ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

ចំនួនកុំផ្លិច

កិច្ចការស្រាវជ្រាវរបស់គរុនិស្សិត បរិញ្ញា+១

មុខវិជ្ជា៖ គណិតវិទ្យា

គរុនិស្សិតជំនាន់ទី២៤

គរុនិស្សិត

១. លោក ស្មឿន ដេវីត

២. លោក ស៊ីវ ស៊ីលីន

៣. លោក សំ គឹមសាន

៤. លោក សុក ទូច

៥. លោក រឿន សេរី

ឆ្នាំសិក្សា ២០១៨-២០១៩

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

ចំនួនកុំផ្លិច

កិច្ចការស្រាវជ្រាវរបស់គរុនិស្សិត បរិញ្ញា+១

មុខវិជ្ជា៖ គណិតវិទ្យា

គរុនិស្សិតជំនាន់ទី២៤

គ្រូណែនាំ៖ លោក ផាន់ សុភាព

គរុនិស្សិត

១. លោក ស្មឿន ជេវីត ២. លោក ស៊ីវ ស៊ីលីន

៣. លោក សំ គឹមសាន ៤. លោក សុក ទូច

៥. លោក រឿន សេរី

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **ចំនួនកុំផ្លិច** មួយក្បាលនេះដែលមិត្តអ្នកអានកំពុងកាន់ក្នុងដៃត្រូវបានរៀបរៀងឡើងដោយគរុនិស្សិត (បរិញ្ញា+១) ជំនាន់ទី២៤ ឯកទេសគណិតវិទ្យាក្រុម២ ក្រោមការណែនាំរបស់គ្រូឧទ្ទេស **ផាន់ សុភាព** ក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវ ចង់ចេះ ចង់ដឹង អំពីមេរៀនមួយនេះ ពិសេសសម្រាប់ប្អូនៗថ្នាក់ទី១២ ដែលកំពុងត្រៀមប្រឡងយកសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ និងសម្រាប់ត្រៀមប្រឡងចូលក្របខ័ណ្ឌគ្រូបង្រៀន និងប្រឡងចូលសិក្សាថ្នាក់មហាវិទ្យាល័យនៅតាមសាកលវិទ្យាល័យ នានា ។

ក្នុងសៀវភៅនេះ ពួកយើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវដោយលើកយកនូវរូបមន្ត និងទ្រឹស្តីបទ រួមជាមួយនិងសម្រាយបញ្ជាក់ ចំណែក លំហាត់វិញ ពួកយើងខ្ញុំបានដកស្រង់ចេញពី វិញ្ញាសាប្រឡងឆមាសទី១ ឆមាសទី២ ថ្នាក់ទី១២ (ត្រឹមឆ្នាំ២០១៣) វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប វិញ្ញាសាប្រឡងចូលក្របខ័ណ្ឌគ្រូបង្រៀនទាំង៣កម្រិត និងវិញ្ញាសាប្រឡងយកអាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅក្រៅប្រទេស ។ បន្ថែមពីនេះទៅទៀត យើងខ្ញុំក៏បានសរសេរបន្ថែមនូវ *ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល* ព្រមជាមួយលំហាត់មួយចំនួន ដើម្បីឲ្យមិត្តអ្នកអានបានសិក្សាបន្ថែម ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ការខ្វះខាត និងកំហុសឆ្គងដោយ អចេតនា គង់តែកើតមានឡើងជាក់ជាពុំខានឡើយ ទាំងផ្នែកបច្ចេកទេស និងអក្ខរាវិរុទ្ធ ។ ដូច្នេះ ពួកយើងខ្ញុំដែលជាអ្នករៀបរៀងរង់ចាំទទួលនូវការរិះគន់ និងកែលំអពីសំណាក់មិត្តអ្នកអានជានិច្ច ដើម្បីធ្វើឲ្យសៀវភៅមួយក្បាលនេះកាន់តែមានភាពប្រសើរឡើងមួយកម្រិតទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ ពួកយើងខ្ញុំសូមគោរពអរគុណ ចំពោះមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ ដែលបានអាននូវសៀវភៅមួយនេះ និងជូនពរឲ្យមានសុខភាពល្អ កម្លាំងមាំមួន ប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និងសម្រេចរាល់ភារកិច្ចទាំងអស់ ។

ថ្ងៃព្រហស្បតិ៍ ១០រោច ខែជេស្ឋ ឆ្នាំកុរ ឯកស័ក ព.ស ២៥៦៣
រាជធានីភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី ២៧ ខែ មិថុនា ឆ្នាំ ២០១៩
រៀបរៀងដោយ គរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម (បរិញ្ញា+១)
ថ្នាក់គណិតវិទ្យា ជំនាន់ទី២៤ ក្រុម២

បានឃើញ និងត្រួតពិនិត្យ
ថ្ងៃព្រហស្បតិ៍ ១០រោច ខែជេស្ឋ ឆ្នាំកុរ ឯកស័ក ព.ស២៥៦៣
រាជធានីភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី ២៧ ខែ មិថុនា ឆ្នាំ ២០១៩
គ្រូណែនាំ

ផាន់ សុភាព

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ពួកយើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នា ជាគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម (បរិញ្ញា+១) ជំនាន់ទី២៤ ឯកទេសគណិតវិទ្យាក្រុម២ នៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ សូមធ្វើការថ្លែងអំណរគុណចំពោះអ្នកមានគុណទាំងពីរដែលបានបង្កើតរូបកូនមក ព្រមទាំងចិញ្ចឹមបីបាច់ថែទាំ ផ្តល់ការស្នាក់នៅ អាហាររូបត្ថម្ភ សំលៀកបំពាក់ និងប្រាក់ឧបត្ថម្ភដល់ការរៀនសូត្ររបស់កូនៗ រហូតកូនមានលទ្ធផលដូចថ្ងៃនេះ ។ ពួកកូនទាំងអស់សូមអរគុណជាខ្លាំង នូវការលះបង់ចំពោះលោកទាំងពីរ ដោយមិនគិតពីការនឿយហត់ លំបាកវេទនាយ៉ាងណាក៏ដោយ ក្នុងគោលបំណងឲ្យពួកកូនទាំងអស់ បានរួចផុតពីភាពអវិជ្ជា ល្ងង់ខ្លៅ ក្លាយជាមនុស្សមានភាពថ្លៃថ្នូរ មានគេគោរពស្រឡាញ់ និងមានការងារដ៏ល្អមួយ ពោលគឺអាជីពជាគ្រូបង្រៀន ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត ពួកយើងខ្ញុំក៏សូមគោរពអរគុណដល់ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ទាំងអស់ដែលធ្លាប់បានបង្រៀនពួកខ្ញុំទាំងអស់គ្នា តាំងពីថ្នាក់ទី១ ដល់ទី១២ ។ រាល់ដំបូន្មាន និងការណែនាំអប់រំរបស់ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ បានធ្វើឲ្យពួកខ្ញុំទាំងអស់គ្នា បានក្លាយជាមនុស្សល្អ មានចំណេះដឹង ស្គាល់ខុស ស្គាល់ត្រូវ មានទំនួលខុសត្រូវលើខ្លួនឯង និងជួយឲ្យពួកខ្ញុំទាំងអស់គ្នាមានអនាគតភ្លឺស្វាងដូចសព្វថ្ងៃនេះ ។

សាជាថ្មីម្តងទៀតយើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នា សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះ **ឯកឧត្តមបណ្ឌិត សៀន សុវណ្ណា** នាយកនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ដែលបានជួយសម្របសម្រួលដល់ការរៀនសូត្រ ក្នុងអំឡុងពេលសិក្សានៅទីនេះ ដើម្បីឲ្យពួកខ្ញុំក្លាយជាគ្រូបង្រៀនប្រកបដោយសមត្ថភាព ។ ហើយក៏សូមអរគុណដល់លោកគ្រូ **ផាន់ សុភាព** គ្រូឧទ្ទេសនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ដែលបានជួយសម្របសម្រួល ផ្តល់ជាដំបូន្មានដល់កិច្ចការស្រាវជ្រាវមួយនេះ ។

ម៉្យាងវិញទៀត ពួកយើងខ្ញុំក៏សូមអរគុណដល់ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ដែលជាគ្រូឧទ្ទេស បង្រៀននៅថ្នាក់គណិតវិទ្យាក្រុម២ ដែលបានជួយបង្ហាត់បង្រៀនទាំងផ្នែកឯកទេស វិធីសាស្រ្តបង្រៀន និងចំណេះដឹងទូទៅជាច្រើនទៀត ដើម្បីជាទន់ដ៏រឹងមាំក្នុងការក្លាយជាគ្រូបង្រៀនកម្រិតឧត្តមក្នុងពេលខាងមុខនេះ ។

ជាទីបញ្ចប់ពួកខ្ញុំទាំងអស់គ្នាសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកមានគុណទាំងពីរ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូដែលបានបង្រៀនពួកខ្ញុំពីថ្នាក់ទី១ ដល់ទី១២ ឯកឧត្តមបណ្ឌិតនាយកវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ និងគ្រូឧទ្ទេសនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំទាំងអស់ សូមឲ្យមានសុខភាពល្អ ជោគជ័យរាល់ភារកិច្ច និងជួបប្រទះពុទ្ធពរទាំងបួនប្រការគឺ អាយុ វណ្ណៈ សុខៈ ពលៈ កុំបីឃ្លៀងឃ្លាតឡើយ ។

សូមអរគុណ !

មាតិកា

ផ្នែកទី១ សម្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តចំនួនកុំផ្លិច

នៅក្នុងអំឡុងឆ្នាំ 1572 អ្នកគណិតវិទូជនជាតិអ៊ីតាលីម្នាក់ឈ្មោះ Rafaelle Bombelli បានបកស្រាយចម្លើយនៃសមីការ $x^2+a=0$ ដែល $a>0$ ដោយបង្កើតចំនួនមួយគឺ i ដែល $i^2=-1$ ។ ចំនួន i គឺជាផ្នែកមួយនៃចំនួននិមិត្តដែលស្ថិតនៅក្នុងសំណុំ ចំនួនកុំផ្លិច ។

នៅក្នុងផ្នែកនេះ យើងមានការស្រាយបញ្ជាក់នូវរូបមន្តសំខាន់ៗមួយចំនួន ដើម្បីជាគ្រឹះក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់ចំនួនកុំផ្លិច ។

i) និយមន័យ

គេហៅចំនួនកុំផ្លិច z ជាកន្សោមមួយកំណត់ដោយរាង $z=a+ib$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$ និង $i^2=-1$ ថាជាចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពិជគណិត ហើយ

a ជាផ្នែកពិតនៃចំនួនកុំផ្លិច z (Real part) ដែល $a=\operatorname{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$

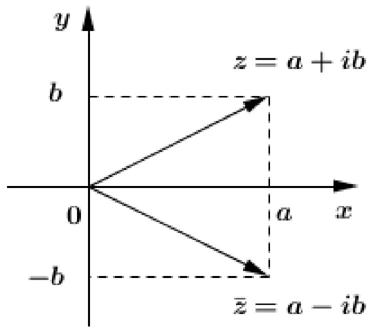
b ជាផ្នែកនិមិត្តនៃចំនួនកុំផ្លិច z (Imaginary part) ដែល $b=\operatorname{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $z=a+ib$ នោះចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់របស់វាតាងដោយ $\overline{z}=a-ib$ យើងបាន

$z+\overline{z}=(a+ib)+(a-ib)=2a$ នោះ $a=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$

$z-\overline{z}=(a+ib)-(a-ib)=2ib$ នោះ $b=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$



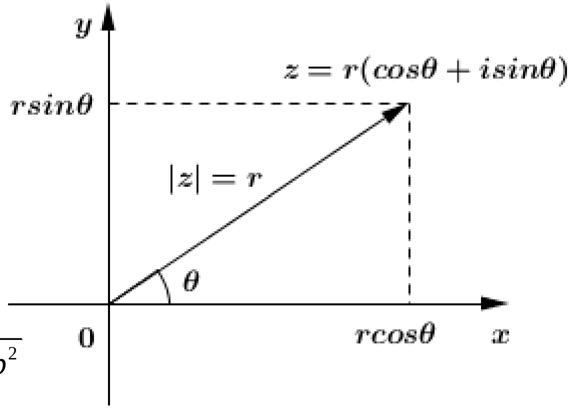
ii) ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $z=a+ib$ នោះ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

យើងបាន $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{|z|}\\ \sin\theta=\dfrac{b}{|z|}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=|z|\cos\theta\\ b=|z|\sin\theta\end{cases}$

នោះ $z=a+ib=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$

ដូច្នេះ $\boxed{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$ ដែល $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$



iii) ទម្រង់អឺលែរនៃចំនួនកុំផ្លិច (Euler´s Formula)

❶ តាមការពន្លាតស៊េរី Macluranc នៃ $\cos\theta,\sin\theta$ និង $e^{i\theta}$ យើងបាន

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad (1)$$

$$\sin\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

$$\Rightarrow i\sin\theta = \frac{i\theta}{1!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \dots \quad (2)$$

$$e^\theta = 1 + \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \dots \quad (3)$$

តាម $(1),(2)\&(3)$ យើងបាន $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

ដូច្នេះ $\boxed{z = re^{i\theta}}$ ហៅថា រូបមន្ត Euler ។

ដូច្នេះ បើ $\boxed{z = re^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}}$ ។

❷ តាមចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

តាង $f(x) = \cos(x) + i\sin(x) \quad (*)$ យើងបាន

$f'(x) = -\sin(x) + i\cos(x)$

$\Leftrightarrow if'(x) = -i\sin(x) - \cos(x)$

នោះ $if'(x) + f(x) = 0$ ឬ $f'(x) - if(x) = 0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ អូម៉ូហ្សែន

ដោះស្រាយសមីការ $f'(x) - if(x) = 0$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = i$$

$$\frac{df}{f(x)} = idx$$

$$\int \frac{df}{f(x)} = i\int dx$$

$$\ln|f(x)| = ix + c$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \pm e^{ix+c} = Ae^{ix} \qquad , A = \pm e^c \qquad (1)$$

តាម $(*)$ ចំពោះ $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$

តាម (1) យើងបាន $f(0) = Ae^0 = 1$

$$A = 1$$

នោះ យើងបាន $f(x) = e^{ix} \quad (**)$

តាម $(*)\&(**)$ យើងបាន $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ ។

ដូច្នេះ $\boxed{z = r\left[\cos(x) + i\sin(x)\right] = re^{ix}}$ ។

❸ តាមដេរីវេ

តាង $f(x) = e^{-ix}(\cos x + i\sin x) \quad (*)$ យើងបាន

$$f'(x) = -ie^{-ix}(\cos x + i\sin x) + e^{-ix}(-\sin x + i\cos x)$$
$$= e^{-ix}(-i\cos x + \sin x) + e^{-ix}(-\sin x + i\cos x)$$
$$= 0$$

ដោយ $f'(x)=0$ នោះ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន f ជាអនុគមន៍ថេរ

ចំពោះ $x=0$ នោះ $f(0)=e^0(\cos 0 + i\sin 0)=1$

$\Rightarrow f(x)=1$

តាម $(*)$ នាំឲ្យ $e^{-ix}(\cos x + i\sin x)=1 \Leftrightarrow \cos x + i\sin x = e^{ix}$

ដូច្នេះ $\boxed{z = r\left[\cos(x)+i\sin(x)\right] = re^{ix}}$ ។

❹ តាមអាំងតេក្រាល

យើងមាន $\dfrac{2i}{x^2+1} = \dfrac{1}{x-i} - \dfrac{1}{x+i}$ ធ្វើអាំងតេក្រាលធៀបនឹង x លើអង្គសងខាង យើងបាន

$$2i\int \frac{1}{x^2+1}dx = \int\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)dx$$

$$2i\tan^{-1}(x) + c = \ln\frac{x-i}{x+i}$$

$$e^{2i\tan^{-1}(x)+c} = \frac{x-i}{x+i}$$

$$Ae^{2i\tan^{-1}(x)} = \frac{x-i}{x+i} \qquad , A = e^c$$

ដោយជំនួស x ដោយ $\tan\dfrac{\theta}{2}$ យើងបាន

$$Ae^{i\theta} = \frac{\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\left(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= -\cos\theta - i\sin\theta$$

ចំពោះ $\theta = 0$ យើងបាន $Ae^0 = -\cos 0 - i\sin 0 \Rightarrow A = -1$

នោះ $-e^{i\theta} = -\cos\theta - i\sin\theta \Leftrightarrow e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

ដូច្នេះ $\boxed{z = r\left[\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right] = re^{i\theta}}$ ។

វិបាក

❶ ដោយប្តូរ i ទៅ $-i$ យើងបានកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $z = re^{i\theta}$ គឺ $\boxed{\overline{z} = re^{-i\theta}}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ នោះកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z គឺ

$$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r\left[\cos\theta + i\sin(-\theta)\right] = r\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

តាមរូបមន្ត Euler យើងបាន $\bar{z} = re^{i(-\theta)} = re^{-i\theta}$

❷ យើងមាន $\begin{cases} e^{ix} = \cos\theta + i\sin\theta & (1) \\ e^{-ix} = \cos\theta - i\sin\theta & (2) \end{cases}$

យក $(1)+(2)$ យើងបាន $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

យក $(1)-(2)$ យើងបាន $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

ដូច្នេះ $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \sin\theta = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$ ។

iv) ផលគុណនៃពីរចំនួនកុំផ្លិច

❶ យើងមាន $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

នោះ $z_1 z_2 = \left[r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\right]\left[r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right]$

$= r_1 r_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right]$

$= r_1 r_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$

$= r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$

ដូច្នេះ $\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]}$ ។

❸ តាង $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ និង $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

នោះ $z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)\left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = r_1 r_2 e^{i\theta_1 + i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

ដូច្នេះ $\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$ ។

v) ផលចែកនៃពីរចំនួនកុំផ្លិច

❶ តាង $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

នោះ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$

$= \dfrac{r_1}{r_2}\dfrac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$

$= \dfrac{r_1}{r_2}\dfrac{\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$

$= \dfrac{r_1}{r_2}\dfrac{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{1}$

$= \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$

ដូច្នេះ $\boxed{\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]}$ ។

❸ តាង $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ និង $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

នោះ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i\theta_1 - i\theta_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

ដូច្នេះ $\boxed{\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}}$ ។

vi) ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

❶ យើងនឹងបង្ហាញថា $z^n=r^n\left[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right]$

យើងមាន $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ពិតចំពោះ $n=1$

$$z^2=r^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2=r^2\left(\cos^2\theta+2i\cos\theta\sin\theta+i^2\sin^2\theta\right)$$
$$=r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta+i2\sin\theta\cos\theta\right)$$
$$=r^2\left(\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)\right)$$ ពិតចំពោះ $n=2$

ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ គឺ $z^k=r^k\left[\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)\right]$

យើងនឹងស្រាយថាពិតដល់ $n=k+1$ គឺ $z^{k+1}=r^{k+1}\left[\cos((k+1)\theta)+i\sin((k+1)\theta)\right]$

យើងមាន $z^{k+1}=z^kz$ $=\left[r^k\left(\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)\right)\right]\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]$
$$=r^{k+1}\left[\cos k\theta\cos\theta+i\sin\theta\cos k\theta+i\sin k\theta\cos\theta+i^2\sin k\theta\sin\theta\right]$$
$$=r^{k+1}\left[\cos k\theta\cos\theta-\mathrm{sink}\,\theta\sin\theta+\mathrm{i}\left(\sin\theta\cos k\theta+\sin k\theta\cos\theta\right)\right]$$
$$=r^{k+1}\left[\cos((k+1)\theta)+i\sin((k+1)\theta)\right]$$ ពិត

ដូច្នេះ $\boxed{z^n=r^n\left[\cos(\mathrm{n}\,\theta)+i\sin(\mathrm{n}\,\theta)\right]}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ហៅថា រូបមន្ត De Mover ។

❸ យើងមាន $z=re^{i\theta}$

នោះ $z^n=\left(re^{i\theta}\right)^n=r^ne^{in\theta}=r^n\left[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right]$

ដូច្នេះ $\boxed{z^n=r^ne^{i(n\theta)}=r^n\left[\cos(\mathrm{n}\,\theta)+i\sin(\mathrm{n}\,\theta)\right]}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{Z}$ ។

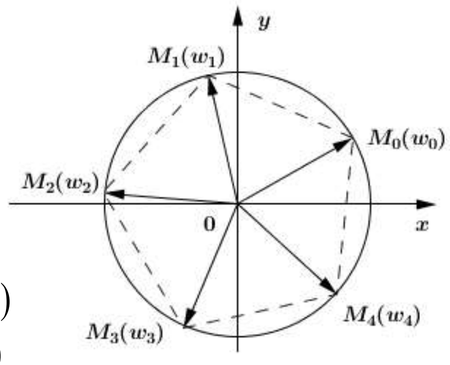
vii) ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

តាង w ជាឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច z នោះគេបាន $w=\sqrt[n]{z}\Leftrightarrow z=w^n$ ។

តាង $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ និង $w=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

នោះ $w^n=\rho^n\left[\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)\right]$

យើងបាន



$$r(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho^n\left(\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}r=\rho^n\\\cos\theta=\cos(n\alpha)\\\sin\theta=\sin(n\alpha)\end{cases}$$

នោះ $\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r}\\n\alpha=\theta+2\pi k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r}\\\alpha=\dfrac{\theta+2\pi k}{n}\end{cases}$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

គេបានឫសទី n នៃ z តាងដោយ $\boxed{w_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\theta+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right]}$ ដែល $k=0,1,2,\ldots,\mathrm{n}-1$

viii) បើ z និង w ជាចំនួនកុំផ្លិច គេបាន $\overline{z\pm w}=\bar{z}\pm\bar{w}$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $\begin{cases} z=a+ib \\ w=c+id \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{z}=a-ib \\ \bar{w}=c-id \end{cases}$

នោះ $z\pm w=(a+ib)\pm(c+id)=(a\pm c)+i(b\pm d)$

នាំឲ្យ $\overline{z\pm w}=(a\pm c)-i(b\pm d) \quad (1)$

$$\bar{z}\pm\bar{w}=(a-ib)\pm(c-id)=(a\pm c)+i(-b\mp d)=(a\pm c)-i(b\pm d) \quad (2)$$

តាម $(1)\&(2)$ យើងបាន $\overline{z\pm w}=\bar{z}\pm\bar{w}$ ពិត ។

ix) បើ z និង w ជាចំនួនកុំផ្លិច គេបាន $\overline{zw}=\bar{z}\times\bar{w}$

សម្រាយបញ្ជាក់

❶ តាង $\begin{cases} z=a+ib \\ w=c+id \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{z}=a-ib \\ \bar{w}=c-id \end{cases}$

យើងបាន $zw=(a+ib)(c+id)=ac+i(ad+bc)-bd=(ac-bd)+i(ad+bc)$

$$\Rightarrow \overline{zw}=(ac-bd)-i(ad+bc) \quad (1)$$

$$\bar{z}\times\bar{w}=(a-ib)(c-id)=ac+i(-ad-bc)-bd=(ac-bd)-i(ad+bc) \quad (2)$$

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន $\overline{zw}=\bar{z}\times\bar{w}$ ពិត ។

❷ តាង $\begin{cases} z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \\ w=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{z}=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)] \\ \bar{w}=\rho[\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)] \end{cases}$

នោះ $zw=r\rho[\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha)] \Rightarrow \overline{zw}=r\rho[\cos(\theta+\alpha)-i\sin(\theta+\alpha)] \quad (1)$

$$\bar{z}\times\bar{w}=r\rho[\cos(-\theta-\alpha)+i\sin(-\theta-\alpha)]=r\rho[\cos(\theta+\alpha)-i\sin(\theta+\alpha)] \quad (2)$$

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន $\overline{zw}=\bar{z}\times\bar{w}$ ពិត ។

❸ តាង $\begin{cases} z=re^{i\theta} \\ w=\rho e^{i\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{z}=re^{-i\theta} \\ \bar{w}=\rho e^{-i\alpha} \end{cases}$

នោះ $zw=(re^{i\theta})(\rho e^{i\alpha})=r\rho e^{i(\theta+\alpha)} \Rightarrow \overline{zw}=r\rho e^{-i(\theta+\alpha)} \quad (1)$

$$\bar{z}\times\bar{w}=(re^{-i\theta})(\rho e^{-i\alpha})=r\rho e^{-i\theta-i\alpha}=r\rho e^{-i(\theta+\alpha)} \quad (2)$$

