$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } S &= \int_1^2 [f(x) - x] dx = \int_1^2 (x + e^{1-x} - x) dx = \int_1^2 e^{1-x} dx = e \int_1^2 e^{-x} dx \\ &= -e [e^{-x}]_1^2 = -e(e^{-2} - e^{-1}) = -e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ ផ្ទៃក្រឡា  $S = \frac{e-1}{e}$  ឯកតាផ្ទៃក្រឡា

VII. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេឱ្យបីចំណុច  $A(-2, 1, -3), B(1, 2, 3)$  និង  $C(2, -2, 1)$

1. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់  $L$  ដែលកាត់តាម  $A$  ហើយស្របនឹង  $\vec{BC}$

នោះ  $\vec{BC} = (2 - 1, -2 - 2, 1 - 3) = (1, -4, -2)$  ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់  $L$

$$\text{គេបានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ } L : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2. គណនា  $\vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\text{ដោយ } \vec{AB} = (1+2, 2-1, 3+3) = (3, 1, 6)$$

$$\vec{AC} = (2+2, -2-1, 1+3) = (4, -3, 4)$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (4+18)\vec{i} - (12-24)\vec{j} + (-9-4)\vec{k} \\ &= 22\vec{i} + 12\vec{j} - 13\vec{k} \end{aligned}$$

រកសមីការប្លង់  $ABC$

$$\text{គេបាន សមីការប្លង់ } ABC : 22(x+2) + 12(y-1) - 13(z+3) = 0$$

$$22x + 44 + 12y - 12 - 13z - 39 = 0$$

$$22x + 12y - 13z - 7 = 0$$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ  $ABC$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ } ABC \text{ គឺ } S &= |\vec{AB} \times \vec{AC}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{22^2 + 12^2 + 13^2} = \sqrt{797} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា} \end{aligned}$$

3. រកមាឌនៃតេត្រាអែត  $OABC$

$$\text{ដោយ } \vec{AO} = (0+2, 0-1, 0+3) = (2, -1, 3) \text{ និង } \vec{AB} \times \vec{AC} = (22, 12, -13)$$

$$\text{នាំឱ្យ } \vec{AO} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) = (2)(22) + (-1)(12) + (3)(-13) = -7$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន មាឌតេត្រាអែត } OABC \text{ គឺ } V &= \frac{1}{6} |\vec{AO} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})| \\ &= \frac{|-7|}{6} \\ &= \frac{7}{6} \text{ ឯកតាមាឌ} \end{aligned}$$





មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះបេក្ខជន:.....  
 ឋានៈលេខាបេក្ខជន:.....

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ហ៊ីង វុទ្ធី



- I. 1. ដោះស្រាយសមីការ  $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$  (E) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ។  
 រកម៉ូឌុល និង អាក្យម៉ង់នៃឫសនីមួយៗរបស់សមីការ (E) ។  
 2. សរសេរ  $w = \left( \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} \right)^2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- II. គណនាលីមីត៖  
 $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos x}$        $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}$        $C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$
- III. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $2y'' + 3y' + y = 0$  តាមលក្ខខណ្ឌដើម  $y(0) = 1, y'(0) = 2$  ។
- IV. គណនាអាំងតេក្រាល  
 $A = \int \frac{2x+7}{x^2-1} dx$        $B = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$        $C = \int x e^x dx$
- V. ក្នុងចំណោមប៊ូល ១៥ ដែលចែកជា ប៊ូលពណ៌បៃតងចំនួន ៧ និងសរសេរលើប៊ូលទាំង ៧ ប៊ូលខៀវចំនួន ៥ និងប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន ៣ ។ គេចាប់ប៊ូលបីចេញពីក្នុងចំណោមប៊ូលទាំងនេះ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖  
 A: ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង  
 B: ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌ក្រហមចំនួនពីរ និងបៃតងមួយ  
 C: ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌ខុសគ្នា ។
- VI. អនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $y = f(x) = \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right)$  ហើយមានក្រាប  $C$  ។  
 1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$  រួចបង្ហាញថាជាអនុគមន៍សេស ។  
 2. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ ។  
 3. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍  
 4. សង់តារាងអថេរភាពនៃ អនុគមន៍  $f$  និងសង់ខ្សែកោង  $C$  ។ គេឱ្យ ( $e = 2.7$ )  
 5. ដោយប្រើក្រាប ( $C$ ) ចូរពិភាក្សាតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ  $m$  នូវចំនួននឹងសញ្ញានៃឫសសមីការ  $\ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) = m$  ។
- VII. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានមួយ គេឱ្យបីចំណុច  $A(3, 1, 4), B(-1, 2, 5), C(5, -2, 3)$   
 1. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ ( $D$ ) ដែលកាត់តាមចំណុច  $C$  និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស  $\vec{AB}$  ។  
 2. រកសមីការប្លង់ ( $P$ ) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់  $\vec{AC}$  ហើយកាត់តាមចំណុច  $B$  ។ រកសមីការស្វ៊ែ ( $S$ ) ដែលមានអង្កត់ធ្នឹត  $[AB]$  ។  
 3. គណនា  $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$  រួចសរសេរសមីការប្លង់  $ABC$  ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ  $ABC$  ។  
 $M$  ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ ( $D$ ) និងប្លង់ ( $P$ ) គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច  $M$  ។

## ជំនាញស្រាវជ្រាវ

I. 1. ដោះស្រាយសមីការ  $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$  ( $E$ ) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ។

$$\Delta' = (b')^2 - ac = (-\sqrt{2})^2 - (1)(4) = 2 - 4 = -2 < 0$$

$$\text{គេបាន } z_1 = \frac{-(-\sqrt{2}) + \sqrt{2}i}{1} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ នាំឱ្យ } z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

$$\text{រក } |z_1|, |z_2| \text{ និង } \arg(z_1), \arg(z_2)$$

$$\text{ដោយ } |z_1| = |z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{គេបាន } z_1 = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{|z_1| = |z_2| = 2, \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \arg(z_2) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ដែល } k \in \mathbb{Z}}$$

2. សរសេរ  $w = \left( \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} \right)^2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{ដោយ } \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left( \frac{2\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{4} \right)$$

$$\text{នាំឱ្យ } w = \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{4} \right) \right]^2 = \cos \left( \frac{4\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{4\pi}{4} \right)$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{w = \cos \pi + i \sin \pi}$$

II. គណនាលីមីត៖

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos x} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = 16 \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin^2 2x}{(2x)^2} \times \frac{\frac{x^2}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right] = 16$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{A = 16}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{តាង } A(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} \Rightarrow A(0) = 2$$

$$\text{គេបាន } B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot A(x)}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot A(x)}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{1-x})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{A(x) \sin x}{x+1-1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{A(x)}{2} \times \frac{\sin x}{x} \right] = \frac{A(0)}{2} \times 1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{B = 1}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 2x - 2}{x^2 - x + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1) + 2(x-1)}{x(x-1) + (x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{C = \frac{3}{2}}$$

III. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $2y'' + 3y' + y = 0$  តាមលក្ខខណ្ឌដើម  $y(0) = 1, y'(0) = 2$

$$\text{មានសមីការសម្គាល់ } 2\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(2\lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0, 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{គេបាន ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ } y = Ae^{-x} + Be^{-\frac{1}{2}x}, A, B \in \mathbb{R} \Rightarrow y(0) = A + B = 1 \quad (1)$$

$$y' = -Ae^{-x} - \frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow y'(0) = -A - \frac{1}{2}B = 2 \quad (2)$$

$$\text{យកសមីការ (1) + (2) គេបាន } A - A + B - \frac{1}{2}B = 1 + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}B = 3 \Rightarrow B = 6$$

$$\text{ជំនួសចូលសមីការ (1) នាំឱ្យ } A = 1 - B = 1 - 6 = -5$$

$$\text{ដូច្នេះ សមីការមានចម្លើយ } \boxed{y = -5e^{-x} + 6e^{-\frac{1}{2}x}}$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$A = \int \frac{2x+7}{x^2-1} dx$$

$$\text{ដោយ } \frac{2x+7}{x^2-1} = \frac{2x+7}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\text{សម្មូល } 2x+7 = Ax+A+Bx-B = (A+B)x+A-B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B = 2 & (1) \\ A-B = 7 & (2) \end{cases}$$

$$\text{យក (1) + (2) គេបាន } 2A = 9 \Rightarrow A = \frac{9}{2} \text{ ជំនួសចូល (1) នោះ } B = 2 - A = 2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$\text{គេបាន } A = \int \left( \frac{9}{2(x-1)} - \frac{5}{2(x+1)} \right) dx = \frac{9}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{9}{2} \ln|x-1| - \frac{5}{2} \ln|x+1| + C$$

$$\text{ដូច្នេះ } \boxed{A = \frac{9}{2} \ln|x-1| - \frac{5}{2} \ln|x+1| + C, C \in \mathbb{R}}$$

$$B = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\text{តាង } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

$$\text{គេបាន } B = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t} = [\ln|t|]_e^{e^2} = [\ln|\ln x|]_e^{e^2} = |\ln|\ln e^2|| - |\ln|e|| = \ln 2 - 1$$

$$\text{ដូច្នេះ } \boxed{B = \ln 2 - 1}$$

$$C = \int x e^x dx$$

$$\text{តាង } u = x \Rightarrow du = dx \text{ និង } dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

$$\text{គេបាន } C = uv - \int v du = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$\text{ដូច្នេះ } \boxed{C = x e^x - e^x + c, c \in \mathbb{R}}$$

V. គេចាប់ប៊ូល 3 ចេញពីក្នុងថង់ដែលមានបូលសរុបចំនួន 15 ដោយចៃដន្យ

$$\text{នោះករណីអាចគឺ } n(S) = C(15, 3) = \frac{15!}{(15-3)!3!} = \frac{12! \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{12!3!} = 450$$

រក  $P(A)$

$$A: \text{ ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង នាំឱ្យ } n(A) = C(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4!3!} = 5 \times 7 = 35$$

$$\text{ដូច្នេះ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{35}{450} = \frac{7}{90}$$

រក  $P(B)$

$B$ : ប៊ូលដែលចាប់បានពណ៌ក្រហមចំនួន 2 និង បៃតង 1 នាំឱ្យ  $n(B) = C(3,2) \cdot C(7,1) = 3 \times 7 = 21$

$$\text{ដូច្នេះ } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{21}{450} = \frac{7}{150}$$

រក  $P(C)$

$C$ : ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌ខ្ពស់គ្នា នាំឱ្យ  $n(C) = C(7,1) \cdot C(5,1) \cdot C(3,1) = 7 \times 5 \times 3 = 150$

$$\text{ដូច្នេះ } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{150}{450} = \frac{1}{3}$$

VI. អនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $y = f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$  ហើយមានក្រាប  $C$

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$

អនុគមន៍  $f$  មានន័យកាលណា  $\frac{x+1}{x-1} > 0$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$x+1$	$-$	$0$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$0$	$+$
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$	$-$	$+$	$+$

តាមតារាងសញ្ញា ដោយ  $\frac{x+1}{x-1} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

ដូច្នេះ ដែនកំណត់  $\mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

បង្ហាញថា  $f$  ជាអនុគមន៍សេស

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}, \exists -x \in \mathcal{D} \text{ គេបាន } f(-x) &= \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= \ln(x-1) - \ln(x+1) \\ &= -[\ln(x+1) - \ln(x-1)] \\ &= -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ  $f$  ជាអនុគមន៍សេស

2. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$$

គេបាន  $y = 0$  ជាអាស៊ីមតូតដេក និង  $x = -1, x = 1$  ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍  $f$

3. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } f'(x) &= \left[ \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \right]' = [\ln(x+1)]' - [\ln(x-1)]' = \frac{(x+1)'}{x+1} - \frac{(x-1)'}{x-1} \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ } f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$$

ដោយ  $(x-1)(x+1) > 0, \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow f'(x) < 0$  នោះអនុគមន៍  $f$  ចុះដាច់ខាតលើ  $\mathcal{D}$

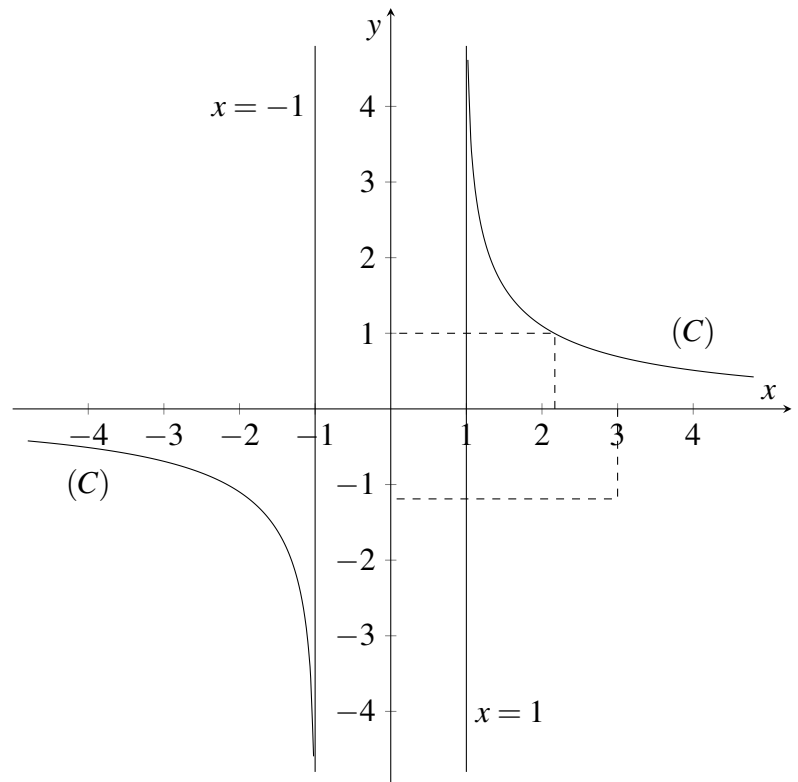
4. តារាងអថេរភាពនៃ អនុគមន៍  $f$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f(x)$	$-$			$-$
$f(x)$	$0$	$-\infty$	$+\infty$	$0$

សង់ខ្សែកោង  $C$

បើ  $y = 1$  នោះ

$$\begin{aligned}1 &= \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \\ \Leftrightarrow e &= \frac{x+1}{x-1} \\ \Leftrightarrow ex - e &= x + 1 \\ \Leftrightarrow x(e-1) &= 1 + e \\ \Rightarrow x &= \frac{3.7}{1.7} = 2.17\end{aligned}$$



5. ពិភាក្សាតម្លៃ  $m$  នៃសមីការ  $\ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) = m$  (I)

(I) ជាសមីការអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង ខ្សែកោង  $(C)$  និង បន្ទាត់  $y = m$  តាមក្រាប

គេបាន  $m \in (-\infty, 0)$  សមីការ (I) មានឫសតែមួយគត់ជាចំនួនពិតអវិជ្ជមាន

$$\ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) = m \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = e^m \Rightarrow x = \frac{e^m + 1}{e^m - 1}$$

$m \in (0, +\infty)$  សមីការ (I) មានឫសតែមួយគត់ជាចំនួនវិជ្ជមានគឺ  $x = \frac{e^m + 1}{e^m - 1}$

$m = 0$  សមីការ (I) គ្មានឫស

VII. គេមានបីចំណុច  $A(3, 1, 4), B(-1, 2, 5), C(5, -2, 3)$

1. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់  $(D)$  ដែលកាត់តាមចំណុច  $C$  និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស  $\overrightarrow{AB}$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AB} = (-1-3, 2-1, 5-4) = (-4, 1, 1)$$

$$\text{គេបាន សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ } (D) : \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{សមីការឆ្លុះនៃ } (D) : \frac{x-5}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

2. រកសមីការប្លង់  $(P)$  ដែលមានវ៉ិចទ័រទំណេរម៉ាល់  $\overrightarrow{AC}$  ហើយកាត់តាមចំណុច  $B$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AC} = (5-3, -2-1, 3-4) = (2, -3, -1)$$

$$\text{គេបាន } (P) : 2(x+1) - 3(y-2) - (z-5) = 0$$

$$2x + 2 - 3y + 6 - z + 5 = 0$$

$$\text{ដូច្នេះ សមីការប្លង់ } (P) : 2x - 3y - z + 13 = 0$$

រកសមីការស្វ៊ែរ  $(S)$  ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត  $[AB]$

$$\text{ដោយ } [AB] = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ នាំឱ្យ } r = \frac{[AB]}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{និងផ្ចិត } \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right) = \left( \frac{3-1}{2}, \frac{1+2}{2}, \frac{4+5}{2} \right) = \left( 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{2} \right)$$

$$\text{គេបានសមីការស្វ៊ែរ } S : (x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} + z^2 - 9z + \frac{81}{4} = \frac{9}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 9z + \frac{45}{2} - \frac{9}{2} = 0$$

$$\text{ដូច្នេះ សមីការស្វ៊ែរ } S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 9z + 18 = 0$$

3. គណនា  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  រួចសរសេរសមីការប្លង់  $ABC$

$$\text{គេបាន } \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (-1+3)\vec{i} - (4-2)\vec{j} + (12-2)\vec{k}$$

$$\vec{n} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\text{គេបានសមីការប្លង់ } ABC : 2(x-3) - 2(y-1) + 10(z-4) = 0$$

$$2x - 6 - 2y + 2 + 10z - 40 = 0$$

$$2x - 2y + 10z - 44 = 0$$

$$x - y + 5z - 22 = 0$$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ  $ABC$

$$\text{គេបាន } S_{\triangle ABC} = \frac{|\vec{n}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + 10^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4+4+100}}{2} = \frac{\sqrt{108}}{2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}$$

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច  $M(x, y, z)$

$M$  ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់  $(D): x = 5 - 4t, y = -2 + t, z = 3 + t$  និងប្លង់  $(P); 2x - 3y - z + 13 = 0$

គេបាន  $2(5 - 4t) - 3(-2 + t) - (3 + t) + 13 = 0$

$$10 - 8t + 6 - 3t - 3 - t + 13 = 0$$

$$-12t = -26 \Rightarrow t = \frac{13}{6}$$

$$\text{នាំឱ្យ } x = 5 - \frac{4(13)}{6} = \frac{30 - 52}{6} = -\frac{11}{3}, y = -2 + \frac{13}{6} = \frac{-12 + 13}{6} = \frac{1}{6}, z = 3 + \frac{13}{6} = \frac{31}{6}$$

ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វ  $M\left(-\frac{11}{3}, \frac{1}{6}, \frac{31}{6}\right)$





មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះមេគូជន:.....  
 ហត្ថលេខាមេគូជន:.....

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ហ៊ុន វុទ្ធី



- I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច  $A = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$  និង  $B = \frac{x+iy}{1+i}$  ដែល  $x, y$  ជាចំនួនពិត ។
- សរសេរ  $A^2$  ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
  - សរសេរ  $B$  ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ រកតម្លៃ  $x, y$  ដោយដឹងថា  $2\bar{B} - A^2 = 0$  ( $\bar{B}$  ជាកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ  $B$ ) ។

II. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x}$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 4}}$

III. 1. ដោះស្រាយសមីការ  $(E) : y'' + 5y' + 6y = 0$  ។

2. រកចម្លើយនៃសមីការ  $(E)$  បើគេដឹងថាបន្ទាត់  $(D) : y = x - 1$  ប៉ះក្រាបនៃចម្លើយត្រង់  $x = 0$  ។

IV. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះស្របអ័ក្សអដេនេ ហើយក្រាបវាកាត់តាមចំណុច  $(-2, -3)$ ,  $(2, 5)$  និង  $(1, 6)$  ។ កំណត់កូអរដោនេ កំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូល ។

V. គេឱ្យអនុគមន៍  $g$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $g(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1$  មានក្រាប  $(C)$  ។

- គណនា  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  ។ រកសមីការបន្ទាត់  $(D)$  ជាអាស៊ីមតូតនៃ  $(C)$  ។
- បង្ហាញថា  $g$  ជាអនុគមន៍កើន ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $g$  ។
- សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ  $(T)$  ទៅនឹងខ្សែកោង  $(C)$  ត្រង់  $x = 0$  ។
- សង់ក្រាប  $(T)$ ,  $(D)$  និង  $(C)$  ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

VI. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $A(2, 0, 1)$ ,  $B(3, 1, 5)$  និង  $C(1, 4, 4)$

- គណនា  $\vec{AB}$  និង  $\vec{AC}$  ។
- គណនា  $\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{AC}$  រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃ  $\triangle ABC$  ។
- រកសមីការប្លង់  $(ABC)$  ។ បង្ហាញថាចំណុច  $D(2, 0, 2)$  មិននៅក្នុងប្លង់  $(ABC)$  ។
- រកចម្ងាយពីចំណុច  $D$  ទៅប្លង់  $(ABC)$  រួចគណនាមាឌតេត្រាអែត  $ABCD$  ។
- សរសេរសមីការស្វ៊ែរ  $(S)$  ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត  $[AB]$  ។

## ជំនាញគណិតវិទ្យា

### I. 1. សរសេរ $A^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$\text{គេមាន } A = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$$

$$\text{គេបាន } A^2 = [(\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)]^2$$

$$= (\sqrt{3} - 1)^2 + 2(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)i + i^2(\sqrt{3} + 1)^2, i^2 = -1$$

$$= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 4i - (3 + 2\sqrt{3} + 1)$$

$$\text{ដូច្នេះ } A^2 = -4\sqrt{3} + 4i$$

សរសេរ  $A^2$  ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេបាន } A^2 = -4\sqrt{3} + 4i$$

$$= 8 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\text{ដូច្នេះ } A^2 = 8 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

### 2. សរសេរ $B$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$\text{គេមាន } B = \frac{x+iy}{1+i} \quad \text{ដែល } x, y \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{(x+iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{x-xi+iy-i^2y}{1-i^2}, i^2 = -1$$

$$= \frac{(x+y) + (y-x)i}{2}$$

$$\text{ដូច្នេះ } B = \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}i$$

$$\text{កេតិកភ័យ } x, y \text{ ដោយដឹងថា } 2\bar{B} - A^2 = 0 \text{ (} \bar{B} \text{ ជាកំរិតច្រកនៃ } B \text{) នោះ } \bar{B} = \frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}i$$

$$\text{គេបាន } 2\bar{B} - A^2 = 0$$

$$2\bar{B} = A^2$$

$$x+y - (y-x)i = -4\sqrt{3} + 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -4\sqrt{3} & (1) \\ y-x = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\text{យក (1) + (2) នោះ } 2y = 4 - 4\sqrt{3} \Rightarrow y = 2 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{ជំនួសចូល (1) នោះ } x = -4\sqrt{3} - y = -4\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3} = -2 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{ដូច្នេះ } x = -2 - 2\sqrt{3}, y = 2 - 2\sqrt{2}$$

### II. គណនាលីមីត

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 2x - 3x - 3}{x^3 + x^2 + x^2 + x + 5x + 5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x(x+1) - 3(x+1)}{x^2(x+1) + x(x+1) + 5(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x^2+x+5)}$$

$$= \frac{2(-1)-3}{(-1)^2+(-1)+5}$$

$$\text{ដូច្នេះ } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5} = -1$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x}$  រាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(x+1)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x+1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{x+1} \\ &= 1 \times 1 + 1 \times 1 \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x} = 2$$

3.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x}$  រាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$

$$\text{តាង } t = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{2} \text{ បើ } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ នោះ } t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi - 2(t + \frac{\pi}{2})}{\cos(t + \frac{\pi}{2})} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t}{-\sin t} \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} \\ &= 2 \times 1 \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x} = 1$$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2+2x-4}}$  រាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$

$$\text{តាង } A(x) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{2x-1} \Rightarrow A(2) = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{និង } B(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x^2+2x-4} \Rightarrow B(2) = 2 + 2 = 4$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2+2x-4}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{2x-1})A(x) \cdot B(x)}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2+2x-4})B(x) \cdot A(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x^2-1 - (2x-1)]B(x)}{[x+2 - (x^2+2x-4)]A(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-2x)B(x)}{-(x^2+x-6)A(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)B(x)}{-(x-2)(x+3)A(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x B(x)}{-(x+3)A(x)} \\ &= \frac{2 \cdot B(2)}{-5 \cdot A(2)} = \frac{2 \times 4}{-5 \times 2\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}}{15} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2+2x-4}} = -\frac{4\sqrt{3}}{15}$$

III. 1. ដោះស្រាយសមីការ  $(E) : y'' + 5y' + 6y = 0$

$$\text{មានសមីការសំគាល់ } \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 3\lambda + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 2) + 3(\lambda + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2, x = -3$$

$$\text{គេបាន } y = Ae^{\lambda_1} + Be^{\lambda_2} = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$$

ដូច្នេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ  $(E)$  គឺ  $y = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$  ដែល  $A, B \in \mathbb{R}$

2. រកចម្លើយនៃសមីការ  $(E)$  បើគេដឹងថាបន្ទាត់  $(D) : y = x - 1$  ប៉ះក្រាបនៃចម្លើយត្រង់  $x = 0$

$$\text{នោះ } y(0) = 0 - 1 = -1 \text{ និង } y' = (x - 1)' = 1 \Rightarrow y'(0) = 1$$

$$\text{ដោយ } y = Ae^{-2x} + Be^{-3x} \Rightarrow y(0) = Ae^0 + Be^0$$

$$\Leftrightarrow -1 = A + B \quad (1)$$

$$\text{និង } y = Ae^{-2x} + Be^{-3x} \Rightarrow y' = (-2x)'Ae^{-2x} + (-3x)'Be^{-3x}$$

$$= -2Ae^{-2x} - 3Be^{-3x}$$

$$\Rightarrow y'(0) = -2Ae^0 - 3Be^0$$

$$\Leftrightarrow 1 = -2A - 3B \quad (2)$$

$$\text{យក } 2(1) + (2) \text{ គេបាន } 2(-1) + 1 = 2(A + B) - 2A - 3B$$

$$-1 = 2A + 2B - 2A - 3B$$

$$-1 = -B$$

$$B = 1$$

$$\text{ជំនួសចូល (1) នោះ } -1 = A + 1 \Rightarrow A = -2$$

$$\text{ដូច្នេះ ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ } y = -2e^{-2x} + e^{-3x}$$

IV. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

ដោយប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ ហើយក្រាបវាកាត់តាមចំណុច  $(-2, -3), (2, 5)$  និង  $(1, 6)$

សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរគឺ  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

កាត់តាមចំណុច  $(-2, -3)$  នោះ  $(-2 - h)^2 = 4p(-3 - k)$

$$4 + 4h + h^2 = -12p - 4pk$$

$$h^2 + 4pk = -12p - 4h - 4 \quad (1)$$

កាត់តាមចំណុច  $(2, 5)$  នោះ  $(2 - h)^2 = 4p(5 - k)$

$$4 - 4h + h^2 = 20p - 4pk$$

$$h^2 + 4pk = 20p + 4h - 4$$

$$-12p - 4h - 4 = 20p + 4h - 4$$

$$32p + 8h = 0$$

$$4p + h = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{កាត់តាមចំណុច (1,6) នោះ:} \quad & (1-h)^2 = 4p(6-k) \\ & 1-2h+h^2 = 24p-4pk \\ & h^2+4pk = 24p+2h-1 \\ & -12p-4h-4 = 24p+2h-1 \\ & 36p+6h = -3 \\ & 12p+2h = -1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{យក } 2(1) - (2) \text{ គេបាន } 2(4p+h) - (12p+2h) &= 0 - (-1) \\ 8p+2h-12p-2h &= 1 \\ -4p &= 1 \\ p &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{ជំនួសចូល (2) នោះ } h = -4p = -4\left(-\frac{1}{4}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{ជំនួសចូល (1) គេបាន } 4+4h+h^2+12p &= -4pk \\ 4+4(1)+1^2-3 &= k \\ 6 &= k \end{aligned}$$

ដូចនេះ កេសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ  $P: (x-1)^2 = -(y-6)$

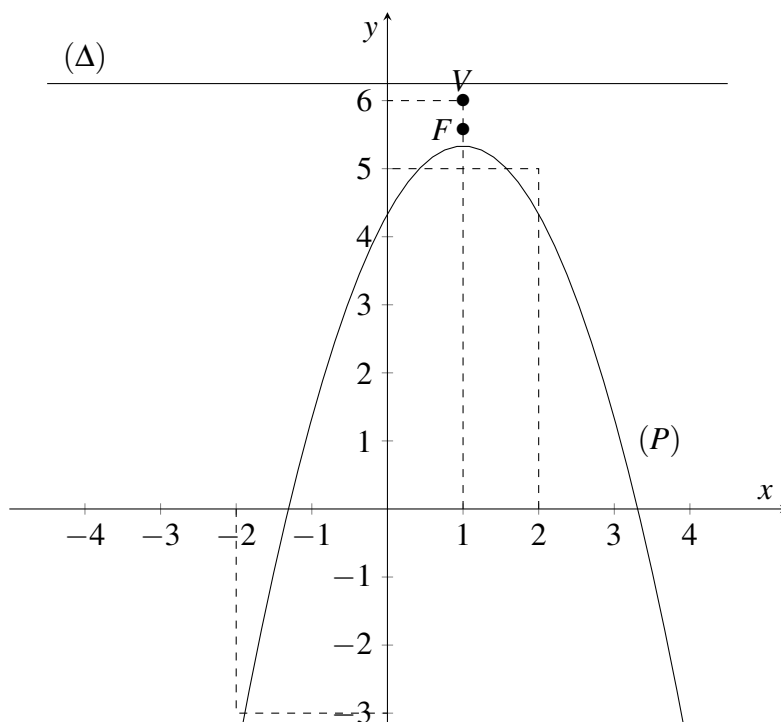
កំណត់កូអរដោនេ កំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

គេបាន កំពូល  $V(h,k) = V(1,6)$

កំណុំ  $F(h,k+p) = F\left(1, 6-\frac{1}{4}\right) = F\left(1, \frac{23}{4}\right)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស  $\Delta: y = k - p = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

សង់ប៉ារ៉ាបូល



V. គេឱ្យអនុគមន៍  $g$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $g(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1$  មានក្រាប  $(C)$

1. គណនា  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left( 1 - \frac{2}{e^x} + \frac{x}{2e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

រកសមីការបន្ទាត់  $(D)$  ជាអាស៊ីមតូតនៃ  $(C)$

ដោយ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2e^x) = 0$  នាំឱ្យ  $D : y = \frac{1}{2}x + 1$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រូតខាង  $-\infty$

2. បង្ហាញថា  $g$  ជាអនុគមន៍កើន

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } g(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 &\Rightarrow g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2} \\ &= 4e^{2x} - 4e^x + 1 \\ &= (2e^x - 1)^2 > 0 \end{aligned}$$

ដោយ  $g'(x) > 0$  នោះ  $g$  ជាអនុគមន៍កើន

តារាងអថេរភាពនៃ  $g$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ  $(T)$  ទៅនឹងខ្សែកោង  $(C)$  ត្រង់  $x = 0$

$$\text{គេបាន } T : y - g(0) = g'(0)(x - x_0)$$

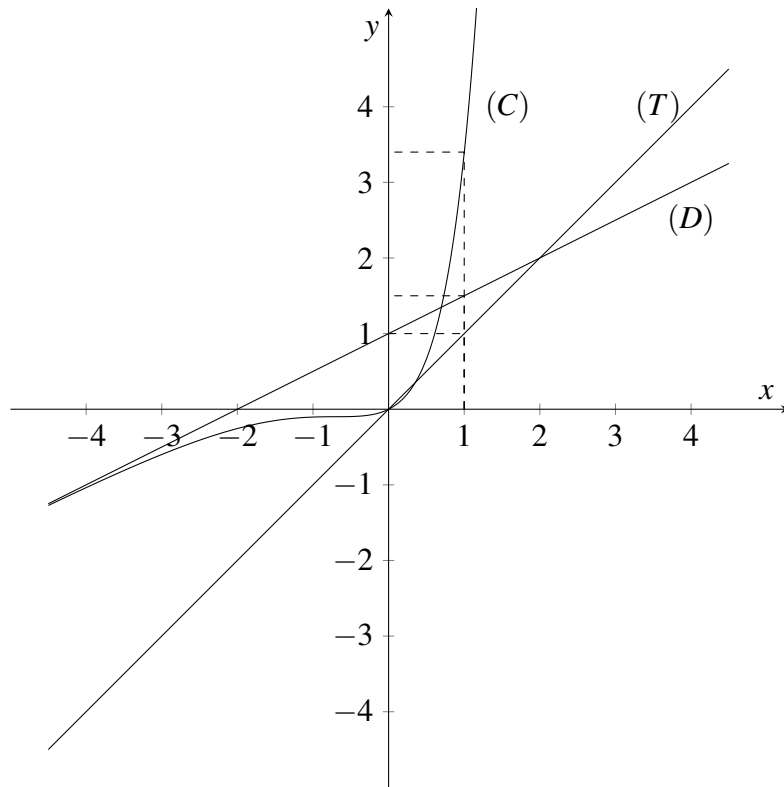
$$y - (e^0 - 2e^0 + 0 + 1) = (2e^0 - 1)^2(x - 0)$$

$$y = x$$

ដូច្នេះ បន្ទាត់ប៉ះ  $T : y = x$

4. សង់ក្រាប  $(T)$ ,  $(D)$  និង  $(C)$  ក្នុងតម្រុយតែមួយ

$x$	$T : y = x$	$D : y = \frac{1}{2}x + 1$	$C : y = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1$
0	0	1	0
1	1	1.5	3.4



VI. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវ៉ិដ្យូមាន  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $A(2, 0, 1), B(3, 1, 5)$  និង  $C(1, 4, 4)$

1. គណនា  $\vec{AB}$  និង  $\vec{AC}$

$$\text{គេបាន } \vec{AB} = (3 - 2, 1 - 0, 5 - 1) = (1, 1, 4)$$

$$\vec{AC} = (1 - 2, 4 - 0, 4 - 1) = (-1, 4, 3)$$

2. គណនា  $\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\text{គេបាន } \vec{N} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(3 - 16) - \vec{j}(3 + 4) + \vec{k}(4 + 1) = -13\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

គណនាក្រឡាផ្ទៃ  $\triangle ABC$

$$\text{គេបាន } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{N}| = \frac{1}{2} \sqrt{13^2 + 7^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{169 + 49 + 25} = \frac{1}{2} \sqrt{243} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}$$

3. រកសមីការប្លង់  $(ABC)$

$$\text{គេបាន } (ABC) : a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$-13(x - 2) - 7(y - 0) + 5(z - 1) = 0$$

$$-13x + 26 - 7y + 5z - 5 = 0$$

$$-13x - 7y + 5z + 21 = 0$$

$$13x + 7y - 5z - 21 = 0$$

បង្ហាញថាចំណុច  $D(2, 0, 2)$  មិននៅក្នុងប្លង់  $(ABC)$

$$\text{គេបាន } 13x_D + 7y_D - 5z_D - 21 = 13(2) + 7(0) - 5(2) - 21$$

$$= 26 - 10 - 21$$

$$= -5 \neq 0$$

4. រកចម្ងាយពីចំណុច  $D$  ទៅប្លង់  $(ABC)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } d[D, (ABC)] &= \frac{|13x_D + 7y_D - 5z_D - 21|}{\sqrt{13^2 + 7^2 + 5^2}} = \frac{|-5|}{9\sqrt{3}} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{27} \quad \text{ឯកតាប្រវែង} \end{aligned}$$

គណនាមាឌតេត្រាអែត  $ABCD$

គេបាន មាឌតេត្រាអែត  $= \frac{1}{3} \text{ត្រីកូណ័រផ្ទៃបាទ} \times \text{កម្ពស់}$

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} |\vec{N}| \times d[D, (ABC)] \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} \times \frac{5\sqrt{3}}{27} \\ &= \frac{3 \times 5}{18} = \frac{5}{6} \quad \text{ឯកតាមាឌ} \end{aligned}$$

5. សរសេរសមីការស្វ៊ែរ  $(S)$  ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត  $[AB]$

$$\text{ដោយ } [AB] \text{ ជាអង្កត់ផ្ចិតនោះ } I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) = I\left(\frac{2+3}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = I\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$$

$$\text{និងមានកាំ } r = \frac{|\vec{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$


$$\text{គេបាន } S: \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z - 3)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} + z^2 - 6z + 9 - 5 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 5x - y - 6z + \frac{21}{2} = 0$$



មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះបេក្ខជន:.....  
 ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន:.....