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន $\overline{zw}=\bar{z}\times\bar{w}$ ពិត ។

x) បើ z និង w ជាចំនួនកុំផ្លិច គេបាន $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

សម្រាយបញ្ជាក់

❶ តាង $\begin{cases} z=a+ib \\ w=c+id \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{z}=a-ib \\ \bar{w}=c-id \end{cases}$

យើងបាន $\frac{z}{w}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac+i(bc-ad)+bd}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

$$\Rightarrow \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-i\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \quad (1)$$

$$\frac{\bar{z}}{\bar{w}}=\frac{a-ib}{c-id}=\frac{(a-ib)(c+id)}{(c-id)(c+id)}=\frac{ac+iad-ibc+bd}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-i\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \quad (2)$$

តាម $(1)\&(2)$ យើងបាន $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ ពិត ។

❷ តាង $\begin{cases} z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \\ w=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overline{z}=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)] \\ \overline{w}=\rho[\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)]\end{cases}$

នោះ $\frac{z}{w}=\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=\frac{r}{\rho}[\cos(\theta-\alpha)+i\sin(\theta-\alpha)]$

$\Rightarrow \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{r}{\rho}[\cos(\theta-\alpha)-i\sin(\theta-\alpha)] \quad (1)$

$\frac{\overline{z}}{\overline{w}}=\frac{r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]}{\rho[\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)]}=\frac{r}{\rho}[\cos(-\theta+\alpha)+i\sin(-\theta+\alpha)]=\frac{r}{\rho}[\cos(\theta-\alpha)-i\sin(\theta-\alpha)] \quad (2)$

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ ពិត ។

❸ តាង $\begin{cases} z=re^{i\theta} \\ w=\rho e^{i\alpha}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overline{z}=re^{-i\theta} \\ \overline{w}=\rho e^{-i\alpha}\end{cases}$

យើងបាន $\frac{z}{w}=\frac{re^{i\theta}}{\rho e^{i\alpha}}=\frac{r}{\rho}e^{i(\theta-\alpha)} \Rightarrow \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{r}{\rho}e^{-i(\theta-\alpha)} \quad (1)$

$\frac{\overline{z}}{\overline{w}}=\frac{re^{-i\theta}}{\rho e^{-i\alpha}}=\frac{r}{\rho}e^{-i\theta+i\alpha}=\frac{r}{\rho}e^{-i(\theta-\alpha)} \quad (2)$

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ ពិត ។

xi) បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិច គេបាន $|z|=|\overline{z}|$

សម្រាយបញ្ជាក់

❶ តាង $z=a+ib \Rightarrow \overline{z}=a-ib$

នោះ $|z|=\sqrt{a^2+b^2} \quad (1)$

$|\overline{z}|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2} \quad (2)$

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន $|z|=|\overline{z}|$ ពិត ។

❷ តាង $z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow \overline{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)$

នោះ $|z|=|r(\cos\theta+i\sin\theta)|=r|\cos\theta+i\sin\theta|=r\sqrt{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}=r \quad (1)$

$|\overline{z}|=|r(\cos\theta-i\sin\theta)|=r|\cos\theta-i\sin\theta|=r\sqrt{(\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}=r \quad (2)$

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន $|z|=|\overline{z}|$ ពិត ។

xii) បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិច គេបាន $|z|^2=z\cdot\overline{z}$

សម្រាយបញ្ជាក់

❶ តាង $z=a+ib \Rightarrow \overline{z}=a-ib$

យើងបាន $z\cdot\overline{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2=|z|^2$

ដូច្នេះ $|z|^2=z\cdot\overline{z}$

❷ តាង $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$

យើងបាន $z\cdot\bar{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot r(\cos\theta - i\sin\theta) = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 = |z|^2$

ដូច្នេះ $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$

❸ តាង $z = re^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$

យើងបាន $z\cdot\bar{z} = re^{i\theta}\cdot re^{-i\theta} = r^2e^{i\theta - i\theta} = r^2 = |z|^2$

ដូច្នេះ $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$

xiii) បើ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច គេបាន $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

សម្រាយបញ្ជាក់

❶ តាង $\begin{cases} z_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ z_2 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) \end{cases}$

យើងបាន $z_1\cdot z_2 = r\rho\left[\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)\right]$

នោះ $|z_1\cdot z_2| = |r\rho\left[\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)\right]| = r\rho|\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)|$

$= r\rho\sqrt{\cos^2(\theta+\alpha) + \sin^2(\theta+\alpha)} = r\rho$

$= |z_1|\cdot|z_2|$

xiv) បើ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច គេបាន $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

សម្រាយបញ្ជាក់

❶ តាង $\begin{cases} z_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ z_2 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) \end{cases}$

យើងបាន $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|\dfrac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)}\right| = \left|\dfrac{r}{\rho}\left[\cos(\theta-\alpha) + i\sin(\theta-\alpha)\right]\right|$

$= \dfrac{r}{\rho}\left|\cos(\theta-\alpha) + i\sin(\theta-\alpha)\right| = \dfrac{r}{\rho}\sqrt{\cos^2(\theta-\alpha) + \sin^2(\theta-\alpha)} = \dfrac{r}{\rho}$

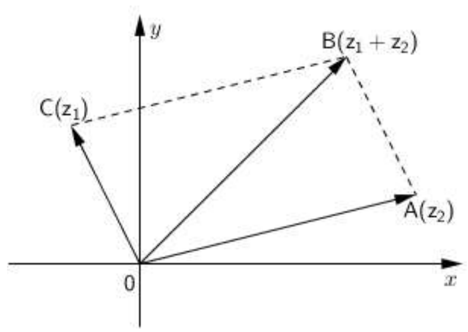
$= \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

xv) បើ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច គេបាន $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

សម្រាយបញ្ជាក់

❶ តាមន័យធរណីមាត្រ

ក្នុងត្រីកោណ OAB យើងមាន



$OB < OA + AB$

តែ $OB = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}|$

$OA = |\overrightarrow{OA}|$

$AB = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OC}|$

យើងបាន $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}| < |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OC}|$

ដូច្នេះ $|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|$ ពិត ។

❷ តាមន័យពិជគណិត

យើងមាន $|z_1|=|z_1+z_2-z_2|\ge|z_1+z_2|-|z_2|$

នោះ $|z_1|+|z_2|\ge|z_1+z_2|$ (1)

$|z_2|=|z_1+z_2-z_1|\ge|z_1+z_2|-|z_1|$

នោះ $|z_1|+|z_2|\ge|z_1+z_2|$ (2)

តាម $(1)\&(2)$ យើងបាន $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ ពិត ។

xvi) បើ Z' ជារូបភាពនៃ z តាមមុំបង្វែងវិល α នោះ $z'=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z$

❶ តាមរូមបន្តបម្លែងវិល

តាង $z=x+iy$ និង $z'=x'+iy'$

បម្លែងវិលនៃចំណុច $Z(x,y)$ នៅក្នុងប្លង់តាមមុំ α គេបានរូបភាព $Z'(x',y')$ ឲ្យដោយ

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$ ។

យើងបាន $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\alpha-y\sin\alpha\\ x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha\\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{cases}$

$$\begin{aligned}z'=x'+iy'&=x\cos\alpha-y\sin\alpha+i(x\sin\alpha+y\cos\alpha)\\&=x(\cos\alpha+i\sin\alpha)+y(i\cos\alpha-\sin\alpha)\\&=x(\cos\alpha+i\sin\alpha)+iy(\cos\alpha+i\sin\alpha)\\&=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(x+iy)\\&=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z\end{aligned}$$ ពិត

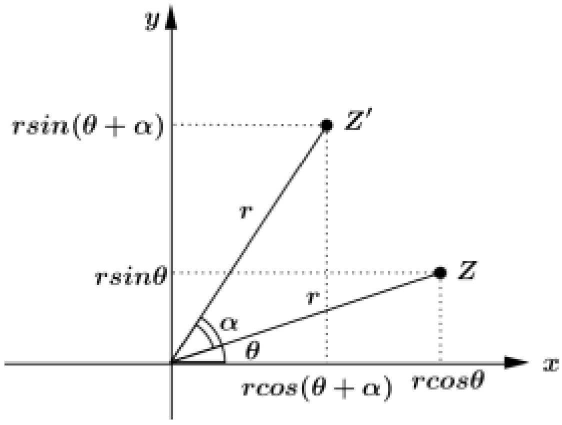
❷ តាមន័យធរណីមាត្រ

ដោយ Z' ជារូបភាពបានមកពីបម្លែងវិលនៃ Z

នោះ $|Z'|=|Z|$ តាងដោយ r ។

តាមរូបខាងស្តាំ យើងបាន

$$Z'=r\left[\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha)\right]$$
$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$=Z(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$



ដូច្នេះ រូបភាពបម្លែងវិលនៃ Z តាមមុំ α កំណត់ដោយ

$$Z'=(\cos\alpha+i\sin\alpha)Z$$ ។

ផ្នែកទី២

លំហាត់ធ្លាប់ចេញប្រឡងឆមាសទី១
(ពី ២០០២ ដល់ ២០១៣)

1. គណនារួចសរសេរជារាង$a+bi$:

   $A: (7+2i)+(1-3i)$ $B: (5+i)-(2+10i)$

   $C: 3i(7-2i)$ $D: (6+i)^2$ (ឆមាស១ 2002)

2. ១. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $Z=1+i$ និង$W=1+i\sqrt{3}$ ។

   ២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $Z=4\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)$ និង$W=2\cos\frac{\pi}{3}-2i\sin\frac{\pi}{3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (ឆមាស១ 2002)

3. ១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $1-2i$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2-2x+5=0$ ។

   ២. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំ$\mathbb{C}$ នូវសមីការ $x^2+6x+13=0$ ។ (ឆមាស១ 2002)

4. រកចំនួនកុំផ្លិចដែលមានការស្មើនឹងចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់របស់វា ។ (ឆមាស១ 2002)

5. កំណត់ចំនួនពិតx និង y ដើម្បីឲ្យ $(x-1)-(3-2y)i=\dfrac{3+2i}{2-i}$ ។ (ឆមាស១ 2003)

6. ១. បង្ហាញថា$\left[(\sqrt{3}+1)i\right]^2=-4-2\sqrt{3}$ ។

   ២. ដោះស្រាយសមីការ$(E): Z^2+(1+\sqrt{3})Z+2+\sqrt{3}=0$ ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ។

   ៣. សរសេរឫស Z_1 និង Z_2របស់សមីការ (E)ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (ឆមាស១ 2003)

7. គេមានចំនួនកុំផ្លិច$z=a+bi$, $u=\sqrt{3}-i$ និង$v=2-2\sqrt{3}i$ ។

   ១. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យបាន $z=\frac{u}{v}$ ។ ក្នុងករណីនេះទាញបញ្ជាក់ថា $u=4\bar{z}$ ។

   ២. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ រកឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}$ ។ (ឆមាស១ 2004)

8. Z និង W ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $Z=-2+2\sqrt{3}i$ និង $W=x(x-i)+y(y+i)$ ដែល$x; y\in\mathbb{R}$ ។

   ១. សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

   ២. សរសេរ Z^3 ជារាង $a+bi$ ។

   ៣. គណនា x និង y បើ $W=Z^3$ ។ (ឆមាស១ 2005)

9. ១. គេឲ្យ $Z=a+bi$ ដែល aនិងb ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ។ សរសេរ $A=\dfrac{Z|Z|^2}{\bar{Z}}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

   ២. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំ$\mathbb{C}$: $x^2-2\sqrt{3}x+4=0$ ។ សរសេរ x_1 ; x_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (ឆមាស១ 2006)

10. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ និង $W=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ។

    ១. បង្ហាញថា $Z^2=W$ រួចគណនា Z^2+Z+1 ។

២. គណនា $A = Z^2 + Z + i$ ។ សរសេរ A ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៣. បង្ហាញថា A^{20} ជាចំនួនពិត ។ (ឆមាស១ 2007)

11. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = a + bi$ និង $A = i(1 + Z)$ ។

១. គណនា A ជាអនុគមន៍នៃ a និង bដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $A = Z$

៣. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $W = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចគណនា W^4ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។ (ឆមាស១ 2008)

12. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z = 1 - i$ និង $W = \sqrt{3} + i$ ។

១. គណនា ZW និង $\frac{Z}{W}$ ។

២. សរសេរ ZW និង $\frac{Z}{W}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (ឆមាស១ 2009)

13. Z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $Z = a + bi \quad a, b$ ជាចំនួនពិត ។

១. រកតម្លៃ a និង b បើដឹងថា $(a + ib)(1 + i) = 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$ ។ គណនា Z^4ចំពោះតម្លៃ a, b ដែលរកឃើញ ។

២. សរសេរ $W = \dfrac{-8 + i8\sqrt{3}}{-2 + i2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត និងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (ឆមាស១ 2010)

14. ១. ចូរកំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $x^2 + (1 + 2i)x + a + 12i = 0$ មានឫសមួយជាចំនួនពិត និងឫសមួយទៀតជាចំនួនកុំផ្លិច រួចរកឫសនៃសមីការនេះផង ។

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $Z = -1 + i\sqrt{3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចបង្ហាញថា Z^{2013} ជាចំនួនពិត ។ (ឆមាស១ 2012 វិ.ពិត)

15. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ និង $b = 2 + 2\sqrt{3}i$ ។

១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច a, b និង $\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (ឆមាស១ 2013 វិ.ពិត)

ដំណោះស្រាយ

1. គណនារួចសរសេរជារាង $a+bi$:

$A: (7+2i)+(1-3i) = 7+2i+1-3i = 8-i$
$B: (5+i)-(2+10i) = 5+i-2-10i = 3-9i$
$C: 3i(7-2i) = 21i-6i^2 = 6+21i$
$D: (6+i)^2 = 36+12i+i^2 = 35+12i$

ដូចនេះ $\boxed{A = 8-i \quad B = 3-9i \quad C = 6+21i \quad D = 35+12i}$

2. ១. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $Z = 1+i$ និង $W = 1+i\sqrt{3}$

គេមាន $Z = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow |Z| = \sqrt{2}\ , \arg(Z) = \frac{\pi}{4}+2k\pi$

$W = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow |W| = 2\ , \arg(W) = \frac{\pi}{3}+2k\pi$

ដូចនេះ $\boxed{|Z| = \sqrt{2}\ , \arg(Z) = \frac{\pi}{4}+2k\pi \quad |W| = 2\ , \arg(W) = \frac{\pi}{3}+2k\pi}$

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z និង W ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $Z = 4\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right) = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 4\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$W = 2\cos\frac{\pi}{3}-2i\sin\frac{\pi}{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

ដូចនេះ $\boxed{Z = 4\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right) \quad W = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}$

3. ១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $1-2i$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2-2x+5=0$

បើ $1-2i$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2-2x+5=0$

យើងបាន $(1-2i)^2-2(1-2i)+5=0$

$$1-4i+4i^2-2+4i+5=0$$
$$4-4=0$$

$0 = 0$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{1 - 2i \text{ ជាឫសនៃសមីការ } x^2 - 2x + 5 = 0}$

២. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំ$\mathbb{C}$ នូវសមីការ $x^2 + 6x + 13 = 0$

$\Delta' = 3^2 - 1 \cdot 13 = 9 - 13 = -4 = 4i^2$

នាំឲ្យ $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{4i^2}}{1} = -3 \pm 2i$

ដូចនេះ $\boxed{x = -3 \pm 2i}$

4. រកចំនួនកុំផ្លិចដែលមានការេស្មើនឹងចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់របស់វា

តាង $z = a + bi$

$\Rightarrow \bar{z} = a - bi = a + (-bi)$

$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$

ដោយ $z^2 = \bar{z}$

នាំឲ្យ $(a^2 - b^2) + 2abi = a + (-bi)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a & (1) \\ 2ab = -b & (2) \end{cases}$

តាម (2) $2ab = -b$

- ករណី $b \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{2ab}{b} = -1$$
$$2a = -1$$
$$a = -\frac{1}{2}$$

យក $a = -\dfrac{1}{2}$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - b^2 = -\dfrac{1}{2}$

$$-b^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$
$$b^2 = \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- ករណី $b = 0$

តាម (1) $a^2 - b^2 = a$

គេបាន $a^2 = a$

$a^2 - a = 0$

$a(a - 1) = 0$

$\Rightarrow a = 0 \quad a = 1$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ,z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_3=0 \qquad ,z_4=1 \end{array}}$

5. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $(x-1)-(3-2y)i=\frac{3+2i}{2-i}$

គេមាន $(x-1)-(3-2y)i=\frac{3+2i}{2-i}$

$$(x-1)-(3-2y)i=\frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$(x-1)-(3-2y)i=\frac{6+3i+4i+2i^2}{2^2-i^2}$$

$$(x-1)-(3-2y)i=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x-1=\frac{4}{5} \\ 3-2y=-\frac{7}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{4}{5}+1 \\ -2y=-\frac{7}{5}-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{9}{5} \\ y=\frac{11}{5}\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{x=\frac{9}{5}\ ,y=\frac{11}{5}}$

6. ១. បង្ហាញថា $\left[(\sqrt{3}+1)i\right]^2=-4-2\sqrt{3}$

គេមាន $\left[(\sqrt{3}+1)i\right]^2=(3+2\sqrt{3}+1)i^2=-(4+2\sqrt{3})=-4-2\sqrt{3}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\left[(\sqrt{3}+1)i\right]^2=-4-2\sqrt{3}}$

២. ដោះស្រាយសមីការ (E): $Z^2+(1+\sqrt{3})Z+2+\sqrt{3}=0$ ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

គេមាន $Z^2+(1+\sqrt{3})Z+2+\sqrt{3}=0$

$$\begin{aligned}\Delta&=(1+\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot(2+\sqrt{3})\\&=1+2\sqrt{3}+3-8-4\sqrt{3}\\&=-4-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

ដោយ $-4-2\sqrt{3}=-(4+2\sqrt{3})$

$$=i^2\left[(1^2+2\cdot1\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2\right]$$

$$=\left[(1+\sqrt{3})i\right]^2$$

នាំឲ្យ $Z=\frac{-(1+\sqrt{3})\pm\sqrt{\left[(1+\sqrt{3})i\right]^2}}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} Z_1=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i \\ Z_2=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\end{array}\right.$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i \\ Z_2 &= -\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}}$

៣. សរសេរឫស Z_1 និង Z_2របស់សមីការ (E)ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $Z_1 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i)$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$Z_2 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1-i)$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{aligned} Z_1 &= \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\ Z_2 &= \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \end{aligned}}$

7. ១.កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យបាន $z=\frac{u}{v}$

គេមាន $z=\frac{u}{v}$

$$\Leftrightarrow a+bi = \frac{\sqrt{3}-i}{2-2\sqrt{3}i}$$

$$a+bi = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+\sqrt{3}i)}{2(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$

$$a+bi=\frac{\sqrt{3}+3i-i-\sqrt{3}i^2}{2(1-3i^2)}$$

$$a+bi=\frac{2\sqrt{3}+2i}{8}$$

$$a+bi=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{4}\quad b=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{a=\frac{\sqrt{3}}{4}\quad b=\frac{1}{4}}$

ទាញបញ្ជាក់ថា $u=4\bar{z}$

ដោយ $a=\frac{\sqrt{3}}{4}\quad b=\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow z=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$$

$$\Rightarrow \bar{z}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$$

គេមាន $u=\sqrt{3}-i$

$$u=4\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\right)$$

$u=4\bar{z}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{u=4\bar{z}}$

២. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$

រកឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{4}$

តាង w ជាឫសការេនៃ $\mathrm{z}=\frac{\sqrt{3}+i}{4}$

ដោយ $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Rightarrow w=\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+k\pi\right)\right]\qquad k\in 0,1$$

ចំពោះ $k = 0 \Rightarrow w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

ចំពោះ $k = 1 \Rightarrow w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right)\right]$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ ឬសការេនៃ $\frac{\sqrt{3}+i}{4}$ គឺ $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ និង $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$

8. ១. សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $Z = -2 + 2\sqrt{3}i$

$$= 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 4\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 4\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{Z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$

២. សរសេរ Z^3 ជារាង $a + bi$

យើងមាន $Z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow Z^3 = \left[4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^3$$

$$= 4^3\left(\cos 3\frac{2\pi}{3} + i\sin 3\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 64(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$$

$$= 64(1 + 0i)$$

$$= 64 + 0i$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^3 = 64 + 0i}$

៣. គណនា x និង y បើ $W = Z^3$

គេមាន $W = x(x - i) + y(y + i)$

និង $Z^3 = 64 + 0i$

ដោយ $W = Z^3$

$\Leftrightarrow x(x - i) + y(y + i) = 64 + 0i$

$x^2 - xi + y^2 + yi = 64 + 0i$

$(x^2+y^2)+(-x+y)i=64+0i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=64 \\ -x+y=0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x^2+y^2=64 & (1) \\ x=y \end{cases}$

តាម (1) យើងបាន $x^2+x^2=64$

$x^2=32$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{32}=\pm 4\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\boxed{x=y=\pm 4\sqrt{2}}$

9. ១. សរសេរ $A=\frac{Z|Z|^2}{\overline{Z}}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $Z=a+bi$

នាំឲ្យ $|Z|=\sqrt{a^2+b^2}$ និង $\overline{Z}=a-bi$

ដោយ $A=\frac{Z|Z|^2}{\overline{Z}}$

$$=\frac{(a+bi)\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}{a-bi}$$
$$=\frac{(a+bi)(a^2+b^2)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)}$$
$$=\frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2+2abi)}{a^2-(bi)^2}$$
$$=\frac{a^4-a^2b^2+2a^3bi+a^2b^2-b^4+2ab^3i}{a^2+b^2}$$
$$=\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}+\frac{2a^3b+2ab^3}{a^2+b^2}$$
$$=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{a^2+b^2}+\frac{2ab(a^2+b^2)}{a^2+b^2}i$$
$$=(a^2-b^2)+2abi$$

ដូចនេះ $\boxed{A=(a^2-b^2)+2abi}$

២. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំ$\mathbb{C}$: $x^2-2\sqrt{3}x+4=0$

$\Delta'=\left(-\sqrt{3}\right)^2-1\cdot 4=3-4=-1=i^2$

គេបាន $\begin{cases} x_1=-\left(-\sqrt{3}\right)+\sqrt{i^2}=\sqrt{3}+i \\ x_2=-\left(-\sqrt{3}\right)-\sqrt{i^2}=\sqrt{3}-i \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{x_1=\sqrt{3}+i \quad ,x_2=\sqrt{3}-i}$

សរសេរ x_1, x_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $x_1=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

និង $x_2=\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 2\left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right) \\ x_2 &= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \end{aligned}}$

10. ១. បង្ហាញថា $Z^2 = W$

យើងមាន $Z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $W = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

នាំឲ្យ $Z^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{4} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot i\frac{\sqrt{3}}{2} + i^2\frac{3}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= W$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^2 = W}$

គណនា $Z^2 + Z + 1$

$$Z^2 + Z + 1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

$$= 0$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^2 + Z + 1 = 0}$

២. គណនា $A = Z^2 + Z + i$

គេមាន $A = Z^2 + Z + i$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + i$$

$$= -1 + i$$

ដូចនេះ $\boxed{A = -1 + i}$

សរសេរ A ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $A = -1 + i$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{A=\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)}$

៣. បង្ហាញថា A^{20} ជាចំនួនពិត

យើងមាន $A=\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$

នាំឲ្យ$A^{20}=\left[\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{20}$

$=\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(cos\,20\frac{3\pi}{4}+i\,sin\,20\frac{3\pi}{4}\right)$

$=2^{10}(\cos 15\pi+i\sin 15\pi)$

$=1024(\cos\pi+i\sin\pi)$

$=1024(-1+0i)$

$=-1024$ ជាចំនួនពិត

ដូចនេះ $\boxed{A^{20}\text{ ជាចំនួនពិត}}$

11. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=a+bi$ និង $A=i(1+Z)$ ។

១. គណនា A ជាអនុគមន៍នៃ a និង bដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $A=i(1+Z)$

ដោយ $Z=a+bi$

នាំឲ្យ $A=i(1+a+bi)=i+ai+bi^2=-b+(1+a)i$

ដូចនេះ $\boxed{A=-b+(1+a)i}$

២. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $A=Z$

ដោយ $A=Z$

នាំឲ្យ $-b+(1+a)i=a+bi$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-b=a\\1+a=b\end{cases}$

$\Rightarrow a=-\frac{1}{2}\ ,b=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{a=-\frac{1}{2}\ ,b=\frac{1}{2}}$