វិញ្ញាសារគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: បាត់ដំបង ២០២១ 

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x^2 - 11}$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \sin(x - \frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{3} - x)}$

គ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 7 - 11 \ln x)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមានឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន ២ ឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន ៣ និងឃ្លីពណ៌សចំនួន ៤ ។ គេចាប់យកឃ្លីចំនួន ៣ ចេញពីក្នុងចំណោមចំណែកនេះ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A: ឃ្លីទាំង ៣ មានពណ៌ស។

B: ឃ្លីទាំង ៣ មានពណ៌ខុសៗគ្នា។

III. (១៥ពិន្ទុ)

ក. គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  ។ រក  $\overline{z_1}(\overline{z_1})$  ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច  $z_1$  ។

ខ. រកមូឌុល និងអាក្យុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច  $z_1$  ។ សរសេរ  $z_1$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ. បង្ហាញថា  $\overline{z_1}$  ជាឫសរបស់សមីការ  $z^2 = 2(z\sqrt{2} - 2)$  ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល  $I = \int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)dx$  ,  $J = \int_0^1 \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx$  និង  $K = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x \cos x) dx$  ។

V. (២៥ពិន្ទុ)

1. ក្នុងលំហប្រជាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o, \vec{j}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $A(0, -2, 0), B(-4, 1, 2), C(0, 3, 7)$  និង  $D(4, 0, 5)$  ។ រកវ៉ិចទ័រ  $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}$  និង  $\vec{AD}$  រួចបង្ហាញចតុកោណ  $ABCD$  ជាចតុកោណកែង តែមិនមែនជាការ៉េ។

2. គេមានសមីការ  $9y^2 = 25(3 - x)(3 + x)$  ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប ។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរបស់អេលីបនេះ។ សង់អេលីបនេះ។

VI. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E) : y'' = -4y$  ។

1. បង្ហាញថា  $y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$  ដែល  $\lambda, \mu$  ជាចំនួនពិត ជាចម្លើយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E)$  ។

2. រកចម្លើយពិសេសរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E)$  ដែល  $y''(0) = 1$  និង  $y'(0) = 0$  ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍  $f$  ដែល  $f(x) = x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x}$  ។ យើងតាង  $(C)$  ក្រាបរបស់អនុគមន៍  $f$  នៅក្នុងប្លង់ប្រជាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  ។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$  ។ គណនា  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  យើងដឹងថា  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  ។

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់  $(D)$  ដែលមានសមីការ  $y = x - 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ  $(C)$  ត្រង់  $+\infty$  ។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃក្រាប  $(C)$  ធៀបនឹងបន្ទាត់  $(D)$  ។

3. យើងតាង  $f'(x)$  ដេរីវេនៃ  $f(x)$  ។ បង្ហាញថា  $f'(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x}$  ។ គេដឹងថាគ្រប់  $x$  ធាតុរបស់  $\mathbb{R}, e^x - 2x > 0$  ។ ប្រើលទ្ធផលនេះដើម្បីទាញយកការសិស្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  ។

4. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ  $(\Delta)$  ទៅនឹង  $(C)$  ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស ០ ស្របទៅនឹងបន្ទាត់  $(D)$  ។ សង់បន្ទាត់  $(D), (\Delta)$  និងក្រាប  $(C)$  ។

## ជំនាញស្រាវជ្រាវ

### I. គណនាលីមីត

$$ក. \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x^2 - 11} = \sqrt{3(3)^2 - 11} = \sqrt{3 \times 9 - 11} = \sqrt{16} = 4$$

$$ខ. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \sin(x - \frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{3} - x)} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{តាង } t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{បើ } x \rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ នោះ } t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \sin t}{-t} &= -\sqrt{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \\ &= -\sqrt{3} \times 1 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \sin(x - \frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3} - x} = -\sqrt{3}}$$

$$គ. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 7 - 11 \ln x) \text{ រាងមិនកំណត់ } +\infty - \infty$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 2 - \frac{7}{x} - 11 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 7 - 11 \ln x) = +\infty}$$

### II. តាង $S$ : គេចាប់យកឃ្លីចំនួន 3 ចេញពីឃ្លីសរុប 9 គ្រាប់

$$\text{នាំឲ្យករណីអាច } n(S) = C(9, 3) = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{6!7 \cdot 8 \cdot 9}{6!1 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 4 \cdot 7 \text{ ករណី}$$

គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍  $A$  គឺ  $p(A)$

ដោយ  $A$  : ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ស

$$\text{នាំឲ្យ } n(A) = C(4, 3) = \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{3!4}{3!} = 4 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1}{3 \cdot 7} = \frac{1}{21}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{p(A) = \frac{1}{21}}$$

គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍  $A$  គឺ  $p(B)$

ដោយ  $B$  : ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខ្មៅខ្លះៗគ្នា

$$\text{នាំឲ្យ } n(B) = C(2, 1) \cdot C(3, 1) \cdot C(4, 1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{p(B) = \frac{2}{7}}$$

### III. គេមាន $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

ក. រក  $\overline{z_1}$  (ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច  $z_1$ )

$$\text{នាំឲ្យ } \overline{z_1} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\overline{z_1} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

ខ. រកម៉ូឌុល និងអាក្យុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច  $z_1$

$$\text{គេបាន } |z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{និង } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ នាំឲ្យ } \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ម៉ូឌុល } |z_1| = 2 \text{ និង អាគុណម៉ង់ } \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

សរសេរ  $z_1$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_1 &= |z_1| (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}$$

គ. បង្ហាញថា  $\bar{z}_1$  ជាឫសរបស់សមីការ  $z^2 = 2(z\sqrt{2} - 2)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } 2(\bar{z}_1\sqrt{2} - 2) &= 2[(\sqrt{2} - i\sqrt{2})\sqrt{2} - 2] \\ &= 2(2 - 2i - 2) \\ &= \sqrt{2} - 4i + (\sqrt{2}i)^2 \\ &= (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2 \\ &= \bar{z}_1^2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\bar{z}_1 \text{ ជាឫសរបស់សមីការ } z^2 = 2(z\sqrt{2} - 2)}$$

#### IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I &= \int_0^1 (3x^2 - 2x + 1) dx \\ &= [x^3 - x^2 + x]_0^1 \\ &= 1^3 - 1^2 + 1 - (0) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{I = 1}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } J &= \int_0^1 \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = \int_0^1 \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} \\ &= \ln|e^x + 1|_0^1 \\ &= \ln(e + 1) - \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{J = \ln \frac{e + 1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } K &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x \cos x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x d(\sin x) \\ &= \frac{\sin^4 x}{4} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \left( \sin^4 \frac{\pi}{2} - \sin^4 \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[ 1 - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 \right] = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{K = \frac{3}{16}}$$

- V. 1. គេមាន  $A(0, -2, 0), B(-4, 1, 2), C(0, 3, 7)$  និង  $D(4, 0, 5)$

រក្សិចទ័រ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$  និង  $\overrightarrow{AD}$

គេបាន  $\overrightarrow{AB} = (-4 - 0, 1 + 2, 2 - 0) = (-4, 3, 2)$

$$\overrightarrow{BC} = (0 + 4, 3 - 1, 7 - 2) = (4, 2, 5)$$

$$\overrightarrow{CD} = (4 - 0, 0 - 3, 5 - 7) = (4, -3, -2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (4 - 0, 0 + 2, 5 - 0) = (4, 2, 5)$$

ដូចនេះ:  $\overrightarrow{AB} = (-4, 3, 2), \overrightarrow{BC} = (4, 2, 5), \overrightarrow{CD} = (4, -3, -2)$  និង  $\overrightarrow{AD} = (4, 2, 5)$

បង្ហាញថាតួកោណ  $ABCD$  ជាតួកោណកែង តែមិនមែនជាការ៉េ

ដោយ  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$  ឯកតាប្រវែង

និង  $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45}$  ឯកតាប្រវែង

ម្យ៉ាងទៀត  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 4(-4) + 2(3) + 5(2)$

$$= -16 + 6 + 10$$

$$= 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

ដោយ  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$  និង  $|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AD}|$

ដូចនេះ:  $ABCD$  ជាតួកោណកែងមិនមែនជាការ៉េ

2. បង្ហាញថាសមីការ  $9y^2 = 25(3 - x)(3 + x)$  ជាសមីការអេលីប

គេបាន  $9y^2 = 25(3 - x)(3 + x)$

$$3^2y^2 = 5^2(9 - x^2)$$

$$3^2y^2 = 5^2 \cdot 3^2 - 5^2x^2$$

$$5^2x^2 + 3^2y^2 = 5^2 \cdot 3^2$$

$$\frac{5^2x^2}{5^2 \cdot 3^2} + \frac{3^2y^2}{5^2 \cdot 3^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

ដូចនេះ:  $9y^2 = 25(3 - x)(3 + x)$  ជាសមីការអេលីប

រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរ

ដោយ  $a = 5, b = 3 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

គេបាន ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ  $2a = 2 \times 5 = 10$  ឯកតាប្រវែង

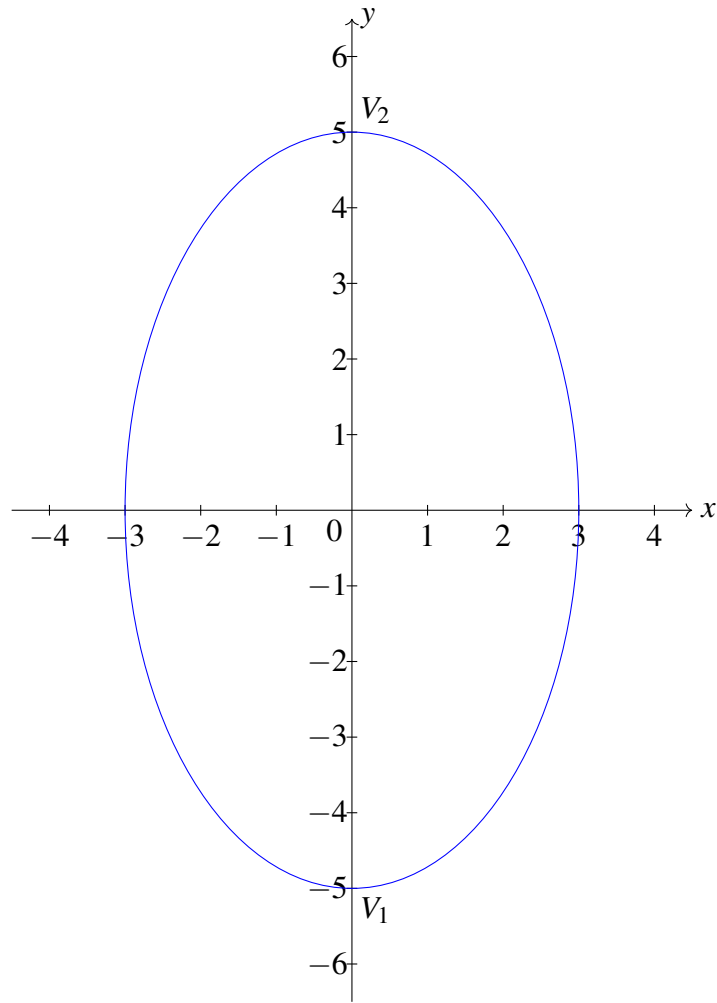
ប្រវែងអ័ក្សតូចគឺ  $2b = 2 \times 3 = 6$  ឯកតាប្រវែង

កំពូលគឺ  $V_1(0, -a) = (0, -5)$  និង  $V_2(0, a) = (0, 5)$

កំណុំគឺ  $F_1(0, -c) = (0, -4)$  និង  $F_2(0, c) = (0, 4)$

ដូចនេះ: ប្រវែងអ័ក្សធំ  $2a = 10$  ឯកតាប្រវែង, ប្រវែងអ័ក្សតូច  $2b = 6$  ឯកតាប្រវែង  
កូអរដោនេ កំពូល  $V_1(0, -5)$  និង  $V_2(0, 5)$  និង កំណុំគឺ  $F_1(0, -4)$  និង  $F_2(0, 4)$

សង់អេលីបនេះ



VI. គេមាន  $(E) : y'' = -4y$

1. បង្ហាញថា  $y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$  ដែល  $\lambda, \mu$  ជាចំនួនពិត ជាចម្លើយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E)$

$$\text{គេបាន } y' = -\lambda 2 \sin 2x + \mu 2 \cos 2x$$

$$y'' = -4\lambda \cos 2x - 4\mu \sin 2x$$

$$= -4(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)$$

$$= -4y$$

ដូចនេះ:  $y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$  ជាចម្លើយនៃសមីការ  $(E)$

2. រកចម្លើយពិសេសរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E)$

$$\text{ចំពោះ } y''(0) = 1 \text{ នោះ } y''(0) = -4(\lambda \cos 0 + \mu \sin 0)$$

$$1 = -4(\lambda)$$

$$\lambda = -\frac{1}{4}$$

$$\text{និង } y'(0) = 0 \text{ នោះ } y'(0) = -\lambda 2 \sin 2x + \mu 2 \cos 0$$

$$0 = 2\mu$$

$$\mu = 0$$

ដូចនេះ: ចម្លើយពិសេសនៃ  $(E) : y = -\frac{1}{4} \cos 2x$

VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានក្រាប  $(C)$  ដែល  $f(x) = x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x}$

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$

ដោយ  $e^x > 0$  ចំពោះគ្រប់  $x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ:  $\boxed{\text{ដែនកំណត់ } D = \mathbb{R}}$

គណនា  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x} \right] \\ &= -\infty \text{ ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់  $(D)$  ដែលមានសមីការ  $y = x - 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ  $(C)$  ត្រង់  $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x} - (x - 2) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x+1)}{e^x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\boxed{(D) : y = x - 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ } (C) \text{ ខាង } +\infty}$

បញ្ជាក់ទីតាំងនៃក្រាប  $(C)$  ធៀបនឹងបន្ទាត់  $(D)$

$$\text{ដោយ } f(x) - y = \frac{2(x+1)}{e^x}$$

$$\text{បើ } f(x) - y = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{បើ } f(x) - y > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$\text{បើ } f(x) - y < 0 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$$

ដូចនេះ:  $\boxed{\begin{array}{l} x > -1 \text{ នោះក្រាប } C \text{ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ } (D) \\ x < -1 \text{ នោះក្រាប } C \text{ ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ } (D) \end{array}}$

3. បង្ហាញថា  $f'(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x}$

$$\text{គេមាន } f(x) = x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= 1 - 0 + 2 \left[ \frac{(x+1)'e^x - (e^x)'(x+1)}{(e^x)^2} \right] \\ &= 1 + 2 \frac{e^x - e^x(x+1)}{(e^x)^2} \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1 - x - 1}{e^x} \\ &= \frac{e^x - 2x}{e^x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\boxed{f'(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x}}$

សិស្សរក្សាអថេរនៃអនុគមន៍  $f$

ដោយ  $e^x - 2x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  នោះ  $f'(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x} > 0$

នាំឲ្យ  $f(x)$  ជាអនុគមន៍កើនជាដាច់ខាត។

តារាងអថេរគោត

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ  $(\Delta)$  ទៅនឹង  $(C)$  ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ស្របទៅនឹងបន្ទាត់  $(D)$

$$\text{គេមាន } f'(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x} \Rightarrow f'(0) = \frac{e^0 - 2(0)}{e^0} = 1$$

$$\text{និង } D: y = x - 2 \Rightarrow y' = 1$$

$$\text{ដោយ } y' = f'(0)$$

ដូចនេះ  $(\Delta)$  ស្របនឹងបន្ទាត់  $D$

សង់បន្ទាត់  $(D)$ ,  $(\Delta)$  និងក្រាប  $(C)$

$$\text{ចំពោះ } (D): y = x - 2$$

តារាងតម្លៃលេខ

$x$	0	2
$y$	-2	0

$$\text{ចំពោះ } (\Delta): y - f(0) = 1(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = x + \left[ 0 - 2 + \frac{2(0+1)}{1} \right] = x$$

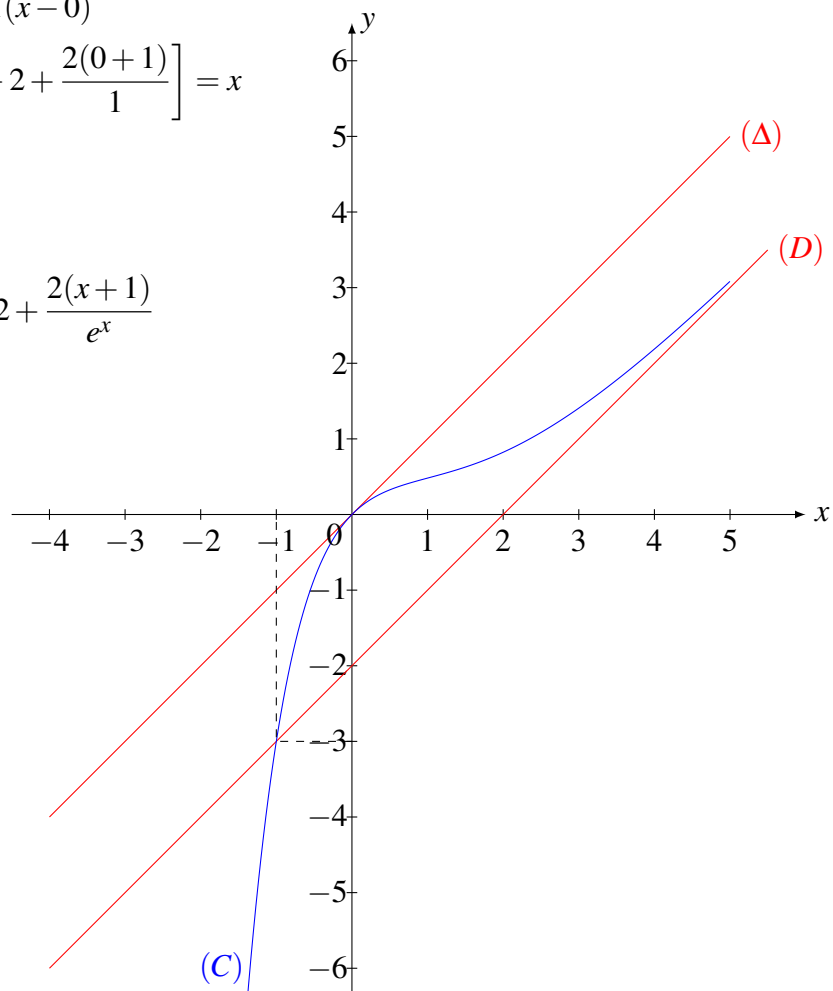
តារាងតម្លៃលេខ

$x$	0	1
$y$	0	1

$$\text{ចំពោះ } (C): f(x) = x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x}$$

តារាងតម្លៃលេខ

$x$	0	-1
$f(x)$	0	-3







មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះមេគ្រូជន:.....  
 ឈ្មោះលេខាមេគ្រូជន:.....

វិញ្ញាសារៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបចំដោយ: ចាន់ឌុប២០២២



- I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖
- ក.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{2e^x}$                       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x} - 1}$                       គ.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}(\frac{\pi}{3} - x)}{\sin(x - \frac{\pi}{3})}$
- II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖
- ក.  $I = \int_0^1 (2 - x + 2x^2) dx$                       ខ.  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{\cos 4x - \cos 2x}{2} \right) dx$
- គ. គេមាន  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$  បង្ហាញថា  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x - 1)}$  ។ គណនា  $K = \int_{-1}^0 f(x) dx$  ។
- III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = i(3 + 2i)(2 + i)^2$  ។
- ក. សរសេរ  $z_1$  ជាទម្រង់ពីជគណិតរួចរក  $\overline{z_1}$  ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃ  $z_1$  ។
- ខ. សរសេរ  $z_2 = z_1 + 19$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ គណនា៖  $z_2^4$  និង  $z_2^6$  ។
- IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងមណ្ឌលសុខភាពមួយមានបុគ្គលិកនារី៩ នាក់ និងបុគ្គលិកបុរស ៥ នាក់។ គេរៀបចំជាក្រុមការងារមួយក្រុមមានគ្នា ៤ នាក់ ដោយចៃដន្យឲ្យចុះធ្វើការតាមភូមិ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖
- A : ក្រុមការងារដែលរៀបចំមានបុគ្គលិកទាំង ៤ នាក់សុទ្ធតែជានារី។
- B : ក្រុមការងារដែលរៀបចំមានបុគ្គលិក ៥០% ជានារី ។
- V. (២៥ពិន្ទុ)
1. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $M(0, 1, 1), N(1, 2, 2), P(0, 3, -4)$  និង  $Q(-2, 1, 0)$  ។
- ក. រកវ៉ិចទ័រ  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{PQ}$  និងរកប្រវែងវ៉ិចទ័រទាំងបួននេះ។
- ខ. បង្ហាញថាត្រីកោណ  $NPQ$  ជាត្រីកោណកែងត្រង់  $Q$  និងរកផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណនេះ។
2. រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសរបស់ប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការ  $(y + 2)^2 = -8(x - 2)$  ។ សង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ ។
- VI. (៤០ពិន្ទុ)
- A. គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = x - \ln(1 + x)$  ។ យើងតាងដោយ  $(C)$  ក្រាបរបស់  $f$  ។
1. រកដែនកំណត់  $D$  នៃអនុគមន៍  $f$  ។ គណនា  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។
2. សិក្សាអថេរភាពរបស់អនុគមន៍  $f(x)$  ដោយភ្ជាប់តារាងអថេរភាពនៅលើ  $D$  និងបញ្ជាក់សញ្ញានៃ  $f(x)$  លើ  $D$  ។
- B. គេចង់សិក្សាទីតាំងរបស់ក្រាប  $(C)$  នៃ  $f$  ធៀបទៅនឹងក្រាប  $(P)$  ដែលមានសមីការ  $y = \frac{1}{2}x^2$  ។
1. ក្នុងន័យនេះគេបង្កើតអនុគមន៍  $g$  កំណត់លើ  $D$  ដែនកំណត់របស់  $f$  ដោយ  $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$  ។ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $g$  និងទាញយកសញ្ញានៃ  $g(x)$  កាលណា  $x$  រត់នៅលើ  $D$  ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប  $(C)$  ធៀបនឹងក្រាប  $(P)$  ។
2. សង់ក្រាប  $(C)$  និងក្រាប  $(P)$  ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  ។

## ជំនេរស្រាយ

### I. គណនាលីមីត៖

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{2e^x} = \frac{e^0 + 1}{2e^0}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{2e^x} = 1}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(x-1)}{(\sqrt{x}-1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)[(\sqrt{x})^2-1]}{(\sqrt{x}-1)[(\sqrt{x+3})^2-2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}+2} \\ &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{2}}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}(\frac{\pi}{3}-x)}{\sin(x-\frac{\pi}{3})} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{តាង } t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{3} \text{ ចំពោះ } x \rightarrow \frac{\pi}{3} \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}(\frac{\pi}{3}-x)}{\sin(x-\frac{\pi}{3})} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{3}t}{\sin t} = -\sqrt{3} \cdot 1 \\ &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}(\frac{\pi}{3}-x)}{\sin(x-\frac{\pi}{3})} = -\sqrt{3}}$$

### II. គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\begin{aligned} \text{ក. } I &= \int_0^1 (2-x+2x^2)dx \\ &= 2 \int_0^1 dx - \int_0^1 xdx + 2 \int_0^1 x^2 dx \\ &= 2x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 + \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^1 \\ &= (2 \cdot 1 - 2(0)) - \left( \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \right) + \left( \frac{2}{3} \cdot 1^3 - \frac{2}{3} \cdot 0^3 \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{I = \frac{13}{6}}$$

$$\begin{aligned}
 ខ. \quad J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{\cos 4x - \cos 2x}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4x}{2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\sin 4x) - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\sin 2x) \\
 &= \frac{\sin 4x}{8} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{1}{8} \left( \sin \frac{4\pi}{4} - \sin 0 \right) - \frac{1}{4} \left( \sin \frac{2\pi}{4} - \sin 0 \right) \\
 &= 0 - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $J = -\frac{1}{4}$

គ. គេមាន  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$  បង្ហាញថា  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x - 1)}$

គេបាន  $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x - 1)} = \frac{2x(2x - 1) + (2x - 1) - 3}{4(2x - 1)}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4x^2 - 2x + 2x - 1 - 3}{4(2x - 1)} \\
 &= \frac{4x^2 - 4}{4(2x - 1)} \\
 &= \frac{4(x^2 - 1)}{4(2x - 1)} \\
 &= \frac{x^2 - 1}{2x - 1} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\frac{x^2 - 1}{2x - 1} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x - 1)}$

គណនា  $K = \int_{-1}^0 f(x) dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^0 \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x - 1)} \right) dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-1}^0 d(x^2) + \frac{1}{4} \int_{-1}^0 dx - \frac{3}{8} \int_{-1}^0 d(\ln |2x - 1|) \\
 &= \frac{x^2}{4} \Big|_{-1}^0 + \frac{x}{4} \Big|_{-1}^0 - \frac{3 \ln |2x - 1|}{8} \Big|_{-1}^0 \\
 &= \left( 0 - \frac{1}{4} \right) + \left( 0 + \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{8} (\ln 1 - \ln 3) \\
 &= \frac{3 \ln 3}{8}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $K = \frac{3 \ln 3}{8}$

III. គេមាន  $z_1 = i(3 + 2i)(2 + i)^2$

ក. សរសេរ  $z_1$  ជាទម្រង់ពីជគណិតរួចរក  $\bar{z}_1$  ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ  $z_1$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_1 &= i(3 + 2i)(2 + i)^2 \\ &= (3i + 2i^2)(4 + 4i + i^2) \\ &= (-2 + 3i)(3 + 4i) \\ &= -6 - 8i + 9i - 12 \\ &= -18 + i \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_1 = -18 + i \text{ និង } \bar{z}_1}$$

ខ. សរសេរ  $z_2 = z_1 + 19$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_2 &= z_1 + 19 \\ &= -18 + i + 19 \\ &= 1 + i \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}$$

គណនា  $z_2^4$  និង  $z_2^6$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_2^4 &= (\sqrt{2})^4 \left( \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} \right) \\ &= 4(\cos \pi + i \sin \pi) \\ &= 4(-1 + 0i) = -4 \\ \text{និង } z_2^6 &= (\sqrt{2})^6 \left( \cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} \right) \\ &= 2^3 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \\ &= 8(0 - i) = -8i \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_2^4 = -4 \text{ និង } z_2^6 = -8i}$$

IV. រក  $P(A)$  និង  $P(B)$

តាង  $S$  : “ជ្រើសរើស 4 នាក់ចេញពីបុគ្គលិកសរុប 14 នាក់”

$$\text{នាំឲ្យ } n(S) = C(14, 4) = \frac{14!}{(14-4)!4!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{10! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \text{ ជម្រើស}$$

ដោយ  $A$  : ក្រុមការងារដែលរៀបចំមានបុគ្គលិកទាំង 4 នាក់សុទ្ធតែជានារី

$$\text{នាំឲ្យ } n(A) = C(9, 4) = \frac{9!}{(9-4)!4!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6 \cdot 4} = 2 \cdot 7 \cdot 9 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 9}{7 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{18}{143}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{18}{143}}$$

និង  $B$  : ក្រុមការងារដែលរៀបចំមានបុគ្គលិក 50% ជានារី

$$\text{នាំឲ្យ } n(B) = C(9, 2) \cdot C(5, 2) = \frac{9!}{(9-2)!2!} \times \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9}{7!2!} \times \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2!} = 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 9}{7 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{360}{1001}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(B) = \frac{360}{1001}$$

V. 1. គេមាន  $M(0, 1, 1), N(1, 2, 2), P(0, 3, -4)$  និង  $Q(-2, 1, 0)$

$$\text{ក. កេរ៉ិចទ័រ } \overrightarrow{MN} = (1 - 0, 2 - 1, 2 - 1) = (1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{NP} = (0 - 1, 3 - 2, -4 - 2) = (-1, 1, -6)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (-2 - 1, 1 - 2, 0 - 2) = (-3, -1, -2)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (-2 - 0, 1 - 3, 0 + 4) = (-2, -2, 4)$$

និងរកប្រវែងកេរ៉ិចទ័រទាំងបួននេះ

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$|\overrightarrow{NP}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{38} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$|\overrightarrow{NQ}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

ខ. បង្ហាញថាត្រីកោណ  $NPQ$  ជាត្រីកោណកែងត្រង់  $Q$

$$\text{ដោយ } 38 = 14 + 24$$

$$(\sqrt{38})^2 = (\sqrt{14})^2 + (\sqrt{24})^2$$

$$|\overrightarrow{NP}|^2 = |\overrightarrow{NQ}|^2 + |\overrightarrow{PQ}|^2$$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក័រ គេបាន ត្រីកោណ  $NPQ$  ជាត្រីកោណកែងត្រង់  $Q$

រកផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ  $NPQ$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } S &= \frac{|\overrightarrow{NQ}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{14} \cdot \sqrt{24}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3} \\ &= \frac{4}{2} \cdot \sqrt{21} \\ &= 2\sqrt{21} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា} \end{aligned}$$

2. រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសរបស់ប៉ារ៉ាបូល

$$\text{គេមានសមីការ } (y + 2)^2 = -8(x - 2) \text{ នាំឲ្យ } h = 2, k = -2 \text{ និង } 4p = -8 \text{ នាំឲ្យ } p = -\frac{8}{4} = -2$$

$$\text{គេបាន កំពូល } V(h, k) \Rightarrow V(2, -2)$$

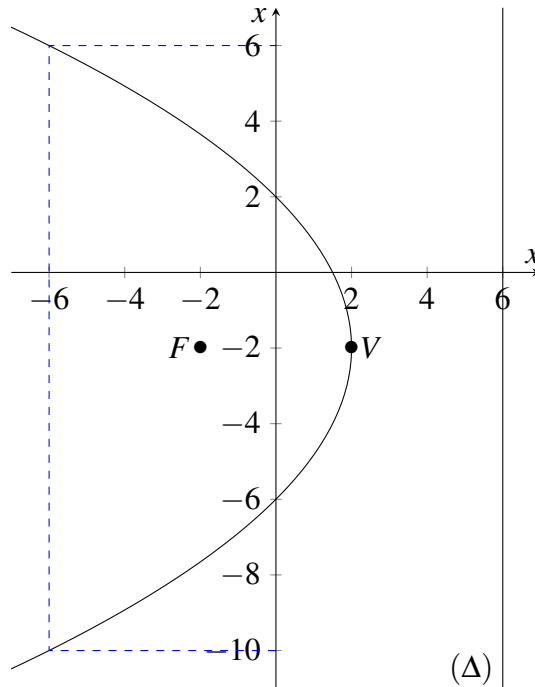
$$\text{កំណុំ } F(h + p, k) \Rightarrow V(-2, -2)$$

$$\text{សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស } \Delta : x = h - p = 2 - (-2) = 4$$

ចំពោះ  $x = -6$  នោះគេបាន  $(y+2) = -8(-6-2)$

$$(y+2) = 8^2 \Rightarrow \begin{cases} y+2 = -8 \\ y+2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -10 \\ y = -6 \end{cases}$$

សង់ប៉ារ៉ាបូល



VI. A. គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = x - \ln(1+x)$

1. រកដែនកំណត់  $D$  នៃអនុគមន៍  $f$

អនុគមន៍  $f$  មានន័យកាលណា  $1+x > 0 \Rightarrow x > -1$

ដូចនេះ:  $D = (-1, +\infty)$

គណនា  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

គេបាន  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [x - \ln(1+x)] = +\infty$

និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(1+x)]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right] = +\infty$$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. សិក្សាអថេរភាពរបស់អនុគមន៍  $f(x)$  ដោយភ្ជាប់តារាងអថេរភាពនៅលើ  $D$  និងបញ្ជាក់សញ្ញានៃ  $f(x)$  លើ  $D$

គេមាន  $f(x) = x - \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = [x - \ln(1+x)]'$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{(1+x)'}{1+x} \\ &= \frac{1+x-1}{1+x} \\ &= \frac{x}{1+x} \end{aligned}$$

ដោយ  $1+x > 0$  នោះ  $f'(x)$  មានសញ្ញាតាម  $x$

សញ្ញា  $f'(x)$

$x$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$

ដោយ  $f'$  ប្តូរសញ្ញាសញ្ញាពី  $-$  ទៅ  $+$  ត្រង់  $x = 0$  នោះ  $f$  មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់  $x = 0$  គឺ  $f(0) = 0 - \ln(1 + 0) = 0$   
តារាងអថេរភាព

$x$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

$f(x)$  ចុះលើចន្លោះ  $(-1, 0)$

$f(x)$  កើនលើចន្លោះ  $(0, +\infty)$

និង  $x = 0$  នាំឲ្យ  $f(x) = 0$

B. គេមាន  $(P) : y = \frac{1}{2}x^2$

1. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $g$  និងទាញយកសញ្ញានៃ  $g(x)$  កាលណា  $x$  រត់នៅលើ  $D$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } g : g(x) &= f(x) - \frac{x^2}{2} \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x \\ &= \frac{x}{1+x} - x \\ &= \frac{x - x - x^2}{1+x} \\ &= -\frac{x^2}{1+x} < 0, \text{ ព្រោះ } \frac{x^2}{1+x} > 0 \text{ ចំពោះ } x \in D \end{aligned}$$

តារាងសញ្ញានៃ  $g'(x)$

$x$	$-1$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	

ដោយ  $g'(x) < 0$  នោះ  $g(x)$  ជាអនុគមន៍ចុះលើ  $D$

បើ  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$  នាំឲ្យ  $g(0) = 0$

គេបាន  $g(x) > 0$  លើចន្លោះ  $(-1, 0)$

$g(x) < 0$  លើចន្លោះ  $(0, +\infty)$

សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប  $(C)$  ធៀបនឹងក្រាប  $(P)$

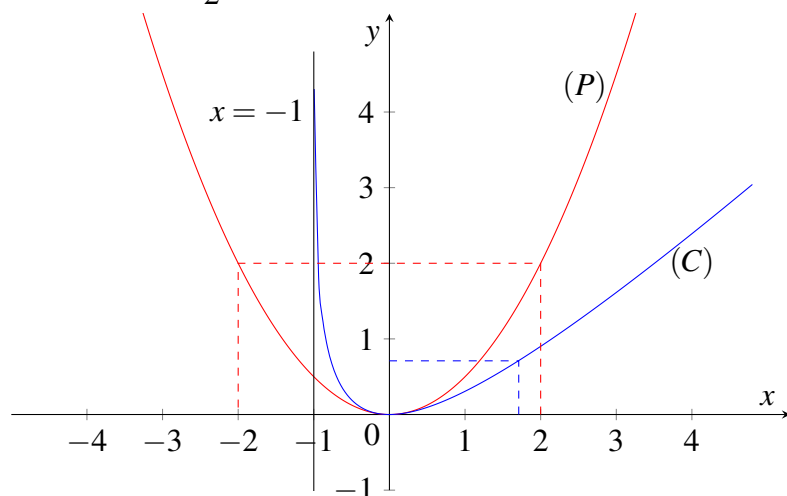
$g(x) > 0$  លើចន្លោះ  $(-1, 0)$  នោះ  $f(x) - y > 0$  នោះគេបានក្រាប  $(C)$  ប៊ិចនៅលើប៉ារ៉ាបូល  $(P)$  លើចន្លោះ  $(-1, 0)$

និង  $g(x) < 0$  លើចន្លោះ  $(0, +\infty)$  នោះ  $f(x) - y < 0$  នោះគេបានក្រាប  $(C)$  ប៊ិចនៅក្រោមប៉ារ៉ាបូល  $(P)$  លើចន្លោះ  $(0, +\infty)$

2. សង់ក្រាប (C) និងក្រាប (P)

ក្រាប (C) ចំពោះ  $x = 1.71 \Rightarrow f(1.71) = 1.71 - \ln e = 1.71 - 1 = 0.71$

ប៉ារ៉ាបូល (P) ចំពោះ  $y = 2$  នោះ  $2 = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 4 = x^2$  នាំឲ្យ  $x = \pm 2$





មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះមេគ្រូជន:.....  
 ឈ្មោះលេខាមេគ្រូជន:.....

វិញ្ញាសារៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបចំដោយ: សារ៉ែន សុផ្វា



- I. គណនាលីមីតខាងក្រោម
- ក.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 3} - x + 1)$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x \sin x}{\cos^2 x - 1}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2(1 + \cos x)}{\cos^4 x - 1}$  ។
- II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = -3 + 3i\sqrt{3}$  និង  $z_2 = -3 - 3i\sqrt{3}$  ។
- ក. សរសេរ  $2z_1 + \bar{z}_2$  ជាទម្រង់ពីជគណិត និងត្រីកោណមាត្រ។
- ខ. គណនា  $(2z_1 + \bar{z}_2)^3$  ។ គេតាង  $\bar{z}_2$  ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ  $z_2$  ។
- III. ក្នុងចំណោមមូលចំនួន 15 ដែលមានបង់លេខពី 1 ដល់ 15 ។ គេចាប់យកមូល 3 ចេញពីចំណោមដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖
- ក.  $A$  : “គេចាប់បានមូលទាំង 3 សុទ្ធតែមានលេខចែកដាច់នឹង 3”
- ខ.  $B$  : “គេចាប់បានមូលទាំង 3 មានលេខសុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង 4”
- គ.  $C$  : “គេចាប់បានមូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 3” ។
- IV. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម
- ក.  $I = \int_0^1 (x^2 - 1)^2 dx$       ខ.  $J = \int_0^{\ln 7} (e^x - 2) dx$       គ.  $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sin \left( 3x + \frac{\pi}{3} \right) + \sin^4 x \cos x \right] dx$  ។
- V. 1. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេឲ្យបីចំណុច  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(3, 2, 1)$  និង  $C(3, 4, 3)$  ។
- ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{BC}$  ។ បង្ហាញថា  $ABC$  ជាត្រីកោណសម័ង្ស។
- ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ  $\vec{AB} \times \vec{AC}$  រួចទាញថាបីចំណុច  $A, B, C$  តែមិនត្រង់គ្នា។
- គ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ  $\vec{n} = (-1, 1, 1)$  ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់  $(ABC)$  ។ សរសេរសមីការប្លង់  $(ABC)$  ។
2. គេមានប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការទូទៅ  $x^2 - 4x - 8y - 12 = 0$  ។ ចូរបម្លែងសមីការនេះជាទម្រង់ស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល។ កំណត់កូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស ព្រមទាំងសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។
- VI. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E) : y'' + 3y' - y = 2y' + 5y$  ។ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E)$  ។ បង្ហាញថា  $y = 2e^{2x} - e^{-3x}$  ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E)$  ។
- VII. គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $(0, +\infty)$  ដែល  $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$  និងមានក្រាបតំណាង  $(C)$  នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ។
- ក. គណនាលីមីត  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប ។
- ខ. គណនា  $f'(x)$  និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សិក្សាអំពីរោងចក្រនៃអនុគមន៍  $f$  និងសង់តារាងរោងចក្រនៃអនុគមន៍  $f$  ។
- គ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ  $(T)$  ដែលប៉ះនឹងក្រាប  $(C)$  ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស  $x = 1$  ។
- ឃ. សង់ក្រាប  $(C)$ , បន្ទាត់  $(T)$  និងអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ។
- ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយក្រាប  $(C)$ , អ័ក្ស  $(Ox)$  និងបន្ទាត់ឈរ  $x = 1, x = e$  ។ គេឲ្យ  $e = 2.7$  និង  $\frac{1}{e} = 0.4$  ។

## ជំនាញគណិតវិទ្យា

### I. គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} \text{ក. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 3} - x + 1) & \text{ រាងមិនកំណត់ } +\infty - \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - x + 3} - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - x + 3} - (x-1)] [\sqrt{x^2 - x + 3} + (x-1)]}{[\sqrt{x^2 - x + 3} + (x-1)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 3})^2 - (x-1)^2}{\sqrt{x^2 - x + 3} + x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3 - (x^2 - 2x + 1)}{\sqrt{x^2 - x + 3} + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3 - x^2 + 2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 3} + x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - x + 3} + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right) + x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}} \\ &= \frac{1 + 0}{\sqrt{1 - 0 + 0} + 1 - 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 3} - x + 1) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x \sin x}{\cos^2 x - 1} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x \sin x}{-(1 - \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \sin x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \times \frac{x}{\sin x}\right) = 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x \sin x}{\cos^2 x - 1} = 3$$

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\begin{aligned} \text{គ. } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2(1 + \cos x)}{\cos^4 x - 1} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2(1 + \cos x)}{(\cos^2 x - 1)(\cos^2 x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2(1 + \cos x)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)(\cos^2 x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2}{(\cos x - 1)(\cos^2 x + 1)} = \frac{2}{(\cos \pi - 1)(\cos^2 \pi + 1)} = \frac{2}{(-1 - 1)(1 + 1)} = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2(1 + \cos x)}{\cos^4 x - 1} = -\frac{1}{2}$$

### II. ក. សរសេរ $2z_1 + \bar{z}_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត និងត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេមាន } z_2 = -3 - 3i\sqrt{3} \text{ នាំឲ្យ } \bar{z}_2 = -3 + 3i\sqrt{3}$$

$$\text{គេបាន } 2z_1 + \bar{z}_2 = 2(-3 + 3i\sqrt{3}) + (-3 + 3i\sqrt{3}) = -6 + 6i\sqrt{3} - 3 + 3i\sqrt{3} = -9 + 9i\sqrt{3}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } 2z_1 + \bar{z}_2 = -9 + 9i\sqrt{3}$$

ខ. គណនា  $(2z_1 + \bar{z}_2)^3$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } 2z_1 + \bar{z}_2 &= -9 + 9i\sqrt{3} = 18 \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 18 \left( -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 18 \left[ \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) \right] = 18 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{គេទាញបាន } (2z_1 + \bar{z}_2)^3 &= \left[ 18 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right]^3 \\ &= 18^3 \left( \cos \frac{6\pi}{3} + i \sin \frac{6\pi}{3} \right) = 18(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 18(1 + 0i) = 18 \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ } (2z_1 + \bar{z}_2)^3 = 18$$

III. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. A : “ គេចាប់បានប៊ូលទាំង 3 សុទ្ធតែមានលេខចែកដាច់នឹង 3 ”

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\text{ដោយ } n(S) = C(15, 3) = \frac{15!}{(15-3)!3!} = \frac{15!}{12!3!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{12!3!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3!} = 455$$

លេខដែលចែកដាច់នឹង 3 មានលេខ 3, 6, 9, 12, 15

$$\text{នោះ } n(A) = C(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 5 \times 3}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{10}{455} = \frac{2}{91}$$

$$\text{ដូច្នេះ } P(A) = \frac{2}{91}$$

ខ. B : “ គេចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានលេខសុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង 4 ”

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

ដោយ លេខចែកមិនដាច់នឹង 4 មានលេខ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15

$$\text{នោះ } n(B) = C(12, 3) = \frac{12!}{(12-3)!3!} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!3!} = \frac{12}{3!} = 220$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{220}{455} = \frac{44}{91}$$

$$\text{ដូច្នេះ } P(B) = \frac{44}{91}$$

គ. C : “ គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 3 ”

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$$

ដោយ លេខចែកដាច់នឹង 3 មានលេខ 3, 6, 9, 12, 15

$$\text{នោះ } n(C) = C(5, 1) \times C(10, 2) = 5 \times \frac{10!}{(10-2)!2!} = 5 \times \frac{10!}{8!2!} = 5 \times \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!2!} = 5 \times \frac{10 \times 9}{2!} = 225$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{225}{455} = \frac{45}{91}$$

$$\text{ដូច្នេះ } P(C) = \frac{45}{91}$$

$$C(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } I = \int_0^1 (x^2 - 1)^2 dx = \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \left[ \frac{x^5}{5} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + x \right]_0^1$$

$$= \left( \frac{1^5}{5} - 2 \cdot \frac{1^3}{3} + 1 \right) - (0 - 0 + 0) = \frac{8}{15}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } I = \frac{8}{15}$$

$$\text{ខ. } J = \int_0^{\ln 7} (e^x - 2) dx = (e^x - 2x)_0^{\ln 7} = (e^{\ln 7} - 2 \ln 7) - (e^0 - 0) = 7 - 2 \ln 7 - 1 = 6 - 2 \ln 7$$

$$\text{ដូច្នេះ: } J = 6 - 2 \ln 7$$

$$e^{\ln k} = k$$

$$\text{គ. } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sin \left( 3x + \frac{\pi}{3} \right) + \sin^4 x \cos x \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left( 3x + \frac{\pi}{3} \right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left( 3x + \frac{\pi}{3} \right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x (\sin x)' dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{3} \cos \left( 3x + \frac{\pi}{3} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left( \frac{\sin^5}{5} \right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$= \left[ -\frac{1}{3} \cos \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right] - \left[ -\frac{1}{3} \cos \left( 0 + \frac{\pi}{3} \right) \right] + \frac{\sin^5 \frac{\pi}{2}}{5} - \frac{\sin^5 0}{5}$$

$$= -\frac{1}{3} \cos \left( \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{5} - 0$$

$$= \frac{1}{3} \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{5}$$

$$= -\frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{5} = -\frac{1}{3} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11 - 5\sqrt{3}}{30}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } K = \frac{11 - 5\sqrt{3}}{30}$$