៣. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $\mathrm{W}=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$\mathrm{W}=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathrm{W} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$

គណនា W^4ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $\mathrm{W} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

នាំឲ្យ $W^4 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^4$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\left(\cos 4\frac{3\pi}{4} + i\sin 4\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{4}{16}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi)$$
$$= \frac{1}{4}(\cos\pi + i\sin\pi)$$
$$= \frac{1}{4}(-1 + 0i)$$
$$= -\frac{1}{4} + 0i$$

ដូចនេះ $\boxed{W^4 = -\frac{1}{4} + 0i}$

12. ១. គណនា ZW និង $\frac{Z}{W}$

គេមាន $Z = 1 - i$ និង $W = \sqrt{3} + i$

នាំឲ្យ $ZW = (1 - i)(\sqrt{3} + i)$

$$= \sqrt{3} + i - \sqrt{3}i - i^2$$
$$= 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i$$

$$\frac{Z}{W} = \frac{1 - i}{\sqrt{3} + i}$$
$$= \frac{(1 - i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - i - \sqrt{3}i + i^2}{(\sqrt{3})^2 - i^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1 - \left(1 + \sqrt{3}\right)i}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} ZW = 1 + \sqrt{3} + \left(1 - \sqrt{3}\right)i \\ \dfrac{Z}{W} = \dfrac{\sqrt{3} - 1 - \left(1 + \sqrt{3}\right)i}{4} \end{array}}$

២. សរសេរ ZW និង $\frac{Z}{W}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $Z = 1 - i$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$W = \sqrt{3} + i$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

នាំឲ្យ $ZW = \sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \cdot 2\left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$= 2\sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$\frac{Z}{W} = \frac{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\,sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} ZW = 2\sqrt{2}\left[cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\,sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right] \\ \dfrac{Z}{W} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[cos\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right) + i\,sin\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)\right] \end{array}}$

13. ១. រកតម្លៃ a និង b បើដឹងថា $(a + ib)(1 + i) = 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$

គេមាន $(a + ib)(1 + i) = 1 + \sqrt{3} + i\left(1 - \sqrt{3}\right)$

$$a + ai + bi + bi^2 = 1 + \sqrt{3} + i\left(1 - \sqrt{3}\right)$$

$$(a - b) + (a + b)i = 1 + \sqrt{3} + i\left(1 - \sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 + \sqrt{3} \\ a + b = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

ឬ $\begin{cases} a-b=1-\left(-\sqrt{3}\right) \\ a+b=1+\left(-\sqrt{3}\right) \end{cases}$

នាំឲ្យ $a=1\,,b=-\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{a=1\,,b=-\sqrt{3}}$

គណនា Z^4ចំពោះតម្លៃ $a\ b$ ដែលរកឃើញ

ដោយ $a=1\,,b=-\sqrt{3}$

នាំឲ្យ $Z=1-\sqrt{3}i$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

នាំឲ្យ $Z^4=\left\{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}^4$

$$=2^4\left[\cos 4\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin 4\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=16\left[\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$=16\left(\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=16\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=16\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=16\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=-8+8\sqrt{3}i$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^4=-8+8\sqrt{3}i}$

២. សរសេរ $W=\frac{-8+i8\sqrt{3}}{-2+i2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត និងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $W=\frac{-8+i8\sqrt{3}}{-2+i2}$

$$=\frac{4\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{-1+i}$$

$$=\frac{4\left(-1+i\sqrt{3}\right)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$$

$$=\frac{4\left(1+i-i\sqrt{3}-i^2\sqrt{3}\right)}{(-1)^2-i^2}$$

$$=2\left(1+\sqrt{3}+i-i\sqrt{3}\right)$$

$$=2\left(1+\sqrt{3}\right)+2\left(1-\sqrt{3}\right)i$$

ម្យ៉ាងទៀត $W=\frac{-8+i8\sqrt{3}}{-2+i2}$

ដោយ $-8+i8\sqrt{3}=16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=16\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=16\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

និង $-2+2i=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$=2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

នាំឲ្យ $W=\dfrac{16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$

$$=4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$
$$=4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{W=2(1+\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})i=4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]}$

14. ១. ចូរកំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $x^2+(1+2i)x+a+12i=0$ មានឫសមួយជាចំនួនពិត និងឫសមួយទៀតជាចំនួនកុំផ្លិច

គេមានសមីការ $x^2+(1+2i)x+a+12i=0$

$$\Delta=(1+2i)^2-4(a+12i)$$
$$=1+4i-4-4a-48i$$
$$=-3-4a-44i$$

គេបាន $x=\dfrac{-(1+2i)\pm\sqrt{-3-4a-44i}}{2}$

ដើម្បីឲ្យឫសមួយជាចំនួនពិត លុះត្រាតែ $-3-4a-44i$ ជាការេទ្វេធាដែលមានតួមួយស្មើ $2i$

ដោយ $-3-4a-44i=1-4a-44i-4$

$$=(1-4a)-2\cdot 11\cdot 2i+(2i)^2$$

តាមរូបមន្ត $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

យើងបាន $1-4a=11^2$

$$-4a=121-1$$
$$a=\frac{120}{-4}$$
$$a=-30$$

ដូចនេះ $\boxed{a=-30}$

រកឫសនៃសមីការនេះផង

ដោយ $a=-30$

យើងបាន $x^2+(1+2i)x-30+12i=0$

$\Delta=(1+2i)^2-4\cdot(-30+12i)=1+4i-4+120-48i=117-44i$

ដោយ $117-44i=121-44i-4$

$$=11^2-2\cdot 11\cdot 2i+(2i)^2$$
$$=(11-2i)^2$$

គេបាន $x=\dfrac{-(1+2i)\pm\sqrt{(11-2i)^2}}{2}=\dfrac{-1-2i\pm(11-2i)}{2}$

$x_1=\dfrac{-1-2i-(11-2i)}{2}=\dfrac{-1-2i-11+2i}{2}=-6$

$x_2=\dfrac{-1-2i+(11-2i)}{2}=\dfrac{-1-2i+11-2i}{2}=5-2i$

ដូចនេះ $\boxed{x_1=-6\quad ,x_2=5-2i}$

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $Z=-1+i\sqrt{3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $Z=-1+i\sqrt{3}$

$$=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{Z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$

រួចបង្ហាញថា Z^{2013} ជាចំនួនពិត

យើងមាន $Z=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

នាំឲ្យ $Z^{2013}=\left[2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]^{2013}$

$$=2^{2013}\left(\cos 2013\frac{2\pi}{3}+i\sin 2013\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=2^{2013}(\cos 1342\pi+i\sin 1342\pi)$$
$$=2^{2013}(1+0i)$$
$$=2^{2013}$$ ជាចំនួនពិត

ដូចនេះ $\boxed{Z^{2013}\text{ ជាចំនួនពិត}}$

15. ១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

ដោយ $a = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$

និង $b = 2 + 2\sqrt{3}i = 2(1 + \sqrt{3}i)$

នាំឲ្យ
$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)}{2(1 + \sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{(\sqrt{3} - i)(1 - \sqrt{3}i)}{4(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - 3i - i + \sqrt{3}i^2}{4(1 - 3i^2)}$$
$$= \frac{-4i}{4 \cdot 4}$$
$$= 0 - \frac{1}{4}i$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{a}{b} = 0 - \frac{1}{4}i}$

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច a, b និង $\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $a = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$b = 2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{a}{b} = 0 - \frac{1}{4}i = \frac{1}{4}(0 - i) = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

ដូចនេះ
$$\boxed{\begin{aligned} a &= \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ b &= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ \frac{a}{b} &= \frac{1}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \end{aligned}}$$

ផ្នែកទី៣ លំហាត់ធ្លាប់ចេញប្រឡងឆមាសទី២

(ពី ២០០៣ ដល់ ២០១៣)

1. ១. កំណត់តម្លៃa និង b ដើម្បីឲ្យ $(2-i)$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$ ។

   ២. សរសេរ $Z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (ឆមាស២ 2003)

2. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$ ។

   ១. សរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

   ២. សរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ Z ។

   ៣. ទាញពីរសំណួរខាងលើនូវតម្លៃប្រាកដនៃ $cos\frac{5\pi}{12}$ និង $sin\frac{5\pi}{12}$ ។ (ឆមាស២ 2004)

3. ១. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $(2-3i)$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+ax+b=0$ ។

   ២. រកម៉ូឌុ និងអាគុយម៉ង់ $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{10}$ ។ (ឆមាស២ 2006)

4. ១. ចំនួនកុំផ្លិច Z មានម៉ូឌុល 2 និងអាគុយម៉ង់ $\frac{\pi}{3}$ ។សរសេរ Z ជាទម្រង់ $a+bi$ ដែល $a\ b$ ជាចំនួនពិត។

   ២.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Y=2\left(cos\frac{5\pi}{3}+i\,sin\frac{5\pi}{3}\right)$ ។ គណនា $Z\times Y$ ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

   ៣. បង្ហាញថា $\overline{Y}=Z$ ។ (ឆមាស២ 2007)

5. Z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $Z=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។

   ១. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

   ២. សរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

   ៣. គណនា $cos\frac{5\pi}{12}$ និង $sin\frac{5\pi}{12}$ ។ (ឆមាស២ 2008)

6. យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

   ១. គណនាកន្សោម $A=1+z_1+z_1^2$ ។

   ២. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ គណនា $z_1^{2010}+z_2^{2010}$ ។ (ឆមាស២ 2010)

7. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=x+yi\,,\overline{z}=x-yi\,,a=\sqrt{3}-i$ និង $b=2-2\sqrt{3}i$ ។

   ១. រកចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យបាន $z=\frac{a}{b}$ ។ ក្នុងករណីនេះទាញបញ្ជាក់ថា $a=4\overline{z}$ ។

   ២. សរសេរ $z=\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ ទាញរកឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $\frac{\sqrt{3}+i}{4}$ ។

   (ឆមាស២ 2011 វិ.ពិត)

ដំណោះស្រាយ

1. ១. កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $(2-i)$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$

ដោយ $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$

គេបាន $a(2-i)^2+b(2-i)-20=0$

$$a(4-4i+i^2)+2b-bi-20=0$$
$$3a-4ai+2b-bi-20=0$$
$$(3a+2b-20)+(-4a-b)i=0$$

ដើម្បីឲ្យចំនួនកុំផ្លិចខាងលើស្មើសូន្យ លុះត្រាតែ

$\begin{cases}3a+2b-20=0\\ -4a-b=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}3a+2b=20 & (1)\\ 4a+b=0 & (2)\end{cases}$

តាម (2) $4a+b=0\Rightarrow b=-4a$

យក $b=-4a$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $3a+2(-4a)=20$

$$3a-8a=20$$
$$-5a=20$$
$$a=-4\Rightarrow b=-4(-4)=16$$

ដូចនេះ $\boxed{a=-4\ ,\ b=16}$

២. សរសេរ $Z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

នាំឲ្យ $Z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^3=\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{Z=\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}$

2. ១. សរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $Z=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$

នាំឲ្យ $Z^2=\left[(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)\right]^2$

$$=(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)i+\left[i(\sqrt{3}+1)\right]^2$$
$$=3-2\sqrt{3}+1+2i(3-1)-(3+2\sqrt{3}+1)$$
$$=-4\sqrt{3}+4i$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^2=-4\sqrt{3}+4i}$

២. សរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$Z^2 = -4\sqrt{3} + 4i$$
$$= 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$= 8\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 8\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^2 = 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$

ទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ Z

យើងមាន $Z^2 = 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow |Z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

គេបាន $Z = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right)\right]$

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12} + k\pi\right)\right] \quad k \in 0,1$$

ដោយ $\sqrt{3} - 1 > 0$ និង $\sqrt{3} + 1 > 0$ នាំឲ្យ $\cos\theta > 0$ និង $\sin\theta > 0$

គេបាន $k = 0$

$\Rightarrow Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{|Z| = 2\sqrt{2}, \arg(Z) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}}$

៣. ទាញពីសំណួរខាងលើនូវតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$

យើងមាន $Z = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

និង $Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$$

$$2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} + 2\sqrt{2}i\sin\frac{5\pi}{12} = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{3} - 1 \\ 2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{3} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad ,\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

3. ១. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $(2-3i)$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+ax+b=0$

ដើម្បីឲ្យ $(2-3i)$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+ax+b=0$ លុះត្រាតែ

$$(2-3i)^2+a(2-3i)+b=0$$
$$4-12i+9i^2+2a-3ai+b=0$$
$$(2a+b-5)-(3a+12)i=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a+b-5=0\\ 3a+12=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a+b=5\\ a+4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=13\\ a=-4\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a=-4 \ ,b=13}$

២.រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់ $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{10}$

ដោយ $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

និង $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{10}=\left[\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\right]^{10}$$
$$=\left\{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}^{10}$$
$$=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right]^{10}$$
$$=(\sqrt{2})^{10}\left(\cos 10\frac{\pi}{12}+i\sin 10\frac{\pi}{12}\right)$$
$$=32\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{10}$ មានម៉ូលឌុលស្មើ32 និងអាគុយម៉ង់ស្មើ $\frac{5\pi}{6}+2k\pi \ ,k\in\mathbb{Z}$

4. ១. សរសេរ Z ជាទម្រង់ $a+bi$ ដែល a b ជាចំនួនពិត

ដោយ Z មានម៉ូឌុល 2 និងអាគុយម៉ង់ $\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow Z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\sqrt{3}i$$

ដូចនេះ $\boxed{Z=1+\sqrt{3}i}$

២. គណនា $Z\times Y$ ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

ដោយ $\mathrm{Y}=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$=2\left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=1-\sqrt{3}i$

នាំឲ្យ $Z\times Y=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)$

$=1-3i^2$

$=4$

ដូចនេះ $\boxed{Z\times Y=4}$

៣. បង្ហាញថា $\overline{Y}=Z$

យើងមាន $Y=1-\sqrt{3}i$

នាំឲ្យ $\overline{Y}=1+\sqrt{3}i=Z$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\overline{Y}=Z}$

5. ១. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិ

គេមាន $z=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដោយ $\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$

នាំឲ្យ $Z=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}i^2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

ដូចនេះ $\boxed{\mathrm{Z}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i}$

២. សរសេរ z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដោយ $\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

និង $\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

នោះ $z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$$

នាំឲ្យ $z^2 = \left\{2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]\right\}^2$

$$= 2^2\left[\cos 2\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin 2\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$$
$$= 4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{z^2 = 4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]}$

៣. គណនា $cos\frac{5\pi}{12}$ និង $sin\frac{5\pi}{12}$

យើងមាន $z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

និង $z = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$$\Leftrightarrow 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right] = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$$
$$2\cos\frac{5\pi}{12} - 2i\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ 2\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

6. ១. គណនាកន្សោម $A = 1 + z_1 + z_1^2$

គេមាន $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

គេបាន $A = 1 + z_1 + z_1^2$

$$= 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}i^2\right)$$
$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{A = 0}$

២. សរសេរ z_1, z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$
$$z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{c} z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} \\ z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\end{array}}$

- គណនា $z_1^{2010}+z_2^{2010}$

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{2010}+\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{2010}$$
$$=\left(\cos 2010\frac{2\pi}{3}+i\sin 2010\frac{2\pi}{3}\right)+\left(\cos 2010\frac{4\pi}{3}+i\sin 2010\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$=(\cos 1740\pi+i\sin 1740\pi)+(\cos 3480\pi+i\sin 3480\pi)$$
$$=1+1=2$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1^{2010}+z_2^{2010}=2}$

7. ១.រកចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យបាន $z=\frac{a}{b}$

គេមាន $z=x+iy$, $a=\sqrt{3}+i$, $b=2-2\sqrt{3}i$

នាំឲ្យ $z=\dfrac{a}{b}$

$$\Leftrightarrow x+yi=\frac{\sqrt{3}-i}{2-2\sqrt{3}i}$$
$$x+yi=\frac{(\sqrt{3}-i)(2+2\sqrt{3}i)}{(2-2\sqrt{3}i)(2+2\sqrt{3}i)}$$
$$x+yi=\frac{2\sqrt{3}+6i-2i-2\sqrt{3}i^2}{2^2-(2\sqrt{3}i)^2}$$
$$x+yi=\frac{4\sqrt{3}+4i}{16}$$
$$x+yi=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad , y = \frac{1}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad , y = \frac{1}{4}}$

- ទាញបញ្ជាក់ថា $a = 4\overline{z}$

យើងមាន $z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

$\Rightarrow \overline{z} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$

$\overline{z} = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - i)$

$\overline{z} = \frac{1}{4}a$

$\Rightarrow a = 4\overline{z}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{a = 4\overline{z}}$

២. សរសេរ $z = \frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$

ទាញរកឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $\frac{\sqrt{3} + i}{4}$

តាង w ជាឫសការេនៃ $z = \frac{\sqrt{3} + i}{4}$

ដោយ $z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow w = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + k\pi\right)\right] \quad k \in 0,1$

ចំពោះ $k = 0 \Rightarrow w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

ចំពោះ $k = 0 \Rightarrow w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right)\right]$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} \text{ឫសការេនៃ } \dfrac{\sqrt{3}+i}{4} \text{ គឺ } \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right) \\ \text{និង } \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{13\pi}{12}+i\sin\dfrac{13\pi}{12}\right) \end{array}}$

ផ្នែកទី៤

លំហាត់ធ្លាប់ចេញប្រឡងបាក់ឌុប
(ពី ២០០២ ដល់ ២០១៨)

1. ១. គណនា $A = (1+i)(2-i)$

២. គេឲ្យ $z = 1 - i\sqrt{3}$ ។ ចូរសរសេរ z និង z^{2002} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៣. គេឲ្យ $u = x + iy$ និង $z_1 = a + ib$ ។ ចូរគណនា x និង y ជាអនុគមន៍នៃ a និង b បើដឹងថា $u = z_1^2 + iz_1 - \frac{1}{2}$ ។ (បាក់ឌុប 2002)

2. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = \dfrac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}}$ ។

១. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

២. សរសេរ $Z' = 1 + i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\frac{Z'}{Z}$ ។ (បាក់ឌុប 2003)

3. ១. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $2xi - y = \dfrac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$ ។

២. គេឲ្យ $Z = cos\frac{2\pi}{9} + i\,sin\frac{2\pi}{9}$ ។ សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (បាក់ឌុប 2004)

4. គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $Z_1 = \dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2}{1+i\sqrt{3}}$ និង $Z_2 = (1-i)x + (1-y)(1+i)$ ។

១. សរសេរ Z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យបាន $2\overline{Z_1} - (Z_2 + y - 1) = 0$ $\left(\overline{Z_1}\right.$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $\left.Z_1\right)$ ។ (បាក់ឌុប 2005)

5. ១. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^2 + ax + b = 0$ ។

២. រកឫស x_2 មួយទៀតនៃសមីការ ។ សរសេរ $Z = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។(បាក់ឌុប 2006)

6. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $A = \left(\sqrt{3}-1\right) + i\left(\sqrt{3}+1\right)$ និង $B = \dfrac{x+iy}{1+i}$ ដែល $x\,, y$ ជាចំនួនពិត ។

១. សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

២. សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត។ រក x និង y ដោយដឹងថា $2\overline{B} - A^2 = 0$ $\left(\overline{B}\right.$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $\left.B\right)$ ។ (បាក់ឌុប 2007)

7. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = x + iy$ និង $W = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ដែល x និង y ជាចំនួនពិតខុសពី 0 ហើយ α ជាចំនួនពិត ។

១. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដើម្បីឲ្យ $|Z| = |W|$ ។

២. ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $|Z| = |W|$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{Z} = \overline{Z}$ ។

៣. រក x និង y រួចរក α ដើម្បីឲ្យ $Z = 1 , W = 1$ ។ (បាក់ឌុប 2008)

8. សរសេរ $A = \frac{2(1+i)^2}{1-i\sqrt{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយជាទម្រង់ពីជគណិត ។ (បាក់ឌុប 2009)

9. ១. ដោះស្រាយសមីការ $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ (1) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ។ រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃឫសនីមួយៗរបស់សមីការ (1) ។

២. សរសេរ $w = \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (បាក់ឌុប 2010)

10. ១. រកឫស t_1 , t_2 នៃសមីការ $-t^2 + 2t - 4 = 0$ ដោយយក t_1 ជាឫសដែលមានផ្នែកនិមិត្តអវិជ្ជមាន។

២. សរសេរ $Z = \frac{4t_2}{t_1^3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (បាក់ឌុប 2011 វិ.ពិត)

11. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $y = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

១. គណនា $A = x - y^2$ និង $B = x^2 + x + 1$ ។

២. សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយបង្ហាញថា $C = x^{2013} + y^{2013}$ ជាចំនួនពិត ។ (បាក់ឌុប 2012 វិ.ពិត)

12. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a = 2\sqrt{3} - 2i$ និង $b = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ។

១. សរសេរ $Z = a^2 + b^2 + 4ai + \sqrt{2}b$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២. សរសេរ a , b និង ab ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (បាក់ឌុប 2013 វិ.ពិត)

13. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3} , z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ ។

១. គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ ។

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៣. បង្ហាញថា z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់សមីការ $z^3 - 8 = 0$ ។ (បាក់ឌុប 2014 វិ.ពិត លើកទី១)

14. ១. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{2}$, $z_2 = -i\sqrt{2}$, $z_3 = +i\sqrt{2}$ ។

ក. គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 + z_3$, $(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)$ ។

ខ. កំណត់ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់ $z_1 + z_2$, $z_1 + z_3$, $\left(\frac{z_1 + z_3}{z_1 + z_2}\right)^2$ ។

២. គណនា i^n ចំពោះតម្លៃនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n \geq 1$ ។ ទាញរកតម្លៃ $i^{2015} - i^{2014}$ ។ (បាក់ឌុប 2014 វិ.ពិត លើកទី២)

15. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ ។

១. គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \times z_2$ ។

២. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $z_1 - z_2$, $z_1 \times z_2$ ។ (បាក់ឌុប 2015 វិ.ពិត)

16. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = (1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$ និង $z_3 = -\frac{1}{2}$ ។ គណនា $z_1 + z_2$,

$(z_1+z_2)\times z_3$ ។ សរសេរទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $Z=(z_1+z_2)\times z_3$ ។
ទាញរកតម្លៃនៃ Z^3 ។(បាក់ឌុប 2016 វិ.ពិត)

17. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+i\sqrt{3}$ និង $z_2=6\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

១. សរសេរ z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

២. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z_1^3 ។

៣. សរសេរផលគុណ $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ (បាក់ឌុប 2017 វិ.ពិត)

18. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=3+3i\sqrt{3}$ និង $z_2=\sqrt{3}+i$ ។

១.គណនា $z_1\times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ។

២.សរសេរ $z_1\times z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៣.សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ (បាក់ឌុប 2018 វិ. ពិត)

ដំណោះស្រាយ

1. ១. គណនា $A=(1+i)(2-i)$

$A=(1+i)(2-i)$

$A=2-i+2i-i^2$

$\boxed{A=3+i}$

២. សរសេរ z និង z^{2002} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z=1-i\sqrt{3}$

$$=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

នាំឲ្យ $z^{2002}=\left\{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}^{2002}$

$$=2^{2002}\left[\cos 2002\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin 2002\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2^{2002}\left[\cos\left(-668\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-668\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2^{2002}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ z^{2002}=2^{2002}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\end{array}}$

៣. គណនា x និង y ជាអនុគមន៍នៃ a និង b

យើងមាន $u=z_1^2+iz_1-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x+iy=(a+ib)^2+i(a+ib)-\frac{1}{2}$$

$$x+iy=a^2+2iab+(ib)^2+ai+i^2b-\frac{1}{2}$$

$$x+iy=\left(a^2-b^2-b-\frac{1}{2}\right)+i(2ab+a)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=a^2-b^2-b-\frac{1}{2}\\ y=2ab+a\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{x=a^2-b^2-b-\frac{1}{2}\ \ ,y=2ab+a}$

2. ១. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $Z=\dfrac{2(-1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$

$$=\frac{2(-1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{-2\left(1-2i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2\right)}{1-(i\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{-2(-2-2i\sqrt{3})}{4}$$

$$=1+i\sqrt{3}$$

សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $Z=1+i\sqrt{3}$

$$=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{Z=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