V. 1. ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{BC}$

គេមាន

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 3) \\ B(3, 2, 1) \end{array} \right| \Rightarrow \vec{AB} = (3 - 1, 2 - 2, 1 - 3) = (2, 0, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 3) \\ C(3, 4, 3) \end{array} \right| \Rightarrow \vec{AC} = (3 - 1, 4 - 2, 3 - 3) = (2, 2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} B(3, 2, 1) \\ C(3, 4, 3) \end{array} \right| \Rightarrow \vec{BC} = (3 - 3, 4 - 2, 3 - 1) = (0, 2, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 3) \\ C(3, 4, 3) \end{array} \right| \Rightarrow \vec{AC} = (3 - 1, 4 - 2, 3 - 3) = (2, 2, 0)$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \vec{AB} = (2, 0, 2), \vec{AC} = (2, 2, 0) \text{ និង } \vec{BC} = (0, 2, 2)$$

បង្ហាញថា  $ABC$  ជាត្រីកោណសម័ង្ស

គេមាន

$$\vec{AB} = (2, 0, 2) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\vec{AC} = (2, 2, 0) \Rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\vec{BC} = (0, 2, 2) \Rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{ដោយ } |\vec{AB}| = |\vec{AC}| = |\vec{BC}| = 2\sqrt{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

ដូចនេះ:  $ABC$  ជាត្រីកោណសម័ង្ស

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ  $\vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (0-4)\vec{i} - (0-4)\vec{j} + (4-0)\vec{k} = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \vec{AB} \times \vec{AC} = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

ទាញថាបីចំនុច  $A, B, C$  តែមិនត្រង់គ្នា

$$\text{ដោយ } \vec{AB} \times \vec{AC} = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \neq \vec{0}$$

ដូច្នេះ: បីចំនុច  $A, B, C$  តែមិនត្រង់គ្នា

គ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ  $\vec{n} = (-1, 1, 1)$  ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់  $(ABC)$

$$\text{គេមាន } \vec{n} = (-1, 1, 1)$$

$$\text{និង } \vec{AB} \times \vec{AC} = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \text{ ឬ } \vec{AB} \times \vec{AC} = (-4, 4, 4)$$

$$\text{ដោយ } \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{គេបាន } \vec{n} = (-1, 1, 1) \text{ កូលីនេអ៊ែរនឹង } \vec{AB} \times \vec{AC}$$

តែ  $\vec{AB} \times \vec{AC}$  ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នឹងប្លង់  $(ABC)$

នោះ:  $\vec{n} = (-1, 1, 1)$  ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់  $(ABC)$

$$\text{ដូច្នេះ: } \vec{n} = (-1, 1, 1) \text{ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ } (ABC)$$

សរសេរសមីការប្លង់  $(ABC)$

ប្លង់  $(ABC)$  កាត់តាមចំនុច  $A(1, 2, 3)$  និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់  $\vec{n} = (-1, 1, 1)$

$$\text{គេបាន } (ABC): (-1)(x-1) + (1)(y-2) + (1)(z-3) = 0$$

$$-x + 1 + y - 2 + z - 3 = 0$$

$$-x + y + z - 4 = 0$$

$$\text{ដូច្នេះ: } (ABC) - x + y + z - 4 = 0$$

2. បម្លែងសមីការនេះជាទម្រង់ស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

$$\text{គេមានសមីការទូទៅ } x^2 - 4x - 8y - 12 = 0$$

$$\text{គេបាន } x^2 - 4x - 8y - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = 8y + 12$$

$$x^2 - 4x + 4 = 8y + 12 + 4$$

$$(x-2)^2 = 8y + 16$$

$$(x-2)^2 = 8(y+2)$$

ដូច្នេះ សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ  $(x-2)^2 = 8(y+2)$

កំណត់កូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

គេមាន  $(x-2)^2 = 8(y+2)$  មានរាង  $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

នាំឲ្យ  $h=2, k=-2$  និង  $4p=8 \Rightarrow p=2$

គេទាញបាន

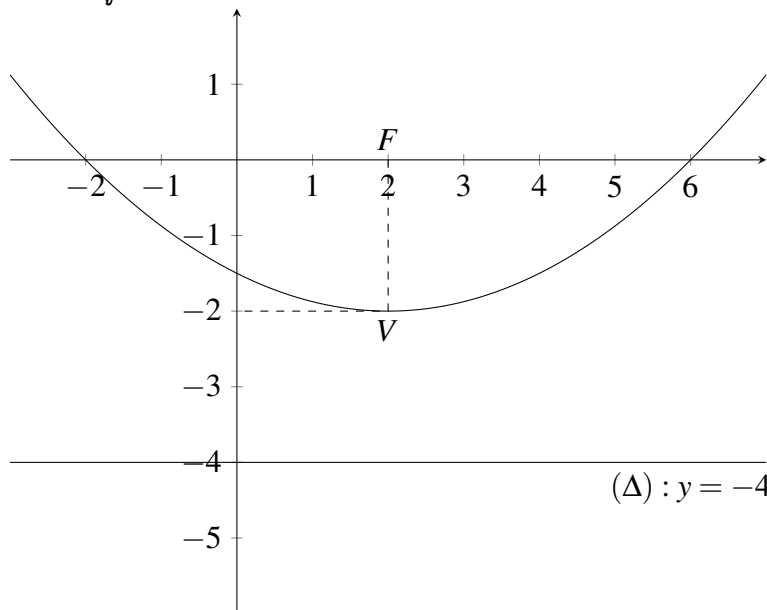
កំពូល  $V(h,k) = V(2,-2)$

កំណុំ  $F(h,k+p) = F(2,0)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស  $(\Delta) : y = k - p = -2 - 2 = -4$

ដូច្នេះ កំពូល  $V(2,-2)$ , កំណុំ  $F(2,0)$  និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស  $(\Delta) : y = -4$

សង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ



## VI. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E)$

គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E) : y'' + 3y' - y = 2y' + 5y$

គេបាន  $(E) : y'' + 3y' - y - 2y' - 5y = 0$

$(E) : y'' + y' - 6y = 0$

សមីការសម្គាល់  $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$  មាន  $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25$

នាំឲ្យ  $\lambda_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 - 5}{2} = -3$

$\lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$

គេបាន អនុគមន៍ទូទៅ  $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^{-3x} + Be^{2x}$

ដូច្នេះ  $y = Ae^{-3x} + Be^{2x}$  ដែល  $A, B \in \mathbb{R}$

បង្ហាញថា  $y = 2e^{2x} - e^{-3x}$  ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E)$

គេមាន  $y = 2e^{2x} - e^{-3x}$

នាំឲ្យ  $y' = 4e^{2x} + 3e^{-3x}$

ហើយ  $y'' = 8e^{2x} - 9e^{-3x}$

យក  $y, y'$  និង  $y''$  ទៅជំនួសក្នុងសមីការ  $(E)$

$$\begin{aligned} & \text{គេបាន } (8e^{2x} - 9e^{-3x}) + (4e^{2x} + 3e^{-3x}) - 6(2e^{2x} - e^{-3x}) = 0 \\ & 8e^{2x} - 9e^{-3x} + 4e^{2x} + 3e^{-3x} - 12e^{2x} + 6e^{-3x} = 0 \\ & 12e^{2x} - 6e^{-3x} - 12e^{2x} + 6e^{-3x} = 0 \\ & 0 = 0 \text{ ពិត} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ:  $y = 2e^{2x} - e^{-3x}$  ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ( $E$ )

VII. ក. គណនាលីមីត  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 + \frac{1}{x} \ln x \right) = 1 + (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\ln x}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប

ដោយ  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  នោះបន្ទាត់  $x = 0$  ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបខាង  $-\infty$

ដោយ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  នោះបន្ទាត់  $y = 1$  ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបខាង  $+\infty$

ដូចនេះ:  $x = 0$  ជាអាស៊ីមតូតឈរ និង  $y = 1$  ជាអាស៊ីមតូតដេក

ខ. គណនា  $f'(x)$  និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា

$$\text{គេមាន } f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឲ្យ } f'(x) &= \frac{(x + \ln x)'(x) - (x)'(x + \ln x)}{x^2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x - (x + \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{x + 1 - x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

សិក្សាសញ្ញានៃ  $f'(x)$

$$\text{គេមាន } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

ដោយ  $x^2 > 0$  គ្រប់  $x \in (0, +\infty)$  នាំឲ្យ  $f'(x)$  មានសញ្ញាដូច  $1 - \ln x$

- $1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$
- $1 - \ln x > 0 \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow x < e$
- $1 - \ln x < 0 \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow x > e$

គេបានតារាងសញ្ញានៃ  $f'(x)$

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

$$\text{ដូច្នេះ: } f'(x) > 0 \text{ បើ } x < e, f'(x) < 0 \text{ បើ } x > e, f'(x) = 0 \text{ បើ } x = e$$

សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$

តាមតារាងសញ្ញានៃ  $f'(x)$  គេបាន

$f$  កើនចំពោះ  $x \in (-\infty, e)$  និង  $f$  ចុះចំពោះ  $x \in (e, +\infty)$

សង់តារាងប្រភេទនៃអនុគមន៍  $f$

តាមតារាងសញ្ញានៃ  $f'(x)$  គេបាន  $f$  មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់  $x = e$

តម្លៃអតិបរមាគឺ  $f(e) = \frac{e + \ln e}{e} = \frac{e + 1}{e} = 1 + \frac{1}{e} = 1 + 0.4 = 1.4$

តារាងអប្រភេទនៃអនុគមន៍  $f$

$x$	0	$e$	$+\infty$	
$f'(x)$	<div><div></div><div></div></div>	+	0	-
$f(x)$	<div><div><div><math>-\infty</math></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div><div><div>&lt;/</div></div></div></div>			

គ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ ( $T$ ) ដែលប៉ះនឹងក្រាប ( $C$ ) ត្រង់ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស  $x = 1$

គេមាន  $x_0 = 1$  នោះ  $y_0 = f(x_0) = f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = \frac{1 + 0}{1} = 1$

$f'(x_0) = f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1^2} = \frac{1 - 0}{1} = 1$

គេបាន សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ( $T$ ) គឺ

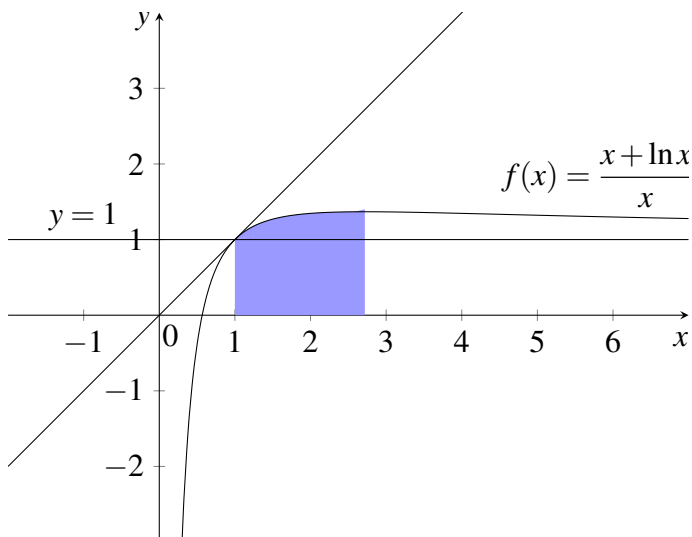
$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$  សមមូល  $y - 1 = (1)(x - 1)$  សមមូល  $y = x$

ដូច្នេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ( $T$ ) :  $y = x$

ឃ. សង់ក្រាប ( $C$ ) , បន្ទាត់ ( $T$ ) និងអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណូម៉ាល់ ( $O, \vec{i}, \vec{j}$ )

តារាងតម្លៃលេខនៃ ( $T$ ) :  $y = x$

$x$	0	1
$y$	0	1



ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយក្រាប ( $C$ ) , អ័ក្ស ( $ox$ ) និងបន្ទាត់ឈរ  $x = 1, x = e$

តាមក្រាប គេបាន  $f(x) > 0$  លើចន្លោះ  $[1, e]$



$$\begin{aligned}
 \text{តាមរូបមន្ត គេបាន } S &= \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{x + \ln x}{x} dx = \int_1^e \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) dx \\
 &= \int_1^e [1 + \ln x (\ln x)'] dx = \left[ x + \frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e \\
 &= \left( e + \frac{\ln^2 e}{2} \right) - \left( 1 + \frac{\ln^2 1}{2} \right) \\
 &= e + \frac{1}{2} - 1 = 2.7 + 0.5 - 1 = 2.2
 \end{aligned}$$

$$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

ដូច្នេះ ផ្ទៃក្រឡា  $S = 2.2$  ឯកតាផ្ទៃ



មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះមេគ្រូជន:.....  
 ឈ្មោះលេខាមេគ្រូជន:.....

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: អ៊ឹម ម៉ីនថន **90**

- I. នៅក្នុងទូទឹកកកមួយមានកេសជ្ជៈពីរប្រភេទគឺ ខាវបាវ 12 កំប៉ុង និងបាកាស 8 កំប៉ុង ។ បុរសម្នាក់បានយកកេសជ្ជៈបីកំប៉ុងចេញពីទូទឹកកក ដោយចៃដន្យ។
1. រកប្រូបាបដែលបានបាកាសទាំងបីកំប៉ុង។
  2. រកប្រូបាបដែលបានខាវបាវយ៉ាងតិចមួយកំប៉ុង។
- II. 1. កំណត់ចំនួនពិត  $x$  និង  $y$  ដើម្បីឲ្យ  $(1 - 2i)x + (1 + 2i)y = 1 + i$  ។
2. រកចំនួនកុំផ្លិច  $Z$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់  $|Z| + Z = 3 + 4i$  ។
3. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំ  $\mathbb{C}$  នូវសមីការ  $Z^2 + \sqrt{3}Z + 1 = 0$  រួចសរសេរប្លេសនីមួយៗជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- III. គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់គ្រប់  $x > 0$  ដោយ  $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 25}{x^2 + x - 6}$  ។
1. កំណត់តម្លៃ  $a, b$  និង  $c$  ដើម្បីឲ្យ  $f(x) = a + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x-2}$  ។
  2. គណនាអាំងតេក្រាល  $I = \int f(x)dx$
- IV. គេឲ្យសមីការប៉ារ៉ាបូល  $P: y^2 - 2y + 6x - 5 = 0$  ។
1. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល ។
  2. រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល។
- V.  $f$  ជាអនុគមន៍កំណត់គ្រប់  $x > 0$  ដោយ  $f(x) = x^2 + \frac{1}{2} - 3\ln x$  និងមានក្រាប  $C$  នៅក្នុងតម្រុយ  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ។
1. ក. គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $0$  ។  
 ខ. កំណត់អនុគមន៍  $g$  ចំពោះ  $x > 0$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់  $f(x) = x^2 g(x)$  ។ គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $+\infty$  ។
  2. សិក្សាអថេរភាពនៃ  $f$  រួចសង់តារាងអថេរភាព ។ គណនា  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  និង  $f(2)$  ។ ( គេយក  $\ln 2 = 0.7$  )
  3. ក. សង់ក្រាប  $C$  នៅក្នុងតម្រុយ  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ។  
 ខ. តើសមីការ  $f(x) = 0$  មានចម្លើយ ឬទេ ? ចូរបកស្រាយ ។
- VI. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  មួយ គេឲ្យចំណុច  $A(1, 2, -3), B(0, 5, -1)$  និង  $C(3, 0, 1)$ ។
1. ចូរសង់ចំណុច  $A, B$  និង  $C$  ។
  2. គណនាប្រវែង  $AB, AC$  និង  $BC$  រួចទាញបញ្ជាក់ថាត្រីកោណ  $ABC$  ជាត្រីកោណកែងត្រង់  $A$  ។
  3. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ  $\vec{AB} \times \vec{AC}$  ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ  $ABC$  ។ រកសមីការប្លង់  $(ABC)$  ។
  4. គណនាចម្ងាយពីចំណុច  $O$  ទៅប្លង់  $(ABC)$  ។

## ជំនេរស្រាវជ្រាវ

### I. 1. រកប្រូបាបដែលបានបាត់ទាំងបីកំប៉ុង

ក្នុងទូទឹកកកមានបាត់ទាំង 8 កំប៉ុង និងខាតបាត់ 12 កំប៉ុង

បុរសម្នាក់បានយកកេសផ្ទះបីកំប៉ុងដោយចៃដន្យ

$$\begin{aligned} \bullet \text{ ចំនួនករណីអាច } n(S) &= C(20, 3) = \frac{20!}{17!3!} \\ &= \frac{17! \times 18 \times 19 \times 20}{17! \times 6} \\ &= 19 \times 20 \times 3 \\ &= 1140 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

តាង  $A$  : “បានបាត់ទាំងបីកំប៉ុង”

$$\begin{aligned} \bullet \text{ ចំនួនករណីស្រប } n(A) &= C(8, 3) = \frac{8!}{5!3!} \\ &= \frac{5! \times 6 \times 7 \times 8}{5! \times 6} \\ &= 7 \times 8 = 56 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

$$\text{គេបានប្រូបាប } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{56}{1140} = \frac{14}{285}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{14}{285}}$$

### 2. រកប្រូបាបដែលបានខាតបាត់យ៉ាងតិចមួយកំប៉ុង

តាង  $B$  : “បានខាតបាត់យ៉ាងតិចមួយកំប៉ុង”

ដោយ  $B$  និង  $A$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } P(B) &= 1 - P(A) \text{ នោះ } P(B) = 1 - \frac{14}{285} \\ &= \frac{285 - 14}{285} \\ &= \frac{271}{285} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{271}{285}}$$

### II. 1. កំណត់ចំនួនពិត $x$ និង $y$

$$\text{គេមាន } (1 - 2i)x + (1 + 2i)y = 1 + i$$

$$x - 2xi + y + 2yi = 1 + i$$

$$(x + y) + (-2x + 2y)i = 1 + i$$

$$\text{គេទាញបាន } \begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 & (i) \\ -x + y = \frac{1}{2} & (ii) \end{cases}$$

$$\text{បូក (i) និង (ii) គេបាន } 2y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4}$$

$$\text{តាម (i) : } x = 1 - y = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}}$$

2. រកចំនួនកុំផ្លិច  $Z$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់  $|Z| + Z = 3 + 4i$

តាង  $Z = a + bi$  នោះ  $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

គេបាន  $|Z| + Z = 3 + 4i$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + a + bi = 3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} + a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$$

ចំពោះ  $b = 4$  នោះ  $\sqrt{a^2 + 4^2} + a = 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 16} + a = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 16} = 3 - a$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + 16})^2 = (3 - a)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 16 = 9 - 6a + a^2$$

$$\Leftrightarrow 16 = 9 - 6a$$

$$\Leftrightarrow 6a = -7$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{7}{6}$$

ដូចនេះ:  $Z = -\frac{7}{6} + 4i$

3. ដោះស្រាយសមីការ  $Z^2 + \sqrt{3}Z + 1 = 0$

តាម  $\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4(1)(1) = 3 - 4 = -1 = (i)^2$

$$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3} - i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ដូចនេះ:  $Z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, Z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

- សរសេរប្លូសនីមួយៗជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $Z_1 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$

$$\begin{aligned} Z_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{Z_2 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}}$$

III. 1. កំណត់តម្លៃ  $a, b$  និង  $c$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } f(x) &= a + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x-2} \\ &= \frac{a(x+3)(x-2) + b(x-2) + c(x+3)}{(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{a(x^2+x-6) + b(x-2) + c(x+3)}{x^2+x-6} \\ &= \frac{ax^2 + (a+b+c)x + (-6a-2b+3c)}{x^2+x-6} \end{aligned}$$

$$\text{តែ } f(x) = \frac{3x^2+4x-25}{x^2+x-6}$$

$$\text{គេទាញបាន } \begin{cases} a=3 \\ a+b+c=4 \\ -6a-2b+3c=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b+c=1 \\ -2b+3c=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{a=3, b=2, c=-1}$$

2. គណនាអាំងតេក្រាល  $I = \int f(x)dx$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I &= \int f(x)dx = \int \left( a + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x-2} \right) dx \\ &= \int \left( 3 + \frac{2}{x+3} + \frac{-1}{x-2} \right) dx \\ &= 3x + 2\ln|x+3| - \ln|x-2| + k, (x > 2) \\ &= 3x + 2\ln(x+3) - \ln(x-2) + k, (k \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{I = 3x + 2\ln(x+3) - \ln(x-2) + k}, (k \in \mathbb{R})$$

IV. 1. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

$$\text{គេមាន } P: y^2 - 2y + 6x - 5 = 0$$

$$\text{គេបាន } y^2 - 2y = -6x + 5$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = -6x + 6$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = -6(x-1) \text{ ជាសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានបន្ទាត់}$$

ប្រាប់ទិសស្របនឹងអ័ក្ស  $Ox$

$$\text{ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដារគឺ } \boxed{P: (y-1)^2 = -6(x-1)}$$

2. រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

$$\text{ដោយសមីការ } (y-1)^2 = -6(x-1) \text{ មានទម្រង់ } (y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$\text{គេទាញបាន } h = 1, k = 1, 4p = -6 \Rightarrow p = -\frac{3}{2}$$

$$\text{កំពូល } V(h, k) = V(1, 1)$$

$$\text{កំណុំ } F(h + p, k) = F(1 - \frac{3}{2}, 1) = F(-\frac{1}{2}, 1)$$

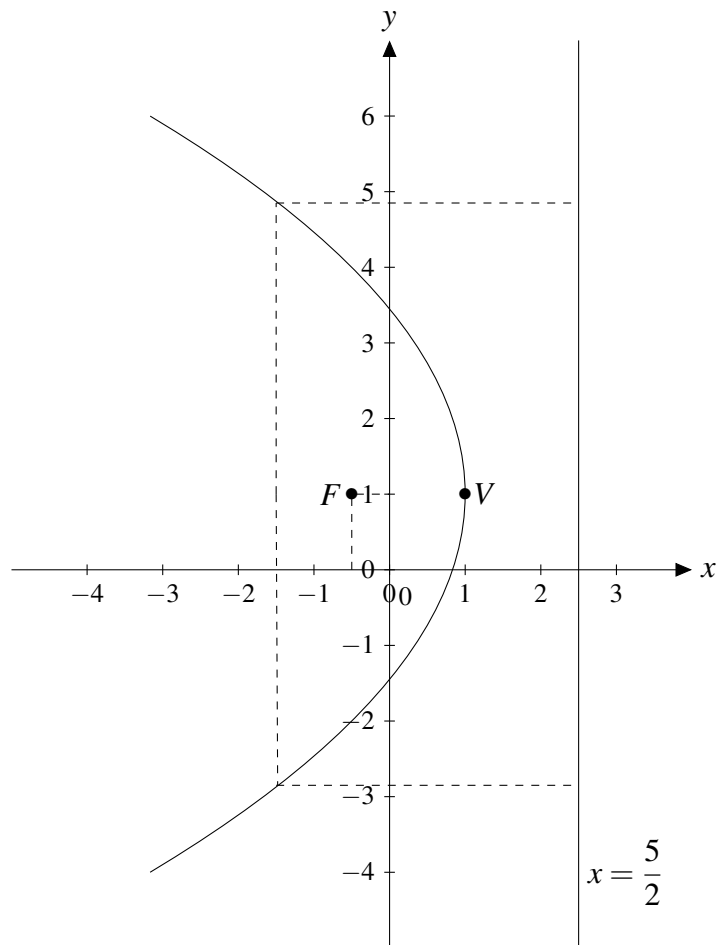
$$\text{បន្ទាត់ប្រាប់ទិស } x = h - p = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{V(1, 1), F(-\frac{1}{2}, 1), x = \frac{5}{2}}$$

- សង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល

$$\text{បើ } x = -1.5 \text{ នោះ } y = 4.8 \text{ និង } y = -2.8$$

$$\text{បើ } x = 0 \text{ នោះ } y = 1 \pm \sqrt{6}$$



$$\text{V. គេមាន } f(x) = x^2 + \frac{1}{2} - 3 \ln x \text{ ដែល } x > 0$$

1. ក. គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់ 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \frac{1}{2} - 3 \ln x) = +\infty$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

ដូចនេះ បន្ទាត់  $x = 0$  ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប  $C$  ។

2. កំណត់អនុគមន៍  $g$  ចំពោះ  $x > 0$

$$\text{គេមាន } f(x) = x^2 g(x) \text{ គេបាន } x^2 + \frac{1}{2} - 3 \ln x = x^2 g(x)$$

$$\text{នាំឲ្យ } g(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{2} - 3\ln x}{x^2} = 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{3\ln x}{x^2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{g(x) = 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{3\ln x}{x^2}}, (x > 0)$$

- គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{3\ln x}{x^2} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

## 2. សិក្សាអថេរភាពនៃ $f$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2} - 3\ln x \text{ ដែល } x > 0$$

$$\text{ដេរីវេ } f'(x) = 2x - \frac{3}{x} = \frac{2x^2 - 3}{x}$$

$$\text{ដោយ } x > 0 \text{ នោះ } f'(x) \text{ មានសញ្ញាដូច } 2x^2 - 3 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

សញ្ញានៃ  $f'(x)$

$x$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

$$\text{តម្លៃអប្បបរមាត្រង់ } x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ គឺ } f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 1.39$$

- គូសតារាងអថេរភាព

$x$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1.39	$+\infty$

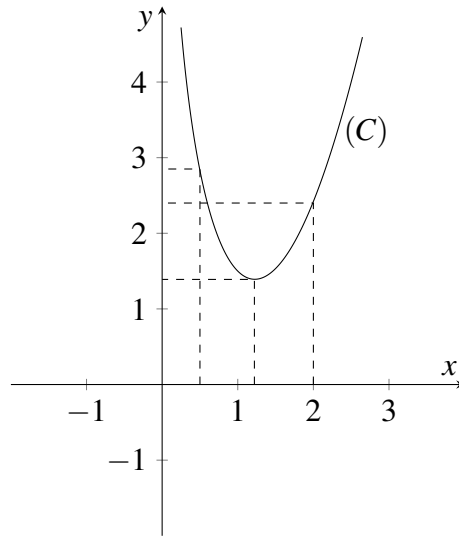
- គណនា  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  និង  $f(2)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 3\ln \frac{1}{2} = 0.75 + 2.1 = 2.85$$

$$f(2) = 4 + \frac{1}{2} - 3\ln 2 = 4.5 - 2.1 = 2.4$$

## 3. ក. សង់ក្រាប $C$





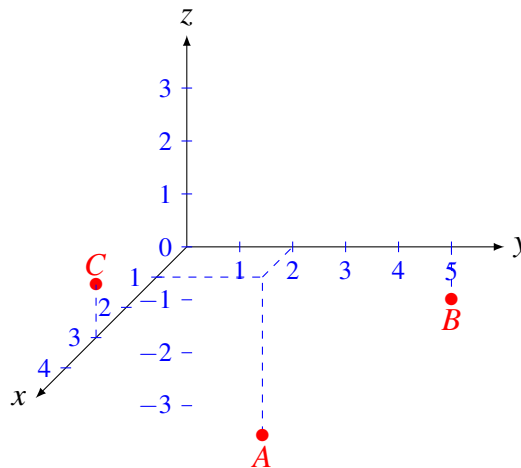
ខ. តើសមីការ  $f(x) = 0$  មានចម្លើយ ឬទេ?

តាមក្រាប  $C$  ខាងលើ សមីការ  $f(x) = 0$  គ្មានចម្លើយទេ

(ព្រោះ  $f(x) \geq 1.39$  គ្រប់  $x \in D$ ) ។

VI. គេមានចំណុច  $A(1, 2, -3), B(0, 5, -1)$  និង  $C(3, 0, 1)$

1. សង់ចំណុច  $A, B$  និង  $C$



2. គណនាប្រវែង  $AB, AC$  និង  $BC$

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{AB} = (0 - 1, 5 - 2, -1 + 3) = (-1, 3, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3 - 1, 0 - 2, 1 + 3) = (2, -2, 4)$$

$$\overrightarrow{BC} = (3 - 0, 0 - 5, 1 + 1) = (3, -5, 2)$$

$$\text{គេបាន } AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2 + (2)^2} = \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{AB = \sqrt{14}, AC = \sqrt{24}, BC = \sqrt{38}}$$

- ទាញបញ្ជាក់ថាត្រីកោណ  $ABC$  ជាត្រីកោណកែងត្រង់  $A$

$$\text{គេបាន } AB^2 = (\sqrt{14})^2 = 14$$

$$AC^2 = (\sqrt{24})^2 = 24$$

$$BC^2 = (\sqrt{38})^2 = 38$$

ដោយ  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  (ច្បាប់ពីត័រ)

ដូចនេះ បញ្ជាក់ថា  $ABC$  ជាត្រីកោណកែងត្រង់  $A$  ។

3. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ  $\vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (12 + 4)\vec{i} - (-4 - 4)\vec{j} + (2 - 6)\vec{k} = 16\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\vec{AB} \times \vec{AC} = 16\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}}$$

• គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ  $ABC$

$$\text{តាមរូបមន្ត } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\text{ដោយ } \vec{AB} \times \vec{AC} = (16, 8, -4) = 4(4, 2, -1)$$

$$\text{គេបាន } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{16 + 4 + 1} = 2\sqrt{21}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{21} \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}}$$

• រកសមីការប្លង់ ( $ABC$ )

ប្លង់ ( $ABC$ ) កាត់តាមចំណុច  $C(3, 0, 1)$  និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (16, 8, -4) \text{ គេបាន:}$$

$$(ABC) : a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$$

$$16(x - 3) + 8(y - 0) - 4(z - 1) = 0$$

$$16x - 48 + 8y - 4z + 4 = 0$$

$$16x + 8y - 4z - 44 = 0$$

$$4x + 2y - z - 11 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{(ABC) : 4x + 2y - z - 11 = 0}$$

4. គណនាចម្ងាយពីចំណុច  $O$  ទៅប្លង់ ( $ABC$ )

$$\text{គេមាន } (ABC) : 4x + 2y - z - 11 = 0 \text{ និងចំណុច } O(0, 0, 0)$$

ចម្ងាយពីចំណុច  $O$  ទៅប្លង់ ( $ABC$ ) កំណត់ដោយ

$$\begin{aligned} D &= \frac{|4(0) + 2(0) - (0) - 11|}{\sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{16 + 4 + 1}} \\ &= \frac{11}{\sqrt{21}} = \frac{11\sqrt{21}}{21} \text{ (ឯកតាប្រវែង)} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{D = \frac{11\sqrt{21}}{21} \text{ (ឯកតាប្រវែង)}}$$

មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះមេគ្រូជន:.....  
 ឈ្មោះលេខាមេគ្រូជន:.....

វិញ្ញាសារៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: អ៊ុំ ចាន់ថា **១១**

- I. គណនាលីមីត
- ក.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{5+x}-2}$                       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$                       គ.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x}$
- II. ក្នុងចំណោមមូលក្រហម 4 មូលខ្មៅ 3 និងមូលស 1 ។ គេយកមូល 3 ចេញពីក្នុងចំណោមមូលដោយ ចៃដន្យ។ រកប្រូបាបដែលគេយកបាន:
- ក. មូលក្រហមពីរយ៉ាងតិច។                      ខ. មូលពីរយ៉ាងតិចមានពណ៌ដូចគ្នា។                      គ. មូលនីមួយៗមានពណ៌ខុសគ្នា។
- III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$  និង  $z_2 = 6 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  ។
- ក. សរសេរ  $z_1$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។                      ខ. សរសេរ  $z_1 \times z_2$  ជាទម្រង់ពីជគណិត។
- គ. សរសេរ  $z_1 \times z_2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
- IV. គណនាអាំងតេក្រាល:
- ក.  $I = \int_1^2 (3+x-x^2)dx$                       ខ.  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)^2 dx$                       គ.  $K = \int_0^2 \frac{x^2 + (x+1)^2}{x^2 + 1} dx$
- V. 1. គេមានចំណុច:  $A(-2, 1, 0)$ ,  $B(0, 1, 1)$ ,  $C(1, 2, 2)$  និង  $D(0, 3, -4)$  ក្នុងតម្រុយ  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ។
- ក. រកវ៉ិចទ័រ  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{BC}, \vec{BD}, \vec{CD}$  រួចគណនាប្រវែង  $AB, AC, AD, BD, CD$  ។
- ខ. ចូរបង្ហាញថា ត្រីកោណ  $ABD$  និង  $ACD$  កែងគ្នា។
2. គេមានប៉ារ៉ាបូល  $(P)$  មួយ មានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច  $O(0, 0)$  និងកំណុំ  $F$  ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ។
- ក. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល  $(P)$  បើគេដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច  $A(2, 6)$
- ខ. រកតម្លៃនៃ  $x_1$  បើ  $B\left(x_1, \frac{3}{2}\right)$  ស្ថិតលើប៉ារ៉ាបូល  $(P)$  រួចសង់ប៉ារ៉ាបូល  $(P)$  ។
- VI. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E) : y' + 2y = x^2$  ។
- ក. កំណត់អនុគមន៍ពហុធា  $g$  មានដឺក្រេទីពីរជាចម្លើយនៃ  $(E)$  ។
- ខ. បង្ហាញថា អនុគមន៍  $f$  ជាចម្លើយនៃ  $(E)$  លុះត្រាតែ  $f - g$  ជាចម្លើយនៃសមីការ  $(E') : y' + 2y = 0$  ។ ដោះស្រាយសមីការ  $(E') : y' + 2y = 0$  ។
- VII. គេឱ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x + 1}$  មានខ្សែកោង  $C$  ។
1. គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $-\infty$  និងត្រង់  $+\infty$  ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប  $C$  ធៀបនឹងបន្ទាត់  $d_1$  ដែលមានសមីការ  $(d_1) : y = x - 2$  ។
2. ចូរស្រាយបំភ្លឺថា នៅលើ  $\mathbb{R}$  គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍  $f$  គឺ  $f'(x) = \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$  ។
- សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  លើ  $\mathbb{R}$  ។
3. បង្ហាញថា បន្ទាត់  $d_2$  ដែលមានសមីការ  $y = x + 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតទៅនឹងក្រាប  $C$  ត្រង់  $-\infty$  ។
- សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប  $C$  ធៀបនឹង បន្ទាត់  $d_2$  ។ សង់ក្រាប  $C$  និងអាស៊ីមតូត  $d_1$  និង  $d_2$  របស់វា។

## ជំនេរស្រាវ

### I. គណនាលីមីត

ក.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{5+x}-2}$  រាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{5+x}-2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{2+x}-1)(\sqrt{2+x}+1)(\sqrt{5+x}+2)}{(\sqrt{5+x}-2)(\sqrt{5+x}+2)(\sqrt{2+x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2+x-1)(\sqrt{5+x}+2)}{(5+x-4)(\sqrt{2+x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{5+x}+2)}{(x+1)(\sqrt{2+x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x}+2}{\sqrt{2+x}+1} \\ &= \frac{\sqrt{5-1}+2}{\sqrt{2-1}+1} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\boxed{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{5+x}-2} = 2}$  ។

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$  រាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-x^2+x^2-2x+1}{x^{50}-x^2+x^2-2x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x^{98}-1)+(x-1)^2}{x^2(x^{48}-1)+(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1)(x^{97}+x^{96}+x^{95}+\dots+x+1)+(x-1)^2}{x^2(x-1)(x^{47}+x^{46}+x^{45}+\dots+x+1)+(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[x^2(x^{97}+x^{96}+x^{95}+\dots+x+1)+(x-1)]}{(x-1)[x^2(x^{47}+x^{46}+x^{45}+\dots+x+1)+(x-1)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x^{97}+x^{96}+x^{95}+\dots+x+1)+(x-1)}{x^2(x^{47}+x^{46}+x^{45}+\dots+x+1)+(x-1)} \\ &= \frac{1^2(1+1+1+\dots+1+1)+0}{1^2(1+1+1+\dots+1+1)+0} \\ &= \frac{98}{48} \\ &= \frac{49}{24} \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} = \frac{49}{24}}$  ។

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \left( \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)}{\sin 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \left( \sin x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos x \right)}{\sin 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)}{\sin 3x} \end{aligned}$$

$$\text{តាង } t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow 3x = \pi + 3t$$

$$\text{ពេល } x \rightarrow \frac{\pi}{3} \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)}{\sin 3x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{\sin (\pi + 3t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{-\sin 3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( -\frac{2 \frac{\sin t}{t}}{3 \frac{\sin 3t}{3t}} \right) \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x} = -\frac{2}{3}} \quad \text{។}$$

## II. រកប្រូបាបដែលគេយកបាន:

ក. ប៊ូលក្រហមពីរយ៉ាងតិច

តាង A: ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេយកបានប៊ូលក្រហមពីរយ៉ាងតិច

ដោយគេយកប៊ូល 3 ព្រមគ្នា ចេញពីក្នុងថង់ដែលមានប៊ូល 8 ដោយចៃដន្យ

គេបាន ចំនួនករណីអាច  $n(S) = C(8, 3)$

$$\begin{aligned} &= \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} \\ &= 56 \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត គេយកបានប៊ូលក្រហមពីរយ៉ាងតិច នោះគេអាចយកបានប៊ូលក្រហម 2 ឬ ប៊ូលក្រហម 3

គេបាន ចំនួនករណីសរុប  $n(A) = C(4, 2) \times C(4, 1) + C(4, 3)$

$$\begin{aligned} &= \frac{4 \times 3}{2} \times 4 + 4 \\ &= 6 \times 4 + 4 \\ &= 28 \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{1}{2}} \text{ ។}$$

ខ. ប៊ូលពីរយ៉ាងតិចមានពណ៌ដូចគ្នា

តាង  $B$  : ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេយកបានប៊ូលពីរយ៉ាងតិចមានពណ៌ដូចគ្នា

នោះគេអាចយកបាន ប៊ូលក្រហម 2 ឬ ប៊ូលខ្មៅ 2 ឬប៊ូលក្រហមទាំងបី ឬប៊ូលខ្មៅទាំងបី

$$\begin{aligned} \text{គេបាន ចំនួនករណីស្រប } n(B) &= C(4, 2) \times C(4, 1) + C(3, 2) \times C(5, 1) + C(4, 3) + C(3, 3) \\ &= 6 \times 4 + 3 \times 5 + 4 + 1 \\ &= 24 + 15 + 5 \\ &= 44 \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{44}{56} = \frac{11}{14}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{11}{14}} \text{ ។}$$

គ. ប៊ូលនីមួយៗមានពណ៌ខុសគ្នា

តាង  $C$  : ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេយកបានប៊ូលនីមួយៗមានពណ៌ខុសគ្នា

នោះគេអាចយកបាន ប៊ូលក្រហម 1 និងប៊ូលខ្មៅ 1 និងប៊ូលស 1

$$\begin{aligned} \text{គេបាន ចំនួនករណីស្រប } n(C) &= C(4, 1) \times C(3, 1) \times C(1, 1) \\ &= 4 \times 3 \times 1 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(C) = \frac{3}{14}} \text{ ។}$$

III. ក. សរសេរ  $z_1$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេមាន } z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\text{ម៉ូឌុល } r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

អាកុយម៉ង់

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha &= \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right| \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_1 &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)} \text{ ។}$$

ខ. សរសេរ  $z_1 \times z_2$  ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } z_1 &= 1 + i\sqrt{3} \\ \text{និង } z_2 &= 6 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 6 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } z_1 \times z_2 &= (1 + i\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}) \\ &= 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} + 3i\sqrt{6} - 3\sqrt{6} \\ &= 3(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + 3i(\sqrt{2} + \sqrt{6})\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_1 \times z_2 = 3(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + 3i(\sqrt{2} + \sqrt{6})} \quad \text{។}$$