២. សរសេរ $Z'=1+i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$Z'=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ទាញរកម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\dfrac{Z'}{Z}$

$$\frac{Z'}{Z}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\left|\frac{Z'}{Z}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad,\arg\left(\frac{Z'}{Z}\right)=-\frac{\pi}{12}+2k\pi\ \ k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះ $\boxed{\left|\frac{Z'}{Z}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad,\arg\left(\frac{Z'}{Z}\right)=-\frac{\pi}{12}+2k\pi\ \ k\in\mathbb{Z}}$

3. ១. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $2xi-y=\dfrac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$

យើងមាន $2xi-y=\dfrac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$

$$2xi - y = \frac{(3 + 3i - 2i - 2i^2)}{(i + 2i^2)}$$
$$2xi - y = \frac{(5 + i)(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)}$$
$$2xi - y = \frac{-10 - 5i - 2i - i^2}{(-2)^2 - i^2}$$
$$2xi - y = \frac{-7i - 9}{5}$$
$$2xi - y = -\frac{7}{5}i - \frac{9}{5}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{7}{5} \\ y = \frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{10} \\ y = \frac{9}{5} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{x = -\frac{7}{10} \quad , y = \frac{9}{5}}$

២. សរសេរ $(1 + Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $Z = cos\frac{2\pi}{9} + i\,sin\frac{2\pi}{9}$

$$\Rightarrow 1 + Z = 1 + cos\frac{2\pi}{9} + i\,sin\frac{2\pi}{9}$$
$$= 2\cos^2\frac{\pi}{9} + 2i\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$$
$$= 2\cos\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$
$$\Rightarrow (1 + Z)^4 = \left[2\cos\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)\right]^4$$
$$= 16\cos^4\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{(1 + Z)^4 = 16\cos^4\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)}$

4. ១. សរសេរ Z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $Z_1 = \dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2}{1 + i\sqrt{3}}$

$$= \frac{2^2\left(\cos 2\frac{\pi}{12} + i\sin 2\frac{\pi}{12}\right)}{2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$
$$= \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$$
$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

សរសេរ Z_1 ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $Z_1 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3} - i$$

ដូចនេះ $\boxed{Z_1 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3} - i}$

២. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យបាន $2\overline{Z_1} - (Z_2 + y - 1) = 0$

យើងមាន $Z_1 = \sqrt{3} - i \Rightarrow \overline{Z_1} = \sqrt{3} + i$

គេមាន $2\overline{Z_1} - (Z_2 + y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{3} + i) - [(1 - i)x + (1 - y)(1 + i) + y - 1] = 0$

$2\sqrt{3} + 2i - (x - xi + 1 + i - y - yi + y - 1) = 0$

$$2\sqrt{3} + 2i - (x - xi - yi + i) = 0$$

$$(2\sqrt{3} - x) + (1 - x - y)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3} - x = 0 \\ 1 - x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{x = 2\sqrt{3} \ \ , y = 1 - 2\sqrt{3}}$

5. ១. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^2 + ax + b = 0$

បើ $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^2 + ax + b = 0$

លុះត្រាតែ $(1 + i\sqrt{3})^2 + a(1 + i\sqrt{3}) + b = 0$

$$(a + b - 2) + (a\sqrt{3} + 2\sqrt{3})i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 2 = 0 \\ a\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -2 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a = -2 \ \ , b = 4}$

២.រកឫស x_2 មួយទៀតនៃសមីការ

ដោយ $a = -2$ និង $b = 4$

គេបាន $x^2 - 2x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \times x_2 = 4 \end{cases}$

ដោយ $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 - x_1$

$$x_2 = 2 - (1 + i\sqrt{3})$$

$$x_2 = 2 - 1 - i\sqrt{3}$$
$$x_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{x_2 = 1 - i\sqrt{3}}$

សរសេរ $Z = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$

$$= \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}$$
$$= \frac{1 + 2i\sqrt{3} + 3i^2}{1 - 3i^2}$$
$$= \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4}$$
$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

នាំឲ្យ $Z = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}}$

6. ១. សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$A^2 = \left[(\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)\right]^2$$
$$= (\sqrt{3} - 1)^2 + 2i(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) + i^2(\sqrt{3} + 1)^2$$
$$= (3 - 2\sqrt{3} + 1) + 2i(3 - 1) - (3 + 2\sqrt{3} + 1)$$
$$= -4\sqrt{3} + 4i$$

សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$A^2 = -4\sqrt{3} + 4i$$

ដោយ $|A^2| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{48 + 16} = 8$

នាំឲ្យ $A^2 = -4\sqrt{3} + 4i$

$$= 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$= 8\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 8\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{aligned} A^2 &= -4\sqrt{3} + 4i \\ &= 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\end{aligned}}$

២. សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $B = \dfrac{x+iy}{1+i} = \dfrac{(x+iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{x - xi + iy - i^2y}{1-i^2} = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{y-x}{2}i$

ដូចនេះ $\boxed{B = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{y-x}{2}i}$

រក x និង y ដោយដឹងថា $2\overline{B} - A^2 = 0$

យើងមាន $B = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{y-x}{2}i \Rightarrow \overline{B} = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{y-x}{2}i$

គេមាន $2\overline{B} - A^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}i\right) - \left(-4\sqrt{3} + 4i\right) = 0$$
$$x + y - yi + xi + 4\sqrt{3} - 4i = 0$$
$$\left(x + y + 4\sqrt{3}\right) + (x - y - 4)i = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 4\sqrt{3} = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x + y = -4\sqrt{3} & (1) \\ x - y = 4 & (2) \end{cases}$$

យក $(1) + (2)$

គេបាន $2x = -4\sqrt{3} + 4 \Rightarrow x = -2\sqrt{3} + 2$

យក $x = -2\sqrt{3} + 2$ ជំនួសក្នុង (1)

យើងបាន $-2\sqrt{3} + 2 + y = -4\sqrt{3}$

$$y = -4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2$$
$$y = -2\sqrt{3} - 2$$

ដូចនេះ $\boxed{x = -2\sqrt{3} + 2 \ \ , y = -2\sqrt{3} - 2}$

7. ១. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដើម្បីឲ្យ $|Z| = |W|$

គេមាន $Z = x + iy \Rightarrow |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

និង $W = \cos\alpha + i\sin\alpha \Rightarrow |W| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$

ដើម្បីឲ្យ $|Z| = |W| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{គេបានទំនាក់ទំនង} x^2+y^2=1}$

២. ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $|Z|=|W|$ ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{Z}=\overline{Z}$

គេមាន $Z=x+iy \Rightarrow \overline{Z}=x-iy$

$\dfrac{1}{Z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$

ដោយ $x^2+y^2=1$

នាំឲ្យ $\frac{1}{Z}=x-iy=\overline{Z}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1}{Z}=\overline{Z}}$

៣. រក x និង y រួចរក α ដើម្បីឲ្យ $Z=1\,,W=1$

ចំពោះ $Z=1 \Leftrightarrow x+iy=1+0i$ នោះ $x=1\,,y=0$

តែ x និង y ជាចំនួនពិតខុសពី 0 នោះ y គ្មានចម្លើយ

ដូចនេះ $x=1\,,y$ គ្មានចម្លើយ

ចំពោះ $W=1 \Leftrightarrow \cos\alpha+i\sin\alpha=1+0i$

នោះ $\begin{cases}\cos\alpha=1\\ \sin\alpha=0\end{cases} \Rightarrow \alpha=2k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha=2k\pi\,,k\in\mathbb{Z}}$

8. សរសេរ A ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $A=\dfrac{2(1+i)^2}{1-i\sqrt{3}}$

ដោយ $1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

និង $1-i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

នាំឲ្យ $A=\dfrac{2\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}$

$=\dfrac{2\left(\cos 2\frac{\pi}{4}+i\sin 2\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$=2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

$=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

សរសេរ A ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $A=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

$$= 2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\sqrt{3} + i$$

ដូចនេះ $\boxed{A = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i}$

9. ១. ដោះស្រាយសមីការ $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ (1) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

$\Delta' = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 1\cdot 4 = 2 - 4 = -2 = 2i^2$

នាំឲ្យ $z = \dfrac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{2i^2}}{1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{array}\right.$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \ \ , z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i}$

រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃឫសនីមួយៗរបស់សមីការ (1)

យើងមាន $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow |z_1| = 2$ និង $arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$

$z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\Rightarrow |z_2| = 2$ និង $arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{|z_1| = |z_2| = 2 \ , \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} \ \ , \arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}}$

២. សរសេរ $w = \left(\dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

និង $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

គេបាន $w = \left\{\dfrac{2\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}\right\}^2$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2$$
$$= \left(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$= \cos 2\frac{\pi}{2} + i\sin 2\frac{\pi}{2}$$
$$= \cos\pi + i\sin\pi$$

ដូចនេះ $\boxed{w = \cos\pi + i\sin\pi}$

10. ១. រកឬស t_1, t_2 នៃសមីការ $-t^2 + 2t - 4 = 0$

$\Delta' = 1^2 - (-1)(-4) = -3 = 3i^2$

គេបាន $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3i^2}}{-1} \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 - \sqrt{3}i \\ t_2 = 1 + \sqrt{3}i \end{array}\right.$

ដូចនេះ $\boxed{t_1 = 1 - \sqrt{3}i \quad , t_2 = 1 + \sqrt{3}i}$

២. សរសេរ $Z = \dfrac{4t_2}{t_1^3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $t_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

និង $t_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

យើងមាន $Z = \dfrac{4t_2}{t_1^3} = \dfrac{4\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\left\{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}^3}$

$$= \frac{8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{8\left[\cos 3\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}$$
$$= \cos\left[\frac{\pi}{3} - (-\pi)\right] + i\sin\left[\frac{\pi}{3} - (-\pi)\right]$$
$$= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}}$

11. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ និង $y = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ។

១. គណនា $A = x - y^2$

គេមាន $A = x - y^2$

$$= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot i\frac{\sqrt{3}}{2} + i^2\frac{3}{4}\right)$$
$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 0$$

គណនា $B = x^2 + x + 1$

គេមាន $B = x^2 + x + 1$

$$= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1$$
$$= \left[\frac{1}{4} - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot i\frac{\sqrt{3}}{2} + i^2\frac{3}{4}\right] - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$
$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$
$$= 0$$

ដូចនេះ $\boxed{A = 0 \ \ , B = 0}$

២. សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $x = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

និង $y = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} x = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \\ y = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \end{array}}$

បង្ហាញថា $C = x^{2013} + y^{2013}$ ជាចំនួនពិត

យើងមាន $x = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ និង $y = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

នាំឲ្យ $C = x^{2013} + y^{2013}$

$$= \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{2013} + \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{2013}$$
$$= \left(\cos 2013\frac{4\pi}{3} + i\sin 2013\frac{4\pi}{3}\right) + \left(\cos 2013\frac{2\pi}{3} + i\sin 2013\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= (\cos 2684\pi + i\sin 2684\pi) + (\cos 1342\pi + i\sin 1342\pi)$$
$$= (1 + 0i) + (1 + 0i)$$

$= 2$ ជាចំនួនពិត

ដូចនេះ $\boxed{C = x^{2013} + y^{2013} \text{ ជាចំនួនពិត}}$

12. ១. សរសេរ $Z = a^2 + b^2 + 4ai + \sqrt{2}b$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $Z = a^2 + b^2 + 4ai + \sqrt{2}b$

ដោយ $a = 2\sqrt{3} - 2i$ និង $b = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

យើងបាន

$$\begin{aligned} Z &= (2\sqrt{3} - 2i)^2 + (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 + 4(2\sqrt{3} - 2i)i + \sqrt{2}(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \\ &= (12 - 8\sqrt{3}i + 4i^2) + (2 - 4i + 4i^2) + 8\sqrt{3} - 8i - 2 + 2i \\ &= 8 - 8\sqrt{3}i - 2 - 4i + 8\sqrt{3} - 2 - 6i \\ &= (4 + 8\sqrt{3}) - (10 + 8\sqrt{3})i \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z = (4 + 8\sqrt{3}) - (10 + 8\sqrt{3})i}$

២. សរសេរ a, b និង ab ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $a = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4\left(cos\frac{\pi}{6} - i\,sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\left[cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$\begin{aligned} b &= -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ &= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \cdot 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right)\right] \\ &= 8\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

ដូចនេះ
$$\boxed{\begin{aligned} &a = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &b = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\ &ab = 8\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) \end{aligned}}$$

13. ១. គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$

គេមាន $z_1 + z_2 = -1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -2$

$$z_1 - z_2 = -1 + i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$$

$$z_1 z_2 = (-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3} - i\sqrt{3} - 3i^2 = 4$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1+z_2=-2\ \ ,z_1-z_2=2i\sqrt{3}\ \ ,z_1z_2=4}$

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z_1=-1+i\sqrt{3}$

$$=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$z_2=-1-i\sqrt{3}$

$$=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $$\boxed{\begin{aligned}z_1&=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\ z_2&=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\end{aligned}}$$

៣. បង្ហាញថា z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់សមីការ $z^3-8=0$

បើ z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់សមីការ $z^3-8=0$

លុះត្រាតែ $\begin{cases}z_1^3-8=0\\ z_2^3-8=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^3-8=0\\ \left[2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right]^3-8=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2^3\left(\cos 3\frac{2\pi}{3}+i\sin 3\frac{2\pi}{3}\right)-8=0\\ 2^3\left(\cos 3\frac{4\pi}{3}+i\sin 3\frac{4\pi}{3}\right)-8=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}8(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)-8=0\\ 8(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)-8=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}8(1+0i)-8=0\ \text{ ពិត}\\ 8(1+0i)-8=0\ \text{ ពិត}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8-8=0 & \text{ពិត} \\ 8-8=0 & \text{ពិត} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 \text{ និង } z_2 \text{ ជាឫសរបស់សមីការ } z^3-8=0}$

14. ១. ក. គណនា z_1+z_2 , z_1+z_3 , $(z_1+z_2)(z_1+z_3)$

$$z_1+z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$
$$z_1+z_3=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$
$$\begin{aligned}(z_1+z_2)(z_1+z_3)&=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{2})\\&=2+2i-2i-2i^2\\&=4\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{aligned}&z_1+z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{2}\\&z_1+z_3=\sqrt{2}+i\sqrt{2}\\&(z_1+z_2)(z_1+z_3)=4\end{aligned}}$

ខ. កំណត់ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់ z_1+z_2 , z_1+z_3 , $\left(\frac{z_1+z_3}{z_1+z_2}\right)^2$

យើងមាន

$$z_1+z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow |z_1+z_2|=2\ \ ,\arg(z_1+z_2)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$z_1+z_3=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow |z_1+z_3|=2\ \ ,\arg(z_1+z_3)=\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{z_1+z_3}{z_1+z_2}\right)^2&=\left\{\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}\right\}^2\\&=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\\&=\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]^2\\&=\cos2\frac{\pi}{2}+i\sin2\frac{\pi}{2}\\&=\cos\pi+i\sin\pi\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|\left(\frac{z_1+z_3}{z_1+z_2}\right)^2\right|=1\ \ ,\arg\left[\left(\frac{z_1+z_3}{z_1+z_2}\right)^2\right]=\pi+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{aligned}&|z_1+z_2|=2\ \ ,arg(z_1+z_2)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\\&|z_1+z_3|=2\ \ ,arg(z_1+z_3)=\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\\&\left|\left(\frac{z_1+z_3}{z_1+z_2}\right)^2\right|=1\ \ ,arg\left[\left(\frac{z_1+z_3}{z_1+z_2}\right)^2\right]=\pi+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\end{aligned}}$

២. គណនា i^n ចំពោះតម្លៃនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n \geq 1$

ដោយ $i^1 = i \quad , i^2 = -1 \quad , i^3 = i \cdot i^2 = -i \ , i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i \ , i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1 \ , i^7 = i^4 \cdot i^3 = i \ \ , i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$

តាមលំនាំខាងលើ គេអាចទាញបាន

បើ $n = 4k + 1 , k \in \mathbb{N}$ នោះ $i^n = i$

បើ $n = 4k + 2 \ , k \in \mathbb{N}$ នោះ $i^n = -1$

បើ $n = 4k + 3 \ , k \in \mathbb{N}$ នោះ $i^n = -i$

បើ $n = 4k \ \ , k \in \mathbb{N}$ នោះ $i^n = 1$

ទាញរកតម្លៃ $i^{2015} - i^{2014}$

$$\begin{aligned} i^{2015} - i^{2014} &= i^{2012+3} - i^{2012+2} \\ &= -i—1 \\ &= 1 - i \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{i^{2015} - i^{2014} = 1 - i}$

15. ១. គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \times z_2$

$z_1 + z_2 = -1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} = 0$

$z_1 - z_2 = -1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} = -2 + 2i\sqrt{3}$

$z_1 \times z_2 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right) = -1 + i\sqrt{3} + i\sqrt{3} - 3i^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{aligned} &z_1 + z_2 = 0 \\ &z_1 - z_2 = -2 + 2i\sqrt{3} \\ &z_1 \times z_2 = 2 + 2i\sqrt{3} \end{aligned}}$

២. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $z_1 - z_2$, $z_1 \times z_2$

យើងមាន $z_1 - z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} &= 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 4\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 4\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$z_1 \times z_2 = 2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ z_1 \times z_2 &= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}}$

16. គណនា $z_1 + z_2$, $(z_1 + z_2) \times z_3$

យើងមាន $z_1 + z_2 = \sqrt{3} - i + \left(1 - \sqrt{3}\right) + \left(1 - \sqrt{3}\right)i = 1 - \sqrt{3}i$

$$(z_1 + z_2) \times z_3 = \left(1 - \sqrt{3}i\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{aligned} & z_1 + z_2 = 1 - \sqrt{3}i \\ & (z_1 + z_2) \times z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}}$

សរសេរទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $Z = (z_1 + z_2) \times z_3$

គេមាន $Z = (z_1 + z_2) \times z_3$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}}$

ទាញរកតម្លៃនៃ Z^3

យើងមាន $Z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow Z^3 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3 = \cos 3\frac{2\pi}{3} + i\sin 3\frac{2\pi}{3} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^3 = 1}$

17. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

១. សរសេរ z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

ដូចនេះ $\boxed{z_2 = 6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}$

២. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z_1^3

គេមាន $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

នាំឲ្យ $z_1^3 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3 = 2^3\left(\cos 3\frac{\pi}{3} + i\sin 3\frac{\pi}{3}\right) = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$

$\Rightarrow |z_1^3| = 8\ ,\arg(z_1^3) = \pi$

ដូចនេះ $\boxed{|z_1^3| = 8\ ,\arg(z_1^3) = \pi}$

៣. សរសេរផលគុណ $z_1 \times z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

និង $z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$

នាំឲ្យ $z_1 \times z_2 = (1 + i\sqrt{3})(3\sqrt{2} - i3\sqrt{2})$

$= 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} + 3i\sqrt{6} - 3i^2\sqrt{6}$

$= (3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}) - i(3\sqrt{2} - 3\sqrt{6})$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 \times z_2 = (3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}) - i(3\sqrt{2} - 3\sqrt{6})}$

18. ១.គណនា $z_1 \times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$

យើងមាន $z_1 = 3 + 3i\sqrt{3}$ និង $z_2 = \sqrt{3} + i$

នាំឲ្យ $z_1 \times z_2 = (3 + 3i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 3\sqrt{3} + 3i + 9i + 3i^2\sqrt{3} = 12i$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}\\ &= \frac{(3 + 3i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)}\\ &= \frac{3\sqrt{3} - 3i + 9i - 3i^2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - i^2}\\ &= \frac{6\sqrt{3} + 6i}{4}\\ &= \frac{3\sqrt{3} + 3i}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 \times z_2 = 12i\ ,\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{3} + 3i}{2}}$

២. សរសេរ $z_1 \times z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $z_1 \times z_2 = 12i = 12(0+i) = 12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}+3i}{2}\right)^2 = \left[3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right]^2$$
$$= \left[3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^2$$
$$= 3^2\left(\cos 2\frac{\pi}{6} + i\sin 2\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 9\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 \times z_2 = 12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$, $\boxed{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = 9\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

៣. សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $\frac{z_1}{z_2} = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

នាំឲ្យ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 = \left[3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^3$
$$= 3^3\left(\cos 3\frac{\pi}{6} + i\sin 3\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 27(0+i)$$
$$= 0 + 27i$$

ដូចនេះ $\boxed{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 = 0 + 27i}$

ផ្នែកទី៥ លំហាត់ធ្លាប់ចេញប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀន
(ពី ២០០១ ដល់ ២០១៨)

I. លំហាត់ចេញប្រឡងគ្រូបឋម

1. គណនាផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{1+i}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}$ ។ (គ្រូបឋម 2002)

2. ១. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $x^2-2x+5=0$ ។
   ២. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$ ។
   ៣. សរសេរ $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (គ្រូបឋម 2005)

3. ១. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $z, \frac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូលឌុលស្មើគ្នា ។
   ២. ដោះស្រាយសមីការ $|x|-x=1+2i$ ដែល x មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិច ។ (គ្រូបឋម 2006)

4. ១. គេឲ្យ $P(z)=z^2+2(2+i)z+3+4i$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។ បញ្ជាក់ថា $P(z)$ ជាការេនៃពហុធាដឺក្រេទី១ ។
   ២. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=1+i$ ។ បង្ហាញថា $z^3=-2+2i$ ។ ចំពោះតម្លៃនៃ z នេះ ចូររកចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $\frac{a}{1+z}+\frac{b}{1+z^3}=2i$ ។ (គ្រូបឋម 2007)

5. គណនាចំនួនកុំផ្លិច $z=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2002}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2001}$ ។ (គ្រូបឋម 2009)

6. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ ។
   ១. គណនា Z^5 រួចទាញរកតម្លៃនៃ $1+Z+Z^2+Z^3+Z^4$ ។
   ២. សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (គ្រូបឋម 2011)

7. គេឲ្យ z ជាចំនួនកុំផ្លិច ដែល $z=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។
   ១. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួច z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
   ២.គណនា $cos\frac{5\pi}{12}$ និង $sin\frac{5\pi}{12}$ ។ (គ្រូបឋម 2012)

8. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ។
   ១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
   ២. ចូរគណនា Z^2 រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (គ្រូបឋម 2015)

9. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច៖
   ១. $-3x^2+2x-1=0$ ២. $x^4-2x^2-15=0$ (គ្រូបឋម 2016)

10. គេមានសមីការ $z^2 - 6z + 12 = 0$ ។

១. រកឫសកុំផ្លិច z_1 និង z_2 នៃសមីការនេះដោយដឹងថាឫស z_1មានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន ។

២. សរសេរឫស z_1 និង z_2ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។(គ្រូបឋម 2017)

11. ចូរដោះស្រាយនៅក្នុងសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិចសមីការៈ

១. $-9Z^2 + 18\sqrt{2}Z - 36 = 0$ ។ យើងតាង Z_1 ជាឫសរបស់សមីការដែលផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន និង Z_2 ឫសមួយទៀត ។

២. ចូររកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2$ ។ (គ្រូបឋម 2018)

II. លំហាត់ចេញប្រឡងគ្រូមធ្យម

12. ១. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $x^2 - 2x + 5 = 0$ ។

២. គណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $8 - 6i$ ។ (គ្រូមធ្យម 2002)

13. ១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $1 + i\sqrt{3}$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ $|z| - z = 1 + 2i$, (z ជាចំនួនកុំផ្លិច) ។ (គ្រូមធ្យម 2003)

14. ១. រកចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យបំពេញលក្ខខណ្ឌ $(x + y) + (2x - y)i = 2 - 5i$ ។

២. ចូរសរសេរ $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{10}$ ជារាង $a + bi$ ។ (គ្រូមធ្យម 2004)

15. ១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $-2 - 2i$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + 2 - 2i = 0$ ។ (គ្រូមធ្យម 2005)

16. ១. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $2xi - y = \frac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$ ។

២.គេឲ្យ $z = cos\frac{2\pi}{9} + i\,sin\frac{2\pi}{9}$ ។ សរសេរ $(1 + z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (គ្រូមធ្យម 2007)

17. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $z^2 - (5 - i)z + 8 - i = 0$ ។ (គ្រូមធ្យម 2009)

18. គេឲ្យចំនួនពិត α មួយដែល $-\pi < \alpha < \pi$ ។

១.បង្ហាញថា $sin^2\alpha - 2(1 + cos\alpha) = -4cos^4\frac{\alpha}{2}$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $Z^2 - 2Zsin\alpha + 2(1 + cos\alpha) = 0$ ។ (គ្រូមធ្យម 2010)

19. ១. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + 2 - 2i$ ។

២. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $z, \frac{1}{z}$ និង $1 - z$ មានម៉ូលឌុលស្មើគ្នា ។ (គ្រូមធ្យម 2011)

20. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

១. គណនាកន្សោម $A = 1 + z_1 + z_1^2$ ។

២. សរសេរ z_1, z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ គណនា $z_1^{2010} + z_2^{2010}$ ។ (គ្រូមធ្យម 2012)

21. គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ z និង w ដែល $z = 2\sqrt{2} + 4\frac{\sqrt{2}}{2}i$ និង $w = x(x - i) + y(y + i)$ $x, y \in \mathbb{R}$ ។

១. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

២. សរសេរ z^4 ជាទម្រង់ $a+ib$ ។

៣. រកតម្លៃ x និង y បើ $w=-z^4$ ។ (គ្រូមធ្យម 2014)

22. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$, $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ និង $v=\frac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}+\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}i$ ។

១. ចូរសរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

២. ចូរគណនាកន្សោម A ដែល $A=v+z_1+z_1^2$ ។

៣. ចូរគណនា w ដែល $w=z_1^{120}+z_2^{120}$ ។ (គ្រូមធ្យម 2016)

23. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=3+2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ និង $z_2=-3+2i\sqrt{3}$ ។ គណនា z_1+z_2 និងសរសេរ z_1+z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ សរសេរ $\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^{36}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ (គ្រូមធ្យម 2018)

III. លំហាត់ចេញប្រឡងគ្រូឧត្តម និងគ្រូពន្លឿន

24. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $x^2+(1+2i)x+a+12i=0$ មានឫសមួយពិត និងឫសមួយទៀតជាចំនួនកុំផ្លិច ។ ចូររកឫសនៃសមីការនេះ ។ (គ្រូឧត្តម 2001)

25. គេមាន α និង β ជាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $2+i$ និង $3+i$ ដែល $0\le\alpha,\beta<2\pi$ ។
ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\alpha+\beta=45°$ ។ (គ្រូឧត្តម 2003)

26. ១. បង្ហាញរូបមន្តអឺលែ (Euler's formula) $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ ។

២. ក្នុងអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $sin^2z+cos^2z=1$ ។ (គ្រូឧត្តម 2005)

27. ១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២. ដោះស្រាយសមីការ $Z^2-(5+i)Z+8+i=0$ ។ (គ្រូឧត្តម 2006)

28. ១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ De Moivre $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ ។

២. គណនា $\cos 5\theta$ ជាអនុគមន៍នៃ $\cos\theta$ និង $\sin 5\theta$ ជាអនុគមន៍នៃ $\sin\theta$ ។ (គ្រូឧត្តម 2007)

29. គេមានពហុធា $P(z)=4z^3+(4-8i)z^2+(10-8i)z-20i$ ។

១. បង្ហាញថាចំនួន $2i$ ជាឫសនៃពហុធា $P(z)=0$ ។

២. រកត្រីធាដឺក្រេទីពីរ $Q(z)$ ដែល $P(z)=(z-2i)Q(z)$ ។

៣. ចូរដាក់ពហុធា $P(z)$ ជាផលគុណកត្តាដឺក្រេទីមួយនៃ z ។ (គ្រូពន្លឿន 2017)

30. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{i}{4+3i}$, $w=\frac{1+i}{1-i}$ និង $v=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{3}$ ។

១. សរសេរ z និង w ជារាង $a+bi$ ។

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច v ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (គ្រូពន្លឿន 2018)

ដំណោះស្រាយ

1. គណនាផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{1+i}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}$

គេមាន $z=\dfrac{1+i}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}$

$$=\frac{1+i}{\left[\left(1+i\sqrt{3}\right)^2\right]^2}$$
$$=\frac{1+i}{\left[1^2+2\cdot 1\cdot i\sqrt{3}+\left(i\sqrt{3}\right)^2\right]^2}$$
$$=\frac{1+i}{\left(1+2i\sqrt{3}-3\right)^2}$$
$$=\frac{1+i}{\left(-2+2i\sqrt{3}\right)^2}$$
$$=\frac{1+i}{\left[2\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right]^2}$$
$$=\frac{1+i}{4\left[(-1)^2+2\cdot(-1)\cdot i\sqrt{3}+\left(i\sqrt{3}\right)^2\right]}$$
$$=\frac{1+i}{4\left(1-2i\sqrt{3}-3\right)}$$
$$=\frac{1+i}{4\left(-2-2i\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{1+i}{-8\left(1+i\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{(1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{-8\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{1-i\sqrt{3}+i-i^2\sqrt{3}}{-8(1^2-3i^2)}$$
$$=\frac{1-i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}}{-8(1+3)}$$
$$=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i}{-32}$$
$$=\frac{1+\sqrt{3}}{-32}+\frac{1-\sqrt{3}}{-32}i$$

ដូចនេះ

ផ្នែកពិតនៃ z ស្មើនឹង $\dfrac{1+\sqrt{3}}{-32}$
ផ្នែកនិមិត្តនៃ z ស្មើនឹង $\dfrac{1-\sqrt{3}}{-32}$

2. ១. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $x^2-2x+5=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 5=4-20=16i^2=(4i)^2$, $(i^2=-1)$

$$\Rightarrow x=\frac{-(-b)\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(4i)^2}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i$$

ដូចនេះ $\boxed{x=1\pm 2i \text{ ជាឫសនៃសមីការ } x^2-2x+5=0}$

២. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$

ដោយ $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$

គេបាន $a(2-i)^2+b(2-i)-20=0$

$$a(4-4i+i^2)+2b-bi-20=0$$
$$3a-4ai+2b-bi-20=0$$
$$(3a+2b-20)+(-4a-b)i=0$$

ដើម្បីឲ្យចំនួនកុំផ្លិចខាងលើស្មើសូន្យ លុះត្រាតែ

$$\begin{cases}3a+2b-20=0\\ -4a-b=0\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}3a+2b=20 & (1)\\ 4a+b=0 & (2)\end{cases}$$

តាម (2) $4a+b=0\Rightarrow b=-4a$

យក $b=-4a$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $3a+2(-4a)=20$

$$3a-8a=20$$
$$-5a=20$$
$$a=-4$$
$$\Rightarrow b=-4(-4)=16$$

ដូចនេះ $\boxed{a=-4\ ,\ b=16}$

៣. សរសេរ $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}\right)^3$$
$$=\left\{\cos\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]+i\sin\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}^3$$
$$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^3$$
$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^3$$

តាមរូបមន្តដឺម័រ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

គេបាន $z = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^3$

$= \cos 3\frac{\pi}{2} + i\sin 3\frac{\pi}{2}$

$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}}$

3. ១. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $z, \frac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូលឌុលស្មើគ្នា

គេតាង $z = a + bi$

នាំឲ្យ $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$

និង $1 - z = 1 - (a+bi) = (1-a) - bi$

គេបាន $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$|1-z| = \sqrt{(1-a)^2 + (-b)^2}$

ដោយ $z, \frac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលដូចគ្នា គេបាន

$\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{(1-a)^2 + (-b)^2}$

នាំឲ្យ $\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(1-a)^2+(-b)^2} \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} a^2+b^2 = 1 & (1) \\ a^2+b^2 = (1-a)^2 + b^2 & (2) \end{cases}$

តាម (2) $a^2+b^2 = (1-a)^2 + b^2$

$\Rightarrow a^2 = (1-a)^2$

$\Rightarrow a^2 = 1 - 2a + a^2$

$\Rightarrow 1 - 2a = 0$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$

តាម (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = 1$

$\Rightarrow b^2 = 1 - \frac{1}{4}$

$\Rightarrow b^2 = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

២. ដោះស្រាយសមីការ $|x|-x=1+2i$

គេតាង $x=a+bi \Rightarrow |x|=\sqrt{a^2+b^2}$

គេបាន $\sqrt{a^2+b^2}-(a+bi)=1+2i$

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)+(-b)i=1+2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=1\\ -b=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+(-2)^2}-a=1\\ b=-2\end{cases}$$

$$\sqrt{a^2+(-2)^2}-a=1$$
$$\sqrt{a^2+4}=a+1$$
$$a^2+4=(a+1)^2$$
$$a^2+4=a^2+2a+1$$
$$2a=4-1$$
$$a=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{x=\frac{3}{2}-2i}$

4. ១. បញ្ជាក់ថា $P(z)=z^2+2(2+i)z+3+4i$ ជាការេនៃពហុធាដឺក្រេទី១ ។

បើ $P(z)=0 \Leftrightarrow z^2+2(2+i)z+3+4i=0$

$$\Delta'=(2+i)^2-1\cdot(3+4i)$$
$$=3+4i-3-4i=0$$

នាំឲ្យសមីការមានឫសឌុប $z_0=\frac{-(2+i)}{1}=-(2+i)$

គេបាន $P(z)=(z-z_0)(z-z_0)$

$$=(z-z_0)^2$$
$$=(z+2+i)^2$$

ដូចនេះ $\boxed{P(z)\text{ជាការេនៃពហុធាដឺក្រេទី១}}$

២. បង្ហាញថា $z^3=-2+2i$

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=1+i$

$$\Rightarrow z^3=(1+i)^3$$
$$=1+3i+3i^2+i^3$$
$$=1+3i-3-i$$
$$=-2+2i$$

ដូចនេះ $\boxed{z^3=-2+2i}$

រកចំនួនពិត a និង b ចំពោះតម្លៃនៃ z នេះ

គេមាន $\frac{a}{1+z}+\frac{b}{1+z^3}=2i$

ដោយ $z=1+i$ និង $z^3=-2+2i$

គេបាន $\frac{a}{1+1+i}+\frac{b}{1-2+2i}=2i$

$$\frac{a}{2+i}+\frac{b}{-1+2i}=2i$$

$$\frac{a(2-i)}{(2+i)(2-i)}+\frac{b(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=2i$$

$$\frac{a(2-i)}{2^2-i^2}+\frac{b(-1-2i)}{(-1)^2-(2i)^2}=2i$$

$$\frac{a(2-i)}{4+1}+\frac{b(-1-2i)}{1+4}=2i$$

$$\frac{2a-ai-b-2bi}{5}=2i$$

$$(2a-b)+(-a-2b)i=10i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a-b=0 & (1)\\ -a-2b=10 & (2)\end{cases}$$

តាម (1) $2a-b=0 \Rightarrow b=2a$ ជំនួសក្នុង(2)

គេបាន $-a-2\cdot 2a=10$

$\Rightarrow -5a=10$

$\Rightarrow a=-2$

$\Rightarrow b=2(-2)=-4$

ដូចនេះ $\boxed{a=-2\ ,b=-4}$

5. គណនាចំនួនកុំផ្លិច $z=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2002}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2001}$

គេមាន $z=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2002}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2001}$

$$=\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{1001}+\left[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^{2001}$$

$$=\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{1001}+\left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^{2001}$$

$$=\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^{1001}+\left(\frac{1+2i-1}{1+1}\right)^{2001}$$

$$=i^{1001}+i^{2001}$$

$$=i\cdot(i^2)^{500}+i\cdot(i^2)^{1000}$$

$$=i+i$$

$$=2i$$

ដូចនេះ $\boxed{z=2i}$

6. ១. គណនា Z^5

យើងមាន $Z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

$$\Leftrightarrow Z^5 = \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5 = \cos 5\cdot\frac{2\pi}{5} + i\sin 5\cdot\frac{2\pi}{5} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^5 = 1}$

រួចទាញរកតម្លៃនៃ $1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4$

យើងមាន $Z^5 = 1 \Rightarrow Z^5 - 1 = 0$

ដោយ $Z^5 - 1 = (Z-1)(Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1)$

នាំឲ្យ $(Z-1)(Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1) = 0$

ដោយ $Z - 1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} - 1 \neq 0$

$$\Rightarrow 1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0}$

២. សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $1 + Z = 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} + i2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

នាំឲ្យ $(1+Z)^4 = \left[2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^4 = 16\cos^4\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$

ដូចនេះ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $(1+Z)^4$ គឺ $16\cos^4\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$

7. ១. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត

ដោយ $\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

នាំឲ្យ $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{6}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}i^2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

ដូចនេះ $\boxed{z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i}$

សរសេរ z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដោយ $\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

នោះ $z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

នាំឲ្យ $z^2=\left\{2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]\right\}^2$

$=2^2\left[\cos 2\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin 2\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

ដូចនេះ $\boxed{z^2=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]}$

២. គណនា $cos\frac{5\pi}{12}$ និង $sin\frac{5\pi}{12}$

យើងមាន $z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

និង $z=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$\Leftrightarrow 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

$2\cos\frac{5\pi}{12}-2i\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ 2\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\quad,\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

8. ១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $Z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{Z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$

២. គណនា Z^2

$$Z^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2=\frac{3}{4}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}i+\frac{1}{4}i^2=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

សរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $Z^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{Z^2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$

9. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច៖

១. $-3x^2+2x-1=0$

$\Delta'=1^2-(-3)\cdot(-1)=-2=2i^2$

$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{2i^2}}{-3}=\frac{1\pm\sqrt{2}i}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{x=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i\,,x=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i \text{ ជាឫសសមីការ}}$

២. $x^4-2x^2-15=0$

តាង $x^2=t$

គេបាន $t^2-2t-15=0$

$\Delta'=(-1)^2-1\cdot(-15)=16$

$\Rightarrow t=\frac{-(-1)\pm\sqrt{16}}{1}=\left[\begin{array}{l}5\\-3\end{array}\right.$

ចំពោះ $t=5\Leftrightarrow x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

ចំពោះ $t=-3\Leftrightarrow x^2=-3=3i^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}i$

ដូចនេះ $\boxed{x=\pm\sqrt{5}\;,x=\pm\sqrt{3}i \text{ ជាឫសសមីការ}}$

10. ១. រកឫសកុំផ្លិច z_1 និង z_2 នៃសមីការ$z^2-6z+12=0$ដោយដឹងថាឫស z_1មានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន

$\Delta'=(-3)^2-1\cdot(12)=9-12=-3=3i^2$

$\Rightarrow z=\frac{-(-3)\pm\sqrt{3i^2}}{1}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=3+\sqrt{3}i\\z_2=3-\sqrt{3}i\end{array}\right.$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=3+\sqrt{3}i\;\;,z_2=3-\sqrt{3}i}$

២. សរសេរឬស z_1 និង z_2ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$z_1 = 3 + \sqrt{3}i$

$r_1 = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow z_1 = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z_2 = 3 - \sqrt{3}i$

$r_2 = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow z_2 = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ z_2 = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \end{array}}$

11. ១. ដោះស្រាយសមីការ $-9Z^2 + 18\sqrt{2}Z - 36 = 0$

សមីការ $-9Z^2 + 18\sqrt{2}Z - 36 = 0$

$\Leftrightarrow Z^2 - 2\sqrt{2}Z + 4 = 0$

$\Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 1\cdot 4 = 2 - 4 = -2 = 2i^2$

$\Rightarrow Z = \frac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{2i^2}}{1} \left[\begin{array}{l} Z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ Z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{array}\right.$

ដូចនេះ $\boxed{Z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \ \ , Z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i}$

២. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1^2 + 2\cdot 1\cdot i + i^2}{1^2 - i^2} = \frac{2i}{2} = i$

$\Rightarrow \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 = i^2 = -1 + 0i = \cos\pi + i\sin\pi$

ដូចនេះ $\boxed{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 \text{ មានម៉ូឌុលស្មើ } 1 \text{ និងអាគុយម៉ង់ស្មើ } \pi}$

12. ១. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $x^2 - 2x + 5 = 0$

$\Delta' = (-1)^2 - 1\cdot 5 = -4 = 4i^2$

$\Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{4i^2}}{1} = 1 \pm 2i$

ដូចនេះ $\boxed{x = 1 \pm 2i}$

២. គណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $8-6i$

គេតាង z ជាឫសការេនៃចំនួន $8-6i$

គេបាន $z^2 = 8-6i$

នាំឲ្យ $$\begin{aligned} z &= \pm\sqrt{8-6i} \\ &= \pm\sqrt{9-6i-1} \\ &= \pm\sqrt{3^2-2\cdot 3\cdot i+i^2} \\ &= \pm\sqrt{(3-i)^2} \\ &= \pm(3-i) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ឫសការេនៃ } 8-6i \text{ ស្មើនឹង } 3-i \text{ និង } -3+i}$

13. ១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $1+i\sqrt{3}$

តាង $z = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

២. ដោះស្រាយសមីការ $|z|-z = 1+2i$, $\left(z \text{ ជាចំនួនកុំផ្លិច}\right)$

គេតាង $z = a+bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

គេបាន $\sqrt{a^2+b^2}-(a+bi) = 1+2i$

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)+(-b)i = 1+2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a = 1 \\ -b = 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+(-2)^2}-a = 1 \\ b = -2\end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2+(-2)^2}-a &= 1 \\ \sqrt{a^2+4} &= a+1 \\ a^2+4 &= (a+1)^2 \\ a^2+4 &= a^2+2a+1 \\ 2a &= 4-1 \\ a &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{z = \frac{3}{2}-2i}$

14. ១. រកចំនួនពិត x និង y

គេមាន $(x+y)+(2x-y)i = 2-5i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2 & (1) \\ 2x-y = -5 & (2) \end{cases}$$

យក $(1)+(2)$ គេបាន

$3x=-3\Rightarrow x=-1$

យក $x=-1$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន$-1+y=2\Rightarrow y=3$

ដូចនេះ $\boxed{x=-1\,,y=3}$

២. សរសេរ $(1+i\sqrt{3})^{10}$ ជារាង $a+bi$

$$
\begin{aligned}
(1+i\sqrt{3})^{10} &= \left[2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^{10}\\
&= \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{10}\\
&= 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)\\
&= 1024\left[\cos\left(2\pi+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{4\pi}{3}\right)\right]\\
&= 1024\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\\
&= 1024\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]\\
&= 1024\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 1024\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= -512-512\sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+i\sqrt{3})^{10}=-512-512\sqrt{3}i}$

15. ១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $-2-2i$

$$
\begin{aligned}
-2-2i &= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\
&= 2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]\\
&= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\boxed{-2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}$

២. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$

$$
\begin{aligned}
\Delta &= [-(5-i)]^2-4(2+i)(2-2i)\\
&= 25-10i+i^2-4(4-4i+2i-2i^2)\\
&= 24-10i-4(6-2i)
\end{aligned}
$$

$= 24 - 10i - 24 + 8i$
$= -2i$

ដោយ $-2i = 1 - 2i - 1 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 = (1-i)^2$

នាំឲ្យ $x = \dfrac{-[-(5-i)] \pm \sqrt{(1-i)^2}}{2(2+i)}$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} x_1 &= \frac{5-i+1-i}{2(2+i)} = \frac{6-2i}{2(2+i)} = \frac{3-i}{2+i} = 1-i \\ x_2 &= \frac{5-i-1+i}{2(2+i)} = \frac{4}{2(2+i)} = \frac{2}{2+i} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i \end{aligned}\right.$$

ដូចនេះ $\boxed{x_1 = 1 - i \quad , x_2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i}$

16. ១. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $2xi - y = \dfrac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$ ។

$$\begin{aligned} 2xi - y &= \frac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)} \\ &= \frac{3+3i-2i-2i^2}{i+2i^2} \\ &= \frac{5+i}{-2+i} \\ &= \frac{(5+i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} \\ &= \frac{-10-5i-2i-i^2}{(-2)^2-i^2} \\ &= \frac{-7i-9}{4+1} \\ &= -\frac{7}{5}i - \frac{9}{5} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\dfrac{7}{5} \\ y = \dfrac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{10} \\ y = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{x = -\frac{7}{10} \quad , y = \frac{9}{5}}$

២. សរសេរ $(1+z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $\mathrm{z} = \cos\dfrac{2\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{9}$

នាំឲ្យ $(1+z)^4 = \left(1 + \cos\dfrac{2\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)^4$

$$= \left(2\cos^2\frac{\pi}{9} + 2i\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{9}\right)^4$$

$$= \left[2\cos\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)\right]^4$$

$$= 16\cos^4\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+z)^4 = 16\cos^4\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)}$

17. ដោះស្រាយសមីការ $z^2 - (5-i)z + 8 - i = 0$

$\Delta = [-(5-i)]^2 - 4\cdot 1\cdot(8-i) = 25 - 10i + i^2 - 32 + 4i = -8 - 6i$

ដោយ $-8 - 6i = 1 - 6i - 9 = 1^2 - 2\cdot 1\cdot 3i + (3i)^2 = (1-3i)^2$

$$\Rightarrow z = \frac{-\left[-(5-i) \pm \sqrt{(1-3i)^2}\right]}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{5-i+1-3i}{2} = 3-2i \\ z_2 = \dfrac{5-i-1+3i}{2} = 2+i \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 = 3-2i \quad , z_2 = 2+i \text{ ជាឫសសមីការ}}$

18. ១. បង្ហាញថា $sin^2\alpha - 2(1+cos\alpha) = -4cos^4\frac{\alpha}{2}$

គេមាន $sin^2\alpha - 2(1+cos\alpha) = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 2\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$$= 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$$

$$= -4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= -4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{sin^2\alpha - 2(1+cos\alpha) = -4cos^4\frac{\alpha}{2}}$

២. ដោះស្រាយសមីការ $Z^2 - 2Zsin\alpha + 2(1+cos\alpha) = 0$

$\Delta' = \sin^2\alpha - 2(1+\cos\alpha) = -4cos^4\frac{\alpha}{2} = \left(2icos^2\frac{\alpha}{2}\right)^2$

$$Z = \frac{-(-\sin\alpha) \pm \sqrt{\left(2icos^2\frac{\alpha}{2}\right)^2}}{1} = \sin\alpha \pm 2icos^2\frac{\alpha}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \sin\alpha \pm 2icos^2\frac{\alpha}{2}}$

19. ១. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i$

$$\begin{aligned}\Delta &= [-(5-i)]^2-4(2+i)(2-2i)\\ &= 25-10i+i^2-4(4-4i+2i-2i^2)\\ &= 24-10i-4(6-2i)\\ &= 24-10i-24+8i\\ &= -2i\end{aligned}$$

ដោយ $-2i=1-2i-1=1^2-2\cdot1\cdot i+i^2=(1-i)^2$

នាំឲ្យ $x=\dfrac{-[-(5-i)]\pm\sqrt{(1-i)^2}}{2(2+i)}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{5-i+1-i}{2(2+i)}=\dfrac{6-2i}{2(2+i)}=\dfrac{3-i}{2+i}=1-i \\ x_2=\dfrac{5-i-1+i}{2(2+i)}=\dfrac{4}{2(2+i)}=\dfrac{2}{2+i}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i \end{array}\right.$$

ដូចនេះ $\boxed{x_1=1-i\ \ ,x_2=\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i}$

២. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $z,\frac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូលឌុលស្មើគ្នា

គេតាង $z=a+bi$

នាំឲ្យ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$

និង $1-z=1-(a+bi)=(1-a)-bi$

គេបាន $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$|1-z|=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$$

ដោយ $z,\dfrac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលដូចគ្នា គេបាន

$$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$$

នាំឲ្យ $\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a^2+b^2=1 & (1)\\ a^2+b^2=(1-a)^2+b^2 & (2)\end{cases}$

តាម (2) $a^2+b^2=(1-a)^2+b^2$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow a^2=(1-a)^2\\ &\Rightarrow a^2=1-2a+a^2\\ &\Rightarrow 1-2a=0\\ &\Rightarrow a=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

តាម (1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+b^2=1$

$$\Rightarrow b^2=1-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

20. ១. គណនាកន្សោម $A = 1 + z_1 + z_1^2$

$$A = 1 + z_1 + z_1^2$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}i^2\right)$$
$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{A = 0}$

២. សរសេរ z_1, z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \end{array}}$

គណនា $z_1^{2010} + z_2^{2010}$

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{2010} + \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{2010}$$
$$= \left(\cos 2010\frac{2\pi}{3} + i\sin 2010\frac{2\pi}{3}\right) + \left(\cos 2010\frac{4\pi}{3} + i\sin 2010\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= (\cos 1740\,\pi + i\sin 1740\pi) + (\cos 3480\pi + i\sin 3480\pi)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1^{2010} + z_2^{2010} = 2}$

21. ១. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$z = 2\sqrt{2} + 4\frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ ឬ } z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

$$r = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8+8} = 4$$

$$\Rightarrow z = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

២. សរសេរ z^4 ជាទម្រង់ $a + ib$

$$\begin{aligned} z^4 &= \left[4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4 \\ &= 4^4\left(\cos 4\frac{\pi}{4} + i\sin 4\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 256(\cos\pi + i\sin\pi) \\ &= 256(-1 + 0i) \\ &= -256 + 0i \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{z^4 = -256 + 0i}$