គ. សរសេរ  $z_1 \times z_2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } z_1 &= 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ z_2 &= 6 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } z_1 \times z_2 &= \left[ 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right] \left[ 6 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 2 \times 6 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 12 \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_1 \times z_2 = 12 \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)} \quad \text{។}$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល:

$$\text{ក. } I = \int_1^2 (3 + x - x^2) dx$$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } I &= \int_1^2 (3 + x - x^2) dx \\ &= \left[ 3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \left( 3 \cdot 2 + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} \right) - \left( 3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= 6 + 2 - \frac{8}{3} - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ &= 5 - \frac{1}{2} - \frac{7}{3} \\ &= \frac{30 - 3 - 14}{6} = \frac{13}{6}\end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $I = \frac{13}{6}$  ។

ខ.  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)^2 dx$

គេបាន  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)^2 dx$   
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x) dx$   
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x \sin x) dx$   
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx$   
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot d(\sin x)$   
 $= [x + \sin^2 x]_0^{\frac{\pi}{2}}$   
 $= \frac{\pi}{2} + 1$

ដូចនេះ:  $J = 1 + \frac{\pi}{2}$  ។

គ.  $K = \int_0^2 \frac{x^2 + (x+1)^2}{x^2 + 1} dx$

គេបាន  $K = \int_0^2 \frac{x^2 + (x+1)^2}{x^2 + 1} dx$   
 $= \int_0^2 \frac{x^2 + x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx$   
 $= \int_0^2 \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx$   
 $= \int_0^2 \left( 2 + \frac{2x-1}{x^2+1} \right) dx$   
 $= \int_0^2 2 dx + \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx - \int_0^2 \frac{dx}{x^2+1}$   
 $= [2x]_0^2 + \int_0^2 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx - [\arctan x]_0^2$   
 $= [2x]_0^2 + [\ln |x^2+1|]_0^2 - [\arctan x]_0^2$   
 $= [2x + \ln |x^2+1| - \arctan x]_0^2$   
 $= (4 + \ln 5 - \arctan 2) - (0 + \ln 1 - \arctan 0)$   
 $= 4 + \ln 5 - \arctan 2$

ដូចនេះ:  $K = 4 + \ln 5 - \arctan 2$  ។

V. 1. ក. គេផ្តល់ទំរង់  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{BC}, \vec{BD}, \vec{CD}$  រួចគណនាប្រវែង  $AB, AC, AD, BD, CD$

គេមានចំណុច:  $A(-2, 1, 0), B(0, 1, 1), C(1, 2, 2)$  និង  $D(0, 3, -4)$

គេបាន:

- $\vec{AB} = (2, 0, 1) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
- $\vec{AC} = (3, 1, 2) \Rightarrow AC = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$



- $\overrightarrow{AD} = (2, 2, -4) \Rightarrow AD = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{6}$
- $\overrightarrow{BD} = (0, 2, -5) \Rightarrow BD = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$
- $\overrightarrow{CD} = (-1, 1, -6) \Rightarrow CD = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{38}$

ខ. បង្ហាញថា ត្រីកោណ  $ABD$  និង  $ACD$  កែងត្រង់  $A$

គេមាន  $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 1)$  និង  $\overrightarrow{AD} = (2, 2, -4)$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= (2 \times 2) + (0 \times 2) + [1 \times (-4)] \\ &= 4 + 0 - 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

ដោយ  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

គេទាញបាន ត្រីកោណ  $ABD$  ជាត្រីកោណកែង កែងត្រង់  $A$  (ពិត)

ម្យ៉ាងទៀត  $\overrightarrow{AC} = (3, 1, 2)$  និង  $\overrightarrow{AD} = (2, 2, -4)$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} &= (3 \times 2) + (1 \times 2) + [2 \times (-4)] \\ &= 6 + 2 - 8 \\ &= 0\end{aligned}$$

ដោយ  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

គេទាញបាន ត្រីកោណ  $ACD$  ជាត្រីកោណកែង កែងត្រង់  $A$  (ពិត)

ដូចនេះ បញ្ជាក់ថាត្រីកោណ  $ABD$  និង  $ACD$  កែងត្រង់  $A$  ។

2. ក. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល ( $P$ )

ដោយប៉ារ៉ាបូល  $P$  មានកំពូល  $V(0, 0)$  និងកំណុំ  $F$  ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ

នោះប៉ារ៉ាបូលមាន អ័ក្សឆ្លុះ ស្ថិតលើអ័ក្សអរដោនេ

គេបានសមីការស្តង់ដារមានរាង :  $(x-0)^2 = 4P(y-0)$

តែប៉ារ៉ាបូល  $P$  កាត់តាម  $A(2, 6)$

គេបាន  $2^2 = 4P \times 6$

$$4 = 24P$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{6}$$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដារគឺ  $(P) : (x-0)^2 = \frac{2}{3}(y-0)$  ។

ខ.  $\triangleright$  រកតម្លៃនៃ  $x_1$

គេមាន ( $P$ ) :  $x^2 = \frac{4}{6}y$

ដោយ  $B\left(x_1, \frac{3}{2}\right)$  ស្ថិតលើ ( $P$ )

គេបាន  $x_1^2 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$

$$x_1^2 = 1$$

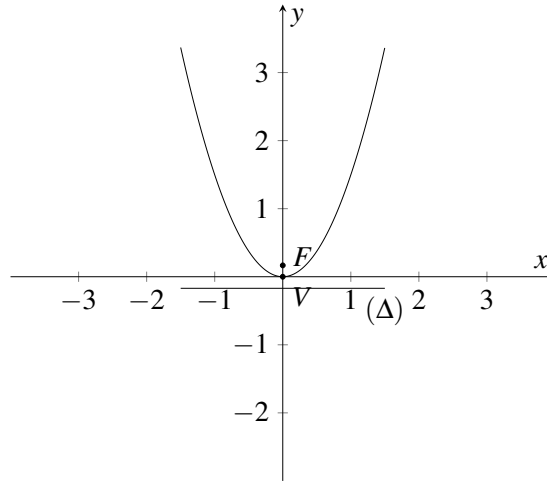
$$\Rightarrow x_1 = \pm 1$$

ដូចនេះ  $x_1 = \pm 1$  ។

▷ សង់ប៉ារ៉ាបូល ( $P$ ) :

ប៉ារ៉ាបូល ( $P$ ) មាន :

- កំពូល  $V(0,0)$
- កំណុំ  $F(0,0+P)$  នោះ  $F\left(0,\frac{1}{6}\right)$
- បន្ទាត់ប្រាប់ទិស ( $\Delta$ ) :  $y=0-P$  នោះ ( $\Delta$ ) :  $y=-\frac{1}{6}$



VI. ក. កំណត់អនុគមន៍ពហុធា  $g$  មានដឺក្រេទីពីរជាចម្លើយនៃ ( $E$ )

តាង  $g(x) = ax^2 + bx + c$  ជាចម្លើយនៃ ( $E$ )

គេបាន  $g'(x) = 2ax + b$

ដោយ  $g$  ជាចម្លើយនៃ ( $E$ ) នោះ  $g$  ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ( $E$ )

គេបាន  $g'(x) + 2g(x) = x^2$

$$2ax + b + 2(ax^2 + bx + c) = x^2$$

$$2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$$

$$2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c) = x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}} \text{ ។}$$

ខ. ▷ បង្ហាញថា អនុគមន៍  $f$  ជាចម្លើយនៃ ( $E$ ) លុះត្រាតែ  $f - g$  ជាចម្លើយនៃសមីការ ( $E'$ ) :  $y' + 2y = 0$

- បើអនុគមន៍  $f$  ជាចម្លើយនៃ ( $E$ ) នោះ  $f - g$  ជាចម្លើយនៃសមីការ ( $E'$ ) :  $y' + 2y = 0$

គេមាន ( $E$ ) :  $y' + 2y = x^2$

ដោយ  $f$  ជាចម្លើយនៃ ( $E$ ) នោះ  $f'(x) + 2f(x) = x^2$  (1)

តែ  $g$  ជាចម្លើយនៃ ( $E$ ) នោះ  $g'(x) + 2g(x) = x^2$  (2)

យក (1) ដក (2)

$$\text{គេបាន } (f'(x) + 2f(x)) - (g'(x) + 2g(x)) = x^2 - x^2$$

$$(f'(x) - g'(x)) + 2(f(x) - g(x)) = 0$$

$$(f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0 \quad \text{ជាចម្លើយនៃ } (E') : y' + 2y = 0 \quad (\text{ពិត}) \quad \text{។}$$

- បើ  $f - g$  ជាចម្លើយនៃសមីការ  $(E') : y' + 2y = 0$  នោះ អនុគមន៍  $f$  ជាចម្លើយនៃ  $(E) : y' + 2y = x^2$

$$\text{ដោយ } f - g \text{ ជាចម្លើយនៃសមីការ } (E') : y' + 2y = 0$$

$$\text{គេបាន } (f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0$$

$$f'(x) - g'(x) + 2f(x) - 2g(x) = 0$$

$$f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x)$$

$$\text{តែ } g \text{ ជាចម្លើយនៃ } (E) \text{ នោះ } g'(x) + 2g(x) = x^2$$

$$\text{នាំឱ្យ } f'(x) + 2f(x) = x^2 \text{ ជាចម្លើយនៃ } (E) \quad (\text{ពិត}) \quad \text{។}$$

ដូចនេះ បញ្ជាក់ថា អនុគមន៍  $f$  ជាចម្លើយនៃ  $(E)$  លុះត្រាតែ

$$f - g \text{ ជាចម្លើយនៃសមីការ } (E') : y' + 2y = 0 \quad \text{។}$$

$$\triangleright \text{ដោះស្រាយសមីការ } (E') : y' + 2y = 0$$

$$\text{មានសមីការសម្គាល់ } r + 2 = 0 \Rightarrow r = -2$$

$$\text{គេបានចម្លើយនៃសមីការ } (E') \text{ គឺ } y = Ae^{-2x} \text{ ដែល } A \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ } (E') \text{ គឺ } \boxed{y = Ae^{-2x} \text{ ដែល } A \in \mathbb{R}} \quad \text{។}$$

- VII. 1. • គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $-\infty$  និងត្រង់  $+\infty$

$$\text{គេមានអនុគមន៍ } f \text{ កំណត់ដោយ } f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x + 1}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} \right) = -\infty$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} \right) = +\infty$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = \mp\infty} \quad \text{។}$$

- សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប  $C$  ធៀបនឹងបន្ទាត់  $d_1$  ដែលមានសមីការ  $(d_1) : y = x - 2$

$$\text{គេមាន } f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} \text{ និង } (d_1) : y = x - 2$$

$$\text{តាង } g(x) = f(x) - (d_1)$$

$$= x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} - (x - 2)$$

$$= \frac{4}{e^x + 1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ ក្រាប  $C$  ស្ថិតនៅផ្នែកខាងលើនៃបន្ទាត់  $(d_1)$  គ្រប់តម្លៃ  $x$  ។

2. • ចូរស្រាយបំភ្លឺថា នៅលើ  $\mathbb{R}$  គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍  $f$  គឺ  $f'(x) = \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$

$$\begin{aligned}
 \text{គេមាន } f(x) &= x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{(e^x)^2 + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{(e^x)^2 - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 \text{ ពិត}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ នៅលើ  $\mathbb{R}$  គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍  $f$  គឺ  $f'(x) = \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$  ។

- សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  លើ  $\mathbb{R}$

$$\text{ដោយ } f'(x) = \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 - \text{ បើ } f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 = 0 \\
 &\quad \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0, \quad e^x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow e^x - 1 = 0 \\
 &\quad e^x = 1 \\
 &\quad e^x = e^0 \\
 &\Rightarrow x = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \text{ បើ } f'(x) &> 0 \Leftrightarrow \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 > 0 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0 \\ \frac{e^x - 1}{e^x + 1} < 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

តារាងសញ្ញា  $f'(x)$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+

$$- f(0) = 0 - 2 + \frac{4}{e^0 + 1} = 0$$

តារាងអថេរភាពនៃ  $f$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

ដូចនេះ

- ចំពោះ  $x \in (-\infty, 0)$  អនុគមន៍  $f$  កើនពី  $-\infty$  ទៅ  $0$
- ចំពោះ  $x = 0$  នោះអនុគមន៍  $f$  មានតម្លៃស្មើ  $0$
- ចំពោះ  $x \in (0, +\infty)$  អនុគមន៍  $f$  កើនពី  $0$  ទៅ  $+\infty$  ។

3. • បង្ហាញថា បន្ទាត់  $d_2$  ដែលមានសមីការ  $y = x + 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតទៅនឹងក្រាប  $C$  ត្រង់  $-\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } f(x) &= x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} \\ &= x + 2 - 4 + \frac{4}{e^x + 1} \\ &= x + 2 + \frac{4 - 4e^x - 4}{e^x + 1} \\ &= x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1} \\ &= x + 2 - \frac{4}{1 + \frac{1}{e^x}} \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{4}{1 + \frac{1}{e^x}} \right) = 0$$

នាំឱ្យ បន្ទាត់  $y = x + 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $C$  ត្រង់  $-\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់  $y = x + 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $C$  ត្រង់  $-\infty$  ។

- សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប  $C$  ធៀបនឹង បន្ទាត់  $d_2$

$$\begin{aligned} \text{តាង } h(x) &= f(x) - (d_2) \\ &= x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} - (x + 2) \\ &= x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} - x - 2 \\ &= \frac{4}{e^x + 1} - 4 \\ &= \frac{4 - 4e^x - 4}{e^x + 1} \\ &= -\frac{4e^x}{e^x + 1} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ក្រាប  $C$  ស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្រោមនៃបន្ទាត់  $(d_2)$  គ្រប់តម្លៃ  $x$  ។

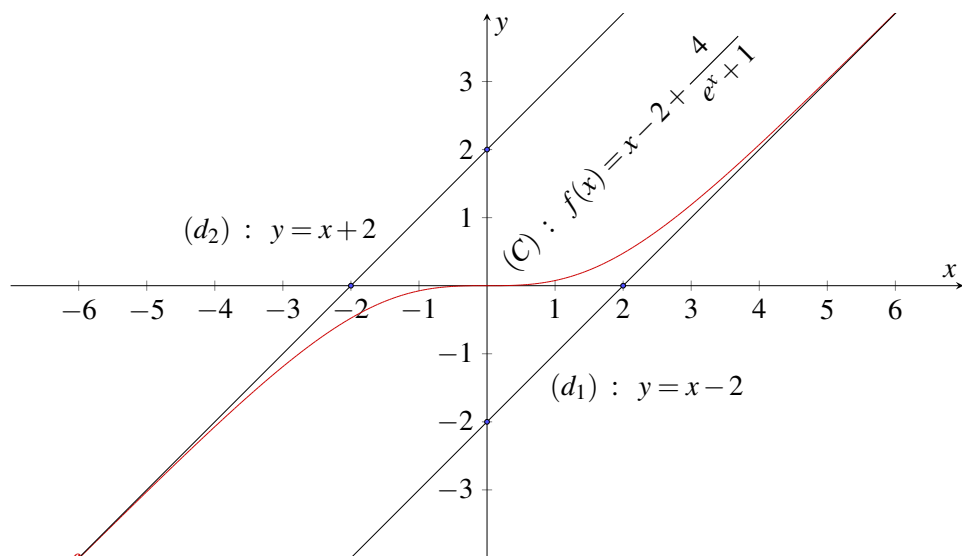
- សង់ក្រាប  $C$  និងអាស៊ីមតូត  $d_1$  និង  $d_2$  របស់វា

▷  $(d_1) : y = x - 2$

$x$	0	2
$y$	-2	0

$x$	0	-2
$y$	2	0

▷  $(d_2) : y = x + 2$



មណ្ឌលប្រឡង -----  
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----  
 ឈ្មោះមេត្តជន: -----  
 ឈ្មោះលេខាមេត្តជន: -----

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ម៉ី ចន្ទមករា **១២**

- I. គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z = \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{3} + i}$  ។
- ក. សរសេរ  $z$  ជាទម្រង់ពិជគណិត។
- ខ. សរសេរ  $z$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញតម្លៃប្រាកដនៃ  $\cos \frac{\pi}{12}$  និង  $\sin \frac{\pi}{12}$  ។
- II. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖
- ក.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$                       ខ.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x}$                       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(1 - \cos 2x) \sin x}{x^4}$
- III. 1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានលក្ខណៈដើម៖  $(E) : y'' - 2y' + 3y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$  ។
2. រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទី 2 មានមេគុណថេរដែលមានចម្លើយ  $f(x) = (x+2)e^{3x}$  ។
- IV. ក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ិកប្រភេទដូចគ្នាចំនួន 20 ដើម ដែលមានពណ៌ខៀវ 14 ដើម និងពណ៌ក្រហម 6 ដើម។ គេយកប៊ិក 5 ដើមព្រមគ្នា ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃត្រីកូការណ៍៖
- ក. យកបានប៊ិកខៀវទាំង 5 ដើម។
- ខ. យកបានប៊ិកខៀវ 3 ដើមនិងក្រហម 2 ដើម។
- គ. យកបានប៊ិកក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច។
- V. គណនាអាំងតេក្រាល៖  $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$  និង  $J = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$
- VI. អនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = \frac{1+x^2+2\ln x}{x^2}$  ។  $(C)$  ជាក្រាបនៃ  $f$  នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  ។
1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$  រួចរកលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់ចុងដែនកំណត់។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប  $(C)$  ។
2. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ  $f'(x)$  ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍  $f(x)$  មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់  $x = 1$  ។ គណនា  $f(1)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f(x)$  ។
3. បង្ហាញថាក្រាប  $(C)$  មានចំណុចបត់មួយ។ គណនាកូអរដោនេចំណុចបត់នោះ។ (គេយក  $\sqrt[3]{e} = 1.4$ )
4. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប  $(C)$  និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា។
5. សង់ក្រាប  $(C)$
- VII. 1. គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល  $P : \frac{1}{4}y^2 - x - y + 3 = 0$  ។ សរសេរសមីការស្តង់ដារប៉ារ៉ាបូល រួចទាញរកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស។
2. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  មួយ គេឲ្យ  $A(2, 3, 0), B(0, -3, 2)$  និង  $C(-2, 3, 4)$  ។
- ក. ចូរសង់ត្រីកោណ  $ABC$
- ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច  $\vec{BA}$  និង  $\vec{BC}$  ។ បង្ហាញថា  $\triangle ABC$  ជាត្រីកោណសមបាត។

## ជំនាញស្រាវជ្រាវ

I. ចំនួនកុំផ្លិច  $z = \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{3} + i}$  ។

ក. សរសេរ  $z$  ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z &= \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{3} + i} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3} + i} \quad ; \text{ព្រោះ } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{\sqrt{3} + i} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1}{4}, \quad (i^2 = -1) \\ &= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$

ខ. សរសេរ  $z$  ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } z &= \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{3} + i} = \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $z = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

+ ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ  $\cos \frac{\pi}{12}$  និង  $\sin \frac{\pi}{12}$

ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ  $z = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

ទម្រង់ពិជគណិត  $z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ:  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

II. គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$  រាង  $\left( \frac{0}{0} \right)$



$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{3})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3-3)}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x}$  រង  $\frac{0}{0}$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

តាង  $t = \frac{\pi}{2} - x$

ដោយ  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  នោះ  $t \rightarrow 0$

$$\text{យើងបាន } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2t}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x} = 2$$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(1 - \cos 2x) \sin x}{x^4}$  រង  $\frac{0}{0}$

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(1 - \cos 2x) \sin x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(2 \sin^2 x) \sin x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)}{x} \cdot \frac{2 \sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

$$= 1 \times 2 \times 1 \quad \text{ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$= 2$$

III. 1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានលក្ខណៈដើម៖

$$(E) : y'' - 2y' + 3y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$$

$$\text{សមីការសម្គាល់ } \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

$$\text{យើងបាន } \Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot 3 = -2 < 0$$

$$\text{ឬស } \lambda_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (\alpha = 1, \beta = \sqrt{2})$$

$$\text{ចម្លើយទូទៅ } y = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x} = (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x) e^x, A, B \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y' = (-A\sqrt{2} \sin \sqrt{2}x + B\sqrt{2} \cos \sqrt{2}x) e^x + e^x (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x)$$

$$= e^x [(B - A\sqrt{2}) \sin \sqrt{2}x + (B\sqrt{2} + A) \cos \sqrt{2}x]$$

$$\text{ដោយ } \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} \sin 0 = 0 \\ \cos 0 = 1 \\ e^0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + 0 = 2 \\ 0 + (B\sqrt{2} + A) = 0 \end{cases} \quad \text{គេបាន} \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{y = (2 \cos \sqrt{2}x - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x) e^x}$$

2. រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទី២ មានគុណថេរ (E) :  $y'' + by' + cy = 0$

$$\text{ដែលមានចម្លើយ } f(x) = (x+2)e^{3x}$$

$$\bullet f'(x) = e^{3x} + 3e^{3x}(x+2)$$

$$= e^{3x}(3x+7)$$

$$\bullet f''(x) = 3e^{3x}(3x+7) + 3e^{3x}$$

$$= e^{3x}(9x+24)$$

យក  $f''(x), f'(x)$  និង  $f(x)$  ជំនួសក្នុងសមីការ (E)

$$\text{យើងបាន } e^{3x}(9x+24) + be^{3x}(3x+7) + c(x+2)e^{3x} = 0$$

$$e^{3x}(9x+24+3bx+7b+cx+2c) = 0$$

$$(9+3b+c)x + (24+7b+2c) = \frac{0}{e^{3x}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9+3b+c = 0 & (1) \\ 24+7b+2c = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\bullet (1) \Rightarrow c = -9-3b \quad (3)$$

$$\bullet \text{យក (3) ជំនួសក្នុង (2)}$$

$$24+7b+18-6b=0$$

$$6+b=0$$

$$b=-6$$

$$\bullet \text{ជំនួសក្នុង (3)}$$

$$\Rightarrow c = -9-3(-6) = 9$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{(E) : y'' - 6y' + 9y = 0}$$

IV. ក្នុងប្រអប់មានប៊ិកសរុប 20 ដើម ក្នុងនោះខៀវ 14 ដើម និងក្រហម 6 ដើម គេចាប់យក 5 ដើមដោយចៃដន្យ

នោះចំនួនករណីអាចគឺ  $n(s) = c(20, 5) = \frac{20!}{(20-5)!5!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15540$  ករណី

ក. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ិកខៀវទាំង 5 ដើម

តាង  $A$  ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ិកខៀវទាំង 5 ដើម

នោះ  $n(A) = C(14, 5) = \frac{14!}{(14-5)!5!} = 2002$  ករណី

យើងបាន  $P(A) = \frac{2002}{15540} = 0.1291$

ដូចនេះ  $P(A) = 0.1291$

ខ. យកបានប៊ិកខៀវ 3 ដើមនិងក្រហម 2 ដើម

តាង  $B$  ជាប្រូបាបយកបានប៊ិកខៀវ 3 ដើមនិងក្រហម 2 ដើម

នោះ  $n(B) = C(14, 3) \times C(6, 2) = \frac{14!}{(14-3)!3!} \times \frac{6!}{(6-2)!2!} = 5460$  ករណី

យើងបាន  $P(B) = \frac{5460}{15540} = 0.3521$

ដូចនេះ  $P(A) = 0.3521$

គ. យកបានប៊ិកក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច

តាង  $C$  ជាប្រូបាបយកបានប៊ិកក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច

$C$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ប្រាស់នៃព្រឹត្តិការណ៍  $A$

យើងបាន  $P(C) = 1 - P(A) = 1 - 0.1291 = 0.8709$

ដូចនេះ  $P(A) = 0.8709$

V. គណនាអាំងតេក្រាល

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$$

$$= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \cos x dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^4 x} \cos x dx$$

$$\text{តាង } u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$\text{យើងបាន } I = \int \frac{1 - u^2}{u^4} du$$

$$= \int \left( \frac{1}{u^4} - \frac{u^2}{u^4} du \right)$$

$$= \frac{-1}{3u^3} - \frac{-1}{u} + C$$

$$= \frac{-1}{3 \sin^3 x} - \frac{-1}{\sin x} + C$$

$$\text{ដូចនេះ } I = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x} + C, (C \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
 J &= \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x} dx \\
 &= \int_1^e \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln x \right) dx \\
 &= \int_1^e \left[ \frac{1}{x} + (\ln x)' \ln x \right] dx \\
 &= \left[ \ln x + \frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e \\
 &= \left( \ln e + \frac{\ln^2 e}{2} \right) - \left( \ln 1 + \frac{\ln^2 1}{2} \right) \\
 &= \left( 1 + \frac{1}{2} \right) - (0 + 0) = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $J = \frac{3}{2}$

VI. អនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = \frac{1 + x^2 + 2 \ln x}{x^2}$

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$

$$\text{អនុគមន៍ } f \text{ មានន័យលុះត្រាតែ } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

ដូចនេះ:  $D = (0, +\infty)$

+ រកលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $0^+$  និង  $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^2 + 2 \ln x}{x^2} = -\infty$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^2 + 2 \ln x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} + 1 + 2 \frac{\ln x}{x^2} \right) \\
 &= 0 + 1 + 2 \cdot 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

+ ទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប ( $C$ )

$$\bullet \text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

ដូចនេះ: បន្ទាត់  $x = 0$  ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ( $C$ )

$$\bullet \text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

ដូចនេះ: បន្ទាត់  $y = 1$  ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ( $C$ )

2. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= \frac{\left(2x + \frac{2}{x}\right) \cdot x^2 - 2x(1 + x^2 + 2\ln x)}{x^4} \\ &= \frac{2x^3 + 2x - 2x - 2x^3 - 4x\ln x}{x^4} \\ &= \frac{-4x\ln x}{x^4} \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $f'(x) = \frac{-4x\ln x}{x^4}$

+ សញ្ញានៃ  $f'(x)$  យកតាម  $(-\ln x)$

$$\bullet (-\ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$$

$$\bullet (-\ln x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < e^0 = 1$$

$$\bullet (-\ln x) < 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > e^0 = 1$$

+ តារាងសញ្ញាដេរីវេ  $f'(x)$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

ត្រង់  $x = 1$  នោះ  $f'(x) = 0$  ហើយប្តូរសញ្ញាពី (+) ទៅ (-)

ដូចនេះ: អនុគមន៍  $f$  មានអតិបរមាត្រង់  $x = 1$

+ គណនា  $f(1)$

$$\bullet f(1) = \frac{1 + 1 + 2\ln 1}{1} = \frac{1 + 1 + 0}{1} = 2$$

+ តារាងអថេរភាព

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		2	1

3. បង្ហាញថាក្រាប ( $C$ ) មានចំណុចបេត់មួយ

$$\bullet \text{ដេរីវេទី១: } f'(x) = \frac{-4\ln x}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ ដេរីវេទី២: } f''(x) &= -4 \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - 3x^2 \ln x}{x^6} \\
 &= -4 \frac{x^2 - 3x^2 \ln x}{x^6} \\
 &= \frac{-4x^2(1 - 3 \ln x)}{x^6} \\
 &= \frac{(3 \ln x - 1)}{x^4}
 \end{aligned}$$

+ សញ្ញានៃ  $f''(x)$  យកតាម  $(3 \ln x - 1)$

$$\bullet 3 \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

$$\bullet 3 \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{e}$$

$$\bullet 3 \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{e}$$

តារាងសិក្សាសញ្ញា  $f''(x)$

$x$	0	$\sqrt[3]{e}$	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	

• ត្រង់  $x = \sqrt[3]{e}$  នោះ  $f''(x) = 0$  ហើយប្តូរសញ្ញាពី  $(-)$  ទៅ  $(+)$

ដូចនេះ: ក្រាប (C) មានចំណុចរបត់មួយត្រង់  $x = \sqrt[3]{e}$

+ រកកូអរដោនេចំណុចរបត់

$$\begin{aligned}
 \bullet f(\sqrt[3]{e}) &= \frac{1 + (\sqrt[3]{e}) + 2 \ln e^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt[3]{e})^2} \\
 &= \frac{1 + (1.4)^2 + 2 \cdot \frac{1}{3}}{(1.4)^2} \\
 &= 1.85
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: ចំណុចរបត់គឺ  $I(1.4, 1.85)$

4. រកកូងរេដានេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេក  
សមីការអាប៉ូស៊ីសចំណុចប្រសព្វគឺ

$$\frac{1 + x^2 + 2 \ln x}{x^2} = 1$$

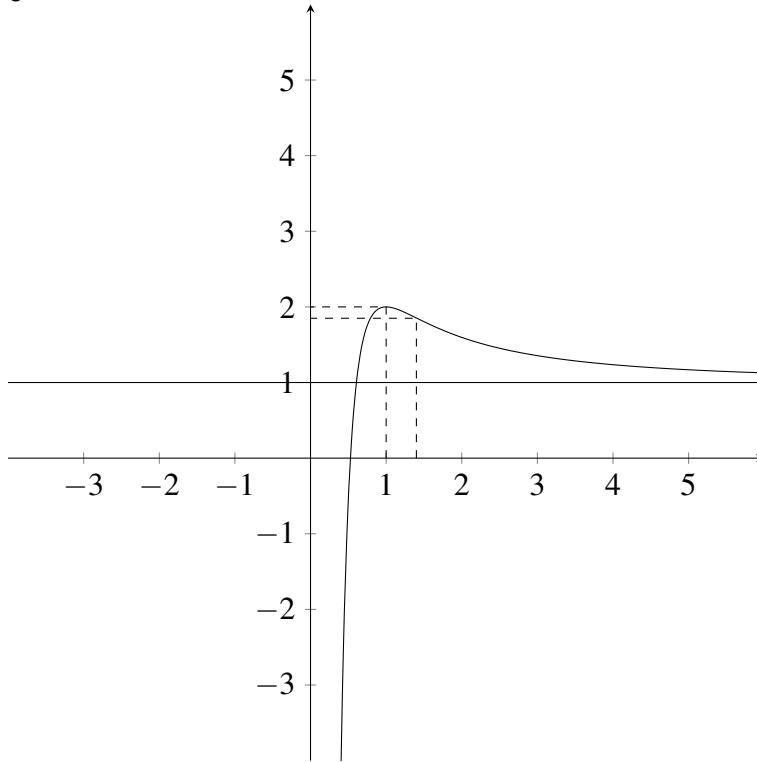
$$1 + x^2 + 2 \ln x = x^2$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0.6$$

ដូចនេះ: ចំណុចរបត់គឺ  $I(0.6, 1)$

5. ក្រាប



VII. 1. ប៉ារ៉ាបូល  $(P) : \frac{1}{4}y^2 - x^2 - y + 3 = 0$

សរសេរសមីការស្តង់ដារ ទាញរកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

$$P : \frac{1}{4}y^2 - x - y + 3 = 0$$

$$y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$$

$$y^2 - 4y = 4x - 12$$

$$y^2 - 4y + 2^2 = 4x - 12 + 2^2$$

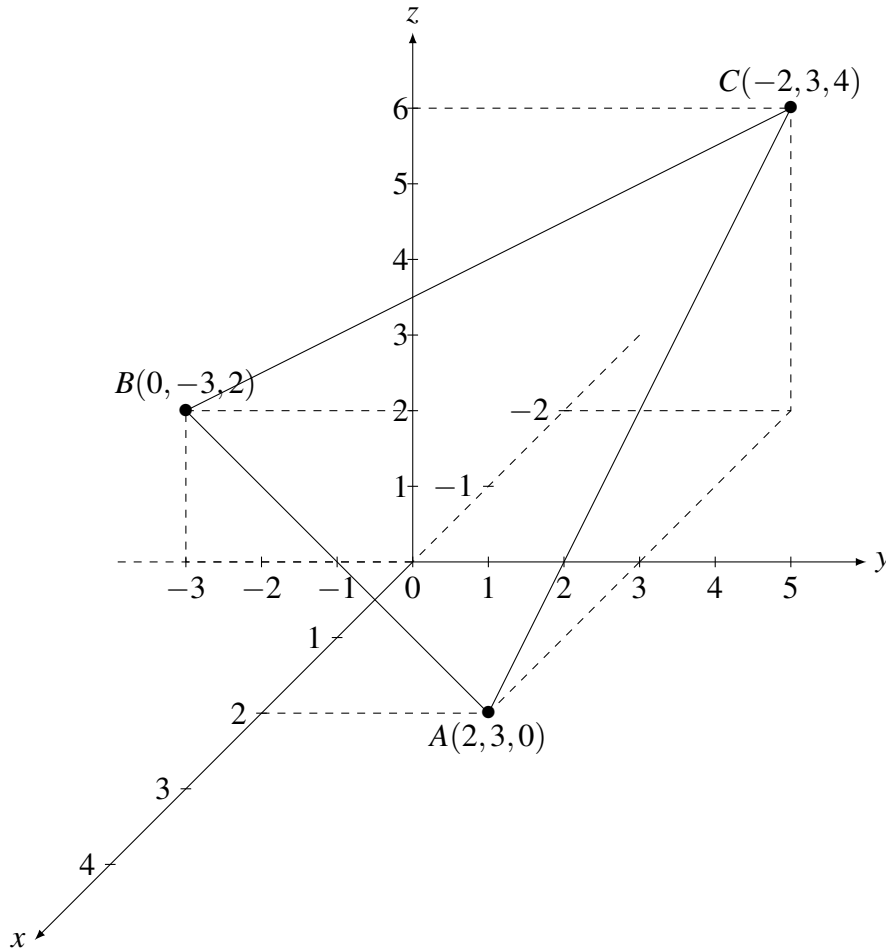
$$(y - 2)^2 = 4x - 8$$

ដូចនេះសមីការស្តង់ដារប៉ារ៉ាបូល  $P : (y - 2)^2 = 4x - 8$  មានអ័ក្សឆ្លុះដេក

យើងទាញបាន  $\begin{cases} k = 2, h = 2 \\ 4p = 4 \Rightarrow p = 1 \end{cases}$

- កំពូល  $V(h, k) \Rightarrow V(2, 2)$
- កំណុំ  $F(h + p, k) \Rightarrow F(3, 2)$
- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស  $x = h - p = 1$

2. ក. សង់ត្រីកោណ  $ABC$



ខ. កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$  ។ បង្ហាញថា  $\triangle ABC$  ជាត្រីកោណសមបាត

$$\overrightarrow{BA} = (2 - 0, 3 - (-3), 0 - 2) = (2, 6, -2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-2 - 0, 3 - (-3), 4 - 2) = (-2, 6, 2)$$

បង្ហាញថា  $\triangle ABC$  ជាត្រីកោណសមបាត

$$\bullet BA = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$\bullet BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$\text{យើងបាន } BA = BC = 2\sqrt{11}$$

ដូចនេះ  $\triangle ABC$  ជាត្រីកោណសមបាតដែលមានបាត  $[AC]$  ។



មណ្ឌលប្រឡង \_\_\_\_\_  
 លេខបន្ទប់: \_\_\_\_\_ លេខតុ \_\_\_\_\_  
 ឈ្មោះមេគ្រូជន: \_\_\_\_\_  
 ឈ្មោះលេខាមេគ្រូជន: \_\_\_\_\_

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ជិត ជី

១៣

- I. គណនាលីមីតខាងក្រោម :
- ក.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2021x - \sin 2023x}{2020x + \sin 2025x}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 20}{\sqrt[3]{3x+2} - 2}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021x} - e^{-2021x}}{\sin 2x}$
- II. ក្នុងចំណោមមួយមានឃ្លីពណ៌មានឃ្លីពណ៌សចំនួន 2 ឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន 4 និងឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន 4 ។ គេចាប់យកឃ្លីចំនួន 3 ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ :
- A ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ក្រហម ។      B យ៉ាងតិចមានឃ្លី 2 មានពណ៌ខៀវ ។  
 C ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសៗគ្នា ។
- III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = 3 + 3i\sqrt{3}$  និង  $z_2 = \sqrt{3} + i$  ។
- ក. គណនា  $z_1 \times z_2$  និង  $\frac{z_1}{z_2}$  ។      ខ. សរសេរ  $z_1 \times z_2$  និង  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។  
 គ. សរសេរ  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$  ជាទម្រង់ពីជគណិត ។
- IV. គណនាអាំងតេក្រាល :  $I = \int_1^2 (2 - x + 3x^2)dx$        $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x)dx$   
 និង  $K = \int_2^3 (3x - 2 + \frac{1}{x-1})dx$  ។
- V. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $E : y'' - y' + 2y = 0$  ។  
 ខ. រកចម្លើយនៃ  $E$  បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានបរិមាណស្មើ 3 ត្រង់  $x = 0$  ។
- VI. 1. គេមានសមីការ  $(E) : 9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$  ។  
 ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប ។  
 ខ. រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច កូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ រួចសង់អេលីបនេះ ។  
 2. គេមានបីចំណុច  $A(-1; 1; 2); B(0; 2; 4)$  និង  $C(-1; 3; 1)$  ។  
 ក. គណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  ។ រួចទាញបញ្ជាក់ថា ចំណុច  $A; B$  និង  $C$  រត់មិនត្រង់គ្នា  
 ខ. ចូររកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ  $ABC$  ។
- VII. គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$  ។ គេតាងដោយ  $C$  ក្រាបរបស់អនុគមន៍នៅក្នុងប្លង់  
 ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ។  
 ក. គណនា  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប  $C$  ។  
 ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ  $f$  ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច  $A$  ជាប្រសព្វរវាងក្រាប  $C$  និងអ័ក្សអរដោនេ រួចបង្ហាញថាចំណុច  $A$  ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប  $C$  ។  
 គ. រកសមីការបន្ទាត់  $T$  ប៉ះនឹងក្រាប  $C$  ត្រង់ចំណុច  $A$  ។  
 ឃ. សង់ក្រាប  $C$  និងបន្ទាត់  $T$  នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ។  
 ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប  $C$  និងអ័ក្ស  $(x'ox)$  លើចន្លោះ  $[0, 1]$  ។

ដំណោះស្រាយ

- I. គណនាលីមីត

$$\text{ក) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2021x - \sin 2023x}{2020x + \sin 2025x} \text{ រក } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2021x - \sin 2023x}{2020x + \sin 2025x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2021x - \sin 2023x}{x}}{\frac{2020x + \sin 2025x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2021 - \frac{\sin 2023x}{x}}{2020 + \frac{\sin 2025x}{x}} \\ &= \frac{2021 - 2023}{2020 + 2025} = \frac{-2}{4045} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2021x - \sin 2023x}{2020x + \sin 2025x} = -\frac{2}{4045}}$$

$$\text{ក) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 20}{\sqrt[3]{3x+2} - 2} \text{ រក } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 20}{\sqrt[3]{3x+2} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x^2 - 4)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}{3x + 2 - 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x+2)(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}{3x - 6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x+2)(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}{3(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x+2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}{3} \\ &= \frac{5(2+2)(\sqrt[3]{(6+2)^2} + 2\sqrt[3]{6+2} + 4)}{3} \\ &= \frac{20(2^2 + 2 \times 2 + 4)}{3} = \frac{20 \times 12}{3} \\ &= 20 \times 4 = 80 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 20}{\sqrt[3]{3x+2} - 2} = 80}$$

$$\text{ក) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021} - e^{-2021x}}{2x} \text{ រក } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021} - e^{-2021x}}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021x} - 1 + 1 - e^{-2021x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{2021x} - 1}{2x} - \frac{e^{-2021x} - 1}{2x} \right) \\ &= \frac{2021}{2} - \frac{-2021}{2} = \frac{4042}{2} = 2021 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021} - e^{-2021x}}{2x} = 2021}$$

II. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ :

បម្រាប់ : ឃ្លីស 2 ឃ្លីក្រហម 4 និងឃ្លីខៀវ 4 នោះឃ្លីសរុប = 10

ក្នុងការចាប់យកឃ្លី 3 ចេញពីថង់ គេបាន

$$\text{ចំនួនករណីអាច } n(S) = C(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120 \text{ ករណី}$$

A ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ក្រហម :

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ដោយ  $n(A) = C(4, 1) = 4$  ករណី

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

ដូចនេះ:  $P(A) = \frac{1}{30}$

B យ៉ាងតិចមានឃ្លី 2 ពណ៌ខៀវ :