៣. រកតម្លៃ x និង y បើ $w = -z^4$

$$w = -z^4$$

$$\Leftrightarrow x(x-i) + y(y+i) = -(-256)$$

$$x^2 - xi + y^2 + yi = 256$$

$$x^2 + y^2 + (y-x)i = 256$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 256 \quad (1) \\ y - x = 0 \quad \text{ឬ} \quad y = x \end{cases}$$

តាម (1) $x^2 + x^2 = 256$

$$2x^2 = 256$$

$$x^2 = 128$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{128} = \pm 8\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{x = y = \pm 8\sqrt{2}}$

22. ១. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

និង $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ z_2 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \end{array}}$

២. ចូរគណនាកន្សោម A ដែល $A = v + z_1 + z_1^2$

គេមាន $v = \frac{-(\sqrt{3}+1)}{2} + \frac{(1+\sqrt{3})}{2}i$

គេបាន $A = v + z_1 + z_1^2$

$$= \frac{-(\sqrt{3}+1)}{2} + \frac{(1+\sqrt{3})}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$= 0$$

ដូចនេះ $\boxed{A = v + z_1 + z_1^2 = 0}$

៣. គណនា w ដែល $w = z_1^{120} + z_2^{120}$

យើងមាន $z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

និង $z_2 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

នាំឲ្យ $w = z_1^{120} + z_2^{120}$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{120} + \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{120}$$

$$= \left(\cos 120\frac{\pi}{6} - i\sin 120\frac{\pi}{6}\right) + \left(\cos 120\frac{\pi}{6} + i\sin 120\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= (\cos 20\pi - i\sin 20\pi) + (\cos 20\pi + i\sin 20\pi)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

ដូចនេះ $\boxed{w = 2}$

23. គណនា $z_1 + z_2$ និងសរសេរ $z_1 + z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z_1 = 3 + 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ និង $z_2 = -3 + 2i\sqrt{3}$

គេបាន $z_1 + z_2 = 3 + 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-3 + 2i\sqrt{3}\right)$

$$= 1 - \sqrt{3}i + 2i\sqrt{3}$$

$$= 1 + \sqrt{3}i$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 + z_2 = 1 + \sqrt{3}i}$

- សរសេរ $z_1 + z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $z_1 + z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 + z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

សរសេរ $\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)^{36}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

ដោយ $z_1 + z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

គេបាន $\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)^{36} = \left[\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2}\right]^{36}$

$$= \cos 36\frac{\pi}{3} + i\sin 36\frac{\pi}{3}$$
$$= \cos 12\pi + i\sin 12\pi$$
$$= 1 + 0i$$

ដូចនេះ $\boxed{\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)^{36} = 1 + 0i}$

24. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $x^2 + (1+2i)x + a + 12i = 0$ មានឫសមួយពិត និងឫសមួយទៀតជាចំនួនកុំផ្លិច

គេមានសមីការ $x^2 + (1+2i)x + a + 12i = 0$

$\Delta = (1+2i)^2 - 4(a+12i)$

$= 1 + 4i - 4 - 4a - 48i$

$= -3 - 4a - 44i$

គេបាន $x = \frac{-(1+2i) \pm \sqrt{-3-4a-44i}}{2}$

ដើម្បីឲ្យឫសមួយជាចំនួនពិត លុះត្រាតែ $-3 - 4a - 44i$ ជាការេទ្វេធាដែលមានតួមួយស្មើ $2i$

ដោយ $-3 - 4a - 44i = 1 - 4a - 44i - 4$

$= (1 - 4a) - 2 \cdot 11 \cdot 2i + (2i)^2$

តាមរូបមន្ត $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

យើងបាន $1 - 4a = 11^2$

$-4a = 121 - 1$

$a = \frac{120}{-4}$

$a = -30$

ដូចនេះ $\boxed{a=-30}$

ចូររកឫសនៃសមីការនេះ

ដោយ $a=-30$

យើងបាន $x^2+(1+2i)x-30+12i=0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (1+2i)^2-4\cdot(-30+12i)\\ &= 1+4i-4+120-48i\\ &= 117-44i\end{aligned}$$

ដោយ $117-44i=121-44i-4$

$$\begin{aligned}&= 11^2-2\cdot 11\cdot 2i+(2i)^2\\ &= (11-2i)^2\end{aligned}$$

គេបាន $x=\dfrac{-(1+2i)\pm\sqrt{(11-2i)^2}}{2}=\dfrac{-1-2i\pm(11-2i)}{2}$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-1-2i-(11-2i)}{2}\\ &= \frac{-1-2i-11+2i}{2}=-6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-1-2i+(11-2i)}{2}\\ &= \frac{-1-2i+11-2i}{2}=5-2i\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{x_1=-6\quad ,x_2=5-2i}$

25. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\alpha+\beta=45°$

តាង $Z=2+i$ និង $W=3+i$

នោះ $|Z|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

និង $|W|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

ដោយ α និង β ជាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $2+i$ និង $3+i$

គេបាន $Z=\sqrt{5}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

និង $W=\sqrt{10}(\cos\beta+i\sin\beta)$

នាំឲ្យ $ZW=5\sqrt{2}[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]\quad(1)$

តែ
$$\begin{aligned}ZW &= (2+i)(3+i)\\ &= 6+2i+3i-1\\ &= 5+5i\\ &= 5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= 5\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)\quad(2)\end{aligned}$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\alpha+\beta=45°$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha+\beta=45°}$

26. ១. បង្ហាញរូបមន្តអឺលែ (Euler's formula) $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

យើងនឹងស្រាយសមភាពខាងលើតាមរយៈសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់1

តាង $f(x)=\cos x+i\sin x \quad (*)$

នាំឲ្យ $f'(x)=-\sin x+i\cos x$

យើងមាន $\cos x+i\sin x-\cos x-i\sin x=0$

$$i^2\cos x-i\sin x+\cos x+i\sin x=0$$
$$i(-\sin x+i\cos x)+\cos x+i\sin x=0$$
$$if'(x)+f(x)=0$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង i

គេបាន $f'(x)-if(x)=0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការនេះគឺ $f(x)=Ae^{ix} \quad A\in\mathbb{R}$

បើ $x=0$ នោះ $f(0)=Ae^{i0}=A$

តែតាម $(*)$ គេបាន $f(0)=\cos 0+i\sin 0=1$

នោះ $A=1\Rightarrow f(x)=Ae^{ix} \quad (**)$

តាម $(*)$ និង $(**)$ គេបាន $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

ដូចនេះ $\boxed{e^{ix}=\cos x+i\sin x}$

២. ក្នុងអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $sin^2z+cos^2z=1$

យើងមាន $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ និង $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

នាំឲ្យ
$$\begin{aligned}sin^2z+cos^2z&=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2\\&=\frac{e^{2iz}-2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{(2i)^2}+\frac{e^{2iz}+2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{2^2}\\&=\frac{-e^{2iz}+2-e^{-2iz}}{4}+\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}\\&=1\end{aligned}$$
ពិត

ដូចនេះ $\boxed{sin^2z+cos^2z=1}$

27. ១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន
$$\begin{aligned}z&=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\\&=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= -2 + i2$$

ដូចនេះ $\boxed{z = -2 + i2}$

២. ដោះស្រាយសមីការ $Z^2 - (5+i)Z + 8 + i = 0$

$\Delta = [-(5+i)]^2 - 4\cdot(8+i)$
$= 25 + 10i - 1 - 32 - 4i$
$= -8 + 6i$

ដោយ $-8 + 6i = 1 + 6i - 9$
$= 1^2 + 2\cdot 1\cdot 3i + (3i)^2$
$= (1+3i)^2$

យើងបាន $Z_1 = \dfrac{-[-(5+i)] + \sqrt{(1+3i)^2}}{2}$
$= \dfrac{5 + i + 1 + 3i}{2} = 3 + 2i$

$Z_2 = \dfrac{-[-(5+i)] - \sqrt{(1+3i)^2}}{2}$
$= \dfrac{5 + i - 1 - 3i}{2} = 2 - i$

ដូចនេះ $\boxed{Z_1 = 3 + 2i \quad , Z_2 = 2 - i}$

28. ១. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ De Moivre $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

តាង $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

នាំឲ្យ $z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$

បើ $z^2 = rr(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$
$= r^2[\cos(\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta)]$
$= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

បើ $z^3 = zz^2 = rr^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$
$= r^3[\cos(2\theta+\theta) + i\sin(2\theta+\theta)]$
$= r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

បើ $z^4 = z^3 z = r^3 r(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$
$= r^4[\cos(3\theta+\theta) + i\sin(3\theta+\theta)]$
$= r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$

— —

នាំឲ្យ $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

តែ $z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$

យើងបាន $r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

នាំឲ្យ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)}$

២. គណនា $\cos 5\theta$ ជាអនុគមន៍នៃ $\cos\theta$ និង $\sin 5\theta$ ជាអនុគមន៍នៃ $\sin\theta$

តាមរូបមន្ត $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$

យើងបាន $\cos 5\theta + i\sin 5\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^5$

តាមរូបមន្តស្វ័យគុណទ្វេធា

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
&\cos 5\theta + i\sin 5\theta \\
&= \cos^5\theta + 5\cos^4\theta\cdot i\sin\theta + 10\cos^3\theta\cdot i^2\sin^2\theta + 10\cos^2\theta\cdot i^3\sin^3\theta + 5\cos\theta\cdot i^4\sin^4\theta \\
&\quad + i^5\sin^5\theta \\
&= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - i10\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta \\
&= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + i\sin^5\theta \\
&= (\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta) + (5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta)i
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\ \sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta \end{cases}$$

ដោយ
$$\begin{aligned}
\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\
&= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\,(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)^2 \\
&= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 10\cos^5\theta + 5\cos\theta\,(1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta) \\
&= 11\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 5\cos\theta - 10\cos^3\theta + 5\cos^5\theta \\
&= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta
\end{aligned}$$

និង
$$\begin{aligned}
\sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta \\
&= 5\sin\theta\,(1-\sin^2\theta)^2 - 10\sin^3\theta\,(1-\sin^2\theta) + \sin^5\theta \\
&= 5\sin\theta\,(1 - 2\sin^2\theta + \sin^4\theta) - 10\sin^3\theta + 10\sin^5\theta + \sin^5\theta \\
&= 5\sin\theta - 10\sin^3\theta + 5\sin^5\theta - 10\sin^3\theta + 11\sin^5\theta \\
&= 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} \cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \\ \sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta \end{array}}$

29. គេមានពហុធា $P(z) = 4z^3 + (4-8i)z^2 + (10-8i)z - 20i$ ។

១. បង្ហាញថាចំនួន $2i$ ជាឫសនៃពហុធា $P(z) = 0$

$2i$ ជាឫសនៃពហុធា $P(z) = 0$

គេបាន $4(2i)^3 + (4-8i)(2i)^2 + (10-8i)2i - 20i = 0$

$$-32i - 16 + 32i + 20i + 16 - 20i = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំនួន } 2i \text{ ជាឫសនៃពហុធា } P(z)=0}$

២. រកត្រីធាដឺក្រេទីពីរ $Q(z)$ ដែល $P(z)=(z-2i)Q(z)$

តាង $Q(z)=az^2+bz+c$

នាំឲ្យ $P(z)=(z-2i)(az^2+bz+c)$

$$=az^3+bz^2+cz-2aiz^2-2biz-2ci$$
$$=az^3+(b-2ai)z^2+(c-2bi)z-2ci$$

ដោយ $P(z)=4z^3+(4-8i)z^2+(10-8i)z-20i$

យើងបាន $\begin{cases} a=4 \\ b=4 \\ c=10 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{Q(z)=4z^2+4z+10}$

៣. ដាក់ពហុធា $P(z)$ ជាផលគុណកត្តាដឺក្រេទីមួយនៃ z

យើងមាន $P(z)=(z-2i)(4z^2+4z+10)$

$$=2(z-2i)(2z^2+2z+5)$$

បើ $2z^2+2z+5=0$

$\Delta'=1^2-2\cdot 5=-9=(3i)^2$

យើងបាន $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{(3i)^2}}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{-1+3i}{2} \text{ ឬ } 2z+1-3i=0 \\ z=\dfrac{-1-3i}{2} \text{ ឬ } 2z+1+3i=0 \end{array}\right.$

នោះ $2z^2+2z+5=(2z+1-3i)(2z+1+3i)$

ដូចនេះ $\boxed{P(z)=2(z-2i)(2z+1-3i)(2z+1+3i)}$

30. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{i}{4+3i}$, $w=\dfrac{1+i}{1-i}$ និង $v=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{i}{3}$ ។

១. សរសេរ z និង w ជារាង $a+bi$

គេមាន $z=\dfrac{i}{4+3i}=\dfrac{i(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\dfrac{4i-3i^2}{4^2-(3i)^2}=\dfrac{3+4i}{16+9}=\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}i$

$$w=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1-i^2}=i$$

ដូចនេះ $\boxed{z=\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}i \quad ,w=i}$

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច v ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $v=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{3}$

ដោយ $|v|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

គេបាន $v=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{3}=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{v=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$

ផ្នែកទី៦ លំហាត់ធ្លាប់ចេញប្រឡងប្រជែងនានា

1. ១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\begin{cases} iz+(1-i)z'=1 \\ (1+i)z+z'=2i \end{cases}$

   ២. ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\dfrac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})}{1+i}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

   (ប្រឡងយកអាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅប្រទេសជប៉ុន 2009)

2. គេឲ្យ $x_1\,,x_2$ ជាឬសនៃសមីការ $-x^2+2x-4=0$ និងយក x_1 ជាឬសដែលមានផ្នែកនិមិត្តអវិជ្ជមាន ។ ចូរសរសេរ $z=\dfrac{4x_2}{x_1^3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (ប្រឡងចូលសាលាតិចណូ 2013)

3. ក្នុងសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច គេយក $a\,,b$ ជាឬសពីរខុសគ្នានៃសមីការ $z^3+3z^2+z+1=0$ ។ គណនាតម្លៃនៃ a^2b+ab^2+3ab ។ (ប្រឡងចូលសាលាតិចណូ 2013)

4. គណនាកន្សោម $E=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2015}$ ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

   (ប្រឡងចូលសាលាតិចណូ 2015)

5. ចូររក ម៉ូលឌុលr និងអាគុយម៉ង់θ នៃចំនួនកុំផ្លិច $z=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$ ។ (ប្រឡងចូលសាលាតិចណូ 2017)

6. ១. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ នូវសមីការ $z^3-3z^2+3z+7=0$ ។

   ២.គេមានចំនួនកុំផ្លិច $w=\dfrac{z-2+i}{z+2i}$ $,z\neq-2i$ ។ $M(x\,,y)$ តាងឲ្យចំនួនកុំផ្លិច z ក្នុងប្លង់ ។ រកសំណុំចំណុច M ក្នុងប្លង់ដើម្បីឲ្យ w ជាចំនួនពិត ។ (ប្រឡងអាហារូបករណ៍ទៅប្រទេសចិន 2010)

7. ១. តាង Z ជាចំនួនកុំផ្លិច ហើយជាឬសរបស់សមីការ $x^2-x+1=0$ ។ គណនា $Z^{12}+6Z^{10}+15Z^8+20Z^6+15Z^4+6Z^2+1$

   ២.តាង α និង β ជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន ហើយ $\left(\dfrac{\sqrt{\beta}}{1+\alpha i}\right)^4=-1$ $\left(i\text{ ជាចំនួនកុំផ្លិច}\right)$ ។ ចូរគណនា α និង β ។

   (ប្រឡងអាហារូបករណ៍ថ្នាក់ឧត្តមសិក្សាទៅប្រទេសចិន 2009)

8. គេមានសមីការ $2Z^4+3Z^2+3\sqrt{3}Z+9=0\ (E)$ ។

   ១. បង្ហាញថាបើ Z_0 ជាឬសរបស់សមីការ (E) នោះ $\overline{Z_0}$ ក៏ជាឬសរបស់ (E) ដែរ ។

   ២. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច សមីការ (E) ដោយដឹងថាឬសវាមួយមានទម្រង់ $a(1+i)$; $a\in\mathbb{R}$ ។

   (ប្រឡងអាហារូបករណ៍ថ្នាក់ឧត្តមសិក្សាទៅប្រទេសចិន 2007)

9. ១. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $2Z^2-(5+i\sqrt{3})Z+2(1+i\sqrt{3})=0$ ។ សរសេរឬសនៃសមីការជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ មានឬស α មានតម្លៃស្មើ 1 និងឬស β ផ្សេងទៀត ។

   ២.កំណត់ចំនួនពិត x ដើម្បីឲ្យ $\dfrac{1+ix}{1-ix}=\alpha$ ។

   (ប្រឡងអាហារូបករណ៍ថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រទៅប្រទេសចិន 2019)

10. ១. គេឲ្យសមីការ $Z^2 + (4+4i)Z + (7+32i) = 0$ (1) ។ ចូរកំណត់ឫសកុំផ្លិច Z_1 និង Z_2 នៃសមីការ (1) ដែល $|Z_1| < |Z_2|$ ។
២. នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (P) ប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរមេ $(o,\vec{u},\vec{v})$ ចំណុច A, B, C ជារូបភាពរៀងគ្នានៃ i, Z_1, Z_2 ។ ដៅចំណុច A, B និង C ក្នុងប្លង់ (P) ។ G ជាបារីសង់នៃប្រព័ន្ធ $(A,2)$, $(B,-2)$ និង $(C,-1)$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច G នោះ ។ (ប្រឡងអាហារូបករណ៍ថ្នាក់ឧត្តមសិក្សាទៅសហព័ន្ធរុស្ស៊ី 2003)

11. គេមានសមីការ $Z^2 - Z(\sqrt{3} - 1 + 2i) - \sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} - i = 0$ (1)
១. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច Z_1 និង Z_2 ដែលជាឫសនៃសមីការ (1) ។
២. កំណត់ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ Z_1 និង Z_2 ដែល Z_1 ជាឫសមានផ្នែកពិតជាចំនួនវិជ្ជមាន ។
(ប្រឡងអាហារូបករណ៍ថ្នាក់ឧត្តមសិក្សាទៅសាធារណៈរដ្ឋសិង្ហបុរី 2003)

12. ១. ចូរកំណត់ឫសកុំផ្លិច Z_1 និង Z_2 $(|Z_1| \le |Z_2|)$ នៃសមីការ $Z^2 - 3(1+i)Z + 4i = 0$ ។
២. នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (P) ប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរមេ $(o,\vec{u},\vec{v})$ ចំណុច A, B, C ជារូបភាពរៀងគ្នានៃ i, Z_1 និង Z_2 ។
ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុច G ដែលជាបារីសង់នៃចំណុច A, B និង C ភ្ជាប់ដោយមេគុណរៀងគ្នា $2, -2, -1$ ។
ខ. រកសំណុំចំណុច M នៃ (P) ដែល $\|2\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}\| = 3$ ។
(ប្រឡងអាហារូបករណ៍ថ្នាក់ឧត្តមសិក្សាទៅប្រទេសចិន 2004)

13. ១. កំណត់ពហុធាដឺក្រេទី២ $P(Z)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = (Z+1)P(Z)$ ។
២.ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចនូវសមីការ $\left(\frac{Z-2i}{Z+2i}\right)^3 + \left(\frac{Z-2i}{Z+2i}\right)^2 + \left(\frac{Z-2i}{Z+2i}\right) + 1 = 0$
(ប្រឡងអាហារូបករណ៍ថ្នាក់ឧត្តមសិក្សាទៅប្រទេសចិន 2005)

14. តាង $x = 1 + i$ ជាឫសរបស់សមីការ $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ ។
១. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b ។
២. រកឫសផ្សេងទៀត ។
(ប្រឡងអាហារូបករណ៍ថ្នាក់ឧត្តមសិក្សាទៅសាធារណៈរដ្ឋសិង្ហបុរី 2004)

15. គេឲ្យ $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។
១. គណនា $P(-1)$
២. កំណត់ចំនួនពិត a, b ដើម្បីឲ្យគេបាន $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$ ចំពោះគ្រប់ $z \in \mathbb{C}$ ។
(ប្រឡងអាហារូបករណ៍ថ្នាក់មធ្យមសិក្សាបច្ចេកទេសទៅប្រទេសជប៉ុន 2005)

16. w ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $(E): 5w^3 - 2i|w|^2 - 3i = 0$ ដែល $|w|$ តាងឲ្យម៉ូឌុលនៃ w ។
១. រកម៉ូឌុលនៃ w
២. រកឫសទាំងអស់របស់សមីការ (E) ។
(ប្រឡងអាហារូបករណ៍ថ្នាក់ឧត្តមសិក្សាទៅប្រទេសចិន 2011)

17. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $w=\dfrac{z-2i}{z-1}$ ដែល $z\neq 1$ តាង $z=x+iy$ និង $w=a+ib$ ដែល x,y,a,b ជាចំនួនពិត ។

១. គណនា a,b ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

២. រកសំណុំចំណុច $M(x,y)$ ដើម្បីឲ្យ w ជាចំនួនពិតសុទ្ធ

៣. រកសំណុំចំណុច $M(x,y)$ ដើម្បីឲ្យ w ជាចំនួននិមិត្តសុទ្ធ

(ប្រឡងអាហារូបករណ៍ថ្នាក់ឧត្តមសិក្សាទៅប្រទេសចិន 2011)

18. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

១. $z_1=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

២. $z_2=2+\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

៣. $z_3=\dfrac{1+\sin\alpha+i\cos\alpha}{1+\sin\alpha-i\cos\alpha}$

19. ស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម៖

១. $\dfrac{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^5(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^3}{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^{-9}(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^9}=1$

២. $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$

៣. $\left(\dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x}\right)^n=\dfrac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx}$

20. គេឲ្យ $z=\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}$ បង្ហាញថា $(1+z)^3=8\cos^3\dfrac{2\pi}{5}\left(\cos\dfrac{6\pi}{5}+i\sin\dfrac{6\pi}{5}\right)$ ។

21. ១. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\theta+i\sin\theta$ ។ បង្ហាញថា $1+z=(1+\bar{z})z$ ។

២. រកចំនួនពិត m និង n បើ $(3+i)m+n=3-4i$ ។

៣. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=3+3i$ និង $z\cdot z_1=6\sqrt{2}\left(cos\dfrac{7\pi}{12}+i\,sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$ ។

រកចំនួនកុំផ្លិច z_1 ដោយសរសេរលទ្ធផលជារាង $a+bi$ ។

22. ១. ដោះស្រាយសមីការ $Z^2-2Z\sin a-2i+\sin^2 a=0$; $(a\in\mathbb{R})$ ។

២. តាង Z',Z'' ជាឫសនៃសមីការនេះដែល $Z=\dfrac{Z'-Z''}{2}+\sqrt{2}$ និង Z' ជាឫសមានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន។

គណនា $|Z|$; $\arg(Z)$ ។

23. រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $\dfrac{50}{\bar{z}}-\dfrac{10}{z}=2+9i$ ដែល $|z|=2\sqrt{10}$ ។

24. គេឲ្យពហុធា $P(z)=z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i$ ។ ចូរគណនា $P(i)$ រួចដោះស្រាយសមីការ $P(z)=0$ ក្នុង $\mathbb{C}$ ។

25. បើ z និង z' ជាចំនួនកុំផ្លិចមានម៉ូលឌុល 1 ហើយ a ជាចំនួនពិត ។ គេកំណត់ $Z=z+z'+azz'+1$ និង $Z'=z+z'+zz'+a$ ។ បង្ហាញថា $Z'=zz'\bar{Z}$ និង $|Z|=|Z'|$ ។

26. គេឲ្យ $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}},\ z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}},\ z_3=\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ សរសេរជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនូវចំនួនកុំផ្លិច

១. $z_1\cdot z_2\cdot z_3$ ២. $\dfrac{1}{z_1}$ ៣. z_3^2 ៤. $\dfrac{z_2}{z_3}$

27. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចជាទម្រង់អិុចស្ប៉ូណង់ស្យែលនូវចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

១. $z = 4 - 4i\sqrt{3}$ ២. $z = \dfrac{1}{1+i}$

៣. $z = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2+2i\sqrt{3}}$ ៤. $z = -4\left(cos\dfrac{\pi}{4} + i\,sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

28. ដោយប្រើ $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ និង $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ បង្ហាញថា

១. $\sin^3\theta = \dfrac{3}{4}\sin\theta - \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$