តាម  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$

ដោយ  $n(B) = C(4, 2) \times C(6, 1) + C(4, 3) = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} + \frac{4!}{(4-3)! \times 3!}$

$$= \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} + \frac{4}{1} = 10 \text{ ករណី}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

ដូចនេះ:  $P(B) = \frac{1}{12}$

C ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នា :

តាម  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$

ដោយ  $n(C) = C(2, 1) \cdot C(4, 1) \cdot C(4, 1) = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$  ករណី

$$\Rightarrow P(C) = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}$$

ដូចនេះ:  $P(C) = \frac{4}{15}$

III. គេមាន  $z_1 = 3 + 3i\sqrt{3}$  និង  $z_2 = \sqrt{3} + i$

ក គណនា  $z_1 \times z_2$  និង  $\frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_1 \times z_2 &= (3 + 3i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) \\ &= 3\sqrt{3} + 3i + 3i\sqrt{3}^2 - 3\sqrt{3} \\ &= 3i + 9i = 12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} \\ &= \frac{(3 + 3i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 3i + 3i\sqrt{3}^2 + 3\sqrt{3}}{3 - 1} \\ &= \frac{6\sqrt{3} + 6i}{2} = 3\sqrt{3} + 3i \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\begin{cases} z_1 \times z_2 = 12i \\ \frac{z_1}{z_2} = 3\sqrt{3} + 3i \end{cases}$

ក សរសេរ  $z_1 \times z_2$  និង  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេបាន  $z_1 \times z_2 = 12i = 12(0 + i) = 12(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\sqrt{3} + 3i$$

$$= 3(\sqrt{3} + i) = 3 \times 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$$

$$= 6(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = [6(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})]^2$$

$$= 36(\cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6})$$

$$= 36(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

ដូចនេះ: 
$$\begin{cases} z_1 \times z_2 = 12(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \\ \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = 36(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

ក សរសេរ  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$  ជាទម្រង់ពីជគណិត

ដោយ  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 6(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 = [6(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})]^3$$

$$= 6^3(\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6})$$

$$= 216(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$

$$= 216(0 + i)$$

ដូចនេះ:  $0 + 216i$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\bullet I = \int_1^2 (2 - x + 3x^2)dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \left[2(2) - \frac{2^2}{2} + 2^3\right] - \left[2(1) - \frac{1^2}{2} + 1^3\right]$$

$$= (4 - 2 + 8) - (2 + \frac{1}{2})$$

$$= 10 - \frac{5}{2} = \frac{20 - 5}{2} = \frac{15}{2}$$

ដូចនេះ:  $I = \frac{15}{2}$

$$\bullet J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x)dx = \left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{8} \sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{1}{8} \sin \pi\right] - \left[\frac{\sin 0}{2} - \frac{1}{8} \sin 0\right] = (\frac{1}{2} - 0) - (0 - 0) = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ:  $J = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \bullet K &= \int_2^3 \left(3x - 2 + \frac{1}{x-1}\right) dx = \left[ \frac{3x^2}{2} - 2x + \ln|x-1| \right]_2^3 \\
 &= \left( \frac{3 \times 3^2}{2} - 2 \times 3 + \ln|3-1| \right) - \left( \frac{3 \times 2^2}{2} - 2 \times 2 + \ln|2-1| \right) \\
 &= \frac{27}{2} - 6 + \ln 2 - 6 + 4 + \ln 1 = \frac{27-12}{2} + \ln 2 = \frac{15}{2} + \ln 2 \\
 \text{ដូចនេះ: } &\boxed{K = \frac{15}{2} + \ln 2}
 \end{aligned}$$

V. ក ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

យើងមានសមីការ  $E : y'' - y' + 2y = 0$

មានសមីការសម្គាល់ :  $r^2 - r + 2 = 0$

$$(r-2)(r-1) = 0$$

$$\text{គេបាន } r_1 = -1, r_2 = 2$$

ចម្លើយទូទៅនៃ  $E$  គឺ  $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ ,  $(A, B \in \mathbb{R})$

ដូចនេះ:  $\boxed{y = Ae^{-x} + Be^{2x} \text{ ជាចម្លើយទូទៅនៃ } (E)}$ ,  $(A, B \in \mathbb{R})$

ក រកចម្លើយនៃ  $(E)$  :

ដោយដឹងថា អនុគមន៍ចម្លើយមានបរមាស្មើ 3 ត្រង់  $x = 0$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{តែ } y = Ae^{-x} + Be^{2x}$$

$$\Rightarrow y' = -Ae^{-x} + 2Be^{2x}$$

$$\bullet y(0) = 3 \Rightarrow A + B = 3$$

$$\Rightarrow A = 3 - B \quad (1)$$

$$\bullet y'(0) = 0 \Rightarrow -A + 2B = 0 \quad (2)$$

យកសមីការ (1) ជំនួសក្នុង 2 គេបាន

$$-(3 - B) + 2B = 0$$

$$-3 + B + 2B = 0$$

$$3B = 3 \Rightarrow B = \frac{3}{3} = 1$$

$$(1) \Rightarrow A = 3 - 1 = 2$$

ដូចនេះ:  $\boxed{y = 2e^{-x} + e^{2x} \text{ ជាចម្លើយនៃ } E \text{ ។}}$

VI. 1. យើងមានសមីការ  $(E) : 9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$

ក បង្ហាញថាសមីការ ជាសមីការអេលីប

$$\begin{aligned}
 \text{គេបាន} \quad (E) : 9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 &= 0 \\
 (9x^2 + 18x) + (4y^2 - 24y) &= -9 \\
 9(x^2 + 2x + 1) - 9 + 4(y^2 - 6y + 9) - 36 &= -9 \\
 9(x+1)^2 + 4(y-3)^2 &= 36 \\
 \frac{9(x+1)^2}{36} + \frac{4(y-3)^2}{36} &= 1 \\
 \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} &= 1 \text{ មានទម្រង់} \\
 \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} &= 1 \text{ អ័ក្សធំឈរ}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } (E) : \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \text{ ជាសមីការអេលីប ។}$$

ក រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច កូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ រួចសង់អេលីបនេះ តាមសមីការខាងលើ គេបាន

$$h = -1; k = 3$$

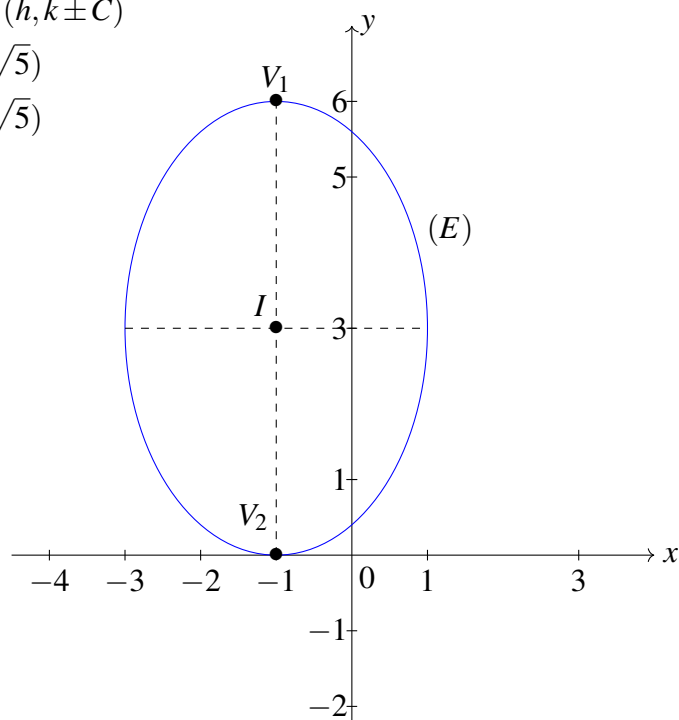
$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

គេបាន

- ប្រវែងអ័ក្សធំ  $2a = 2 \times 3 = 6$  (ឯកតាប្រវែង)
- ប្រវែងអ័ក្សតូច  $2b = 2 \times 2 = 4$  (ឯកតាប្រវែង)
- កូអរដោនេផ្ចិត  $I = (h, k) = (-1, 3)$
- កូអរដោនេកំពូល  $V = (h, k \pm a) \Rightarrow V_1 = (-1, 3 + 3) = (-1, 6)$   
 $\Rightarrow V_2 = (-1, 3 - 3) = (-1, 0)$
- កូអរដោនេកំណុំ  $F = (h, k \pm c)$   
 $\Rightarrow F_1 = (-1, 3 + \sqrt{5})$   
 $\Rightarrow F_2 = (-1, 3 - \sqrt{5})$
- សង់អេលីប



2. គេមានចំណុច  $A(-1;1;2)$   $B(0;2;4)$  និង  $C(-1;3;1)$  :

ក គណនាផលគុណ  $\vec{AB} \times \vec{AC}$

ដោយ  $\vec{AB} = (0+1, 2-1, 4-2) = (1, 1, 2)$

$\vec{AC} = (-1+1, 3-1, 1-2) = (0, 2, -1)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= [2(2) - 1(-1)] \vec{i} - [0(2) - (1)(-1)] \vec{j} + [(0)(1) - (1)(2)] \vec{k} \\ &= 5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\vec{AB} \times \vec{AC} = 5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

+បង្ហាញថា ចំណុច  $A; B$  និង  $C$  រត់មិនត្រង់គ្នា

ដោយ  $\vec{AB} \times \vec{AC} = 5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \neq 0$

ដូចនេះ: ចំណុច  $A; B$  និង  $C$  រត់មិនត្រង់គ្នា។

3. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ  $ABC$

តាមរូបមន្ត  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{30}$  (ឯកតាប្រវែង)

ដូចនេះ:  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{30}$  (ឯកតាប្រវែង) ។

VII. គេមាន  $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  :

ក គណនាលីមីត និងទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប  $C$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 1} = \frac{4(0)}{0+1} = 0$  (ព្រោះ:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ )

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \frac{4}{1+0} = 4$

ដោយ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  នោះ: បន្ទាត់  $x = 0$  ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃ  $C$  ខាង  $-\infty$

ដោយ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$  នោះ: បន្ទាត់  $x = 0$  ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃ  $C$  ខាង  $+\infty$

ក សិក្សាអថេរភាពនៃ  $f$  :

គេបាន  $f'(x) = 4 \left( \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} \right) = 4 \left( \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} \right) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$

ដោយ  $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  នោះ:  $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$  ជានិច្ច  $\forall x \in \mathbb{R}$

នោះគេបាន  $f$  ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ  $\mathbb{R}$  ។

• រកកូអរដោនេនៃ ចំណុច  $A$

ដោយ  $C \cap (y'oy)$  ត្រង់  $A(0, y)$

$$\Rightarrow f(0) = y$$

$$\frac{4e^0}{e^0 + 1} = y \Rightarrow y = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } A(0, 2)$$

- បង្ហាញថា  $A(0, 2)$  ជាផ្ចិតឆ្លងនៃក្រាប  $C$  :

$$\text{បើ } A(a, b) \text{ ជាផ្ចិតឆ្លងនោះ } f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$\text{គេបាន } f(2a - x) + f(x) = \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1} + \frac{4e^x}{e^x + 1} = \frac{4}{1 + e^x} + \frac{4e^x}{1 + e^x} = 4 = 2b \text{ (ពិត)}$$

$$\text{ដូចនេះ: } A(0, 2) \text{ ជាផ្ចិតឆ្លងនៃក្រាប } C \text{ ។}$$

ក រកសមីការបន្ទាត់  $T$  ប៉ះនឹង  $C$  ត្រង់ចំណុច  $A$

សមីការបន្ទាត់  $T$  ប៉ះនឹង  $C$  ត្រង់ចំណុច  $A$  គឺ

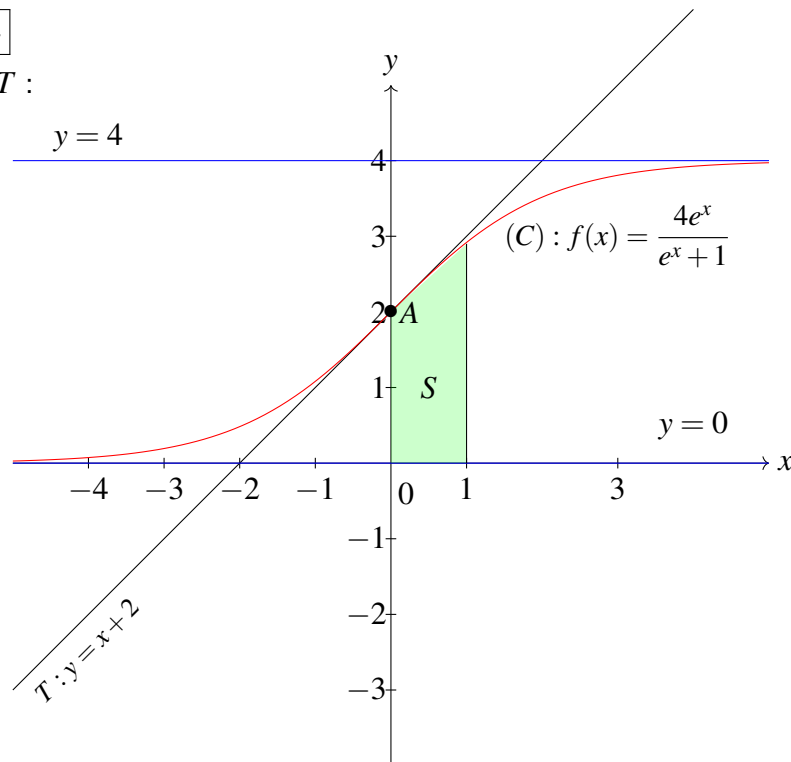
$$T : y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$$

$$= \left( \frac{4x^0}{(e^0 + 1)^2} \right)(x - 0) + \frac{4e^0}{e^0 + 1}$$

$$= x + 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } T : y = x + 2$$

ក សង់ក្រាប  $C$  និង បន្ទាត់  $T$  :



ក គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប  $C$  និងអ័ក្ស  $(x'ox)$  លើចន្លោះ  $[0, 1]$

តាង  $S$  ជាផ្ទៃក្រឡាខាងលើ

$$\text{តាមក្រាបគេបាន } S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{4e^x}{e^x + 1} dx$$


$$= 4 [\ln |e^x + 1|]_0^1 = 4(\ln(e + 1) - \ln(e^0 + 1))$$

$$= 4 \ln \frac{e + 1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } S = 4 \ln \frac{e + 1}{2} \text{ (ឯកតាផ្ទៃ) ។}$$



មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះមេគ្រូជនៈ.....  
 ឈ្មោះលេខាមេគ្រូជនៈ.....

វិញ្ញាសារៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបចំដោយ: ផល ផាតុ 

- I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច  $Z_1 = \sqrt{3} + i$ ,  $Z_2 = 1 + i$  និង  $Z_3 = 1 + i\sqrt{3}$  ។
- រកម៉ូឌុល និងអាកុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច  $Z_1, Z_2$  និង  $Z_3$  ។
  - សរសេរចំនួនកុំផ្លិច  $W = \frac{Z_3}{Z_2^2}$  ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចគណនាឫសការេនៃ  $W$  ។
- II. គណនាលីមីត
- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+3}}$
  - $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$
  - $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - 1)(1 - \cos 2x)}{\sin^3 x}$
  - $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln \frac{2x-1}{2x})$
- III. គេមានអនុគមន៍  $f$  មួយកំណត់ដោយ  $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$  ចំពោះគ្រប់  $x \neq 0$  ។
- រកចំនួនពិត  $A$  និង  $B$  ដើម្បីឱ្យ  $f(x) = A + \frac{B}{1-e^x}$
  - គណនា  $I(x) = \int \frac{e^x}{1-e^x} dx$  រួចទាញរក  $J(x) = \int \frac{dx}{1-e^x}$
- IV. នៅក្នុងប្រអប់មួយមានបិទក្រហមចំនួន 7 ដើម និងបិទខៀវចំនួន 5 ដើម។  
 គេយកបិទ 4 ដើមព្រមគ្នាចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ :
- “យកបានបិទក្រហមទាំង 4 ដើម”
  - “យកបានបិទខៀវយ៉ាងតិច 1 ដើម”
  - “យកបានបិទក្រហមចំនួន 3 ដើមគត់”
- V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E) : y'' - 2y' + 5y = nx^2 + px + q$  ។
- ដោះស្រាយសមីការ  $(F) : y'' - 2y' + 5y = 0$  ។ រកចម្លើយនៃ  $(F)$  បើ  $y(0) = 2$  និង  $y'(0) = 6$  ។
  - រកចំនួនពិត  $n, p$ , និង  $q$  ដោយដឹងថា  $y = 2x^2 + 3x + 1$  ជាចម្លើយនៃ  $(E)$  ។ រកចម្លើយទូទៅ  $y$  នៃសមីការ  $(E)$  ។
- VI. ក្នុងតម្រុយអរតូណូម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  មួយគេឱ្យចំណុច  $A(1, -2, 0), B(1, 0, 4)$  និង  $C(0, 3, 3)$  ។
- ចូរសង់ត្រីកោណ  $ABC$  ក្នុងតម្រុយ  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ។
  - រកសមីការប្លង់  $(\alpha)$  ជាប្លង់មេដ្យូទ័រនៃ  $[AB]$  ។
  - រកសមីការនៃស្វ៊ែ  $S$  ដែលមានអង្កត់ធ្នឹត  $[AB]$  ។
  - គណនា  $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$  ។ ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ  $ABC$  ។
  - គណនា  $P = (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO}$  ។ ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត  $OABC$  ។ រួចទាញរកចម្ងាយពី  $O$  ទៅប្លង់  $ABC$  ។
- VII. អនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $y = f(x) = (x+2)e^{-x}$  ហើយមានក្រាប  $C$  ។
- គណនា  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប  $C$  ។
  - បង្ហាញថាអនុគមន៍  $f$  មានតម្លៃអតិបរមាមួយត្រង់  $x = -1$  ។ គណនា  $f(-1)$  រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។
  - បង្ហាញថាក្រាប  $C$  មានចំណុចរបត់មួយ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់ ។
  - គណនា  $f(-2)$  និង  $f(2)$  ដោយយក  $e^{-2} = 0.13$  រួចសង់ក្រាប  $C$  ។
  - គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកបង្កដោយក្រាប  $C$  អ័ក្ស  $(x'ox)$  អ័ក្ស  $(y'oy)$  និងបន្ទាត់ឈរ  $x = 2$  ។
  - ដោយប្រើក្រាប  $C$  ចូរកំណត់តម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត  $m$  ដើម្បីឱ្យសមីការ  $me^x - x - 2 = 0$  មានឫសពីរផ្ទៀងផ្ទាត់  $x_1 < 0 < x_2$

## ជំនេរស្រាវជ្រាវ

I. គេមាន  $Z_1 = \sqrt{3} + i$ ,  $Z_2 = 1 + i$  និង  $Z_3 = 1 + i\sqrt{3}$

1. រកម៉ូឌុល និងអាកុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច  $Z_1, Z_2$  និង  $Z_3$

$$\bullet Z_1 = \sqrt{3} + i$$

$$\begin{aligned} &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } |Z_1| = 2, \arg(Z_1) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet Z_2 = 1 + i$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } |Z_2| = \sqrt{2}, \arg(Z_2) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet Z_3 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} &= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } |(Z_3)| = 2, \arg(Z_3) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច  $W = \frac{Z_3}{Z_2^2}$  ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} \bullet W &= \frac{Z_3}{Z_2^2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{(1 + i)^2} \\ &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2i} \\ &= \frac{i(1 + i\sqrt{3})}{2i^2} \\ &= \frac{i - \sqrt{3}}{-2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

$$i^2 = -1$$

$$\text{ដូចនេះ: } W = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\begin{aligned} \bullet W &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ &= \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \end{aligned}$$

$$-\sin(\alpha) = \sin(-\alpha) = \sin(2\pi - \alpha)$$

ដូចនេះ: 
$$W = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$$

• គណនាបូសកាអែន  $W$

គេមាន  $W = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$

គេបានបូសកាអែន  $W$  គឺ  $W_k = \cos\left(\frac{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

ចំពោះ  $k = 0$  គេបាន  $W_0 = \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

ចំពោះ  $k = 1$  គេបាន  $W_1 = \cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)$

## II. គណនាលីមីត

ក.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+3}}$  រាង  $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1-2x-1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+3})}{(x+3-2x-3)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x)(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+3})}{(-x)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

ដូចនេះ:  $A = \sqrt{3}$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$  រាង  $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ដូចនេះ:  $B = 1$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - 1)(1 - \cos 2x)}{\sin^3 x}$  រាង  $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \times \frac{2 \sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= 1 \times 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$

ដូចនេះ:  $C = 2$

ឃ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \ln \frac{2x-1}{2x}\right)$  រាង  $\frac{\infty}{\infty}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \ln \frac{2x(1 - \frac{1}{2x})}{2x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \ln \left( 1 - \frac{1}{2x} \right) \right) \\
 &= 2 - \ln 1 = 2
 \end{aligned}$$

$\ln 1 = 0$

ដូចនេះ:  $D = 2$

III. អនុគមន៍  $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}$  ចំពោះគ្រប់  $x \neq 0$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1. រកចំនួនពិត  $A$  និង  $B$

$$\begin{aligned}
 \text{ដោយ } f(x) &= \frac{e^x}{1 - e^x} \\
 &= \frac{e^x - 1 + 1}{1 - e^x} \\
 &= -\frac{1 - e^x}{1 - e^x} + \frac{1}{1 - e^x} \\
 &= -1 + \frac{1}{1 - e^x}
 \end{aligned}$$

តែ  $f(x) = A + \frac{B}{1 - e^x}$

គេបាន  $A = -1$ ,  $B = 1$

ដូចនេះ:  $A = -1$ ,  $B = 1$

2. គណនា  $I(x) = \int \frac{e^x}{1 - e^x} dx$

$$\begin{aligned}
 \text{ដោយ } I(x) &= \int \frac{e^x}{1 - e^x} dx \\
 &= - \int \frac{(1 - e^x)'}{1 - e^x} dx \\
 &= - \ln |1 - e^x| + c, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $I(x) = - \ln |1 - e^x| + c, c \in \mathbb{R}$

ទាញរក  $J(x) = \int \frac{dx}{1 - e^x}$

$$\begin{aligned}
 \text{ដោយ } f(x) &= \frac{e^x}{1 - e^x} = -1 + \frac{1}{1 - e^x} \\
 1 + \frac{e^x}{1 - e^x} &= \frac{1}{1 - e^x} \\
 J(x) &= \int \frac{dx}{1 - e^x} \\
 &= \int \left( 1 + \frac{e^x}{1 - e^x} \right) dx
 \end{aligned}$$

$J(x) = x - \ln |1 - e^x| + c, c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ:  $J(x) = x - \ln |1 - e^x| + c, c \in \mathbb{R}$

IV. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ដោយបិទសរុបមាន 12 ដើម គេចាប់យក 4 ដើមដោយចៃដន្យ

គេបានចំនួនករណីអាច  $n(S) = C(12, 4) = \frac{12!}{(12-4)!4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$

ក. “យកបានបិទក្រហមទាំង 4 ដើម”

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(A) = C(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{35}{495} = \frac{7}{99}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{7}{99}}$$

ខ. “យកបិចខៀវយ៉ាងតិច 1 ដើម”

ខៀវ	0	1	2	3	4
ក្រហម	4	3	2	1	0

$$\text{គេបាន } P(A) + P(B) = 1$$

$$P(B) = 1 - P(A)$$

$$P(B) = 1 - \frac{7}{99}$$

$$P(B) = \frac{92}{99}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{92}{99}}$$

គ. “យកបានបិចក្រហមចំនួន 3 ដើមគត់”

C ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានបិចក្រហម 3 ដើម និងបិចខៀវ

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(C) = C(7,3) \times C(5,1) = \frac{7!}{4!3!} \times 5 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times 5 = 35 \times 5 = 175$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{175}{495} = \frac{35}{99}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(C) = \frac{35}{99}}$$

V. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ( $E$ ) :  $y'' - 2y' + 5y = nx^2 + px + q$

1. ដោះស្រាយសមីការ ( $F$ )

$$(F) : y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$\text{សមីការសម្គាល់: } \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta' = (b')^2 - ac = (-1)^2 - 1 \times 5 = -4$$

$$\lambda = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{-4}}{1} = 1 \pm 2i = \alpha \pm \beta i$$

$$\Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$$

$$\text{ចម្លើយទូទៅមានទម្រង់ } (F) : y = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$$

$$\text{ដូចនេះ: ចម្លើយទូទៅ } \boxed{(F) : y = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x, (A, B \in \mathbb{R})}$$

• រកចម្លើយនៃ ( $F$ )

$$\text{ដោយ } y(0) = 2, y'(0) = 6$$

$$(F) : y = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x$$

$$\Rightarrow y' = (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)e^x + (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x$$

$$\text{នៅ: } y(0) = (A \cos 0 + B \sin 0)e^0$$

$$2 = A + 0$$

$$A = 2$$

$$y'(0) = (-2A \sin 0 + 2B \cos 0)e^0 + (A \cos 0 + B \sin 0)e^0$$

$$6 = 2B + A$$

$$6 = 2B + 2$$

$$B = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: ចម្លើយទូទៅ } (F) : y = (2 \cos 2x + 2 \sin 2x)e^x$$

2. រកចំនួនពិត  $n, p$  និង  $q$

$$\text{ដោយ } y = 2x^2 + 3x + 1 \text{ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)}$$

$$\implies y' = 4x + 3$$

$$\implies y'' = 4$$

$$\text{គេបានសមីការ (E) : } y'' - 2y' + 5y = nx^2 + px + q$$

$$4 - 2(4x + 3) + 5(2x^2 + 3x + 1) = nx^2 + px + q$$

$$4 - 8x - 6 + 10x^2 + 15x + 5 = nx^2 + px + q$$

$$10x^2 + 7x + 3 = nx^2 + px + q$$

$$\text{ដូចនេះ: } n = 10, p = 7, q = 3$$

• រកចម្លើយនៃសមីការ (E)

$$\text{ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ } y = y_c + y_p$$

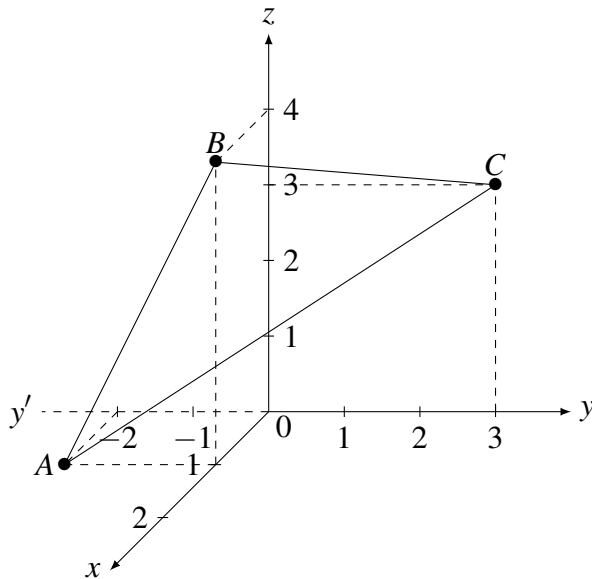
$$\text{ដោយ } y_c = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x$$

$$y_p = 2x^2 + 3x + 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } y = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x + 2x^2 + 3x + 1, (A, B) \in \mathbb{R}$$

VI. គេឱ្យចំណុច  $A(1, -2, 0), B(1, 0, 4)$  និង  $C(0, 3, 3)$

1. សង់ត្រីកោណ  $ABC$  ក្នុងតម្រុយ  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



## 2. រកសមីការប្លង់ ( $\alpha$ )

សមីការប្លង់ ( $\alpha$ ) :  $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

ដោយប្លង់ ( $\alpha$ ) ប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់  $[AB] \Rightarrow (\alpha) \perp AB$  ត្រង់ចំណុចកណ្តាលនៃ  $[AB]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0 \\ y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1 \\ z_0 = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2 \end{cases}$$

ហើយ  $(\alpha) \perp \overrightarrow{AB}$  ដែល  $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 4) - (-1, -2, 0) = (2, 2, 4)$

គេបានប្លង់ ( $\alpha$ ) :  $0(x - 1) + 2(y + 1) + 4(z - 2) = 0$

$$0 + 2y + 2 + 4z - 8 = 0$$

$$2y + 4z - 6 = 0$$

ដូចនេះ  $(\alpha) : 2y + 4z - 6 = 0$

## 3. រកសមីការនៃស្វ៊ី $S$

សមីការស្វ៊ី ( $S$ ) :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

ដោយស្វ៊ី ( $S$ ) មានអង្កត់ផ្ចិត  $[AB]$

គេបាន  $I(1, -1, 2)$  ជាផ្ចិតនៅកណ្តាលនៃ  $[AB]$

$$\text{ហើយកាំ } r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1 - (-1))^2 + (-1 - (-2))^2 + (2 - 0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}$$

$$\text{គេបាន } (S) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 5$$

ដូចនេះ  $(S) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 5$

## 4. គណនា $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2, 4), \overrightarrow{AC} = (4, 3, 3) - (-1, -2, 0) = (5, 5, 3)$$

$$\text{គេបាន } \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (6 - 20)\vec{i} - (0 + 4)\vec{j} + (0 + 2)\vec{k}$$

ដូចនេះ:  $\vec{n} = -14\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

- ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ  $ABC$

$$\begin{aligned}\text{តាមរូបមន្ត } S_{ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-14)^2 + (-4)^2 + 2^2} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}\end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $S_{ABC} = 3\sqrt{6}$  ឯកតាផ្ទៃ

5. គណនា  $P = (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO}$

ដោយ  $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-14, -4, 2)$  ,  $\vec{OA} = -(1, -2, 0) = (-1, 2, 0)$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } P &= (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO} \\ &= -14(-1) - 4(2) + 2(0) \\ &= 14 - 8\end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $P = 6$

- ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត  $OABC$

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{OABC} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO}| = \frac{1}{6} \times 6 = 1$$

ដូចនេះ: មាឌនៃតេត្រាអែត  $V_{OABC} = 1$  ឯកតាមាឌ

- រួចទាញរកចម្ងាយពី  $O$  ទៅប្លង់  $ABC$

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{OABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times d(O, ABC)$$

$$\begin{aligned}d(O, ABC) &= 3 \frac{V_{OABC}}{S_{ABC}} \\ d &= \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $d(O, ABC) = \frac{\sqrt{6}}{6}$  ឯកតាប្រវែង

VII. អនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $y = f(x) = (x+2)e^{-x}$  ហើយមានក្រាប  $C$  ។

1. គណនា  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^{-x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right) = 0$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប  $C$

ដោយ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

ដូចនេះ:  $y = 0$  ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប  $C$  ខាង  $+\infty$

2. បង្ហាញថាអនុគមន៍  $f$  មានតម្លៃអតិបរមាមួយត្រង់  $x = -1$

ដោយ  $f(x) = (x+2)e^{-x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$



$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(x) &= (x+2)'e^{-x} + (x+2)(e^{-x})' \\ &= e^{-x} - (x+2)e^{-x} \\ &= e^{-x}(-x-1)\end{aligned}$$

ដោយ  $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x)$  មានសញ្ញាតាម  $(-x-1)$

$$\text{បើ } f'(x) = 0 \iff -x-1 = 0 \implies x = -1$$

• តារាងសញ្ញានៃ  $f'(x)$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

ត្រង់  $x = -1 \implies f'(x) = 0$  ហើយប្តូរសញ្ញាពី (+) ទៅ (-) ។

ដូចនេះ អនុគមន៍  $f$  មានតម្លៃអតិបរមាមួយត្រង់  $x = -1$

• គណនា  $f(-1)$

$$\begin{aligned}\text{ដោយ } f(x) &= (x+2)e^{-x} \\ \implies f(-1) &= (-1+2)e^1 = 2.71\end{aligned}$$

• រូបសង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f''(x)$	$-\infty$	2.71	0

3. បង្ហាញថាក្រាប  $C$  មានចំណុចបត់មួយ

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{-x}(-x-1) \\ f''(x) &= (e^{-x})'(-x-1) + e^{-x}(-x-1)' \\ &= -e^{-x}(-x-1) - e^{-x} \\ &= e^{-x}(x+1-1) \\ &= xe^{-x}\end{aligned}$$

ដោយ  $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{បើ } f''(x) = 0 \iff x = 0$$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

ត្រង់  $x = 0 \implies f''(x) = 0$  ហើយប្តូរសញ្ញាពី (-) ទៅ (+) ។

ដូចនេះ ក្រាប  $C$  មានចំណុចបេត់មួយត្រង់  $x = 0$

- រកកូអរដោនេនៃចំណុចបេត់

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

$$\Rightarrow f(0) = (0+2)e^0 = 2$$

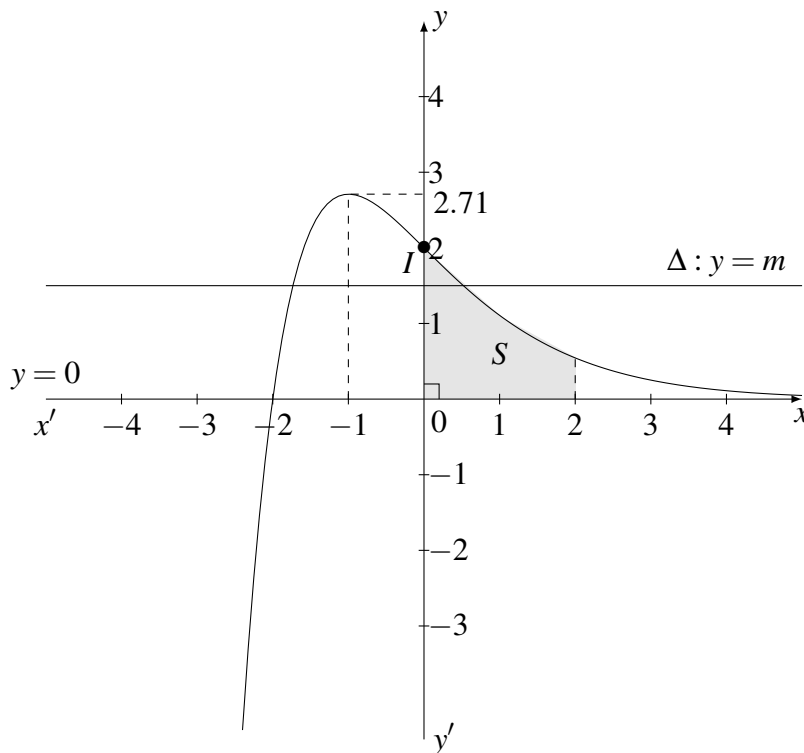
4. គណនា  $f(-2)$  និង  $f(2)$

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

$$\Rightarrow f(-2) = (-2+2)e^2 = 0$$

$$\Rightarrow f(2) = (2+2)e^{-2} = 4 \times 0.13 = 0.52$$

- រូបសង់ក្រាប  $C$



5. គណនាផ្ទៃក្រឡា  $S$

ដោយផ្ទៃក្រឡា  $S$  ខណ្ឌដោយក្រាប  $C$  អ័ក្ស  $(x'ox)$  អ័ក្ស  $(y'oy)$  និងបន្ទាត់ឈរ  $x = 2$

$$\text{គេបាន } S = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x+2)e^{-x}dx$$

- រក  $I = \int (x+2)e^{-x}dx$

$$\text{តាង } u = x+2 \Rightarrow du = dx, \quad dv = e^x \Rightarrow v = \int e^x dx = -e^x$$

$$\text{គេបាន } I = -e^{-x}(x+2) + \int e^{-x}dx$$

$$= -e^{-x}(x+2) - e^{-x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$= -e^{-x}(x+3) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\text{យើងបាន } S &= [-e^{-x}(x+3)]_0^2 \\ &= -e^{-2}(2+3) + e^0(0+3) \\ &= -0.13(5) + 3 \\ &= 2.35\end{aligned}$$

ដូចនេះ: ផ្ទៃក្រឡា  $S = 2.35$  ឯកតាផ្ទៃក្រឡា

6. កំណត់តម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ  $m$  ដោយប្រើក្រាប  $C$

$$\text{សមីការ } me^x - x - 2 = 0$$

$$me^x = x + 2$$

$$m = \frac{x+2}{e^x} m = (x+2)e^{-x}$$

សមីការនេះជាសមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប  $C$  និង បន្ទាត់ដេក  $\Delta: y = m$

ដើម្បីឱ្យសមីការ  $me^x - x - 2 = 0$  មានឫសពីរផ្ទៀងផ្ទាត់  $x_1 < 0 < x_2$

លុះត្រាតែ  $m \in (0, 2)$

ដូចនេះ:  $m \in (0, 2)$  សមីការមានឫសពីរផ្ទៀងផ្ទាត់  $x_1 < 0 < x_2$



**မណ្ឌលប្រឡង**-----

**လေ့စပ်လွှဲ: \_\_\_\_\_ လေ့စပ် \_\_\_\_\_**

**ឈ្មោះបេក្ខជន:** \_\_\_\_\_

**ហត្ថលេខាបេក្ខជន:**\_\_\_\_\_

## វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

**វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)**

**ឆ្នាំ: ១៩០៧**

ពិន្ទុ : ១២៥

ស្របស្រូវដោយ: **ថា មករា**

၁၆

- I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច  $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  និង  $y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ។
1. គណនា  $A = x - y^2$  និង  $B = x^2 + x + 1$  ។
2. សរសេរ  $x$  និង  $y$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ បង្ហាញថា  $C = x^{2019} + y^{2019}$  ជាចំនួនពិត ។
- II. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖
- $$A = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^3 - 3\sqrt{3}}{x^2 - 3} \qquad B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x+3} - e^3}{2x} \qquad C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$
- III. ចតុកោណកែងមួយមានបរិមាត្រ 400m ។ រកប្រវែងជ្រុងដើម្បីឱ្យចតុកោណកែងនេះមានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត។
- IV. នៅក្នុងប្រអប់មានបីចំនួន១០ដើម ដែលក្នុងនោះមានបីចក្រហមចំនួន៤ដើម និងបីចខៀវចំនួន៦ដើម។ គេចាប់យកបីច៣ដើមក្នុងពេលតែមួយចេញពីប្រអប់នោះដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍
- A .“ចាប់បានបីចខៀវទាំងបីដើម” ។
- B .“ចាប់បានបីចក្រហមមួយដើម និងខៀវពីរដើម” ។
- C .“ចាប់បានបីចខៀវតែមួយដើមគត់” ។
- V. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E) : y'' + 6y' + 8y = 8x + 10$  ។
1. ដោះស្រាយសមីការ  $(E_1) : y'' + 6y' + 8y = 0$ ។ កំណត់ចម្លើយពិសេសមួយនៃ  $(E_1)$  ដែល  $y(0) = -1$  និង  $y'(0) = 4$  ។
2. កំណត់ចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  ដើម្បីឱ្យ  $g(x) = ax + b$  ជាចម្លើយនៃ  $(E)$  ។
- VI. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់នៃលំហមានទិសដៅវិជ្ជមាន  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេឱ្យចំណុច  $A(1,0,0), B(0,1,0)$  និង  $C(0,0,1)$ ។
1. បង្ហាញថាត្រីកោណ  $ABC$  ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។
2. គណនាផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ  $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$  រួចសរសេរសមីការប្លង់  $ABC$  ។
3. រកចម្ងាយពីចំណុច  $D(0,1,1)$  ទៅប្លង់  $ABC$  ។
4. រកសមីការស្វ៊ែ  $S$  ដែលមានអង្កត់ធ្នឹត  $AC$  ។
5. រកសមីការប្លង់  $P$  ប៉ះស្វ៊ែ  $S$  ត្រង់  $C$  ។
- VII.  $f$  ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ  $x > 0$  ដោយ  $f(x) = 1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$  ហើយមានក្រាប  $C$  ។
1. គណនា  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាប  $C$  ។
2. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  និងសិក្សាសញ្ញានៃ  $f'(x)$  ។ សង់តារាងអបិរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  ។
3. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ  $A$  រវាងក្រាប  $C$  និងបន្ទាត់  $D : y = 1$ ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់  $L$  ដែលប៉ះនឹងក្រាប  $C$  ត្រង់ចំណុច  $A$  ។
4. គណនា  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ។ សង់បន្ទាត់  $L$  អាស៊ីមតូត និងក្រាប  $C$  នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។ (គេឱ្យ  $e = 2.7$ ,  $\frac{2}{e} = 0.7, \ln 2 = 0.7$ )