២. $\cos^4\theta = \dfrac{1}{8}\cos 4\theta + \dfrac{1}{2}\cos 2\theta + \dfrac{3}{8}$

៣. $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

៤. $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

29. គណនាផលបូក $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin 2020x$ ។

30. គេមាន $Z_1^{2020}\cdot Z_2 = 2019 + i$ និង $Z_1 \cdot Z_2^{2020} = 2019 - i$ ។ ចូរគណនា $\left|Z_1^{2019} + Z_2^{2019}\right|$ ។

ដំណោះស្រាយ

1. ១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

$$\begin{cases} iz+(1-i)z'=1 & (1) \\ (1+i)z+z'=2i & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} iz+(1-i)z'=1 \\ (1-i)(1+i)z+(1-i)z'=2i(1-i) \end{cases}$$

$$-\begin{cases} iz+(1-i)z'=1 \\ 2z+(1-i)z'=2+2i \end{cases}$$

$$(i-2)z=-1-2i$$

$$\Rightarrow z=-\frac{1+2i}{i-2}$$

យក $z=-\frac{i+2}{1+2i}$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន

$$i\left(-\frac{1+2i}{i-2}\right)+(1-i)z^{'}=1$$

$$-\frac{i-2}{i-2}+(1-i)z'=1$$

$$(1-i)z'=2$$

$$z'=\frac{2}{1-i}$$

ដូចនេះ $\boxed{z=-\frac{1+2i}{i-2}\quad ,z'=\frac{2}{1-i}\ \text{ជាឫសនៃប្រព័ន្ធសមីការ}}$

២. ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})}{1+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$

ដោយ $\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1+i}$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-i}{2}\quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{2}}$

2. គេឲ្យ x_1, x_2 ជាឫសនៃសមីការ $-x^2+2x-4=0$ និងយក x_1 ជាឫសដែលមានផ្នែកនិមិត្តអវិជ្ជមាន ។

ចូរសរសេរ $z=\dfrac{4x_2}{x_1^3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមានសមីការ $-x^2+2x-4=0$

ដោយ $\Delta'=1^2-(-1)(-4)=-3=3i^2$

នាំឲ្យ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3i^2}}{-1}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1-\sqrt{3}i\\ x_2=1+\sqrt{3}i\end{array}\right.$

ដោយ $x_1=1-\sqrt{3}i=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

$x_2=1+\sqrt{3}i=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

នាំឲ្យ
$$z=\frac{4x_2}{x_1^3}=\frac{4\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\left\{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}^3}$$
$$=\frac{8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{8\left[\cos 3\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin 3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}$$
$$=\frac{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)}$$
$$=\cos\left[\frac{\pi}{3}-(-\pi)\right]+i\sin\left[\frac{\pi}{3}-(-\pi)\right]$$
$$=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{z=cos\dfrac{4\pi}{3}+i\,sin\dfrac{4\pi}{3}}$

3. គណនាតម្លៃនៃ a^2b+ab^2+3ab

គេមាន a, b ជាឫសពីរខុសគ្នានៃសមីការ $z^3+3z^2+z+1=0$

តាង c ជាឫសមួយទៀតនៃសមីការ $z^3+3z^2+z+1=0$

តាមលក្ខណៈផលបូកឫស $S=a+b+c=-3$

$$\Longrightarrow c=-a-b-3 \quad (1)$$

តាមលក្ខណៈផលគុណឫស $P=abc=-1 \quad (2)$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន

$$ab(-a-b-3)=-1$$
$$-a^2b-ab^2-3ab=-1$$
$$a^2b+ab^2+3ab=1$$

ដូចនេះ $\boxed{a^2b+ab^2+3ab=1}$

4. គណនាកន្សោម $E=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2015}$ ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $E=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2015}$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2015}$$
$$=\cos\left(2015\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2015\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\left(504\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(504\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{E=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$

5. ចូររក ម៉ូលឌុលr និងអាគុយម៉ង់θ នៃចំនួនកុំផ្លិច $z=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

គេមាន $z=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

ដោយ $r=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{8+8}=4$

នាំឲ្យ $z=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

គេបាន $|z|=4\ \ ,\arg(z)=-\frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{|z|=4\ \ ,\arg(z)=-\frac{\pi}{4}}$

6. ១. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ នូវសមីការ $z^3-3z^2+3z+7=0\quad(1)$

បើ $z=-1$

យើងបាន $(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7=0$

$$-1-3-3+7=0$$

$0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

នាំឲ្យ $z=-1$ ជាឫសមួយនៃសមីការនេះ

តាមសមីការ (1) គេអាចសរសេរ $(z+1)(z^2-4z+7)=0$

$\Rightarrow z^2-4z+7=0$

$\Delta'=(-2)^2-1\cdot7=4-7=-3=3i^2$

គេបាន $z=\frac{-(-2)\pm\sqrt{3i^2}}{1}=2\pm\sqrt{3}i$

ដូចនេះ $\boxed{z=-1\ \ ,z=2+\sqrt{3}i\ \ ,z=2-\sqrt{3}i}$

២.គេមានចំនួនកុំផ្លិច $w=\dfrac{z-2+i}{z+2i}$ $,z\neq -2i$ ។ $M(x\,,y)$ តាងឲ្យចំនួនកុំផ្លិច z ក្នុងប្លង់ ។

រកសំណុំចំណុច M ក្នុងប្លង់ដើម្បីឲ្យ w ជាចំនួនពិត

គេមាន $\mathrm{w}=\dfrac{\mathrm{z}-2+i}{\mathrm{z}+2i}$ តែ $z=x+iy$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
\mathrm{w}&=\frac{x+iy-2+i}{x+iy+2i}\\
&=\frac{(x-2)+(y+1)i}{x+(y+2)i}\\
&=\frac{[(x-2)+(y+1)i][x-(y+2)i]}{[x+(y+2)i][x-(y+2)i]}\\
&=\frac{x^2-2x-(xy+2x-2y-4)i+(xy+x)i-(y^2+2y+y+2)i^2}{x^2-[(y+2)i]^2}\\
&=\frac{x^2-2x+y^2+2y+y+2+(-xy-2x+2y+4+xy+x)i}{x^2+(y+2)^2}\\
&=\frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}+\frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}i
\end{aligned}$$

ដើម្បីឲ្យ w ជាចំនួនពិតកាលណា $\dfrac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-x+2y+4=0\\ x\neq 0\ ,\ \ y\neq -2\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សំណុំចំណុច } M \text{ គឺជាបន្ទាត់មានសមីការ } -x+2y+4=0 \text{លើកលែងចំណុច } (0\,,-2)}$

7. ១. គណនា $Z^{12}+6Z^{10}+15Z^8+20Z^6\ +15Z^4+6Z^2+1$

ដោយ Z ជាចំនួនកុំផ្លិច ហើយជាឫសរបស់សមីការ $x^2-x+1=0$

គេបាន $Z^2-Z+1=0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (Z+1)(Z^2-Z+1)=0\\
&\Rightarrow Z^3+1=0\\
&\Rightarrow Z^3=-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Z^{12}+6Z^{10}+15Z^8+20Z^6+15Z^4+6Z^2+1\\
&=(Z^3)^4+6Z(Z^3)^3+15Z^2(Z^3)^2+20(Z^3)^2+15ZZ^3+6Z^2+1\\
&=(-1)^4+6Z(-1)^3+15Z^2(-1)^2+20(-1)^2+15Z(-1)+6Z^2+1\\
&=1-6Z+15Z^2+20-15Z+6Z^2+1\\
&=21Z^2-21Z+22\\
&=21(Z^2-Z+1)+1\\
&=21\times 0+1=1
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^{12}+6Z^{10}+15Z^8+20Z^6+15Z^4+6Z^2+1=1}$

២. តាង α និង β ជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន ហើយ $\left(\frac{\sqrt{\beta}}{1+\alpha i}\right)^4=-1$ (i ជាចំនួនកុំផ្លិច) ។ ចូរគណនា α និង β

α និង β ជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន

គេមាន $\left(\frac{\sqrt{\beta}}{1+\alpha i}\right)^4=-1$

នោះគេបាន $\left(\sqrt{\beta}\right)^4=-(1+\alpha i)^4$

$\Rightarrow \beta^2=i^2(1+\alpha i)^4$

$\Rightarrow \beta=\pm i(1+\alpha i)^2$

$\Rightarrow \beta=\pm i(1+2\alpha i+\alpha^2 i^2)$

$\Rightarrow \beta=\pm i(1-\alpha^2+2\alpha i)$

បើ $\beta=i(1-\alpha^2+2\alpha i)=-2a+(1-\alpha^2)i$

ដោយ β ជាចំនួនពិត

នោះគេបាន $1-\alpha^2=0$

$\Rightarrow \alpha^2=1$

$\Rightarrow \alpha=1$ ព្រោះ $\alpha>0$

នាំឲ្យ $\beta=-2\cdot 1+(1-1^2)i$

$=-2$ មិនយក ព្រោះ $\beta>0$

បើ $\beta=-i(1-\alpha^2+2\alpha i)$

$=-i(1-1^2+2\cdot 1i)$

$=-i\cdot 2i=2$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha=1\ ,\beta=2}$

8. ១. បង្ហាញថាបើ Z_0 ជាឫសរបស់សមីការ (E) នោះ $\overline{Z_0}$ ក៏ជាឫសរបស់ (E) ដែរ

បើ Z_0 ជាឫសរបស់សមីការ (E)

នោះ $2Z_0^4+3Z_0^2+3\sqrt{3}Z_0+9=0$

$\Rightarrow \overline{2Z_0^4+3Z_0^2+3\sqrt{3}Z_0+9}=0$

$\Rightarrow 2\overline{Z_0^4}+3\overline{Z_0^2}+3\sqrt{3}\,\overline{Z_0}+9=0$

ដូចនេះ $\boxed{\overline{Z_0}\text{ ជាឫសរបស់ }(E)}$

២. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច សមីការ (E) ដោយដឹងថាឫសវាមួយមានទម្រង់ $a(1+i)$; $a\in\mathbb{R}$

គេមាន $2Z^4+3Z^2+3\sqrt{3}Z+9=0\ (E)$

ដោយ $a(1+i)$ ជាឫសរបស់ (E) គេបាន

$2a^4(1+i)^4+3a^2(1+i)^2+3\sqrt{3}a(1+i)+9=0$

$2a^4(1+4i+6i^2+4i^3+i^4)+3a^2(1+2i+i^2)+3\sqrt{3}a+3\sqrt{3}ai+9=0$

$-8a^4+6a^2i+3\sqrt{3}a+3\sqrt{3}ai+9=0$

$(-8a^4+3\sqrt{3}a+9)+(6a^2+3\sqrt{3}a)i=0$

$\Rightarrow \begin{cases} -8a^4+3\sqrt{3}a+9=0 \ (1) \\ 6a^2+3\sqrt{3}a=0 \quad\quad (2) \end{cases}$

តាម (2) $6a^2+3\sqrt{3}a=0$

$$3a(2a+\sqrt{3})=0 \Rightarrow a=0 \ \ , a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

តែ $a=0$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (1)

នោះឫសរបស់សមីការ (E) គឺ $-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)$ ក៏ជាឫសរបស់សមីការ (E) ដែរ

$2Z^4+3Z^2+3\sqrt{3}Z+9$ អាចសរសេរជាផលគុណកត្តាដែលមានកត្តា

$$\left[Z+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)\right]\left[Z+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)\right]$$

$$=\left[\left(Z+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]\left[\left(Z+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$=\left(Z+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$$

$$=Z^2+2\cdot Z\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$=Z^2+\sqrt{3}Z+\frac{3}{2}$$

សមីការ (E) អាចសរសេរទៅជា

$$2Z^4+3Z^2+3\sqrt{3}Z+9=0$$

$\Rightarrow \left(Z^2+\sqrt{3}Z+\frac{3}{2}\right)(2Z^2-2\sqrt{3}Z+6)=0$

$\Rightarrow 2Z^2-2\sqrt{3}Z+6=0$ ឬ $Z^2-\sqrt{3}Z+3=0$

$\Delta=(-\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot3=3-12=-9=(3i)^2$

គេបាន $Z=\frac{-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(3i)^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{3}{2}i$

ដូចនេះ $\boxed{Z=-\frac{\sqrt{3}}{2}(1\pm i) \ \ , Z=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{3}{2}i}$

9. ១. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $2Z^2-(5+i\sqrt{3})Z+2(1+i\sqrt{3})=0$

$\Delta=[-(5+i\sqrt{3})]^2-4\cdot2\cdot2(1+i\sqrt{3})$

$=25+10i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2-16-16i\sqrt{3}$

$=6-6i\sqrt{3}$

ដោយ $6-6i\sqrt{3}=9-6i\sqrt{3}-3=3^2-2\cdot3\cdot i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2=(3-i\sqrt{3})^2$

នាំឲ្យ $Z=\frac{(5+i\sqrt{3})\pm\sqrt{(3-i\sqrt{3})^2}}{2\cdot2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} Z_1 = \dfrac{5+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{4} = 2 \\ Z_2 = \dfrac{5+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

ដូចនេះ $\boxed{Z_1 = 2 \quad , Z_2 = \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

សរសេរឫសនៃសមីការជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ មានឫស α មានតម្លៃស្មើ 1 និងឫស β ផ្សេងទៀត ។

យើងមាន $Z_1 = 2 = 2(1+0i) = 2(\cos 0 + i\sin 0)$

និង $Z_2 = \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} Z_1 = 2(\cos 0 + i\sin 0) \\ Z_2 = \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) \end{array}}$

២.កំណត់ចំនួនពិត x ដើម្បីឲ្យ $\dfrac{1+ix}{1-ix} = \alpha$

ដោយ $\alpha = 1$

គេបាន $\dfrac{1+ix}{1-ix} = 1 \Leftrightarrow 1+ix = 1-ix$

$\Rightarrow 2ix = 0$

$\Rightarrow x = 0$

ដូចនេះ $\boxed{x = 0}$

10. ១. កំណត់ឫសកុំផ្លិច Z_1 និង Z_2 នៃសមីការ (1) ដែល $|Z_1| < |Z_2|$

គេមានសមីការ $Z^2 + (4+4i)Z + (7+32i) = 0$ (1)

$$\begin{aligned} \Delta' &= (2+2i)^2 - (7+32i) \\ &= 4+8i-4-7-32i \\ &= -7-24i \end{aligned}$$

ដោយ $-7-24i = 9-24i-16$

$$\begin{aligned} &= 3^2 - 2\cdot 3\cdot 4i + (4i)^2 \\ &= (3-4i)^2 \end{aligned}$$

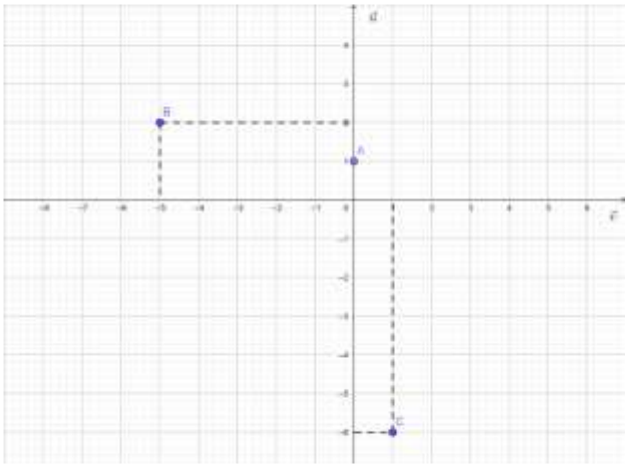
$$\begin{aligned} \Rightarrow Z_1 &= -(2+2i) - \sqrt{(3-4i)^2} \\ &= -2-2i-3+4i = -5+2i \\ Z_2 &= -(2+2i) + \sqrt{(3-4i)^2} \\ &= -2-2i+3-4i = 1-6i \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z_1 = -5+2i \ , \ Z_2 = 1-6i}$

២. នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (P) ប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរមេ $(o,\vec{u},\vec{v})$ ចំណុច A,B,C ជារូបភាពរៀងគ្នានៃ i,Z_1,Z_2 ។ ដៅចំណុច A,B និង C ក្នុងប្លង់ (P)

ដោយ ចំណុច A,B,C ជារូបភាពរៀងគ្នានៃ i,Z_1,Z_2

គេបាន $A=0+i\,,B=-5+2i\,,C=1-6i$



រកកូអរដោនេនៃបារីសង់ G នៃប្រព័ន្ធ $(A,2)\,,(B,-2)$ និង $(C,-1)$

តាមរូបមន្ត $x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}$ និង $y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}$

យើងបាន $x_G=\dfrac{(2\times 0)+(-2)(-5)+(-1)\times 1}{2-2-1}=\dfrac{10-1}{-1}=-9$

និង $y_G=\dfrac{(2\times 1)+(-2)\times 2+(-1)(-6)}{2-2-1}=\dfrac{2-4+6}{-1}=-4$

ដូចនេះ $\boxed{G(-9\,,-4)}$

11. គេមានសមីការ $Z^2-Z\left(\sqrt{3}-1+2i\right)-\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}-i=0\ (1)$

១. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច Z_1 និង Z_2 ដែលជាឫសនៃសមីការ (1)

គេមានសមីការ $Z^2-Z\left(\sqrt{3}-1+2i\right)-\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}-i=0\ (1)$

$\Delta=\left(\sqrt{3}-1+2i\right)^2-4\left(-\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}-i\right)$

$=3+1-4-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}i-4i+4\sqrt{3}+4-4i\sqrt{3}+4i$

$=4+2\sqrt{3}$

ដោយ $4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1^2=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

គេបាន $Z_1=\dfrac{\sqrt{3}-1+2i+\sqrt{3}+1}{2}=\sqrt{3}+i$

$Z_2=\dfrac{\sqrt{3}-1+2i-\sqrt{3}-1}{2}=-1+i$

ដូចនេះ $\boxed{Z_1=\sqrt{3}+i\ ,Z_2=-1+i}$

២. កំណត់ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ Z_1 និង Z_2

ដោយ $Z_1 = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

និង $Z_2 = -1 + i$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} |Z_1| = 2 , \arg(Z_1) = \frac{\pi}{6} \\ |Z_2| = \sqrt{2} , \arg(Z_2) = \frac{3\pi}{4} \end{array}}$

12. ១. កំណត់ឫសកុំផ្លិច Z_1 និង Z_2 $(|Z_1| \le |Z_2|)$ នៃសមីការ $Z^2 - 3(1+i)Z + 4i = 0$

$\Delta = [-3(1+i)]^2 - 4\cdot 4i = 18i - 16i = 2i = 1^2 + 2\cdot 1\cdot i + i^2 = (1+i)^2$

នាំឲ្យ $Z_1 = \frac{3(1+i) + (1+i)}{2} = 2 + 2i$

$Z_2 = \frac{3(1+i) - (1+i)}{2} = 1 + i$

ដូចនេះ $\boxed{Z_1 = 2 + 2i\ , Z_2 = 1 + i}$

២. ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុច G

តាង $(x_G; y_G)$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុច G

ដោយ G ជាបារីសង់នៃចំណុច $A(0,1); B(1,1)$ និង $C(2,2)$ ភ្ជាប់ដោយមេគុណ $2; -2; 1$ រៀងគ្នា

យើងបាន $\begin{cases} x_G = \dfrac{2x_A - 2x_B + x_C}{2 - 2 + 1} \\ y_G = \dfrac{2y_A - 2y_B + y_C}{2 - 2 + 1} \end{cases}$

$\begin{cases} x_G = 2\times 0 - 2\times 1 + 2 = 0 \\ y_G = 2\times 1 - 2\times 1 + 2 = 2 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{G(0, 2)}$

ខ. រកសំណុំចំណុច M នៃ (P) ដែល $\|2\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}\| = 3$

ដោយ G ជាបារីសង់នៃចំណុច $(A, 2); (B, -2)$ និង $(C, 1)$

គេបាន $2\overline{GA} - 2\overline{GB} + \overline{GC} = \overline{0}$

គ្រប់ចំណុច M ក្នុងប្លង់ (P) យើងអាចសរសេរ

$2(\overline{GM}+\overline{MA})-2(\overline{GM}+\overline{MB})+(\overline{GM}+\overline{MC})=\overline{0}$

$\overline{GM}=-(2\overline{MA}-2\overline{MB}+\overline{MC})$

$\|\overline{GM}\|=\|-(2\overline{MA}-2\overline{MB}+\overline{MC})\|=\|2\overline{MA}-2\overline{MB}+\overline{MC}\|$

តែ $\|2\overline{MA}-2\overline{MB}+\overline{MC}\|=3$ នាំឲ្យ $\|\overline{GM}\|=3$ ឬ $GM=3$

ដូចនេះ សំណុំចំណុច M គឺជារង្វង់ផ្ចិត $G(0,2)$ និងកាំ $R=3$

13. ១. កំណត់ពហុធាដឺក្រេទី២ $P(Z)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $Z^3+Z^2+Z+1=(Z+1)P(Z)$

តាង $P(Z)=aZ^2+bZ+c$ ដែល $a\neq 0$

គេមាន $Z^3+Z^2+Z+1=(Z+1)P(Z)$

សមមូល $Z^3+Z^2+Z+1=(Z+1)(aZ^2+bZ+c)$

$Z^3+Z^2+Z+1=aZ^3+(a+b)Z^2+(b+c)Z+c$

គេបាន $\begin{cases} a=1 \\ a+b=1 \\ b+c=1 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $P(Z)=Z^2+1$

២. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចនូវសមីការ

$$\left(\frac{Z-2i}{Z+2i}\right)^3+\left(\frac{Z-2i}{Z+2i}\right)^2+\left(\frac{Z-2i}{Z+2i}\right)+1=0$$

តាង $u=\dfrac{Z-2i}{Z+2i}$ យើងបាន $u^3+u^2+u+1=0\Leftrightarrow(u+1)(u^2+1)=0$

នាំឲ្យ $u+1=0\Rightarrow u=-1$

$u^2+1=0\Rightarrow u=\pm i$

ចំពោះ $u=-1$ យើងបាន $\dfrac{Z-2i}{Z+2i}=-1\Rightarrow Z-2i=-Z-2i\Rightarrow Z=0$

ចំពោះ $u=i$ យើងបាន $\dfrac{Z-2i}{Z+2i}=i\Rightarrow Z-2i=iZ-2\Rightarrow Z=-2$

ចំពោះ $u=-i$ យើងបាន $\dfrac{Z-2i}{Z+2i}=-i\Rightarrow Z-2i=-iZ+2\Rightarrow Z=2$

ដូចនេះ $Z=0\,,Z=-2\,,Z=2$

14. ១. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b

ដោយ $x=1+i$ ជាឫសរបស់សមីការ $x^3-3x^2+ax+b=0$

យើងបាន $(1+i)^3-3(1+i)^2+a(1+i)+b=0$

$(1+3i+3i^2+i^3)-3(1+2i+i^2)+a+ia+b=0$
$-2+2i-6i+a+ia+b=0$
$(a+b-2)+(a-4)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-2=0 \\ a-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=4 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=4\,, b=-2}$

២. រកឫសផ្សេងទៀត

ដោយ $a=4$ និង $b=-2$

សមីការខាងលើគេបាន $x^3-3x^2+4x-2=0$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2-2x^2+2x+2x-2=0$$
$$x^2(x-1)-2x(x-1)+2(x-1)=0$$
$$(x-1)(x^2-2x+2)=0$$

យើងបាន $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x^2-2x+2=0$

$\Delta=(-1)^2-2=-1=i^2$ នាំឲ្យ $x=1\pm i$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ឫសផ្សេងទៀតនៃសមីការខាងលើគឺ } x=1\ , x=1-i}$

15. គេឲ្យ $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

១. គណនា $P(-1)$

$$P(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7$$
$$=-1-3-3+7$$
$$=0$$

ដូចនេះ $\boxed{P(-1)=0}$

២. កំណត់ចំនួនពិត a,b ដើម្បីឲ្យគេបាន $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$ ចំពោះគ្រប់ $z\in\mathbb{C}$

ដោយ $P(-1)=0$

នោះ $z=-1$ ជាឫសសមីការ $P(z)=0$

យើងមាន $z^3-3z^2+3z+7=z^3+z^2-4z^2-4z+7z+7$

$$=z^2(z+1)-4z(z+1)+7(z+1)$$
$$=(z+1)(z^2-4z+7)$$

យើងបាន $a=-4\ , b=7$

ដូចនេះ $\boxed{a=-4\ , b=7}$

16. ១. រកម៉ូឌុលនៃ w

យើងមានសមីការ $(E): 5w^3 - 2i|w|^2 - 3i = 0$

$\Leftrightarrow 5w^3 = (2|w|^2 + 3)i$

$\Rightarrow |5w^3| = |(2|w|^2 + 3)i|$

$\Rightarrow 5|w^3| = (2|w|^2 + 3)|i|$

$\Rightarrow 5|w^3| = (2|w|^2 + 3)$ ព្រោះ $2|w|^2 + 3 > 0$

គេបាន $5|w^3| - 2|w|^2 - 3 = 0$

តាង $X = |w| \geq 0$គេបាន

$5X^3 - 2X^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (X-1)(5X^2 + 3X + 3) = 0$

យើងបាន $\begin{cases} X = 1 \\ 5X^2 + 3X + 3 = 0 \end{cases}$

ដោយ $\Delta = 3^2 - 4\cdot 5\cdot 3 = 9 - 60 = -51 < 0$

នាំឲ្យ សមីការ $5X^2 + 3X + 3 = 0$ គ្មានឫស

បើ $X = 1 \Rightarrow |w| = 1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ម៉ូឌុលនៃ } w \text{ គឺ } |w| = 1}$

២. រកឫសទាំងអស់របស់សមីការ (E)

ដោយ $|w| = 1$ យើងបាន

$(E): 5w^3 - 2i - 3i = 0$

$\Leftrightarrow 5w^3 - 5i = 0$

$\Rightarrow w = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

នាំឲ្យឫសទាំងអស់នៃសមីការ (E) គឺ $w_k = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$ $, k = 1,2,3$

បើ $k = 0 \Rightarrow w_1 = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

បើ $k = 1 \Rightarrow w_1 = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

$= -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

បើ $k=2 \Rightarrow w_2=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)$

$$=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$$
$$=-\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=-i$$

ដូចនេះ $\boxed{w=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\ \ ,w=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\ \ ,w=-i}$

17. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $w=\frac{z-2i}{z-1}$ ដែល $z\neq 1$ តាង $z=x+iy$ និង $w=a+ib$ ដែល x,y,a,b ជាចំនួនពិត ។

១. គណនា a,b ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

គេមាន $w=\frac{z-2i}{z-1}$

ដោយ $z=x+iy$ និង $w=a+ib$

យើងបាន $a+ib=\frac{x+iy-2i}{x+iy-1}$

$$=\frac{(x+iy-2i)(x-1-iy)}{(x-1+iy)(x-1-iy)}$$
$$=\frac{x^2-x-ixy+ixy-iy-(iy)^2-2xi+2i+2i^2y}{(x-1)^2-(iy)^2}$$
$$=\frac{(x^2-x+y^2-2y)+(-y-2x+2)i}{(x-1)^2+y^2}$$
$$=\frac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2}+\frac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2}i$$

គេបាន $a=\frac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2}\ \ ,b=\frac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2}$

ដូចនេះ $\boxed{a=\frac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2}\ \ ,b=\frac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2}}$

២. រកសំណុំចំណុច $M(x,y)$ ដើម្បីឲ្យ w ជាចំនួនពិតសុទ្ធ

w ជាចំនួនពិតសុទ្ធកាលណា $b=0$ គឺ

$$\begin{cases}-2x-y+2=0\\(x-1)^2+y^2\neq 0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}y=-2x+2\\x\neq 1\ \ ,y\neq 0\end{cases}$$

ដូចនេះ

សំណុំចំណុច M គឺជាបន្ទាត់ (D) ដែល $y=-2x+2$
លើកលែងចំណុច $A(1\,,0)$

៣. រកសំណុំចំណុច $M(x,y)$ ដើម្បីឲ្យ w ជាចំនួននិមិត្តសុទ្ធ

w ជាចំនួនពិតសុទ្ធកាលណា $b=0$ គឺ

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-2y=0 \\ (x-1)^2+y^2\neq 0 \\ \dfrac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-x-2y=0 \\ x\neq 1\,, y\neq 0 \\ x\neq 0\,, y\neq 2 \end{cases}$$

$$x^2+y^2-x-2y=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2-2y+1^2-\frac{1}{4}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$$

ដូចនេះ សំណុំចំណុច M ជារង្វង់ផ្ចិត $I\left(\frac{1}{2},1\right)$ កាំ $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$ លើកលែងចំណុច $A(1,0)$ & $B(0,2)$

18. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

១. $z_1=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow z_1^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2+2\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot i\sqrt{2-\sqrt{2}}+\left(i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=2+\sqrt{2}+i2\sqrt{2}-2+\sqrt{2}$$

$$=2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$$

$$=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow z_1=\sqrt{4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\sqrt{4}\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

ដូចនេះ $|z_1|=2 \quad ,\arg(z_1)=\frac{\pi}{8}$

២. $z_2 = 2+\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$$= 2+\sqrt{2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}+i\sqrt{2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$
$$= 2+\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$= 2+\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{6}}+i\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{6}}$$
$$= 2+\sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\frac{\pi}{12}}+i\sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{12}}$$
$$= 2+2\cos\frac{\pi}{12}+2i\sin\frac{\pi}{12}$$
$$= 2\left(1+\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$
$$= 2\left(2\cos^2\frac{\pi}{24}+2i\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\right)$$
$$= 4\cos\frac{\pi}{24}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{|z_2| = 4\cos\frac{\pi}{24} \quad ,\arg(z_2)=\frac{\pi}{24}}$

៣. $z_3 = \dfrac{1+\sin\alpha+i\cos\alpha}{1+\sin\alpha-i\cos\alpha}$

ដោយ $1+sin\,\alpha+i\,cos\,\alpha = 1+cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\,sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$= 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)^2+i2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

និង $1+sin\,\alpha-i\,cos\,\alpha == 1+cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-i\,sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$= 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)^2-i2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}-i\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

គេបាន $z_3 = \dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]}$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{|z_3| = 1 \quad ,\arg(z_3) = \frac{\pi}{2}-\alpha}$

19. ស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម៖

១. $\dfrac{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^5(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^3}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^{-9}(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)^9} = 1$

ដោយ $\dfrac{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^5(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^3}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^{-9}(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)^9}$

$$= \frac{(\cos 15\theta + i\sin 15\theta)[\cos(-6\theta) + i\sin(-6\theta)]}{[\cos(-36\theta) + i\sin(-36\theta)](\cos 45\theta + i\sin 45\theta)}$$
$$= \frac{\cos 9\theta + i\sin 9\theta}{\cos 9\theta + i\sin 9\theta}$$
$= 1$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^5(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^3}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^{-9}(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)^9} = 1}$

២. $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

ដោយ $(1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^n$

$$= \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$
$$= \sqrt{2}^n\left(\cos n\frac{\pi}{4} + i\sin n\frac{\pi}{4}\right)$$
$= 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)}$

៣. $\left(\dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x}\right)^n = \dfrac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx}$

ដោយ $\dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x} = \dfrac{1+i\frac{\sin x}{\cos x}}{1-i\frac{\sin x}{\cos x}}$

$$= \frac{\frac{\cos x + i\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x - i\sin x}{\cos x}}$$

$$= \frac{\cos x + i\sin x}{\cos(-x) + i\sin(-x)}$$

គេបាន $\left(\frac{1+i\tan x}{1-i\tan x}\right)^n = \left(\frac{\cos x + i\sin x}{\cos(-x)+i\sin(-x)}\right)^n$

$$= \frac{\cos nx + i\sin nx}{\cos(-nx) + i\sin(-nx)}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos nx + i\sin nx}{\cos nx}}{\dfrac{\cos(-nx)+i\sin(-nx)}{\cos nx}}$$

$$= \frac{1 + i\dfrac{\sin nx}{\cos nx}}{1 - i\dfrac{\sin nx}{\cos nx}}$$

$$= \frac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\left(\frac{1+i\tan x}{1-i\tan x}\right)^n = \frac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx}}$

20. បង្ហាញថា $(1+z)^3 = 8\cos^3\frac{2\pi}{5}\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$ ។

គេមាន $z = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$

$\Rightarrow 1 + z = 1 + \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$

$= 2\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2i\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$

$= 2\cos\frac{2\pi}{5}\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

$\Rightarrow (1+z)^3 = \left[2\cos\frac{2\pi}{5}\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)\right]^3$

$= \left(2\cos\frac{2\pi}{5}\right)^3\left(\cos 3\frac{2\pi}{5} + i\sin 3\frac{2\pi}{5}\right)$

$= 8\cos^3\frac{2\pi}{5}\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{(1+z)^3 = 8\cos^3\frac{2\pi}{5}\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right)}$

21. ១. បង្ហាញថា $1 + z = (1+\bar{z})z$

គេមាន $z = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow \bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$

គេបាន $1 + z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos\theta + i\sin\theta$

$= \cos^2\theta - i^2\sin^2\theta + \cos\theta + i\sin\theta$

$= (\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= (\cos\theta - i\sin\theta + 1)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= (1+\bar{z})z$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{1+z=(1+\overline{z})z}$

២. រកចំនួនពិត m និង n បើ $(3+i)m+n=3-4i$

គេមាន $(3+i)m+n=3-4i$

$$3m+im+n=3-4i$$

$$(3m+n)+im=3-4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3m+n=3\\ m=-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}n=15\\ m=-4\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{m=-4\ ,n=15}$

៣. រកចំនួនកុំផ្លិច z_1 ដោយសរសេរលទ្ធផលជារាង $a+bi$ ។

គេមាន $z\cdot z_1=6\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{12}+i\,sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\Rightarrow z_1=\frac{6\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{12}+i\,sin\frac{7\pi}{12}\right)}{z}$$

ដោយ $z=3+3i=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

យើងបាន $z_1=\dfrac{6\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{12}+i\,sin\frac{7\pi}{12}\right)}{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

$$=2\left[cos\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)+i\,sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=1+i\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=1+i\sqrt{3}}$

22. ១. ដោះស្រាយសមីការ $Z^2-2Z\sin a-2i+\sin^2 a=0\ ;(a\in\mathbb{R})$

$\Delta'=(-\sin a)^2-(-2i+\sin^2 a)$

$$=\sin^2 a+2i-\sin^2 a$$

$$=2i$$

$$=(1+i)^2$$

យើងបាន $Z=-(-\sin a)\pm\sqrt{(1+i)^2}$

$$=\sin a\pm(1+i)$$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \sin a \pm (1+i)}$

២. គណនា $|Z|$; $\arg(Z)$

គេមាន $Z = \dfrac{Z' - Z''}{2} + \sqrt{2}$

ដែល Z', Z'' ជាឫសនៃសមីការ $Z^2 - 2Z\sin a - 2i + \sin^2 a = 0$

និង Z' ជាឫសមានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន

យើងបាន $Z' = \sin a + (1+i)$ និង $Z'' = \sin a - (1+i)$

នាំឲ្យ $Z = \dfrac{[\sin a + (1+i)] - [\sin a - (1+i)]}{2} + \sqrt{2}$

$$= \frac{\sin a + (1+i) - \sin a + (1+i)}{2} + \sqrt{2}$$

$$= 1 + i + \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(2\cos^2\frac{\pi}{8} + 2i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{|Z| = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8} \text{ និង } \arg(Z) = \frac{\pi}{8}}$

23. រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $\dfrac{50}{\overline{z}} - \dfrac{10}{z} = 2 + 9i$ ដែល $|z| = 2\sqrt{10}$

តាង $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$

គេមាន $\dfrac{50}{\overline{z}} - \dfrac{10}{z} = 2 + 9i$

$$\frac{50z - 10\overline{z}}{z\overline{z}} = 2 + 9i$$

ដោយ $z\overline{z} = |z| = 2\sqrt{10}$

យើងបាន $\dfrac{50z - 10\overline{z}}{2\sqrt{10}} = 2 + 9i$

$$\frac{25z - 5\overline{z}}{\sqrt{10}} = 2 + 9i$$

$$25z - 5\overline{z} = 2\sqrt{10} + 9\sqrt{10}i$$

$$25(a + bi) - 5(a - bi) = 2\sqrt{10} + 9\sqrt{10}i$$

$$25a + 25bi - 5a + 5bi = 2\sqrt{10} + 9\sqrt{10}i$$

$$20a + 30bi = 2\sqrt{10} + 9\sqrt{10}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20a = 2\sqrt{10} \\ 30b = 9\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{10}}{10} \\ b = \dfrac{3\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

នាំឲ្យ $z=\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{3\sqrt{10}}{10}i=\frac{\sqrt{10}}{10}(1+3i)$

ដូចនេះ $\boxed{z=\frac{\sqrt{10}}{10}(1+3i)}$

24. គេឲ្យពហុធា $P(z)=z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i$ ។ ចូរគណនា $P(i)$

គេមាន $P(z)=z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i$

នាំឲ្យ $P(i)=i^3-(2+i)i^2+2(1+i)i-2i$
$=-i+2+i+2i-2-2i$
$=0$

ដូចនេះ $\boxed{P(i)=0}$

ដោះស្រាយសមីការ $P(z)=0$ ក្នុង $\mathbb{C}$

$P(z)=0\Leftrightarrow z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i=0\quad(*)$

ដោយ $P(i)=0$ នាំឲ្យ $z=i$ ជាឫសនៃសមីការ $(*)$

នោះ $z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i=0$
$(z-i)(z^2-2z+2)=0$
$(z-i)[(z-1)^2+1]=0$
$(z-i)[(z-1)^2-i^2]=0$
$(z-i)(z-1-i)(z-1+i)=0$

$\Rightarrow z-i=0\quad ,z-1-i=0\quad ,z-1+i=0$
$z=i\quad\quad z=1+i\quad\quad z=1-i$

ដូចនេះ $\boxed{z=i\ ,z=1+i\ \ ,z=1-i}$

25. បង្ហាញថា $Z'=zz'\overline{Z}$

ដោយ z និង z' ជាចំនួនកុំផ្លិចមានម៉ូលឌុល 1

យើងបាន $\overline{z}=\frac{1}{z}$ និង $\overline{z'}=\frac{1}{z'}$

គេមាន $Z=z+z'+azz'+1$

$\Rightarrow\ \overline{Z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}+a\frac{1}{zz'}+1$

និង $Z'=z+z'+zz'+a$

$Z'=zz'\left(\frac{1}{z'}+\frac{1}{z}+1+a\frac{1}{zz'}\right)$

$Z'=zz'\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}+a\frac{1}{zz'}+1\right)$

$Z'=zz'\overline{Z}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{Z' = zz'\overline{Z}}$

➢ បង្ហាញថា $|Z| = |Z'|$

ដោយ $|z| = |z'| = 1$

នោះ $Z = z + z' + azz' + 1$

$\Rightarrow |Z| = 1 + 1 + a + 1 = 3 + a$

និង $Z' = z + z' + zz' + a$

$\Rightarrow |Z'| = 1 + 1 + 1 + a = 3 + a$

ដូចនេះ $\boxed{|Z| = |Z'|}$

26. គេឲ្យ $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}},\ z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}},\ z_3 = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ សរសេរជាទម្រង់អិុចស្ប៉ូណង់ស្យែលនូវចំនួនកុំផ្លិច

១. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

$= 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3} - i\frac{\pi}{3} - i\frac{5\pi}{6}}$

$= 2\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$

២. $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^0}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{0 - i\frac{\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{z_1} = e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

៣. $z_3^2 = \left(\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = 3e^{-i\frac{5\pi}{6}\cdot 2} = 3e^{-i\frac{5\pi}{3}}$

ដូចនេះ $\boxed{z_3^2 = 3e^{-i\frac{5\pi}{3}}}$

៤. $\frac{z_2}{z_3} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{3} - \left(-i\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-i\frac{2\pi}{6} + i\frac{5\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{z_2}{z_3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}$

27. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចជាទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនូវចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

១. $z = 4 - 4i\sqrt{3} = 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$

ដូចនេះ $\boxed{z = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}}$

២. $z = \frac{1}{1+i} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ដូចនេះ $\boxed{z = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

៣. $z = \frac{-\sqrt{3}+i}{2+2i\sqrt{3}}$

ដោយ $-\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

និង $2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

គេបាន $z = \frac{-\sqrt{3}+i}{2+2i\sqrt{3}}$

$= \frac{2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

ដូចនេះ $\boxed{z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}$

៤. $z = -4\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 4\left(-cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 4\left[cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$= 4\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\frac{5\pi}{4}\right)$$
$$= 4e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

ដូចនេះ $\boxed{z = 4\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\frac{5\pi}{4}\right) = 4e^{i\frac{5\pi}{4}}}$

28. ដោយប្រើ $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ និង $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ បង្ហាញថា

១. $\sin^3\theta = \dfrac{3}{4}\sin\theta - \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$

ដោយ $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \Rightarrow \sin 3\theta = \dfrac{e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{2i}$

គេមាន $\sin^3\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$

តាមរូបមន្ត $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

យើងបាន $\sin^3\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$

$$= \frac{\left(e^{i\theta}\right)^3 - 3\left(e^{i\theta}\right)^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^2 - \left(e^{-i\theta}\right)^3}{8i^3}$$
$$= \frac{e^{i3\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-i3\theta}}{-8i}$$
$$= -\frac{3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)}{-8i} + \frac{e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{-8i}$$
$$= \frac{3}{4}\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{2i}\right)$$
$$= \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta}$

២. $\cos^4\theta = \dfrac{1}{8}\cos 4\theta + \dfrac{1}{2}\cos 2\theta + \dfrac{3}{8}$

ដោយ $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow \cos 2\theta = \dfrac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2}$

$$\Rightarrow \cos 4\theta = \frac{e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}}{2}$$

គេមាន $\cos^4\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4$

តាមរូបមន្ត $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

យើងបាន $\cos^4\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4$

$$= \frac{\left(e^{i\theta}\right)^4 + 4\left(e^{i\theta}\right)^3 e^{-i\theta} + 6\left(e^{i\theta}\right)^2\left(e^{-i\theta}\right)^2 + 4e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^3 + \left(e^{-i\theta}\right)^4}{16}$$

$$= \frac{e^{i4\theta} + 4e^{i2\theta} + 6 + 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}}{16}$$
$$= \frac{e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}}{16} + \frac{4e^{i2\theta} + 4e^{-i2\theta}}{16} + \frac{6}{18}$$
$$= \frac{1}{8}\frac{\left(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}\right)}{2} + \frac{1}{2}\frac{\left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}\right)}{2} + \frac{3}{8}$$
$$= \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\cos^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}}$

៣. $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

ដោយ $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2}$

និង $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

គេមាន $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$
$$= \frac{\left(e^{i\theta}\right)^2 + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + \left(e^{-i\theta}\right)^2}{4} - \frac{\left(e^{i\theta}\right)^2 - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + \left(e^{-i\theta}\right)^2}{-4}$$
$$= \frac{e^{i2\theta} + 2 + e^{-i2\theta} + e^{i2\theta} - 2 + e^{-i2\theta}}{4}$$
$$= \frac{2\left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}\right)}{4}$$
$$= \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2}$$
$$= \cos 2\theta$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta}$

៤. $\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

ដោយ $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow \cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$
$$\Rightarrow \cos b = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}$$
$$\Rightarrow \cos(a+b) = \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2}$$
$$\Rightarrow \cos(a-b) = \frac{e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}}{2}$$

គេមាន $\cos a\cos b = \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right)\left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right)$
$$= \frac{e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{i(-a+b)} + e^{i(-a-b)}}{4}$$
$$= \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2}+\frac{e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)] \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]}$

29. គណនាផលបូក $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin 2020x$

តាង $S = \sin x+\sin 2x+\cdots+\sin 2020x$

$P = \cos x+\cos 2x+\cdots+\cos 2020x$

$$\Rightarrow P+iS = (\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos 2020)+i(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin 2020)$$
$$= (\cos x+i\sin x)+(\cos 2x+i\sin 2x)+\cdots+(\cos 2020x+i\sin 2020x)$$
$$= (\cos x+i\sin x)+(\cos x+i\sin x)^2+\cdots+(\cos x+i\sin x)^{2020}$$

នោះ $P+iS$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមាន

$a_1 = (\cos x+i\sin x)\,, q = (\cos x+i\sin x)\,, n = 2020$

នាំឲ្យ $P+iS$

$$= a_1\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$$
$$= (\cos x+i\sin x)\frac{1-(\cos x+i\sin x)^{2020-1}}{1-(\cos x+i\sin x)}$$
$$= \frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos x+i\sin x)^{2020}}{1-\cos x-i\sin x}$$
$$= \frac{[(\cos x+i\sin x)-(\cos 2020x+i\sin 2020x)](1-\cos x+i\sin x)}{[(1-\cos x)-i\sin x][(1-\cos x)+i\sin x]}$$
$$= \frac{\cos x+i\sin x-1-\cos 2021x-i\sin 2021x+\cos 2020x+i\sin 2020x}{(1-\cos x)^2+\sin^2 x}$$
$$= \frac{(\cos x+\cos 2020x-\cos 2021x-1)+i(\sin x+\sin 2020x-\sin 2021x)}{1-2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}$$
$$= \frac{(\cos x+\cos 2020x-\cos 2021x-1)+i(\sin x+\sin 2020x-\sin 2021x)}{2(1-\cos x)}$$
$$= \frac{(\cos x+\cos 2020x-\cos 2021x-1)+i(\sin x+\sin 2020x-\sin 2021x)}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{\cos x+\cos 2020x-\cos 2021x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}+i\frac{\sin x+\sin 2020x-\sin 2021x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{\cos x+\cos 2020x-\cos 2021x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \\ S = \dfrac{\sin x+\sin 2020x-\sin 2021x}{4\sin^2\frac{x}{2}} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin 2020x = \frac{\sin x+\sin 2020x-\sin 2021x}{4\sin^2\frac{x}{2}}}$

30. គណនា $\left|Z_1^{2019}+Z_2^{2019}\right|$

គេមាន $Z_1^{2020} \cdot Z_2 = 2019 + i \ (1)$

$Z_1 \cdot Z_2^{2020} = 2019 - i \ (2)$

យក $(1) + (2)$

យើងបាន $Z_1^{2020} \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_2^{2020} = 2019 + i + 2019 - i$

$$Z_1 Z_2 (Z_1^{2019} + Z_2^{2019}) = 2 \cdot 2019$$

$$Z_1^{2019} + Z_2^{2019} = \frac{2 \cdot 2019}{Z_1 Z_2}$$

យក $(1) + (2)$

យើងបាន $(Z_1^{2020} \cdot Z_2)(Z_1 \cdot Z_2^{2020}) = (2019 + i)(2019 - i)$

$$\Rightarrow \quad Z_1^{2021} \cdot Z_2^{2021} = 2019^2 + 1$$

$$\Rightarrow \quad Z_1 Z_2 = \sqrt[2021]{2019^2 + 1}$$

នាំឲ្យ $Z_1^{2019} + Z_2^{2019} = \dfrac{2 \cdot 2019}{\sqrt[2021]{2019^2 + 1}}$

នាំឲ្យ $\left|Z_1^{2019} + Z_2^{2019}\right| = \dfrac{2 \cdot 2019}{\sqrt[2021]{2019^2 + 1}}$

ដូចនេះ $\boxed{\left|Z_1^{2019} + Z_2^{2019}\right| = \dfrac{2 \cdot 2019}{\sqrt[2021]{2019^2 + 1}}}$

ឯកសារយោង

១. វចនានុក្រមខ្មែររបស់សម្តេចព្រះសង្ឃរាជ **ជួន ណាត**

២. សៀវភៅសិក្សាគោលគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១១ កម្រិតខ្ពស់របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

៣. សៀវភៅគណិតវិទ្យា១៥ភាគ រៀបរៀងដោយ JICA គាំទ្រដោយក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

៤. វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ប្រឡងឆមាសទី១ ឆមាសទី២ ប្រឡងបាក់ឌុប ប្រឡងគ្រូបឋម ប្រឡងគ្រូមធ្យម ប្រឡងគ្រូឧត្តម រៀបរៀងដោយ លោកគ្រូ **ច្រើស ដារ៉ា**

៥. សៀវភៅវិភាគអថេរកុំផ្លិច រៀបរៀងដោយ អ្នកគ្រូ **អោ មណីចន្ទ្រា**

៦. សៀវភៅវិញ្ញាសាប្រឡងទៅក្រៅប្រទេស រៀបរៀងដោយ **ស្ងួន សម្ផស្ស**

៧. វិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន តាមប្រព័ន្ធពន្លឿនឆ្ពោះទៅកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ ឆ្នាំ២០១៧ និងឆ្នាំ២០១៨