## ជំនួយការស្រាវជ្រាវ

I. 1. គណនា  $A = x - y^2$  និង  $B = x^2 + x + 1$

គេមាន  $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  និង  $y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } A &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left[\frac{1}{4} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \frac{3}{4}\right] \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ \text{ដូចនេះ } A &= 0 \text{ ។} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ហើយ } B &= x^2 + x + 1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 \\ &= \frac{1}{4} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $B = 0$  ។

2. សរសេរ  $x$  និង  $y$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេបាន  $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$

ហើយ  $y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$

ដូចនេះ  $x = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$  និង  $y = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

+ បង្ហាញថា  $C = x^{2019} + y^{2019}$  ជាចំនួនពិត

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } C &= \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)^{2019} + \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)^{2019} \\ &= \cos \frac{7\pi \times 2019}{6} + i \sin \frac{7\pi \times 2019}{6} + \cos \frac{5\pi \times 2019}{6} + i \sin \frac{5\pi \times 2019}{6} \\ &= \cos \frac{3365\pi}{6} + i \sin \frac{3365\pi}{6} + \cos \frac{4711\pi}{6} + i \sin \frac{4711\pi}{6} \\ &= \cos \left(1682\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(1682\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \cos \left(2354\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + i \sin \left(2354\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 + i + 0 - i = 0 \quad (\text{ពិត}) \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $C = x^{2019} + y^{2019}$  ជាចំនួនពិត ។

II. គណនាលីមីត

$A = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^3 - 3\sqrt{3}}{x^2 - 3}$  រាង  $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } A &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^3 - (\sqrt{3})^3}{x^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 3}{x + \sqrt{3}} \\ &= \frac{3 + 3 + 3}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  ។

$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x+3} - e^3}{2x}$  រាង  $\frac{0}{0}$

$$\text{គេបាន } C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^3(e^{5x} - 1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^3(e^{5x} - 1)}{5x} \times \frac{5}{2} = \frac{5e^3}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } B = \frac{5e^3}{2} \text{ ។}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan x \cdot \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left( \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ \frac{\tan x}{x} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \times 1 \times 1^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } C = \frac{1}{2} \text{ ។}$$

III. រកប្រវែងជ្រុងដើម្បីឱ្យចតុកោណកែងនេះមានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត  
តាង  $x$  ជាទទឹង

$y$  ជាបណ្តោយ  
លក្ខខណ្ឌ  $0 < x \leq y < 400$

-បរិមាត្រចតុកោណកែង

$$P = 2(x + y)$$

$$x + y = \frac{P}{2} = \frac{400}{2} = 200$$

$$y = 200 - x \quad (1)$$

-ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែង

$$S = xy \quad (2)$$

យក(1) ជំនួស(2) គេបាន

$$S(x) = x(200 - x) = 200x - x^2$$

$$\Rightarrow S'(x) = 200 - 2x$$

$$\text{-បើ } S'(x) = 0 \Leftrightarrow 200 - 2x = 0 \Rightarrow x = 100$$

-តារាងអបិរភាព

$x$	$-\infty$	100	$+\infty$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	$\swarrow \quad \quad \quad S(100) \quad \quad \quad \searrow$		

តាមតារាងអបិរភាពខាងលើ គេបានផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងធំបំផុត

-បើ  $x = 100$  តាម(1) គេបាន

$$y = 200 - 100 = 100$$

ដូចនេះ ប្រវែងជ្រុងចតុកោណកែងគឺ  $x = y = 100\text{m}$  ។

IV. ដោយក្នុងប្រអប់មានបីចំនួន១០ដើម ហើយគេចាប់យកបីចំនួនដើមពីក្នុងប្រអប់ដោយចៃដន្យក្នុងពេលតែមួយ នោះចំនួនករណីអាចគឺ

$$n(S) = C(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 1 \times 2 \times 3} = \frac{720}{6} = 120 \text{ ករណី}$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A .“ចាប់បានបិទខ្សែទាំងបីដើម”

ដោយបិទខ្សែក្នុងប្រអប់ទាំងអស់មាន៦ដើម នោះចំនួនករណីស្របគឺ

$$n(A) = C(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20 \text{ ករណី}$$

$$\text{តាម } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានបិទខ្សែទាំងបីដើមគឺ  $P(A) = \frac{1}{6}$  ។

B .“ចាប់បានបិទក្រហមមួយដើម និងខ្សែព័រដើម”

ដោយក្នុងប្រអប់មានបិទខ្សែទាំងអស់៦ដើម និងបិទក្រហម៤ដើម នោះចំនួនករណីស្របគឺ

$$\begin{aligned} n(B) &= C(6, 2) \times C(4, 1) = \frac{6!}{(6-2)!2!} \times \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} \times \frac{4 \times 3!}{3!} \\ &= \frac{30}{2} \times 4 = 60 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

$$\text{តាម } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានបិទក្រហមមួយដើម និងខ្សែព័រដើមគឺ  $P(B) = \frac{1}{2}$  ។

C .“ចាប់បានបិទខ្សែតែមួយដើមគត់”

គេបាន ចំនួនករណីស្រប

$$\begin{aligned} n(C) &= C(6, 1) \times C(4, 2) = \frac{6!}{(6-1)!1!} \times \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{6 \times 5!}{5!} \times \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} \\ &= 6 \times \frac{4 \times 3}{2} = 36 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

$$\text{តាម } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានបិទខ្សែតែមួយដើមគត់គឺ  $P(C) = \frac{3}{10}$  ។

V. គេមាន  $(E) : y'' + 6y' + 8y = 8x + 10$

1. ដោះស្រាយសមីការ  $(E_1) : y'' + 6y' + 8y = 0$

$$\text{សមីការសម្គាល់ } \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$$

គេបាន ចម្លើយទូទៅនៃ  $(E_1)$  គឺ  $y = Ae^{4x} + Be^{2x}, A, B \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃ  $(E_1)$  គឺ  $y = Ae^{4x} + Be^{2x}, A, B \in \mathbb{R}$  ។

+ កំណត់ចម្លើយពិសេសនៃ  $(E_1)$

$$\text{គេមាន } y(0) = -1, y'(0) = 4$$

$$\text{គេបាន } y' = 4Ae^{4x} + 2Be^{2x}, A, B \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដោយ } \begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ 4A + 2B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = -1 & (1) \\ 2A + B = 2 & (2) \end{cases}$$

យក(1) - (2) គេបាន

$$-A = -3 \Rightarrow A = 3 \text{ ជំនួស(1) គេបាន}$$

$$3 + B = -1 \Rightarrow B = -4$$



នោះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ( $E_1$ ) គឺ  $y = 3e^{4x} - 4e^{2x}$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ( $E_1$ ) គឺ  $y = 3e^{4x} - 4e^{2x}$  ។

2. កំណត់ចំនួនពិត  $a$  និង  $b$

គេមាន  $g(x) = ax + b$

$$\Rightarrow g'(x) = a$$

$$\Rightarrow g''(x) = 0$$

ដោយ  $g$  ជាចម្លើយពិសេសនៃ( $E$ ) គេបាន

$$g''(x) - 6g(x) + 8g(x) = 8x + 10$$

$$0 - 6a + 8(ax + b) = 8x + 10$$

$$8ax + 8b - 6a = 8x + 10$$

$$\begin{cases} 8a = 8 \\ 8b - 6a = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 8b = 10 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ តម្លៃ  $a = 1$  និង  $b = 2$  ។

VI. 1. បង្ហាញថាត្រីកោណ  $ABC$  ជាត្រីកោណសម័ង្ស

គេមាន  $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0)$  និង  $C(0, 0, 1)$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} = (0 - 1, 1 - 0, 0 - 0) = (-1, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 1, 0 - 0, 1 - 0) = (-1, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (0 - 0, 0 - 1, 1 - 0) = (0, -1, 1)$$

$$\text{នោះ } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 0 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

ដោយ  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$  នោះត្រីកោណ  $ABC$  ជាត្រីកោណសម័ង្ស (ពិត)

ដូចនេះ ត្រីកោណ  $ABC$  ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

2. គណនាផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\text{គេបាន } \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (1 - 0) \vec{i} - (-1 - 0) \vec{j} + (0 + 1) \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1, 1, 1)$$

ដូចនេះ  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$  ។

+រកសមីការប្លង់  $ABC$

ដោយប្លង់  $ABC$  កាត់តាមចំណុច  $A(1, 0, 0)$  និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់  $\vec{n} = (1, 1, 1)$

$$\text{តាម } ABC : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$: 1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0$$

$$: x + y + z - 1 = 0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់  $ABC$  គឺ  $ABC : x + y + z - 1 = 0$  ។

3. រកចម្ងាយពីចំណុច  $D(0, 1, 1)$  ទៅប្លង់  $ABC$

គេមាន  $D(0, 1, 1)$  និង  $ABC : x + y + z - 1 = 0$

$$\text{តាម } d(D, ABC) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } d(D, ABC) &= \frac{|1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 1 + 1 - 1|}{\sqrt{3}} \text{ ឯកតាប្រវែង} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីចំណុច  $D$  ទៅប្លង់  $ABC$  គឺ  $d(D, ABC) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  ឯកតាប្រវែង ។

4. រកសមីការស្វ៊ែរ ដែលមានអង្កត់ធ្នឹត  $AC$

តាង  $I$  ជាផ្ចិតនៃស្វ៊ែរដែលមានអង្កត់ធ្នឹត  $AC$

$$\text{តាម } I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = I\left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = I\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{កាំ } r = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{តាម } S : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

$$\text{គេបាន } S : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-0)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែរ } S \text{ គឺ } S : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ ។}$$

5. រកសមីការប្លង់  $P$  ប៉ះស្វ៊ែរ  $S$  ត្រង់  $C$

ដោយប្លង់  $P$  ប៉ះស្វ៊ែរ  $S$  ត្រង់ចំណុច  $C$  នោះ  $P$  កែង  $\vec{IC}$

$$\text{គេបាន } \vec{IC} = \left(0 - \frac{1}{2}, 0 - 0, 1 - \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{តាម } P : a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } P : -\frac{1}{2}(x-0) + 0(y-0) + \frac{1}{2}(z-1) = 0$$

$$: -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការប្លង់ } P \text{ គឺ } P : -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0 \text{ ។}$$

VII. គេមាន  $f(x) = 1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$  ហើយមានក្រាប  $C$

1. គណនា  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right] = 1 + 2(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right] = 1 + 2 \times 0 = 1$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ ។}$$

+ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតនៃដេកនៃក្រាប  $C$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

ដូចនេះ បន្ទាត់  $x = 0$  ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប  $C$  ។

ហើយ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

ដូចនេះ បន្ទាត់  $y = 1$  ជាអាស៊ីមតូតដកនៃក្រាប  $C$  ។

2. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  និងសិក្សាសញ្ញានៃ  $f'(x)$

$$\text{គេបាន } f'(x) = 2 \times \frac{(\ln x)'x - (x)' \ln x}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$\text{ដូចនេះ } f'(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} \text{ ។}$$

+សិក្សាសញ្ញានៃ  $f'(x)$

$$\text{បើ } f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$2 - 2 \ln x = 0$$

$$\ln x = 1 = \ln e$$

$$\Rightarrow x = e$$

តារាងសញ្ញានៃ  $f'(x)$

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -

• បើ  $x \in (0, e)$  គេបាន  $f'(x) > 0$  នោះ  $f$  ជាអនុគមន៍កើន

• បើ  $x = e$  គេបាន  $f'(x) = 0$  នោះ  $f$  ជាអនុគមន៍ថេរ

• បើ  $x \in (e, +\infty)$  គេបាន  $f'(x) < 0$  នោះ  $f$  ជាអនុគមន៍ថ្លុះ ។

+សង្កេតតារាងអបិភោព

$$\text{បើ } x = e \Rightarrow f(e) = 1 + 2 \left( \frac{\ln e}{e} \right) = 1 + \frac{2}{e} = 1.7 \text{ ជាតម្លៃអតិបរមា}$$

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$-\infty \nearrow 1.7 \searrow 1$	

3. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ  $A$  រវាងក្រាប  $C$  និងបន្ទាត់  $D : y = 1$

$$\text{គេបាន } f(x) = y$$

$$1 + 2 \left( \frac{\ln x}{x} \right) = 1$$

$$2 \left( \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

$$\frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\ln x = 0 = \ln 1$$

$$\Rightarrow x = 1$$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ  $A$  រវាងក្រាប  $C$  និងបន្ទាត់  $D : y = 1$  គឺ  $A(1, 1)$  ។

+ កំណត់សមីការបន្ទាត់  $L$  ដែលប៉ះនឹងក្រាប  $C$  ត្រង់ចំណុច  $A$

គេមាន  $A(1, 1) \Rightarrow x_0 = 1, y_0 = 1$

តាម  $L : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

ដោយ  $f'(x_0) = f'(1) = \frac{2 - 2\ln 1}{1} = 2$

គេបាន  $L : y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ  $L : y = 2x - 1$  ។

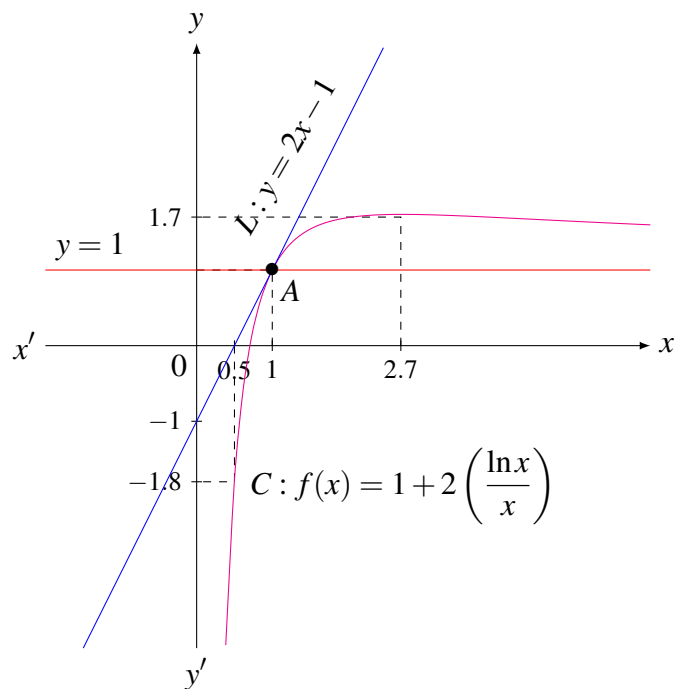
4. គណនា  $f\left(\frac{1}{2}\right)$

គេបាន  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2\left(\frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = 1 + 2(-0.7 \times 2) = 1 - 2.8 = -1.8$

ដូចនេះ  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1.8$  ។

+ សង់បន្ទាត់  $L$  អាស៊ីមតូត និងក្រាប  $C$  នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ

តារាងតម្លៃលេខ	$x$	0	1
	$y = 2x - 1$	-1	1



មណ្ឌលប្រឡង -----  
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----  
 ឈ្មោះមេគ្រូជន: -----  
 ឈ្មោះលេខាមេគ្រូជន: -----

វិញ្ញាសារគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ជា ឃ្លៀន **១៦**

- I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច  $Z_1 = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$  ,  $Z_2 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$  ។
- ក. សរសេរ  $Z_1$  និង  $Z_2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- ខ. គណនា  $Z_3 = Z_1 \times Z_2$  និង  $Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2}$  រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- គ. គណនាតម្លៃ  $Z_4^{2015} - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$  ។
- II. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖
- ក.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^2 - a^2}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2019x} - \sin 3x - 1}{x}$
- III. គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 2x^2 + x}$  ;  $(x \neq 0, x \neq 1)$  ។
- ក. កំណត់តម្លៃ  $M$  ,  $N$  និង  $P$  ដើម្បីឱ្យ  $f(x) = \frac{M}{x} + \frac{N}{x-1} + \frac{P}{(x-1)^2}$  ។
- ខ. គណនា  $\int_2^3 f(x)dx$  ។
- IV. 1. គេឱ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 1 + \sin x}{x} & \text{បើ } x \neq 0 \\ \ln(a-1) & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$
- កំណត់តម្លៃ  $a$  ដើម្បីឱ្យ  $f$  ជាប់ត្រង់  $x = 0$  ។
2. គេឱ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{2 - \cos^2 x}$
- ក. គណនាដេរីវេទីមួយនៃអនុគមន៍  $f(x)$       ខ. បង្ហាញថា  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$
- V. រកកូអរដោនេ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និង អ៊ុចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប រួចសង់ក្រាបដែលមានសមីការទូទៅ  $y^2 + 3x^2 + 4y - 6x - 2 = 0$  ។
- VI. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E) : y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$  ។
- ក. កំណត់តម្លៃ  $a$  ,  $b$  និង  $c$  ដើម្បីឱ្យ  $g(x) = ax^2 + bx + c$  ជាចម្លើយនៃ  $(E)$  ។
- ខ. បង្ហាញថា  $k(x)$  ជាចម្លើយនៃ  $(E)$  លុះត្រាតែ  $(k-g)(x)$  ជាចម្លើយនៃ  $(E') : y'' + 2y' + y = 0$  ។
- VII. គេឱ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $f(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1$  មានក្រាប  $(C)$  ។
- ក. គណនា  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។ រកសមីការបន្ទាត់  $(D)$  ជាអាស៊ីមតូតនៃ  $(C)$  ។
- ខ. បង្ហាញថា  $f$  ជាអនុគមន៍កើន ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។
- គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ  $(T)$  ទៅនឹងខ្សែកោង  $(C)$  ត្រង់  $x = 0$  ។
- ឃ. សង់ក្រាប  $(T)$  ,  $(D)$  និង  $(C)$  នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។
- VIII. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $A(2,0,1)$  ,  $B(3,1,5)$  និង  $C(1,4,4)$
- ក. គណនា  $\overrightarrow{AB}$  និង  $\overrightarrow{AC}$  ។
- ខ. គណនា  $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ  $ABC$  ។
- គ. រកសមីការប្លង់  $(ABC)$  ។ បង្ហាញថាចំណុច  $D(2,0,2)$  មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់  $(ABC)$  ។
- ឃ. រកចម្ងាយពីចំណុច  $D$  ទៅប្លង់  $(ABC)$  រួចគណនាមាឌតេត្រាអែត  $ABCD$  ។
- ង. សរសេរសមីការស្វ៊ែរ  $(S)$  ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត  $[AB]$  ។

## ជំនេរស្រាវជ្រាវ

I. ក. សរសេរ  $Z_1$  និង  $Z_2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } Z_1 &= -\sqrt{3} + i\sqrt{3} \\ &= \sqrt{6} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{6} \left( -\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{6} \left[ \cos \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \sqrt{6} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } Z_1 = \sqrt{6} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } Z_2 &= \sqrt{3} + i\sqrt{3} \\ &= \sqrt{6} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{6} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } Z_2 = \sqrt{6} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

ខ. គណនា  $Z_3 = Z_1 \times Z_2$  និង  $Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2}$  រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេមាន } Z_1 = \sqrt{6} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \text{ និង } Z_2 = \sqrt{6} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } Z_3 &= Z_1 \times Z_2 \\ &= \left[ \sqrt{6} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right] \left[ \sqrt{6} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 6 \left[ \cos \left( \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right]\end{aligned}$$

$$Z_3 = 6 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\text{ដូចនេះ: } Z_3 = 6 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } Z_4 &= \frac{Z_1}{Z_2} \\ &= \frac{\sqrt{6} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)}{\sqrt{6} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} \\ &= \left[ \cos \left( \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right]\end{aligned}$$

$$Z_4 = (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\text{ដូចនេះ: } Z_4 = (\cos \pi + i \sin \pi)$$

គ. គណនាតម្លៃ  $Z_4^{2015} - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$

គេមាន  $Z_4 = (\cos \pi + i \sin \pi)$

ចំពោះ  $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$

គេបាន  $Z_4^{2015} - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$

$$= (\cos \pi + i \sin \pi)^{2015} - \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{2016}$$

$$= (\cos 2015\pi + i \sin 2015\pi) - (\cos 504\pi + i \sin 504\pi)$$

$$= -1 - 1 = -2$$

ដូចនេះ  $Z_4^{2015} - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2016} = -2$

II. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$  រាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[(x-2)(x+1)]^{20}}{[(x-2)^2(x+4)]^{10}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}}$$

$$= \frac{3^{20}}{6^{10}} = \frac{3^{10}}{2^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

ដូចនេះ  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^2 - a^2}$  រាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x\sqrt{x} - a\sqrt{a})(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})}{(x^2 - a^2)(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{(x^2 - a^2)(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{(x-a)(x+a)(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + ax + a^2}{(x+a)(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})}$$

$$= \frac{a^2 + a^2 + a^2}{(a+a)(a\sqrt{a} + a\sqrt{a})}$$

$$= \frac{3a^2}{2a^2\sqrt{a}} = \frac{3\sqrt{a}}{2a}$$

ដូចនេះ  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^2 - a^2} = \frac{3\sqrt{a}}{2a}$

$$\begin{aligned}
 \text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2019x} - \sin 3x - 1}{x} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2019x} - 1) - \sin 3x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{2019x} - 1}{x} - \frac{\sin 3x}{x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2019(e^{2019x} - 1)}{2019x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} \quad \text{ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2019x} - 1}{2019x} = 1 \text{ និង } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1 \\
 &= 2019 - 3 = 2016 \\
 \text{ដូចនេះ: } & \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2019x} - \sin 3x - 1}{x} = 2016}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III. ក. កំណត់តម្លៃ } M, N \text{ និង } P \text{ ដើម្បីឱ្យ } f(x) &= \frac{M}{x} + \frac{N}{x-1} + \frac{P}{(x-1)^2} \\
 \text{គេមាន } f(x) &= \frac{M}{x} + \frac{N}{x-1} + \frac{P}{(x-1)^2} \\
 \text{គេបាន } f(x) &= \frac{M(x-1)^2}{x(x-1)^2} + \frac{Nx(x-1)}{x(x-1)^2} + \frac{Px}{x(x-1)^2} \\
 &= \frac{Mx^2 - 2Mx + M + Nx^2 - Nx + Px}{x(x-1)^2} \\
 &= \frac{(M+N)x^2 + (-2M-N+P)x + M}{x(x-1)^2} \quad \text{តែ } f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} \\
 &= \frac{(M+N)x^2 + (-2M-N+P)x + M}{x(x-1)^2} \\
 \text{នោះគេបាន } & \begin{cases} M+N=1 \\ -2M-N+P=-2 \\ M=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N=-1 \\ P=1 \\ M=2 \end{cases} \\
 \text{ដូចនេះ: } & \boxed{f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ខ. គណនា } I &= \int_2^3 f(x) dx \\
 &= \int_2^3 \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\
 &= 2 \int_2^3 \frac{dx}{x} - \int_2^3 \frac{d(x-1)}{x-1} + \int_2^3 \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} \\
 &= \left( 2 \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} \right) \Big|_2^3 \\
 &= \left( 2 \ln|3| - \ln|3-1| - \frac{1}{3-1} \right) - \left( 2 \ln|2| - \ln|2-1| - \frac{1}{2-1} \right) \\
 &= 2 \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2} - 2 \ln 2 + \ln 1 + 1 \\
 I &= 2 \ln 3 - 3 \ln 2 + \frac{1}{2} \\
 \text{ដូចនេះ: } & \boxed{I = 2 \ln 3 - 3 \ln 2 + \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$



IV. 1. កំណត់តម្លៃ  $a$  ដើម្បីឱ្យ  $f$  ជាប់គ្រង  $x = 0$

$$\text{គេមាន } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 1 + \sin x}{x} & \text{បើ } x \neq 0 \\ \ln(a-1) & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

ដើម្បីឱ្យ  $f$  ជាប់គ្រង  $x = 0$  លុះត្រាតែ  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1) + \sin x}{x} = \ln(a-1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1) + \sin x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} + \frac{\sin x}{x} \right] = \ln(a-1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} + \frac{\sin x}{x} \right] = \ln(a-1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} + \frac{\sin x}{x} \right] = \ln(a-1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{(\sqrt{x+1} + 1)} + \frac{\sin x}{x} \right] = \ln(a-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + 1 = \ln(a-1)$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(a-1)} = e^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow a = 1 + e\sqrt{e}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{a = 1 + e\sqrt{e}}$$

2. ក. គណនាដេរីវេទីមួយនៃអនុគមន៍  $f(x)$

$$\text{គេមាន } f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{2 - \cos^2 x} \text{ ប្រើរូបមន្ត } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad (u^n)' = nu^{n-1}$$

$$f'(x) = \frac{(1 - \sin^2 x)'(2 - \cos^2 x) - (2 - \cos^2 x)'(1 - \sin^2 x)}{(2 - \cos^2 x)^2}$$

$$= \frac{-2 \sin x \cos x (2 - \cos^2 x) - 2 \sin x \cos x (1 - \sin^2 x)}{(2 - \cos^2 x)^2}$$

$$= \frac{2 \sin x \cos x (-2 + \cos^2 x - 1 + \sin^2 x)}{(2 - \cos^2 x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{4 \sin x \cos x}{(2 - \cos^2 x)^2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f'(x) = -\frac{4 \sin x \cos x}{(2 - \cos^2 x)^2}}$$

ខ. បង្ហាញថា  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$

$$\text{គេមាន } f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{2 - \cos^2 x} \text{ នឹង } f'(x) = -\frac{4 \sin x \cos x}{(2 - \cos^2 x)^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{គេបាន } f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 3 \\
 \Leftrightarrow \frac{1 - \sin^2 \frac{\pi}{4}}{2 - \cos^2 \frac{\pi}{4}} + 12 \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}}{\left(2 - \cos^2 \frac{\pi}{4}\right)^2} \right] &= 3 \\
 \Leftrightarrow \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + 12 \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left[2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]^2} &= 3 \\
 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} + 12 \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}} &= 3 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{8}{3} &= 3 \\
 \Leftrightarrow 3 &= 3 \quad \text{ពិត}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3}$$

V. រកកូអរដោនេ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និង អ៊ីបសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប រួចសង់ក្រាបដែលមានសមីការទូទៅ

$$\text{គេមាន } y^2 + 3x^2 + 4y - 6x - 2 = 0$$

$$3(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) - 2 = 0$$

$$3(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) - 3 + (y^2 - 2 \times y \times 2 + 2^2) - 4 - 2 = 0$$

$$3(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

$$\frac{(x - 1)^2}{\frac{1}{3}} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$$

$$\text{សមីការអេលីបនេះមានរាង } \frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1, \quad (a > b > 0)$$

នោះវាមាន អ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ

$$\text{គេបាន } h = 1, k = 2, a = 3, b = \frac{\sqrt{3}}{3}, c = \sqrt{9 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{26}}{3}$$

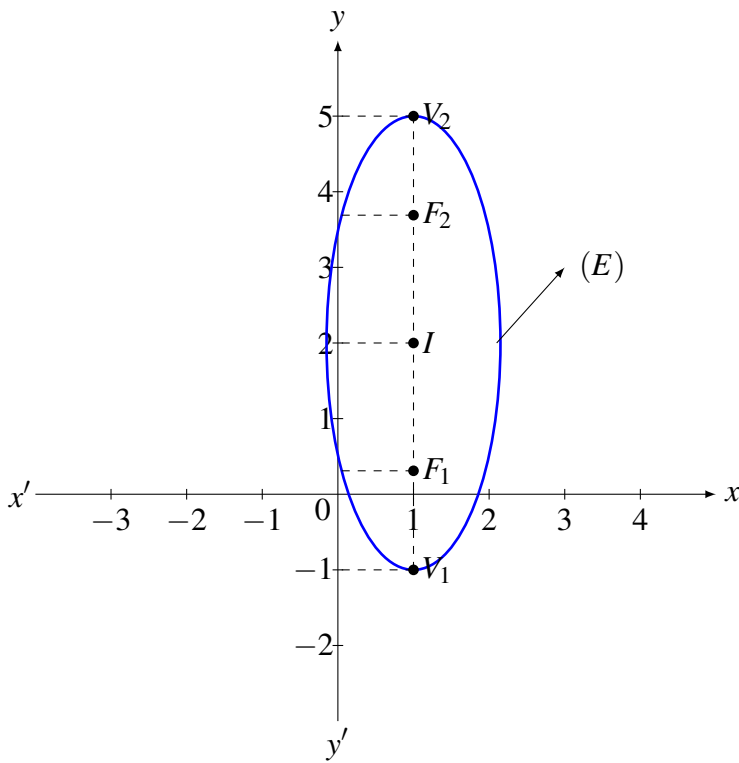
$$\bullet \text{ ផ្ចិត } I(h, k) \Rightarrow I(1, 2)$$

$$\bullet \text{ កំពូល } \begin{cases} V_1(h, k - a) \\ V_2(h, k + a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1(1, -1) \\ V_2(1, 5) \end{cases}$$

$$\bullet \text{ កំណុំ } \begin{cases} F_1(h, k - c) \\ F_2(h, k + c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1\left(1, 2 - \frac{\sqrt{26}}{3}\right) \\ F_2\left(1, 2 + \frac{\sqrt{26}}{3}\right) \end{cases}$$

$$\bullet \text{ អ៊ីបសង់ទ្រីស៊ីតេ } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{26}}{9}$$

• សង់ក្រាប



VI. ក. កំណត់តម្លៃ  $a$ ,  $b$  និង  $c$

គេមាន  $g(x) = ax^2 + bx + c$

$$\Rightarrow g'(x) = 2ax + b$$

$$\Rightarrow g''(x) = 2a$$

ដោយ  $g(x) = ax^2 + bx + c$  ជាចម្លើយនៃ  $(E)$

គេបាន  $g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x^2 + 2x - 2$

$$2a + 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2 + 2x + 3$$

$$ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c) = x^2 + 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 2 \\ 2a + 2b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$$

ដូចនេះ:  $g(x) = x^2 - 2x + 5$

ខ. បង្ហាញថា  $k(x)$  ជាចម្លើយនៃ  $(E)$  លុះត្រាតែ  $(k - g)(x)$  ជាចម្លើយនៃ  $(E')$  :  $y'' + 2y' + y = 0$

គេមាន  $(k - g)(x)$  ជាចម្លើយនៃ  $(E')$  :  $y'' + 2y' + y = 0$

គេបាន  $[(k - g)(x)]'' + 2[(k - g)(x)]' + [(k - g)(x)] = 0$

$$[k(x) - g(x)]'' + 2[k(x) - g(x)]' + [k(x) - g(x)] = 0$$

$$k''(x) - g''(x) + 2k'(x) - 2g'(x) + k(x) - g(x) = 0$$

$$k''(x) + 2k'(x) + k(x) = g''(x) + 2g'(x) + g(x) \quad \text{តែ} \quad g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$k''(x) + 2k'(x) + k(x) = x^2 + 2x + 3$$

សមភាពនេះបញ្ជាក់ថា  $k(x)$  ជាចម្លើយនៃសមីការ  $(E)$

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ  $k(x)$  ជាចម្លើយនៃ  $(E)$  លុះត្រាតែ  $(k - g)(x)$  ជាចម្លើយនៃ  $(E') : y'' + 2y' + y = 0$

VII. ក. គណនា  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1) = -\infty$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1) \text{ រាងមិនកំណត់ } (\infty - \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left( 1 - \frac{2}{e^x} + \frac{x}{2e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}} \right) = +\infty$$

• រកសមីការបន្ទាត់  $(D)$  ជាអាស៊ីមតូតនៃ  $(C)$

$$\text{គេមាន } C : f(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 \text{ និង } D : y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 - \left( \frac{1}{2}x + 1 \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2e^x) = 0$$

$$\text{គេបាន } D : y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប } (C)$$

ខ. បង្ហាញថា  $f$  ជាអនុគមន៍កើន

$$\text{គេបាន } f(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1$$

$$f'(x) = \left( e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 \right)'$$

$$= 2e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}$$

$$= 2e^x(e^x - 1) + \frac{1}{2} > 0 \text{ ព្រោះ } e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ដោយ  $f'(x) > 0$  គេបាន  $f$  ជាអនុគមន៍កើន

• តារាងអថេរភាពនៃ  $f$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ  $(T)$  ទៅនឹងខ្សែកោង  $(C)$  ត្រង់  $x = 0$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ  $(T)$  មានរាង  $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

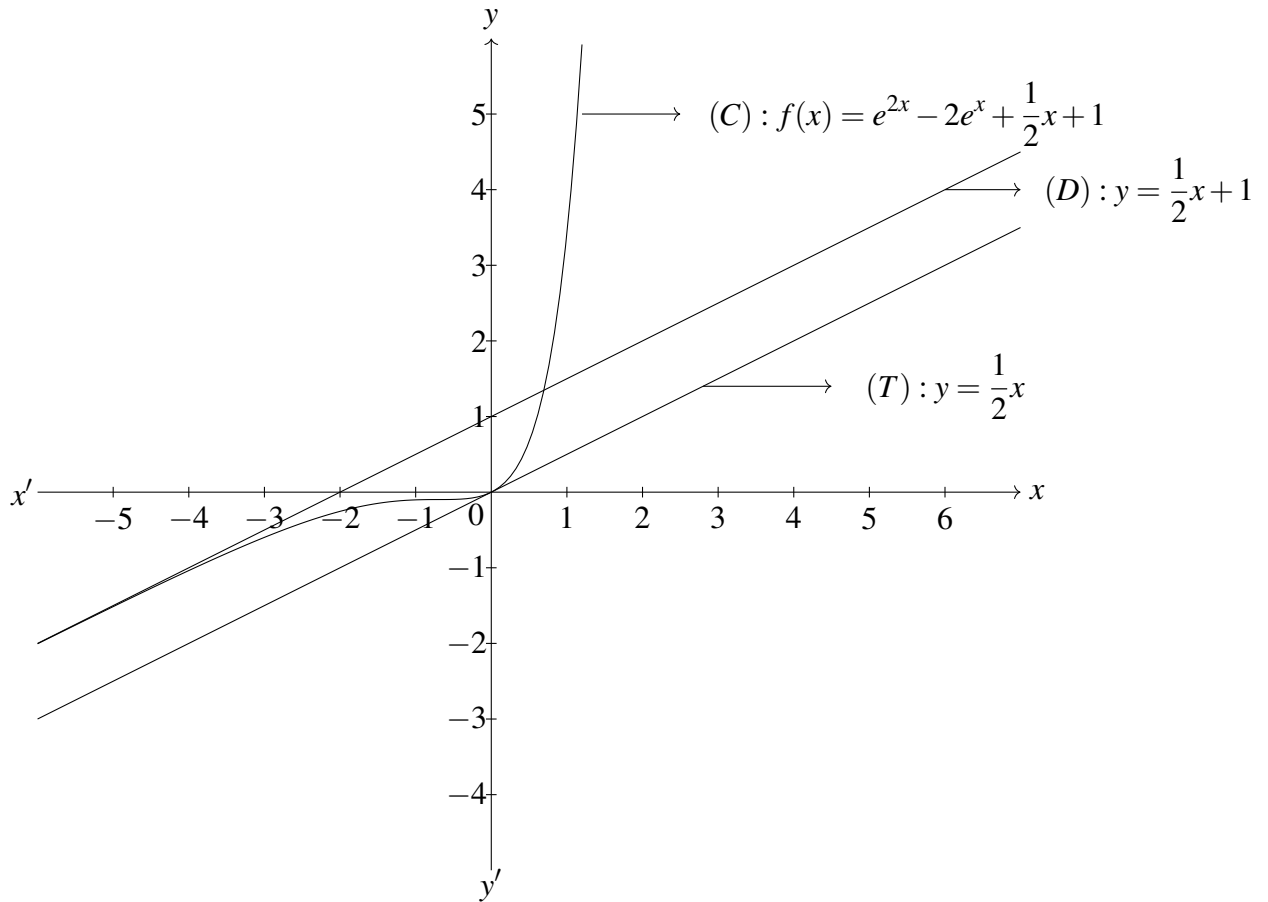
$$\text{គេមាន } f(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow f(0) = e^0 - 2e^0 + \frac{1}{2} \times 0 + 1 = 0$$

$$f'(x) = 2e^x(e^x - 1) + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(0) = 2e^0(e^0 - 1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{គេបាន } (T) : y = \frac{1}{2}(x - 0) + 0 = \frac{1}{2}x$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះ (T) មានសមីការគឺ (T) :  $y = \frac{1}{2}x$

ឃ. សង់ក្រាប (T) , (D) និង (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ



VIII. ក. គណនា  $\vec{AB}$  និង  $\vec{AC}$

គេមានចំណុច  $A(2,0,1)$  ,  $B(3,1,5)$  និង  $C(1,4,4)$

គេបាន  $\vec{AB} = (3-2, 1-0, 5-1) = (1, 1, 4)$

$\vec{AC} = (1-2, 4-0, 4-1) = (-1, 4, 3)$

ដូចនេះ  $\vec{AB} = (1, 1, 4)$  និង  $\vec{AC} = (-1, 4, 3)$

ខ. គណនា  $\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{AC}$

គេមានវ៉ិចទ័រ  $\vec{AB} = (1, 1, 4)$  និង  $\vec{AC} = (-1, 4, 3)$

គេបាន  $\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (3-16) \vec{i} - (3+4) \vec{j} + (4+1) \vec{k} \\ &= -13 \vec{i} - 7 \vec{j} + 5 \vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \vec{N} = \vec{AB} \times \vec{AC} = -13\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

- រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ  $ABC$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-13)^2 + (-7)^2 + 5^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{169 + 49 + 25} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{243} \\ &= \frac{9}{2} \sqrt{3} \text{ ឯកតាផ្ទៃ} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: ផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ } ABC \text{ គឺ } \frac{9}{2} \sqrt{3} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}$$

គ. រកសមីការប្លង់ ( $ABC$ )

$$\text{សមីការប្លង់មានរាង } (ABC) : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

- ( $ABC$ ) មានកាត់តាមចំណុច  $A(2, 0, 1)$
- ( $ABC$ ) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់  $\vec{N} = (-13, -7, 5)$

$$\text{គេបាន } (ABC) : -13(x - 2) - 7(y - 0) + 5(z - 1) = 0$$

$$-13x + 26 - 7y + 5z - 5 = 0$$

$$-13x - 7y + 5z + 21 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: សមីការប្លង់ } (ABC) \text{ គឺ } -13x - 7y + 5z + 21 = 0$$

- បង្ហាញថាចំណុច  $D(2, 0, 2)$  មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ ( $ABC$ )

$$\text{គេមាន } (ABC) : -13x - 7y + 5z + 21 = 0$$

$$\text{គេបាន } -13 \times 2 - 7 \times 0 + 5 \times 2 + 21 = 0$$

$$-26 + 10 + 21 = 0$$

$$-5 = 0 \text{ មិនពិត}$$

$$\text{ដូចនេះ: ចំណុច } D \text{ មិនស្ថិតនៅលើប្លង់ } (ABC) \text{ ទេ}$$

ឃ. រកចម្ងាយពីចំណុច  $D$  ទៅប្លង់ ( $ABC$ )

$$\text{គេមានចំណុច } D(2, 0, 2) \text{ និង ប្លង់ } (ABC) : -13x - 7y + 5z + 21 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } d[D, (ABC)] &= \frac{|-13x_D - 7y_D + 5z_D + 21|}{|\vec{N}|} \\ &= \frac{|-13 \times 2 - 7 \times 0 + 5 \times 2 + 21|}{\sqrt{(-13)^2 + (-7)^2 + 5^2}} \\ &= \frac{|-26 + 10 + 21|}{243} \\ &= \frac{5}{9\sqrt{3}} \\ d[D, (ABC)] &= \frac{5\sqrt{3}}{27} \text{ ឯកតាប្រវែង} \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $d[D, (ABC)] = \frac{5\sqrt{3}}{27}$  ឯកតាប្រវែង

- រួចគណនាមាឌតេត្រាអឺត  $ABCD$

គេបាន  $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times S_{\Delta ABC} \times h$  ដែល  $h = d[D, (ABC)]$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \sqrt{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{27}$$

$$V_{ABCD} = \frac{5}{6} \text{ ឯកតាមាឌ}$$

ដូចនេះ  $V_{ABCD} = \frac{5}{6}$  ឯកតាមាឌ

ង. សរសេរសមីការស្វ័យ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត  $[AB]$

សមីការស្វ័យនៃស្វ័យ (S) គឺ  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

- (S) មានផ្ចិត  $I = \frac{AB}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$

- (S) មានកាំ  $r = \frac{|\vec{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

គេបាន (S) :  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$

ដូចនេះ សមីការស្វ័យនៃស្វ័យគឺ (S) :  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$





មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះមេគ្រូជន:.....  
 ឈ្មោះលេខាមេគ្រូជន:.....

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: សេ ហាន

១៧

- I. គណនាលីមីតខាងក្រោម
- ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^2 - 4x + 3}$                       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$                       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021x} - \cos 2020x}{\sin x}$
- II. នៅក្នុងចំងាយមានឃ្លីពណ៌ស ៤ គ្រាប់និងឃ្លីពណ៌ក្រហម ៥ គ្រាប់។ គេចាប់យកឃ្លី ៣ គ្រាប់ចេញពីចំងាយដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:
- ក.  $A$  “យកបានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង ៣ គ្រាប់”  
 ខ.  $B$  “យកបានឃ្លីពណ៌ស ២ គ្រាប់ និងពណ៌ក្រហម ១ គ្រាប់”  
 គ.  $C$  “យ៉ាងតិចបានឃ្លីពណ៌ស ១ គ្រាប់”
- III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:
- ក.  $\int (x^2 + 2x - 3) dx$                       ខ.  $\int \frac{e^x}{1 - e^x} dx$   
 គ.  $\int \ln x dx$                       ឃ.  $\int \frac{1}{\cos x} dx$
- IV. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E) : y'' + y' - 6y = (x+2)e^x$  ។
- ក. ដោះស្រាយសមីការអូម៉ូហ្សែន  $(F) : y'' + y' - 6y = 0$   
 ខ. រកចំនួនពិត  $a, b$  ដើម្បីឲ្យ  $y_p = (ax+b)e^x$  ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន  
 គ. បង្ហាញថា  $y = y_c + y_p$  ជាចម្លើយទូទៅសមីការ  $(E)$  ដែល  $y_c$  ជាចម្លើយទូទៅសមីការអូម៉ូហ្សែន និង  $y_p$  ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន រួចទាញរក  $y$  ។
- V. គេឲ្យសមីការអេលីប៊ីប្រមូល  $(E) : 25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y + 25 = 0$  ។
- ក. សរសេរសមីការ  $(E)$  ជាទម្រង់ស្តង់ដារ ។  
 ខ. គណនា ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេរបស់អេលីប ។  
 គ. សង់អេលីប  $(E)$  ក្នុងតម្រុយ  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ។
- VI. គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  មួយកំណត់ដោយ  $f(x) = x - \frac{2}{e^x - 1}$  មានខ្សែកោង  $C$  ។
- ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$  ។  
 ខ. សិក្សាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចរកអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃអនុគមន៍  $f$  ។  
 គ. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  រួចសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ ។  
 ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  ។  
 ង. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប  $C$  ក្នុងតម្រុយអរតូណូមេ  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ។

## ដំណោះស្រាយ

### I. គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$\begin{aligned} \text{ក. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^2 - 4x + 3} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ \text{គេបាន } &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^6 + x^5 + \dots + x + 1)}{x^2 - x - 3x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^6 + x^5 + \dots + x + 1)}{x(x-1) - 3(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^6 + x^5 + \dots + x + 1)}{(x-1)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^6 + x^5 + \dots + x + 1)}{(x-3)} \\ &= \frac{1^6 + 1^5 + \dots + 1 + 1}{1-3} = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^2 - 4x + 3} = -\frac{7}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ \text{គេបាន } &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) \\ &= (1 + 1) = 2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 2}$$

$$\begin{aligned} \text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021x} - \cos 2020x}{\sin x} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ \text{គេបាន } &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021x} - 1 + 1 - \cos 2020x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{2021x} - 1}{\sin x} + \frac{1 - \cos 2020x}{\sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{2021x} - 1}{x} \times \frac{x}{\sin x} + \frac{2 \sin^2 1010x}{\sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2021(e^{2021x} - 1)}{2021x} \times \frac{x}{\sin x} + \frac{2020 \sin 1010x}{1010x} \times \frac{x}{\sin x} \times \sin 1010x \right) \\ &= (2021 \times 1 + 2020 \times 1 \times 1 \times 0) = 2021 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021x} - \cos 2020x}{\sin x} = 2021}$$

## II. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

ក. A “យកបានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 3 គ្រាប់”

\* ករណីអាច

ដោយក្នុងថង់មានឃ្លីសរុប 9 គ្រាប់ គេចាប់យក 3 គ្រាប់ ចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ

$$\begin{aligned} \text{យើងបានចំនួនករណីអាច } n(S) &= C(9, 3) = \frac{9!}{(9-3)!3!} \\ &= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 3 \times 4 \times 7 = 84 \quad \text{Case} \end{aligned}$$

\* ករណីស្រប

A ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 3 គ្រាប់

ដោយក្នុងថង់មានឃ្លីក្រហម 5 គ្រាប់យើងចង់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 3 គ្រាប់

$$\begin{aligned} \text{យើងបានចំនួនករណីស្រប } n(A) &= C(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!3!} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} \\ &= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \\ &= 5 \times 2 = 10 \quad \text{Case} \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(A) = \frac{5}{42}$$

ខ. B “យកបានឃ្លីពណ៌ស 2 គ្រាប់ និងពណ៌ក្រហម 1 គ្រាប់”

ដោយក្នុងថង់មានឃ្លីសរុប 4 គ្រាប់និងឃ្លីក្រហម 5 គ្រាប់ ហើយយើងចង់បាន

ឃ្លីពណ៌ស 2 គ្រាប់ និងពណ៌ក្រហម 1 គ្រាប់

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } n(B) &= C(4, 2) \times C(5, 1) = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{5!}{4!1!} \\ &= \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4!}{4! \times 1} \\ &= 6 \times 5 = 30 \quad \text{Case} \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(B) = \frac{5}{14}$$

គ. C “យ៉ាងតិចបានឃ្លីពណ៌ស 1 គ្រាប់”

ដោយព្រឹត្តិការណ៍យ៉ាងតិចបានឃ្លីពណ៌ស 1 គ្រាប់ ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយជាមួយ

ព្រឹត្តិការណ៍យកបានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 3 គ្រាប់

តាមប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ  $P(C) = 1 - P(A)$

$$= 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$$

ដូចនេះ: 
$$P(C) = \frac{37}{42}$$

### III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. 
$$\begin{aligned} \int (x^2 + 2x - 3) dx &= \int (x^2 + 2x - 3) dx \\ &= \int x^2 dx + \int 2x dx - \int 3 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C \end{aligned}$$

ដូចនេះ: 
$$\int (x^2 + 2x - 3) dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C, C \in \mathbb{R}$$

ខ. 
$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{1 - e^x} dx &= - \int \frac{-e^x}{1 - e^x} dx \\ &= - \int \frac{(1 - e^x)'}{1 - e^x} dx \\ &= - \ln |1 - e^x| + C \end{aligned}$$

ដូចនេះ: 
$$\int \frac{e^x}{1 - e^x} dx = - \ln |1 - e^x| + C, C \in \mathbb{R}$$

គ. 
$$\int \ln x dx$$
  
 តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក  $\int u dv = uv - \int v du$   
 តាង  $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$   
 $dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x + c$   

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int \ln x dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C \\ &= x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

ដូចនេះ: 
$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C, C \in \mathbb{R}$$

ឃ. 
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \frac{\cos x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} &= \frac{a \cos x}{(1 - \sin x)} + \frac{b \cos x}{(1 + \sin x)} \\
 &= \frac{a \cos x(1 + \sin x) + b \cos x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\
 \cos x &= a \cos x + a \cos x \sin x + b \cos x - b \cos x \sin x \\
 \cos x &= (a + b) \cos x + (a - b) \cos x \sin x \\
 \Leftrightarrow + \begin{cases} a + b = 1 & (1) \\ a - b = 0 & (2) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \frac{2a + 0 = 1}{2} \\
 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow \frac{\cos x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} &= \frac{\frac{1}{2} \cos x}{(1 - \sin x)} + \frac{\frac{1}{2} \cos x}{(1 + \sin x)} \\
 \Leftrightarrow \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{\frac{1}{2} \cos x}{(1 - \sin x)} + \frac{\frac{1}{2} \cos x}{(1 + \sin x)} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{(1 - \sin x)} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{(1 + \sin x)} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{(1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)} dx + \frac{1}{2} \int \frac{(1 + \sin x)'}{(1 + \sin x)} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \ln |1 - \sin x| + \frac{1}{2} \ln |1 + \sin x| + C \\
 \text{ដូចនេះ: } \int \frac{1}{\cos x} dx &= -\frac{1}{2} \ln |1 - \sin x| + \frac{1}{2} \ln |1 + \sin x| + C, C \in \mathfrak{R}
 \end{aligned}$$

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការអូម៉ូហ្សែន ( $F$ ) :  $y'' + y' - 6y = 0$

( $F$ ) :  $y'' + y' - 6y = 0$  មានសមីការសម្គាល់  $\lambda^2 - \lambda + 6 = 0$

$$\Delta = (1)^2 + 4 \cdot 6 = 25$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1 - 5}{2} = -3, \lambda_2 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

$$\text{តាម } y_c = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

យើងបានចម្លើយនៃសមីការ  $F$  គឺ  $y_c = Ae^{-3x} + Be^{2x}$   $A, B$  is constance

ខ. រកចំនួនពិត  $a, b$  ដើម្បីឲ្យ  $y_p = (ax + b)e^x$  ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន

យើងមាន  $y_p = (ax + b)e^x$

$$y'_p = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$$

$$y''_p = ae^x + (ax + a + b)e^x = (ax + 2a + b)e^x$$

ដើម្បីឲ្យ  $y_p$  ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែនលុះត្រាតែ  $y''_p + y'_p - 6y_p = (x + 2)e^x$

$$\Leftrightarrow (ax+2a+b)e^x + (ax+a+b)e^x - 6(ax+b)e^x = (x+2)e^x$$

$$ax+2a+b+ax+a+b-6ax-6b=x+2$$

$$-4ax+3a-4b=x+2$$

$$\Leftrightarrow + \begin{cases} -4a=1 \\ 3a-4b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{4}, b=-\frac{11}{16}$$

ដូចនេះ  $a=-\frac{1}{4}, b=-\frac{11}{16}$  និង  $y_p = (-\frac{1}{4}x - \frac{11}{16})e^x$

គ. បង្ហាញថា  $y = y_c + y_p$  ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (E)

ដោយ  $y_c$  ជាចម្លើយទូទៅសមីការអូម៉ូហ្សែន

យើងបាន  $y_c'' + y_c' - 6y_c = 0$  (1)

និង  $y_p$  ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន

យើងបាន  $y_p'' + y_p' - 6y_p = (x+2)e^x$  (2)

យក (1), (2) យើងបាន

$$+ \begin{cases} y_c'' + y_c' - 6y_c = 0 & (1) \\ y_p'' + y_p' - 6y_p = (x+2)e^x & (2) \end{cases}$$

$$y_c'' + y_p'' + y_c' + y_p' - 6y_c - 6y_p = (x+2)e^x$$

$$(y_c'' + y_p'') + (y_c' + y_p') - 6(y_c + y_p) = (x+2)e^x$$

គេបាន  $y = y_c + y_p$  ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (E)

Therefore  $y = y_c + y_p$  ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (E)

$$y = y_c + y_p = Ae^{-3x} + Be^{2x} + (-\frac{1}{4}x - \frac{11}{16})e^x$$

ដូចនេះ:  $y = Ae^{-3x} + Be^{2x} - (\frac{1}{4}x + \frac{11}{16})e^x$   $A, B$  is constance

V. ក. សរសេរសមីការ (E) ជាទម្រង់ស្តង់ដារ

យើងមានសមីការ

$$(E) : 25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y + 25 = 0$$

$$25x^2 - 50x + 25 + 9y^2 - 90y + 9 \times 5^2 - 9 \times 5^2 = 0$$

$$25(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 10y + 5^2) = 225$$

$$25(x-1)^2 + 9(y-5)^2 = 225$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1 \text{ ជាទម្រង់ស្តង់ដារសមីការអេលីប}$$

ខ. គណនា ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស្ត្រេបស់អេលីប

ដោយអេលីប (E) :  $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

មានទម្រង់  $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$  មានអ័ក្សធំស្របអ័ក្សអដ្ឋាន

$$\Rightarrow h = 1, k = 5, a = 5, b = 3$$

$$\text{and } c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$\text{- ផ្ចិត } I(h, k) = (1, 5)$$

$$\text{- កំពូល } V_1(h, k - a) = (1, 0) \quad , \quad V_2(h, k + a) = (1, 10)$$

$$\text{- កំណុំ } F_1(h, k - c) = (1, 1) \quad , \quad F_2(h, k + c) = (1, 9)$$

$$\text{- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

គ. សង់អេលីប (E) ក្នុងតម្រុយ  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

VI. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$

$$f(x) = x - \frac{2}{e^x - 1} \text{ មានន័យកាលណា } e^x - 1 \neq 0$$

$$e^x \neq 1$$

$$e^x \neq e^0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$\therefore D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ខ. សិក្សាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចរកអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃអនុគមន៍  $f$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x - \frac{2}{e^x - 1} \right)$$

$$= -\infty$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x - \frac{2}{e^x - 1} \right) = +\infty$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{2}{e^x - 1} \right)$$

$$= +\infty$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - \frac{2}{e^x - 1} \right)$$

$$= -\infty$$

○ដោយ  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$  ដូចនេះបន្ទាត់  $x = 0$  ជាអាស៊ីមតូតឈរ

○ដោយ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{e^x - 1} = 0$  ដូចនេះបន្ទាត់  $y = x$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

○ដោយ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{e^x - 1} = 2$  ដូចនេះបន្ទាត់  $y = x + 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

គ. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  រួចសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

$$f(x) = x - \frac{2}{e^x - 1}$$

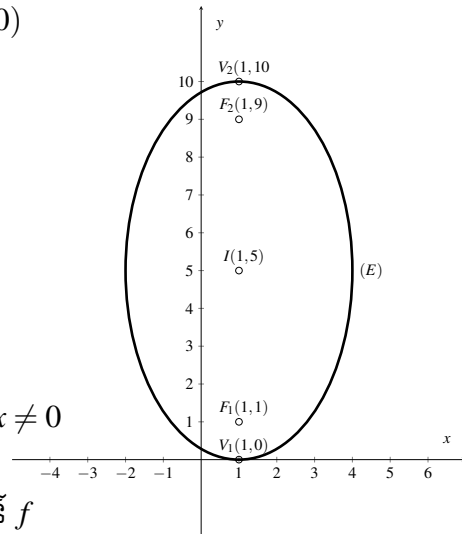
$$f'(x) = 1 - \frac{-2(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = 1 + \frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{(e^x - 1)^2 + 2e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1 + 2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x - 1)^2}$$

- សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

$$\text{ដោយ } (e^{2x} + 1), (e^x - 1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in D$$



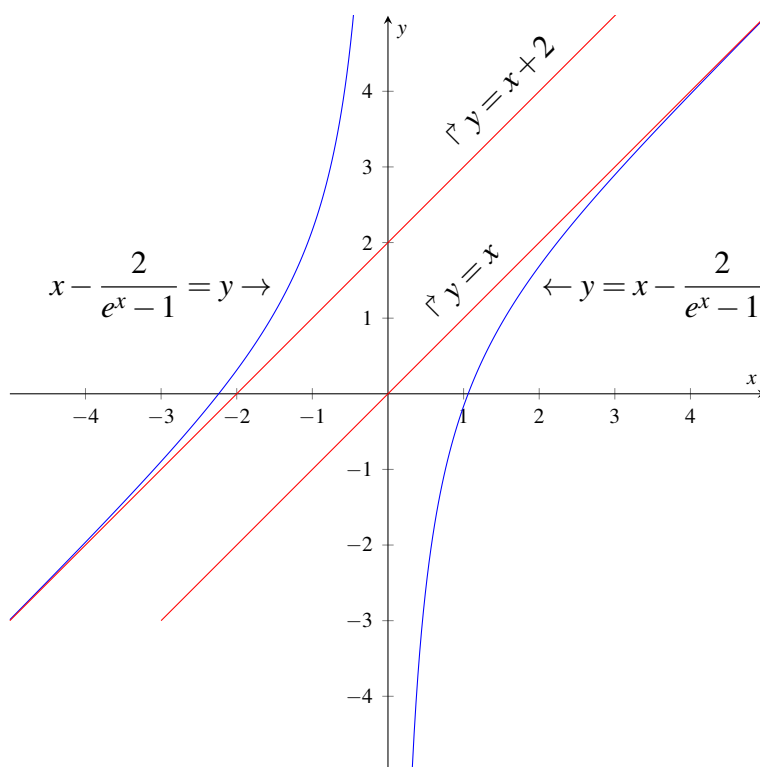
យើងបាន  $f'(x) \geq \forall x \in D$

- គ្មានចំណុចបរមា

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$		$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

ង. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប  $C$  ក្នុងតម្រុយអរតូណាមេ  $(O, \vec{i}, \vec{j})$





មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះមេគ្រូជន:.....  
 ឈ្មោះលេខាមេគ្រូជន:.....

វិញ្ញាសារៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ឡើង សំណួរ ១៨

- I. គណនា លីមីត ខាងក្រោម ៖
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x+3} - 2}$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^x - 1}{x + x^2}$
  - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} - 2x)$
- II. 1. កំណត់ចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  ដោយដឹងថា  $(3 + 2i)a + (2 - i)b = 4 + 5i$  ។  
 2. គេមាន  $\alpha$  និង  $\beta$  ជា ឫសនៃ សមីការ  $x^2 - 2x + 3 = 0$  ។  
 ចូរសរសេរ  $z = 1 + \alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 2 + i(\beta^3 - \beta^2 + \beta + 5)$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- III. គណនា អាំងតេក្រាលកំណត់ ខាងក្រោម ៖
- $\int_{-1}^1 (1 - 6x + 3x^2) dx$
  - $\int_0^3 (2e^{2x} + e^x - 1) dx$
  - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos^4 x) dx$
  - $\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{2x + 3} dx$
- IV. គេមាន សមីការ  $(E) : 2y'' - y' - 3y = 0$  ។
- ក. ដោះស្រាយ សមីការ  $(E)$  ។
- ខ. រកចម្លើយមួយនៃ  $(E)$  ដោយដឹងថា ក្រាបនៃ អនុគមន៍ចម្លើយកាត់អ័ក្ស  $(y'oy)$  ត្រង់  $y = 2$  ហើយបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចនេះស្របទៅនឹង បន្ទាត់  $(L) : \frac{1}{2}x + 3$  ។
- V. រកកូអរដោនេ នៃ កំពូល កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាំបីទិស និង អ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល  $x^2 - 4x + 4y + 12 = 0$  រួចសង់ក្រាប។
- VI. ក្នុងចង់មួយមានបីចក្រហម 5 ដើម បីចខៀវ 8 ដើម និង បីចខ្មៅ 7 ដើម ។ គេចាប់យកបីច 4 ដើមព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីចង់ ។ គណនាប្រូបាប នៃព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗ ខាងក្រោម ៖
- $A$  : ចាប់បានបីចមានពណ៌ ដូចគ្នា 2 ដើម ។
  - $B$  : ចាប់បានបីចមានពណ៌ ដូចគ្នា 3 ដើម ។
  - $C$  : ចាប់បានបីចមានពណ៌ ដូចគ្នា 4 ដើម ។
  - $D$  : ចាប់បានបីចមានពណ៌ ដូចគ្នា 2 គូ ។
- VII. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $A(0, 4, -1); B(-2, 4, -5); C(1, 1, -5); D(1, 0, -4)$  និង  $E(2, 2, -1)$  ។
- គណនា  $\vec{AB} \times \vec{AC}$  រួចបង្ហាញថា បីចំណុច  $A; B; C$  កំណត់បានប្លង់មួយ ព្រមទាំងសរសេរសមីការប្លង់  $(ABC)$  ។
  - សរសេរ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ បន្ទាត់  $(d)$  កាត់តាម  $C$  ហើយស្របនឹងបន្ទាត់  $(DE) : x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z + 4}{3}$  ។
  - រក កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ  $M$  នៃបន្ទាត់  $(DE)$  និង ប្លង់  $(ABC)$  ។
  - បង្ហាញថា ចំណុច  $I(-1, 2, -3)$  ជាផ្ចិតបេស៊ីស្ទែរ ដែលស្ថិតនៅក្នុង កាត់តាមចំណុច  $A; B; C; D$  រួចសរសេរសមីការស្វ៊ែរនោះ។
- VIII. គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1}$  មានក្រាប តំណាង  $(C)$  ។
- រកដែនកំណត់នៃ អនុគមន៍ ព្រមទាំងគណនា លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ រួចបញ្ជាក់អាស៊ីមតូចបើមាន ។
  - បង្ហាញថា  $I(0, -1)$  ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ ខ្សែកោង ។
  - បង្ហាញថា បន្ទាត់  $(d_1); y = x - 2$  និង  $(d_2); y = x$  ជា អាស៊ីមតូចទ្រេតនៃ ក្រាប  $(C)$  រួចសិក្សាទីតាំងធៀបនៃ  $(d_1)$   $(d_2)$  ធៀបនឹង  $(C)$  ។
  - បង្ហាញថា  $f$  ជា អនុគមន៍ម៉ូណូតូន គ្រប់  $x \neq 0$  និង សង់តារាងអថេរភាព នៃ  $f$  ។
  - សង់ អាស៊ីមតូតទាំង អស់ និង ក្រាប  $(c)$  នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។
  - គណនា ផ្ទៃក្រឡាផ្នែក ប្លង់ ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង  $(C)$  និងបន្ទាត់  $(d_1)$  និង បន្ទាត់  $x = 2; x = 4$  ។

## ដំណោះស្រាយ

I. គណនា លីមីត ៖

$$\begin{aligned}
 1. \text{ គេមាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x+3} - 2} & \text{ មានរាងមិនកំណត់ } \left( \frac{0}{0} \right) \\
 \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x+3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x - x + 1}{\sqrt{x+3} - 2} \times \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[2x(x-1) - (x-1)](\sqrt{x+3} + 2)}{\sqrt{(x+3)^2 - 2^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)(\sqrt{x+3} + 2) \\
 &= (2 \times 1 - 1)(\sqrt{1+3} + 2) = 4
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x+3} - 2} = 4}$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ គេមាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^x - 1}{x + x^2} & \text{ មានរាងមិនកំណត់ } \left( \frac{0}{0} \right) \\
 \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^x - 1}{x + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x(1+x)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(1+x)} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{1+x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{1+x} \right) \\
 &= 2 \times 1 \times \frac{1}{1+0} + 1 \times \frac{1}{1+0} = 3
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^x - 1}{x + x^2} = 3}$$

$$\begin{aligned}
 3. \text{ គេមាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} - 2x) & \text{ រាងមិនកំណត់ } (+\infty - \infty) \\
 \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 3} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 3} + 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 3} + 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{(4x^2 + 3)^2} - (2x)^2]}{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{3}{4x^2}\right)} + 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2|x| \sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}} + 2x} ; \text{ ពេល } x \rightarrow +\infty \text{ នោះ } |x| = x \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x \left( \sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}} + 1 \right)} \\
 &= 0 \text{ ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{4x^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} - 2x) = 0}$$

II. 1. កំណត់ចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  ៖

$$\text{គេមាន } (3+2i)a + (2-i)b = 4+5i$$

$$\Leftrightarrow 3+2ai+2b-bi=4+5i$$

$$\Leftrightarrow (3a+2b) + (2a-b)i = 4+5i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b = 4 \\ 2a-b = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \text{ និង } b = -1$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{a = 2 \text{ និង } b = -1}$$

2. សរសេរ  $z$  ជា ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

$$\text{គេមាន } \alpha \text{ និង } \beta \text{ ជាឫសនៃ សមីការ } x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha + 3 = 0 \\ \beta^2 - 2\beta + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 2\alpha - 3 \\ \beta^2 = 2\beta - 3 \end{cases}$$

$$\text{ដោយ } z = 1 + \alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 2 + i(\beta^3 - \beta^2 + \beta + 5)$$

$$= 1 + \alpha \times \alpha^2 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 2 + i(\beta \times \beta^2 - \beta^2 + \beta + 5)$$

$$= 1 + \alpha(2\alpha - 3) - 3(2\alpha - 3) + 5\alpha - 2 + i[\beta(2\beta - 3) - (2\beta - 3) + \beta + 5]$$

$$= 1 + 2\alpha^2 - 3\alpha - 6\alpha + 9 + 5\alpha - 2 + i(2\beta^2 - 3\beta - 2\beta + 3 + \beta + 5)$$

$$= 8 - 4\alpha + 2(2\alpha - 3) + i[2(2\beta - 3) - 4\beta + 8]$$

$$= 2 + 2i$$

$$= 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{z = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} \quad \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

III. គណនា អាំងតេក្រាលកំណត់ ខាងក្រោម ៖

1. គណនា  $\int_{-1}^1 (1 - 6x + 3x^2)dx$

$$\text{គេមាន } \int_{-1}^1 (1 - 6x + 3x^2)dx = (x - 3x^2 + x^3) \Big|_{-1}^1$$

$$= [1 - 3(1)^2 + 1^3] - [-1 - 3(-1)^2 + (-1)^3]$$

$$= 4$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\int_{-1}^1 (1 - 6x + 3x^2)dx = 4}$$

2. គណនា  $\int_0^3 (2e^{2x} + e^x - 1) dx$

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } \int_0^3 (2e^{2x} + e^x - 1) dx &= (e^{2x} + e^x - x) \Big|_0^3 \\ &= (e^{2 \times 3} + e^3 - 3) - (e^{2 \times 0} + e^0 - 0) \\ &= e^6 + e^3 - 5\end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\int_0^3 (2e^{2x} + e^x - x) dx = e^6 + e^3 - 5}$$

3. គណនា  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos^4 x) dx$

តាង  $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

ពេល  $x = 0 \Rightarrow u = 1$ ;  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos^4 x) dx &= - \int_1^0 u^4 du \quad ; \text{សម្គាល់ } \boxed{\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx} \\ &= \int_0^1 u^4 du = \left( \frac{u^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos^4 x) dx = \frac{1}{5}}$$

4. គណនា  $\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{2x + 3} dx$

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } \int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{2x + 3} dx &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{7}{4(2x + 3)} \right) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{7}{8} \ln(2x + 3) \right] \Big|_0^1 \\ &= \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{7}{8} \ln 5 \right) - \left( \frac{7}{8} \ln 3 \right) \\ &= \frac{7}{8} \ln \frac{5}{3}\end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{2x + 3} dx = \frac{7}{8} \ln \frac{5}{3}}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x + 1 & 2x + 3 \\ - x^2 + \frac{3}{2}x & \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ \hline \frac{x}{2} + 1 & \\ - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} & \\ \hline & \frac{7}{4} \end{array}$$

IV. 1. ដោះស្រាយសមីការ ( $E$ ) :

សមីការសម្គាល់  $2\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$

គេបាន  $\lambda_1 = -1$   $\lambda_2 = \frac{3}{2}$

$$\boxed{\text{យើងបាន } y = Ae^{-x} + Be^{\frac{3}{2}x}; A, B \text{ ជាចំនួនថេរ}}$$

2. រកចម្លើយមួយនៃ ( $E$ )

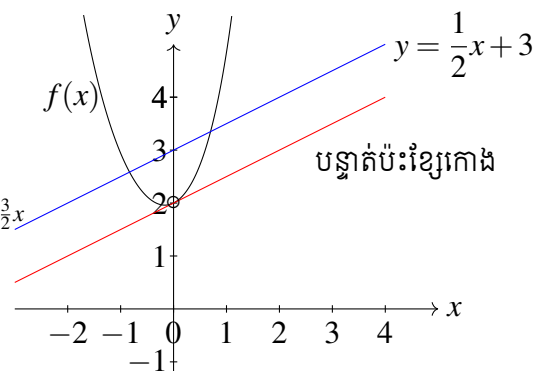
គេមាន  $y = Ae^{-x} + Be^{\frac{3}{2}x} \Rightarrow y' = -Ae^{-x} + \frac{3}{2}Be^{\frac{3}{2}x}$

ដោយដឹងថា ក្រាបនៃ អនុគមន៍ចម្លើយកាត់អ័ក្ស ( $y'oy$ )

ត្រង់  $y = 2$  ហើយបន្ទាត់ប៉ះ

ក្រាបត្រង់ចំណុចនេះស្របទៅនឹង បន្ទាត់ ( $L$ ) :  $y = \frac{1}{2}x + 3$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ -A + \frac{3}{2}B = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = B = 1$$



ដូច្នេះ  $y = e^{-x} + e^{\frac{3}{2}x}$  ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)

V. រកកូអរដោនេ នៃ កំពូល កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស និង អ័ក្សឆ្លុះ នៃ ប៉ារ៉ាបូល ៖

$$\text{គេមាន } x^2 - 4x + 4y + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = -4y - 12 + 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = -4(y+2) \quad \text{គេបានប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះឈរ}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = -4(y+2) \\ (x-h)^2 = 4p(y-k) \end{cases} \Leftrightarrow h=2; k=-2; 4p=-4 \Rightarrow p=-1$$

■ កំពូល  $V(h, k) = V(2, -2)$

■ កំណុំ  $F(h, k+p) = F(2, -2-1)$

$$= F(2, -3)$$

■ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស  $(\Delta) : y = k - p$

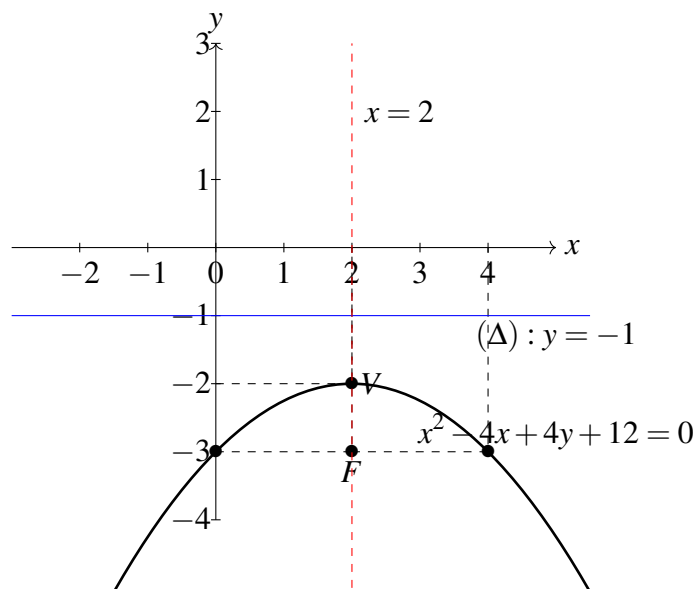
$$= -2 - (-1)$$

$$= -1$$

■ អ័ក្សឆ្លុះឈរគឺ  $x = h = 2$

■ ក្រាបនៃ អនុគមន៍  $x^2 - 4x + 4y + 12 = 0$

$$\text{យក } y = -3 \Leftrightarrow x = 0; x = 4 \Leftrightarrow y = -3$$



VI. រកប្រូបាបនៃ ព្រឹត្តិការណ៍ ខាងក្រោម ៖

1.  $A$  = ចាប់បានបិទមានពណ៌ ដូចគ្នា 2 ដើម

$$\text{ដោយ } n(S) = C(20, 4) = \frac{20!}{(20-4)!4!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16!}{16!4!} = 15 \times 19 \times 17 = 4845$$

$$\text{តាមរូបមន្ត : } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{C(5,2) \times C(8,1) \times C(7,1) + C(5,1) \times C(8,2) \times C(7,1) + C(5,1) \times C(8,1) \times C(7,2)}{C(20,4)}$$

$$= \frac{28}{57}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } P(A) = \frac{112}{969}$$

2.  $B$  = ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 3 ដើម

$$\begin{aligned} \text{តាមរូបមន្ត: } P(B) &= \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{C(5,3) \times C(15,1) + C(8,3) \times C(12,1) + C(7,3) \times C(13,1)}{C(20,4)} \\ &= \frac{1277}{4845} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } P(B) = \frac{1277}{4845}$$

3.  $C$  = ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 4 ដើម

$$\begin{aligned} \text{តាមរូបមន្ត: } P(C) &= \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{C(5,4) + C(8,4) + C(7,4)}{C(20,4)} \\ &= \frac{22}{969} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } P(C) = \frac{22}{969}$$

4.  $D$  : ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ដូចគ្នា 2 គូ

ដោយព្រឹត្តិការណ៍នៃការចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 2 គូ គឺមានន័យថា ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ដូចគ្នា 4 ដើម

$$\text{ដូច្នេះ: } P(D) = P(C) = \frac{22}{969}$$

VII. 1. គណនា  $\vec{AB} \times \vec{AC}$

គេមាន  $A(0, 4, -1)$  ;  $B(-2, 4, -5)$  ;  $C(1, 1, -5)$

$$+ \text{ តាមរូបមន្ត } \vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (-2 - 0, 4 - 4, -5 - (-1)) = (-2, 0, -4)$$

$$+ \text{ តាមរូបមន្ត } \vec{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (1 - 0, 1 - 4, -5 - (-1)) = (1, -3, -4)$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= [0(-4) - (-3)(-4)]\vec{i} - [(-2)(-4) - 1(-4)]\vec{j} + [(-2)(-3) - 1(0)]\vec{k} \\ &= -12\vec{i} - 12\vec{j} + 6\vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \vec{AB} \times \vec{AC} = -12\vec{i} - 12\vec{j} + 6\vec{k}$$

+ ដោយ  $\vec{AB} \times \vec{AC} \neq \vec{0}$  នោះគេបានចំណុចទាំងបីរត់មិនត្រង់ដូច្នេះកំណត់បានប្លង់  $(ABC)$  មួយ។

+ សរសេរសមីការប្លង់  $(ABC)$  តាមរូបមន្តសមីការប្លង់  $(ABC)$  :  $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

• រ៉ូបទំលាក់ម៉ាល់នៃប្លង់  $(ABC)$  :  $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-12, -12, 6)$

• យក  $A(0, 4, -1)$  ជាចំណុចកាត់របស់ប្លង់  $(ABC)$  គេបាន  $x_0 = 0$  ;  $y_0 = 4$  ;  $z_0 = -1$

$$\text{គេបាន } (ABC) : -12(x - 0) - 12(y - 4) + 6(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y - z - 9 = 0$$

$$\text{ដូច្នេះ: } (ABC) : 2x + 2y - z - 9 = 0$$

2. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ បន្ទាត់ (d)

$$\text{តាមរូបមន្ត: } (d) : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

+បម្រាប់:(d)កាត់តាម  $C(1, 1, -5)$  គេបាន  $x_0 = 1 ; y_0 = 1 ; z_0 = -5$

+(d)ស្របនឹង(DE) :  $x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z + 4}{3}$  គេបាន  $\vec{u}_d = \vec{u}_{(DE)} = (1, 2, 3)$

$$\text{ដូច្នេះ: } (d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -5 + 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

3. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ  $M(x_M, y_M, z_M)$  នៃ បន្ទាត់ (DE) និង ប្លង់ (ABC)

យើងមានសមីការប្លង់(ABC) :  $2x + 2y - z - 9 = 0$

$$\text{សមីការផ្ទុះ: } (DE) : x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z + 4}{3} \Rightarrow \text{សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ(DE) : } \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2t' \\ z = -4 + 3t' \end{cases} ; t' \in \mathbb{R}$$

$$+M \in (DE) \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 + t' \\ y_M = 2t' \\ z_M = -4 + 3t' \end{cases} ; t' \in \mathbb{R}$$

$$+M \in (ABC) \Leftrightarrow 2x_M + 2y_M - z_M - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + t') + 2(2t') - (-4 + 3t') - 9 = 0 \Rightarrow t' = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_M = 1 + 1 = 2 \\ y_M = 2(1) = 2 \\ z_M = -4 + 3(1) = -1 \end{cases}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \text{កូអរដោនេនៃ M គឺ } M(2, 2, -1)$$

4. បង្ហាញថាចំណុច  $I(-1, 2, -3)$  ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ

ដោយស្វ៊ែរកាត់តាម A ; B ; C និង D នោះដើម្បីបញ្ជាក់ថា I ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ យើងត្រូវតែ  $IA = IB = IC = ID$

$$+ IA = \sqrt{(0+1)^2 + (4-2)^2 + (-1+3)^2} = 3 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$+ IB = \sqrt{(-2+1)^2 + (4-2)^2 + (-5+3)^2} = 3 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$+ \sqrt{(1+1)^2 + (1-2)^2 + (-5+3)^2} = 3 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$+ \sqrt{(1+1)^2 + (0-2)^2 + (-4+3)^2} = 3 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

ដោយ  $IA = IB = IC = ID$

$$\text{ដូច្នេះ: } \text{ចំណុច } I(-1, 2, -3) \text{ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ}$$

+សរសេរសមីការស្វ៊ែរ(S)

$$\text{តាមរូបមន្ត(S) : } (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

- បម្រាប់:  $I(a, b, c) = I(-1, 2, -3)$   $r = IA = 3$

$$\text{ដូច្នេះ: } (S) : (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$$

- VIII. 1. +  $f(x)$  មានន័យកាលណា  $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$$\text{ដូច្នេះ: } D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

- + គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - \frac{2e^x}{e^x - 1} \right) = -\infty$  ព្រោះ:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{2e^x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{2e^x}{e^x(1 - \frac{1}{e^x})} \right)$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{2}{1 - \frac{1}{e^x}} \right) = +\infty$  ព្រោះ:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x - \frac{2e^x}{e^x - 1} \right) = -\infty$  ព្រោះ:  $\frac{2}{0^+} = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x - \frac{2e^x}{e^x - 1} \right) = +\infty$  ព្រោះ:  $\frac{2}{0^-} = -\infty$

- + បញ្ជាក់អាស៊ីមតូត

- ដោយ  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$  នោះគេបានបន្ទាត់  $x=0$  ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ ខ្សែកោង ។

2. បង្ហាញថា  $I(0, -1)$  ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង

តាមរូបមន្ត:  $f(2a-x) + f(x) = 2b$  ;  $I(0, -1) \Leftrightarrow a = 0$  ;  $b = -1$

+ មាន  $f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1} \Rightarrow f(2 \times 0 - x) = f(-x) = -x - \frac{2e^{-x}}{e^{-x} - 1} = -x - \frac{2}{1 - e^x}$

គេបាន  $f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times (-1) \Leftrightarrow f(-x) + f(x) = -2$

$$\Leftrightarrow -x - \frac{2}{1 - e^x} + x - \frac{2e^x}{e^x - 1} = -\frac{2}{1 - e^x} + \frac{2e^x}{1 - e^x} = -2 \left( \frac{1 - e^x}{1 - e^x} \right) = -2$$

ពិត

3. + បង្ហាញថា  $(d_1) : y = x - 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ  $(C)$

គេមាន  $(C) : f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1}$  ;  $(d_1) : y = x - 2$

យក  $f(x) - y = x - \frac{2e^x}{e^x - 1} - x + 2 = \frac{-2e^x + 2e^x - 2}{e^x - 1} = \frac{2}{1 - e^x}$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 - e^x} = 0$

ដូច្នេះ: បន្ទាត់  $(d_1) : y = x - 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ  $(C)$  ខាង  $x \rightarrow +\infty$

- + បង្ហាញថា  $(d_2) : y = x$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ  $(C)$

យក  $f(x) - y = x - \frac{2e^x}{e^x - 1} - x = \frac{2e^x}{1 - e^x}$  និង  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{1 - e^x} = \frac{2 \times 0}{1 - 0} = 0$

ដូច្នេះ: បន្ទាត់  $(d_2) : y = x$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ  $(C)$  ខាង  $x \rightarrow -\infty$

- + សិក្សាទីតាំងរវាង  $(C)$  និង  $(d_1)$  ;  $(d_2)$

- សិក្សាទីតាំងរវាង  $(C)$  និង  $(d_1)$

មាន  $f(x) - y = \frac{2}{1 - e^x}$  ដោយ  $2 > 0$  នោះ:  $\frac{2}{1 - e^x}$  មានសញ្ញាតាម  $1 - e^x$   
 $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow x < 0$  ;  $1 - e^x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x) - y$	+	-	



+ ចំពោះ  $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) - y > 0$  នោះខ្សែកោង(C)នៅលើ  $(d_1)$

+ ចំពោះ  $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) - y < 0$  នោះខ្សែកោង(C)នៅក្រោម  $(d_1)$

- សិក្សាទីតាំងជ្រៀបរវាង (C)នឹង  $(d_2)$

មាន  $f(x) - y = \frac{2e^x}{1 - e^x}$  ដោយ  $2e^x > 0$  នោះ  $\frac{2}{1 - e^x}$  មានសញ្ញាតាម  $1 - e^x$   
 $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow x < 0$  ;  $1 - e^x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-

+ ចំពោះ  $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) - y > 0$  នោះខ្សែកោង(C)នៅលើ  $(d_2)$

+ ចំពោះ  $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) - y < 0$  នោះខ្សែកោង(C)នៅក្រោម  $(d_2)$

- បង្ហាញថា  $f$  ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូន ចំពោះ  $x \neq 0$

មាន  $f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1} \Rightarrow f'(x) = 1 - 2 \left[ \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \times e^x}{(e^x - 1)^2} \right] = 1 + \frac{2e^x}{(e^x - 1)^2} > 0 ; \forall x \neq 0$

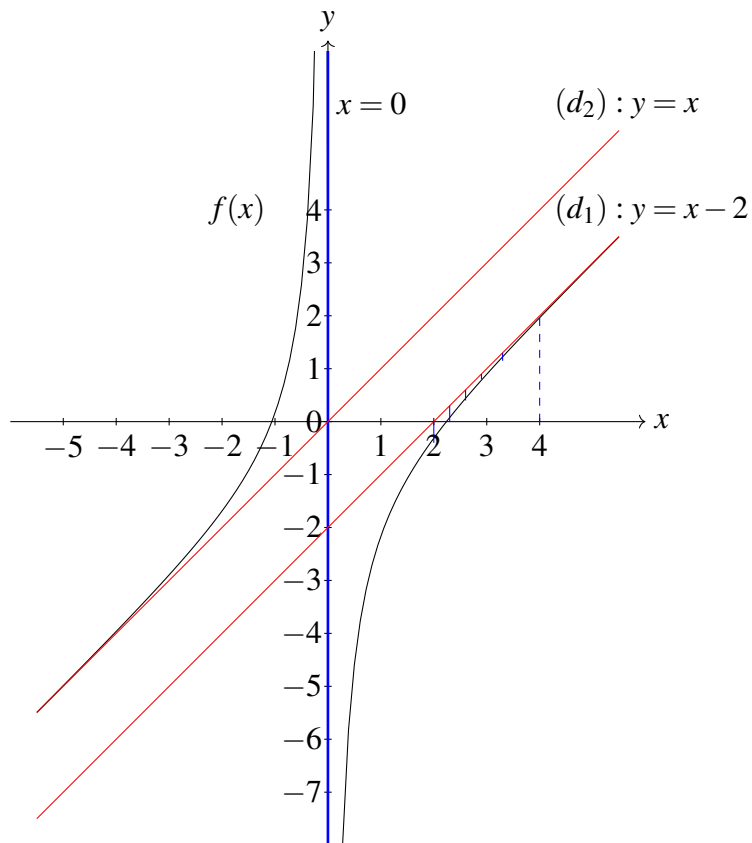
ដោយ  $f'(x) > 0$  នោះ  $f(x)$  ជាអនុគមន៍កើន នាំឱ្យ  $f(x)$  ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូន

តារាងអថេរភាព

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

- សង់ក្រាប និង គ្រប់អាស៊ីមតូតទាំងអស់

$$+ (d_1) : y = x - 2 ; \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ y & -2 & -1 \end{array} ; (d_2) : y = x \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ y & 0 & 1 \end{array}$$



6. គណនា ផ្ទៃក្រឡាផ្នែក ប្លង់ ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង  $(C)$  និងបន្ទាត់  $(d_1)$  និង បន្ទាត់  $x = 2 ; x = 4$  ។

យើងដឹងហើយថា  $x \in (0, +\infty)$  បន្ទាត់  $(d_1) : y = x - 2$  នៅលើខ្សែកោង  $(C)$  នោះ

គេបាន  $x \in [2, 4]$  បន្ទាត់  $(d_1)$  ក៏នៅលើខ្សែកោង  $(C)$  ដែរ

$$\text{គេបាន } S = \int_2^4 \left[ x - 2 - x + \frac{2e^x}{e^x - 1} \right] dx = \int_2^4 \left( \frac{2e^x}{e^x - 1} - 2 \right) dx = [2\ln(e^x - 1) - 2x]_2^4$$

$$= 2\ln(e^4 - 1) - 8 - 2\ln(e^2 - 1) + 4$$

$$= 2\ln\left(\frac{e^4 - 1}{e^2 - 1}\right) - 4$$

$$\text{ដូច្នេះ: } S = 2\ln\left(\frac{e^4 - 1}{e^2 - 1}\right) - 4 \text{ ឯកតាផ្ទៃ}$$

មណ្ឌលប្រឡង-----  
 លេខបន្ទប់:----- លេខតុ-----  
 ឈ្មោះមេគ្រូជន:-----  
 ឈ្មោះលេខាមេគ្រូជន:-----

វិញ្ញាសារៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបចំដោយ: Kim Hun

១៩

- I. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យពីរចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = 2i(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$  និង  $z_2 = 2i(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6})$  ។  
 ក. សរសេរ  $z_1$  និង  $z_2$  ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ ខ. ចូរបង្កើតសមីការដឺក្រេទី ២ នៃ  $z$  ដែលមាន  $z_1$  និង  $z_2$  ជាឫស ។  
 គ. កំណត់ចំនួនពិត  $x$  និង  $y$  ដើម្បីឲ្យ  $z_1^3 + z_2^3 = 2(x+1) + i(y-3)$  ។
- II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖  
 ក.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2}$  ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x} + \ln x)$  គ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x + \ln x)$
- III. 1. (៥ពិន្ទុ) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $E : g''(x) - 7g'(x) + 10g(x) = 0$  ។  
 2. (៥ពិន្ទុ) កំណត់ចម្លើយ  $g(x)$  មួយនៃ  $E$  ដែល  $g(0) = 5$  ;  $g'(0) = 16$  ។
- IV. (១៥ពិន្ទុ) ចំងមួយមានបាល់ក្រហម ៨ បាល់ស ៥ ។ បាល់ ៣ ត្រូវបានយកចេញដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម៖  
 ក.  $A$  : បាល់ទាំង ៣ ពណ៌ស ។ ខ.  $B$  : បាល់ទាំង ៣ ពណ៌ក្រហម ។ គ.  $C$  : បាល់ស ២ និងបាល់ក្រហម ១ ។
- V. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$  ;  $x \neq 1, x \neq 2$  ។  
 1. សរសេរ  $f$  ជាប្រៀង  $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$  ដែល  $a, b$  ជាចំនួនពិតត្រូវកំណត់ ។  
 2. គណនា  $\int_0^3 f(x)dx$
- VI. (៣៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $f(x) = x + 2 + (x+1)e^{-x}$  មានក្រាបតំណាង  $C$  ។  
 1. គណនាលីមីតនៃ  $f$  ខាង  $+\infty$  និង  $-\infty$  ។  
 2. គណនា  $f'(x)$  ។  
 3. ដោយដឹងថា  $1 - xe^{-x} > 0$  ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ  $f'(x)$  រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។  
 4. បង្ហាញថាបន្ទាត់  $\Delta : y = x + 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $C$  ។  
 សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប  $C$  ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតនេះ ។  
 5. សង់បន្ទាត់  $\Delta$  និង ក្រាប  $C$  ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។
- VII. (២៥ពិន្ទុ) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $A(2, 1, 4)$  ;  $B(2, -2, 7)$   
 និង ប្លង់  $P : 2x + 2y - z = 2$  ។  
 1. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់  $L$  ដែលកាត់តាម  $B$  ហើយកែងនឹងប្លង់  $P$  ។  
 2. បន្ទាត់  $D$  មួយមានសមីការ  $x = 1 + 2t$  ;  $y = -2t$  ;  $z = 1 - t$  ;  $(t \in \mathbb{R})$  ។  
 ចូរកំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ  $M$  រវាង  $D$  និង  $P$  ។  
 3. ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ  $MAB$  ។

ជំនាញស្រាវជ្រាវ

I. ក. (ឥតិទ្ធី) សរសេរ  $z_1$  និង  $z_2$  ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$\text{ដោយ } z_1 = 2i(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = 2i(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$\text{ដោយ } z_2 = 2i(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}) = 2i(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = 1 + \sqrt{3}i$$

ខ. (ឥតិទ្ធី) ចូរបង្កើតសមីការដឺក្រេទី ២ នៃ  $z$  ដែលមាន  $z_1$  និង  $z_2$  ជាឫស

$$\text{សមីការដឺក្រេទី២មានរាង } Z^2 - SZ + P = 0$$

$$\text{ដោយ } S = z_1 + z_2 = -1 + \sqrt{3}i + 1 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$$

$$\text{ដោយ } P = z_1 \times z_2 = (-1 + \sqrt{3}i) \times (1 + \sqrt{3}i) = -1 - \sqrt{3}i + \sqrt{3}i - 3 = -4$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការដឺក្រេទី២គឺ } Z^2 - 2i\sqrt{3}Z - 4 = 0$$

គ. (ឥតិទ្ធី) កំណត់ចំនួនពិត  $x$  និង  $y$  ដើម្បីឲ្យ  $z_1^3 + z_2^3 = 2(x+1) + i(y-3)$

$$\text{ដោយ } z_1 = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

$$\Rightarrow z_1^3 = 2^3(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 8(1 + 0i) = 8$$

$$\text{ដោយ } z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow z_2^3 = 2^3(\cos \pi + i \sin \pi) = 8(-1 + 0i) = -8$$

$$\text{គេបាន } z_1^3 + z_2^3 = 2(x+1) + i(y-3)$$

$$8 - 8 = 2(x+1) + i(y-3)$$

$$0 + 0i = 2(x+1) + i(y-3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1) = 0 \\ y-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ } x = -1 \text{ និង } y = 3$$

II. (ឧតិទ្ធី) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2+3-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2+2}{-1-1} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2} = -2$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x} + \ln x) \text{ រាង } \infty - \infty$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 + x \ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) = +\infty$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x + \ln x) \text{ រវាង } \infty - \infty$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left( \frac{x}{e^x} - 1 + \frac{\ln x}{e^x} \right) = -\infty$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x + \ln x) = -\infty$$

III. 1. (ឥតិទ្ធី) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $E : g''(x) - 7g'(x) + 10g(x) = 0$

$$\text{មានសមីការសម្គាល់ } r^2 - 7r + 10 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 = 3^2$$

$$r = \frac{7 \pm \sqrt{3^2}}{2} = \begin{cases} r_1 = 5 \\ r_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = Ae^{5x} + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

2. (ឥតិទ្ធី) កំណត់ថ្លើយ  $g(x)$  មួយនៃ  $E$  ដែល  $g(0) = 5$  ;  $g'(0) = 16$

$$g(x) = Ae^{5x} + Be^{2x}$$

$$g'(x) = 5Ae^{5x} + 2Be^{2x}$$

$$\begin{cases} g(0) = 5 \\ g'(0) = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 5 \\ 5A + 2B = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 5 \times (-5) \\ 5A + 2B = 16 \end{cases} \iff - \begin{cases} 5A + 5B = 25 \\ 5A + 2B = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3B = 9 \Rightarrow B = 3 \Rightarrow A = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } g(x) = 2e^{5x} + 3e^{2x}$$

IV. (ឧតិទ្ធី) គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

$$\text{រូបមន្ត ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ចំនួនករណីអាច

$$n(S) = C(13, 3) = \frac{13!}{10!3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 286 \text{ ករណី}$$

ក.  $A$  : បាល់ទាំង 3 ពណ៌ស

ចំនួនករណីស្រប

$$n(A) = C(5, 3) = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ ករណី}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{286} = \frac{5}{143}$$

ខ.  $B$  : បាល់ទាំង 3 ពណ៌ក្រហម

ចំនួនករណីស្រប

$$n(B) = C(8, 3) = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ ករណី}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{56}{286} = \frac{28}{143}$$

គ.  $C$  : បាល់ស 2 និង បាល់ក្រហម 1

$$n(C) = C(5, 2) \times C(8, 1) = \frac{5!}{2!3!} \times \frac{8!}{7!1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{8 \cdot 7!}{7! \cdot 1} = 10 \times 8 = 80 \text{ ករណី}$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{80}{286} = \frac{40}{143}$$

V.  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$  ;  $x \neq 1, x \neq 2$

1. (ឥតិទ្ធុ) សរសេរ  $f$  ជារៀង  $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$  ដែល  $a, b$  ជាចំនួនពិតត្រូវកំណត់

$$\begin{aligned} \text{ដោយ } f(x) &= \frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \\ \frac{x+1}{x^2-3x+2} &= \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ x+1 &= a(x-2)+b(x-1) \end{aligned}$$

$$\text{បើ } x=1 \Rightarrow 2 = -a \Rightarrow a = -2$$

$$\text{បើ } x=2 \Rightarrow 3 = b \Rightarrow b = 3$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = -\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

2. (ឥតិទ្ធុ) គណនា  $\int_0^3 f(x)dx$

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)dx &= \int_0^3 \left(-\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}\right)dx \\ &= -2 \int_0^3 \frac{(x-1)'}{x-1} dx + 3 \int_0^3 \frac{(x-2)'}{x-2} dx \\ &= -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-2| \Big|_0^3 \\ &= -2 \ln 2 + 3 \ln 1 - (-2 \ln 1 + 3 \ln 2) \\ &= -2 \ln 2 - 3 \ln 2 = -5 \ln 2 \end{aligned}$$

VI. (ឥតិទ្ធុ)  $f(x) = x+2+(x+1)e^{-x}$

1. (ឥតិទ្ធុ) គណនាលីមីតនៃ  $f$  ខាង  $+\infty$  និង  $-\infty$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x+2+(x+1)e^{-x}] = +\infty$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x+2+(x+1)e^{-x}] = -\infty$$

2. (ឥតិទ្ធុ) គណនា  $f'(x)$

$$f(x) = x+2+(x+1)e^{-x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1+0+(x+1)'e^{-x}+[e^{-x}]'(x+1) = 1+e^{-x}-e^{-x}(x+1) = 1+e^{-x}(1-x-1) = 1-xe^{-x}$$

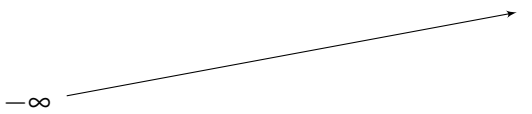
3. (ឥតិទ្ធុ) សិក្សាសញ្ញានៃ  $f'(x)$

$$\text{ដោយ } 1-xe^{-x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	

$$\Rightarrow f(x) \text{ ជាអនុគមន៍កើន}$$

(ឥតិទ្ធុ) គូសតារាងអថេរភាពនៃ  $f$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$  $+\infty$	

4. (៣ពិន្ទុ) បង្ហាញថាបន្ទាត់  $\Delta: y = x + 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $C$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta: y = x + 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប } C$$

(៥ពិន្ទុ) សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប  $C$  ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត

$$\text{តាង } h(x) = f(x) - \Delta = (x+1)e^{-x}$$

$$\text{បើ } h(x) = 0 \iff x+1 = 0 \quad ; \quad e^{-x} > 0$$

$$\iff x = -1$$

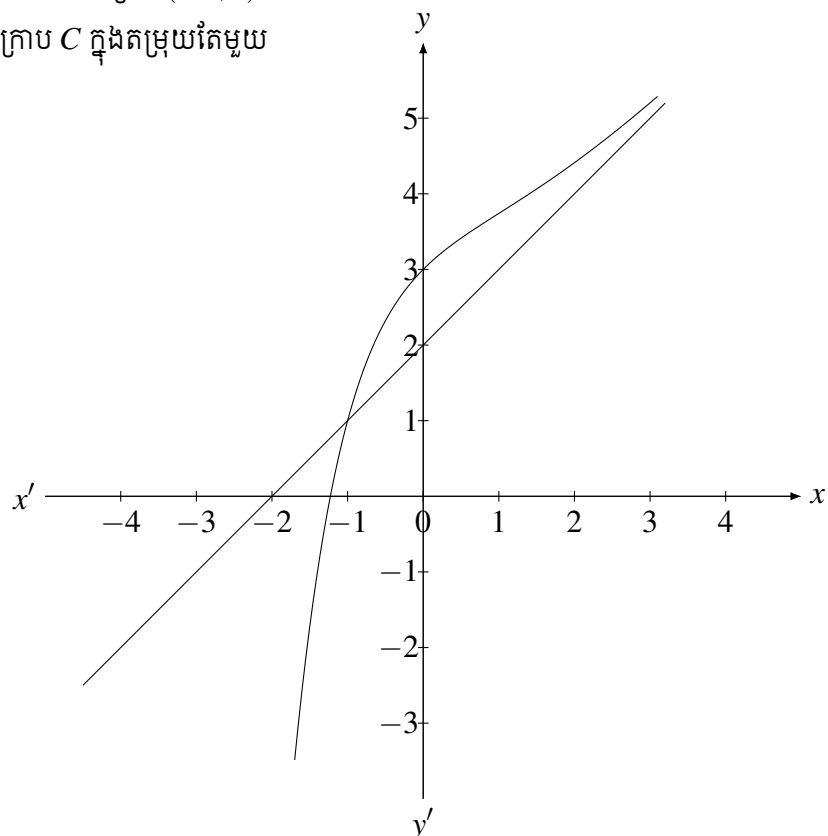
$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

$$x \in (-\infty, -1) \Rightarrow \text{ក្រាប } C \text{ នៅក្រោម } \Delta$$

$$x \in (-1, +\infty) \Rightarrow \text{ក្រាប } C \text{ នៅលើ } \Delta$$

$$x = -1 \Rightarrow \text{ក្រាប } C \text{ កាត់ } \Delta \text{ ត្រង់ } (-1, 1)$$

5. (៨ពិន្ទុ) សង់បន្ទាត់  $\Delta$  និង ក្រាប  $C$  ក្នុងតម្រុយតែមួយ



VII. (២៥ពិន្ទុ) គេមានចំណុច  $A(2, 1, 4)$ ;  $B(2, -2, 7)$  និង ប្លង់  $P: 2x + 2y - x = 2$

1. (១០ពិន្ទុ) កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់  $L$  ដែលកាត់តាម  $B$  ហើយកែងនឹងប្លង់  $P$

សមីការមានរាង  $L: x = x_0 + at; y = y_0 + bt; z = z_0 + ct; t \in \mathbb{R}$

$$\text{ដោយ } \begin{cases} L \perp P \\ \vec{n}_p \perp P \end{cases} \Rightarrow L \parallel \vec{n}_p$$

ដោយ  $L$  កាត់តាម  $B(2, -2, 7)$  ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស  $\vec{n}_p = (2, -2, -1)$

ដូចនេះ:  $L: x = 2 + 2t; y = -2 + 2t; z = 7 - t; t \in \mathbb{R}$

2. (៥ពិន្ទុ) ចូរកំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ  $M$  រវាង  $D$  និង  $P$

យក  $D$  ជួសក្នុង  $P$  គេបាន:  $2(1 + 2t) + 2(-2t) - (1 - t) = 2$

$$2 + 4t - 4t - 1 + t = 2$$

$$t = 1$$

យក  $t = 1$  ជួសក្នុង  $D$  គេបាន  $x = 3; y = -2; z = 0$

ដូចនេះ: កូអរដោនេនៃ  $M$  គឺ  $M(3, -2, 0)$

3. (១០ពិន្ទុ) ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ  $MAB$

$$\text{តាមរូបមន្ត } S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AM}|$$

ដោយ  $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (0, -3, 3)$

$\Rightarrow \vec{AM} = (x_M - x_A; y_M - y_A; z_M - z_A) = (1, -3, -4)$

$$\vec{AB} \times \vec{AM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (12 + 9)\vec{i} - (0 - 3)\vec{j} + (0 + 3)\vec{k} = 21\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 3^2 + 3^2} = \frac{1}{2} \sqrt{459} = \frac{3}{2} \sqrt{51} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}$$



មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....  
 ឈ្មោះបេក្ខជន:.....  
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន:.....

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)  
 រយៈពេល : ១៥០នាទី  
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: សុខណាត

២០

- I. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរកំណត់ដោយ  $x = \frac{1+2i}{3-4i}$  និង  $y = \frac{2-i}{5i}$  ។  
 ក. ចូរសរសេរ  $x$  និង  $y$  ជាទម្រង់ពិជគណិត។ ខ. បង្ហាញថា  $x+y$  ជាចំនួនពិត។
- II. 1. អ្នកគ្រូម្នាក់បានលើកទឹកចិត្តសិស្សពូកែក្នុងថ្នាក់ម្នាក់ដោយការផ្តល់ជូននូវសៀវភៅ 2 ក្បាលពីក្នុងចំណោមសៀវភៅគណិតវិទ្យា 6 ក្បាល វិទ្យាសាស្ត្រ 7 ក្បាល និងសេដ្ឋកិច្ច 4 ក្បាល។ ចូរគណនាចំនួនរបៀបនៃការជ្រើសរើសសៀវភៅ 2 ក្បាលនេះ បើសិស្សនោះ៖  
 ក. រើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលដែលជាមុខវិជ្ជាដូចគ្នា? ខ. រើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលដែលជាមុខវិជ្ជាខុសគ្នា?  
 2. អំណោយចំនួន 7 នឹងត្រូវបានចែកជូនសិស្សក្រីក្រចំនួន 10 នាក់។ តើមានប៉ុន្មានរបៀបក្នុងការចែកនេះ បើគ្មាននរណាម្នាក់បាន លើសពី 1 ឡើយ?
- III. ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖  
 ក.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 4x \cos 7x}{x^2}$  ខ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[2021]{x} - 1}{x - 1}$  គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4 \tan^2 x)^{\cot^2 x}$
- IV. គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{x}$  ចំពោះគ្រប់តម្លៃ  $x \neq 0$  ។  
 ក. ចូរកំណត់តម្លៃ  $A, B$  និង  $C$  ដើម្បីអោយ  $f(x) = Ax + B + \frac{C}{x}$  ។  
 ខ. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់នៃ  $\int_1^2 f(x) dx$  ។
- V. គេមានម៉ាទ្រីសចំនួនបីគឺ  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  និង  $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ។  
 ក. ចូរគណនា  $A+B$  និង  $A-B$  ។  
 ខ. ចូរគណនាតម្លៃនៃម៉ាទ្រីស  $C$  បើ  $C = A \times B$
- VI. គេមានសមីការប៉ារ៉ាបូលទូទៅមួយកំណត់ដោយ  $P: y^2 - 6y - 12x - 27 = 0$  ។  
 ក. ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាបូល  $P$  ជាសមីការស្តង់ដារ។  
 ខ. ចូរកំណត់ កំពូល កំណុំ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃសមីការ  $P$  នេះ។  
 គ. ចូរស្វែងរកប៉ារ៉ាបូលនេះ ។
- VII. គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3}$  ។  
 ក. រកដែនកំណត់ និង ដេរីវេទី១ នៃអនុគមន៍  $f$  ។  
 ខ. គណនាលីមីត  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  ។ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍នេះ។  
 គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍នេះ។  
 ឃ. គូសក្រាបតារាងអនុគមន៍នេះ ។ (យក  $\sqrt{3} = 1.73$ )

## ជំនាញគណិតវិទ្យា

I. ក. សរសេរ  $x$  និង  $y$  ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$\begin{aligned}\text{តើមាន } x &= \frac{1+2i}{3-4i} \\ &= \frac{(1+2i)(3+4i)}{3^2-(4i)^2} \\ &= \frac{3-8+10i}{9+16} \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ \text{និង } y &= \frac{2-i}{5i} \\ &= \frac{(2-i)(5i)}{(5i)^2} \\ &= \frac{5+10i}{-25} \\ &= -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$i^2 = -1$$

ដូចនេះ ទម្រង់ពិជគណិតនៃ  $x$  និង  $y$  គឺ

$$\begin{aligned}x &= -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ y &= -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

ខ. បង្ហាញថា  $x+y$  ជាចំនួនពិត

តាមសំណួរ (ក) ខាងលើ

$$\begin{aligned}\text{តើបាន } x+y &= \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) + \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) \\ &= \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\right)i \\ &= -\frac{2}{5}\end{aligned}$$

ដូចនេះ  $x+y$  ជាចំនួនពិត ។

II. 1. គណនាចំនួនរបៀបនៃការជ្រើសរើសសៀវភៅ 2 ក្បាលនេះ បើសិន្នោះ៖

ក. រើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលជាមុខវិជ្ជាដូចគ្នា

- ករណីសៀវភៅគណិតវិទ្យាដូចគ្នា៖ វាជាបន្សំនៃការរើស 2 ធាតុ ចេញពីធាតុសរុប 6

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \text{ ករណី}$$

- ករណីសៀវភៅវិទ្យាសាស្ត្រដូចគ្នា៖ វាជាបន្សំនៃការរើសធាតុ 2 ចេញពីធាតុសរុប 7

$$C_7^2 = \frac{7!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21 \text{ ករណី}$$

- ករណីសៀវភៅសេដ្ឋកិច្ចដូចគ្នា៖ ដូចគ្នាដែរ វាជាបន្សំ នៃការរើសធាតុ 2 ចេញពីធាតុសរុប 4

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \text{ ករណី}$$

តើបាន ចំនួនរបៀបនៃការជ្រើសយកសៀវភៅជាមុខវិជ្ជាដូចគ្នា គឺ

$$15 + 21 + 6 = 42 \text{ របៀប}$$

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបនៃការជ្រើសយកសៀវភៅដែលជាមុខវិជ្ជាដូចគ្នាសរុបគឺ 42 ករណី ។

ខ. រើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលជាមុខវិជ្ជាខុសគ្នា

- ករណីសៀវភៅគណិតមួយក្បាលនិងវិទ្យាសាស្ត្រមួយក្បាល៖ យើងអាចគិតយ៉ាងដូច្នេះថា ការរើសយកសៀវភៅគណិតមួយក្បាលពីក្នុងចំណោមសៀវភៅគណិតសរុប 6 ក្បាលមាន 6 របៀប និង ការរើសយកសៀវភៅវិទ្យាសាស្ត្រមួយក្បាលពីក្នុងចំណោម 7 ក្បាលគឺ 7 របៀប ។ ហេតុនេះ គេបាន  $6 \times 7 = 42$  របៀប

ឬ យ៉ាងខ្លីតាមគោលការណ៍ផលគុណនៃបន្សំនេះគឺ  $C_6^1 \times C_7^1 = \frac{6!}{1! \times 5!} \times \frac{7!}{1! \times 6!} = 6 \times 7 = 42$  របៀប

- ករណីសៀវភៅគណិតមួយក្បាលនិងសេដ្ឋកិច្ចមួយក្បាល៖ តាមគោលការណ៍ផលគុណ គេបាន  $C_6^1 \times C_4^1 = 6 \times 6 = 24$  របៀប

- ករណីសៀវភៅវិទ្យាសាស្ត្រមួយក្បាលនិងសេដ្ឋកិច្ចមួយក្បាល៖ ដូចគ្នានឹងករណីខាងលើដែរ គឺតាមគោលការណ៍ផលគុណ  $C_7^1 \times C_4^1 = 7 \times 4 = 28$  ករណី

គេបាន ចំនួនរបៀបនៃការរើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលខុសមុខវិជ្ជាគឺ  $42 + 24 + 28 = 94$  របៀប

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបនៃការរើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលជាមុខវិជ្ជាខុសគ្នាសរុប 94 របៀប ។

2. គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 4x \cos 7x}{x^2}$  រក  $\frac{0}{0}$

គេបាន  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 4x \cos 7x}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) + \cos x(1 - \cos 4x) + \cos x \cos 4x(1 - \cos 7x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\cos x(1 - \cos 4x)}{x^2} + \frac{\cos x \cos 4x(1 - \cos 7x)}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \frac{\cos x(2 \sin^2 2x)}{x^2} + \frac{\cos x \cos 4x(2 \sin^2 \frac{7x}{2})}{x^2} \right)$$

$$= 2 \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \times \left( \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \times 2^2 + 2 \left( \frac{\sin \frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}} \right)^2 \times \left( \frac{7}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + 8 + \frac{49}{2}$$

$$= 33$$

ដូចនេះ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 4x \cos 7x}{x^2} = 33$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[2021]{x} - 1}{x - 1}$  រក  $\frac{0}{0}$

គេបាន  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[2021]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt[2021]{x^{2020}} + \sqrt[2021]{x^{2019}} + \sqrt[2021]{x^{2018}} + \dots + 1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[2021]{x^{2020}} + \sqrt[2021]{x^{2019}} + \dots + 1}$$

$$= \frac{1}{2021}$$

ដូចនេះ  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[2021]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2021}$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + 4 \tan^2 x)^{\cot^2 x}$  រក  $1^\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4 \tan^2 x)^{\cot^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 1} [(1 + 4 \tan^2 x)^{\frac{1}{4 \tan^2 x}}]^{4 \tan^2 x \times \cot^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + 4 \tan^2 x)^{\frac{1}{4 \tan^2 x}}]^4 \\ &= e^4 \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4 \tan^2 x)^{\cot^2 x} = e^4}$

3. ក. កំណត់តម្លៃ  $A, B$  និង  $C$

យើងមាន  $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{x}$  ចំពោះគ្រប់  $x \neq 0$

$$= \frac{4x^2 - 4x + 1}{x}$$

$$\Rightarrow f(x) = 4x - 4 + \frac{1}{x}$$

តែ  $f(x) = Ax + B + \frac{C}{x}$

គេបាន  $Ax + B + \frac{C}{x} = 4x - 4 + \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -4 \\ C = 1 \end{cases}$$

ដូចនេះ:  $\boxed{A = 4, B = -4 \text{ និង } C = 1}$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលនៃ  $\int_1^2 f(x) dx$

តាមរយៈសំណួរ (ក) ខាងលើ ៖  $f(x) = 4x - 4 + \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \left( 4x - 4 + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= [2x^2 - 4x + \ln|x|]_1^2 \\ &= (8 - 8 + \ln 2) - (2 - 4 + \ln 1) \\ &= 2 + \ln 2 \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ដូចនេះ:  $\boxed{\int_1^2 f(x) dx = 2 + \ln 2}$

4. ក. គណនា  $A + B$  និង  $A - B$

យើងមាន  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  និង  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } A + B &= \begin{pmatrix} 3+0 & 4+(-1) \\ -1+3 & 3+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } A - B &= \begin{pmatrix} 3-0 & 4-(-1) \\ -1-3 & 3-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ និង } A - B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

ខ. គណនាតម្លៃនៃម៉ាទ្រីស  $C$

$$\text{យើងមាន } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ និង } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{នោះ } A \times B &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3 \times 0) + (4 \times 3) & 3(-1) + (4 \times 1) \\ (1 \times 0) + (3 \times 3) & 1(-1) + (3 \times 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } C = A \times B \text{ យើងបានម៉ាទ្រីស } C = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ដូចនេះ: តម្លៃនៃម៉ាទ្រីស } C = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

5. ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាបូល  $P$  ជាសមីការស្តង់ដារ

$$\text{យើងមាន } P: y^2 - 6y - 12x - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow P: y^2 - 6y + 9 = 12x + 36$$

$$\Leftrightarrow P: (y - 3)^2 = 12(x + 3)$$

$$\text{ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល } P \text{ គឺ } P: (y - 3)^2 = 12(x + 3)$$

ខ. កំណត់ កំណុំ កំពូល និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃសមីការ  $P$

$$\text{យើងមានសមីការស្តង់ដារ } P: (y - 3)^2 = 12(x + 3)$$

$$\text{នោះ } h = -3, k = 3, 4p = 12 \Rightarrow p = 3$$

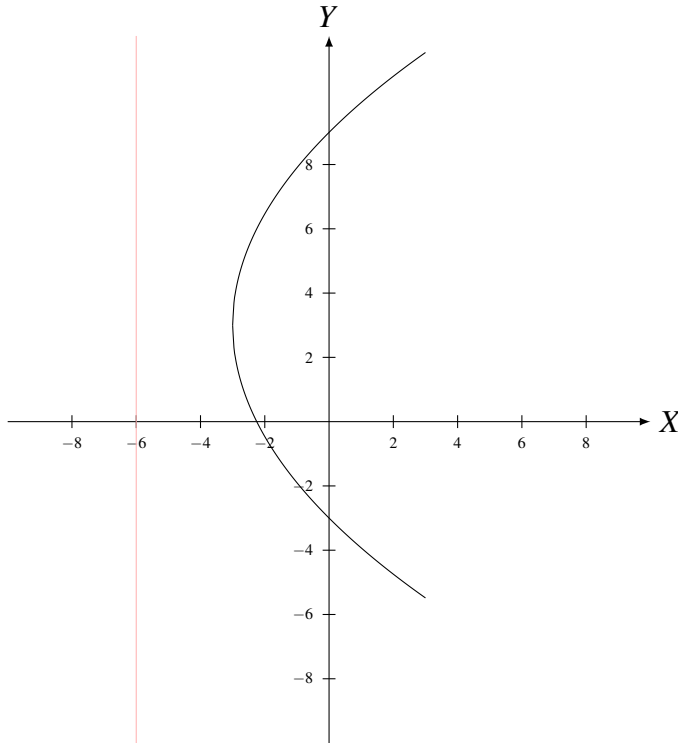
$$\text{គេបាន កំពូល } (h, k) = (-3, 3)$$

$$\text{កំណុំ } (h + p, k) = (0, 3)$$

$$\text{សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស } \Delta: x = h - p = -6$$

ដូចនេះ កំពូល  $V = (-3, 3)$   
 កំណុំ  $F = (0, 3)$   
 សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស  $\Delta : x = -6$

គ. សំណង់ប៉ារ៉ាបូល  $P$



6. ក. រកដែនកំណត់ ដេរីវេទី១ និង ចំណុចបរមាណៃអនុគមន៍  $f$

- ដែនកំណត់

យើងមាន  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3}$

អនុគមន៍  $f$  មានន័យកាលណា  $x^2 - 4x + 3 \neq 0$  ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$  គឺ  $D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

$$(x - 1)(x - 3) \neq 0$$

- ដេរីវេទី១

យើងមាន  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{(2x + 4)(x^2 - 4x + 3) - (x^2 + 4x + 3)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} \\ &= \frac{(2x^3 - 4x^2 - 10x + 12) - (2x^3 + 4x^2 - 10x - 12)}{(x^2 - 4x + 3)^2} \\ &= \frac{-8x^2 + 24}{(x^2 - 4x + 3)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ដេរីវេទី១ នៃអនុគមន៍  $f$  គឺ  $f'(x) = \frac{-8x^2 + 24}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

- រកចំណុចបរមា

$$\text{យើងមាន } f'(x) = \frac{-8x^2 + 24}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$\forall x \in D_f, (x^2 - 4x + 3)^2 > 0$$

$$\text{នោះ } f'(x) \text{ មានសញ្ញាដូច } -8x^2 + 24$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -8x^2 + 24 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

\* ត្រង់  $x = -\sqrt{3}, f'(x)$  ផ្លូវសញ្ញាពី  $-$  ទៅ  $+$  នោះ  $f$  មានចំណុចអប្បបរមាជៀបគឺ

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^2 + 4(-\sqrt{3}) + 3}{(-\sqrt{3})^2 - 4(-\sqrt{3}) + 3}$$

$$= \frac{6 - 4\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{36 - 2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} + 4^2 \cdot 3}{36 - 4^2 \cdot 3}$$

$$= \frac{84 - 48\sqrt{3}}{-12}$$

$$\approx 0.08$$

\* ត្រង់  $x = \sqrt{3}, f'(x)$  ផ្លូវសញ្ញាពី  $+$  ទៅ  $-$  នោះ  $f$  មានចំណុចអតិបរមាជៀបគឺ

$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^2 + 4(\sqrt{3}) + 3}{(\sqrt{3})^2 - 4(\sqrt{3}) + 3}$$

$$= \frac{84 + 48\sqrt{3}}{-12}$$

$$\approx -13.93$$

ដូចនេះ អនុគមន៍  $f$  មានចំណុចបរមាពីរគឺ

ត្រង់  $x = -\sqrt{3}$  អនុគមន៍  $f$  មានតម្លៃអប្បបរមាជៀប  $0.08$  និង

ត្រង់  $x = \sqrt{3}$  អនុគមន៍  $f$  មានតម្លៃអតិបរមាជៀប  $-13.93$

ខ. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \frac{1^2 + 4 \cdot 1 + 3}{1^2 - 4 \cdot 1 + 3} \\ &= \infty \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \frac{3^2 + 4 \cdot 3 + 3}{3^2 - 4 \cdot 3 + 3} \\ &= \infty \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$

រួចទាញរកអាស៊ីមតូត

ដោយ  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$

ដូចនេះ: សមីការបន្ទាត់  $y = 1$  ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃអនុគមន៍  $f$

ហើយ  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$

និង  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$

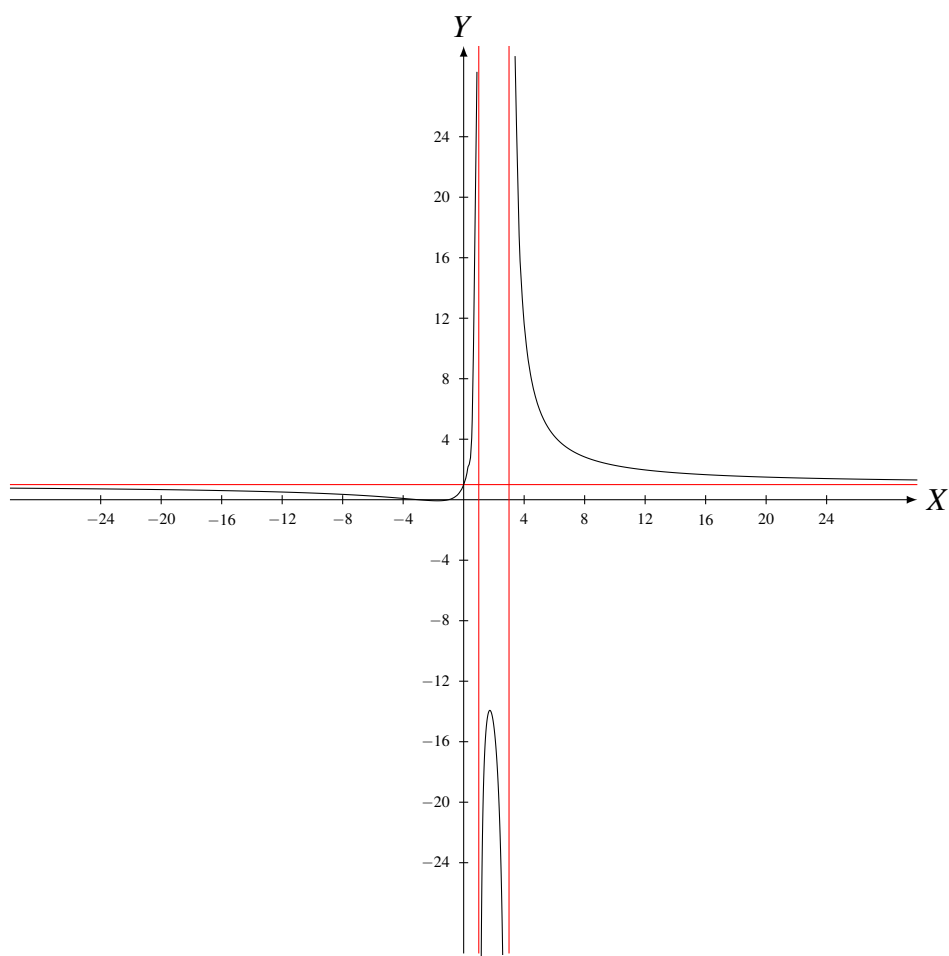
ដូចនេះ: សមីការបន្ទាត់  $x = 1$  និង  $x = 3$  ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍  $f$

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$1$	$\sqrt{3}$	$3$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$1$	$0.08$	$+\infty$	$-13.93$	$+\infty$	$1$



ឃ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍នេះ



ជូនពរ រៀនតាម ចេះ ចាំ និង សំណាងល្អក្នុងការប្រឡង