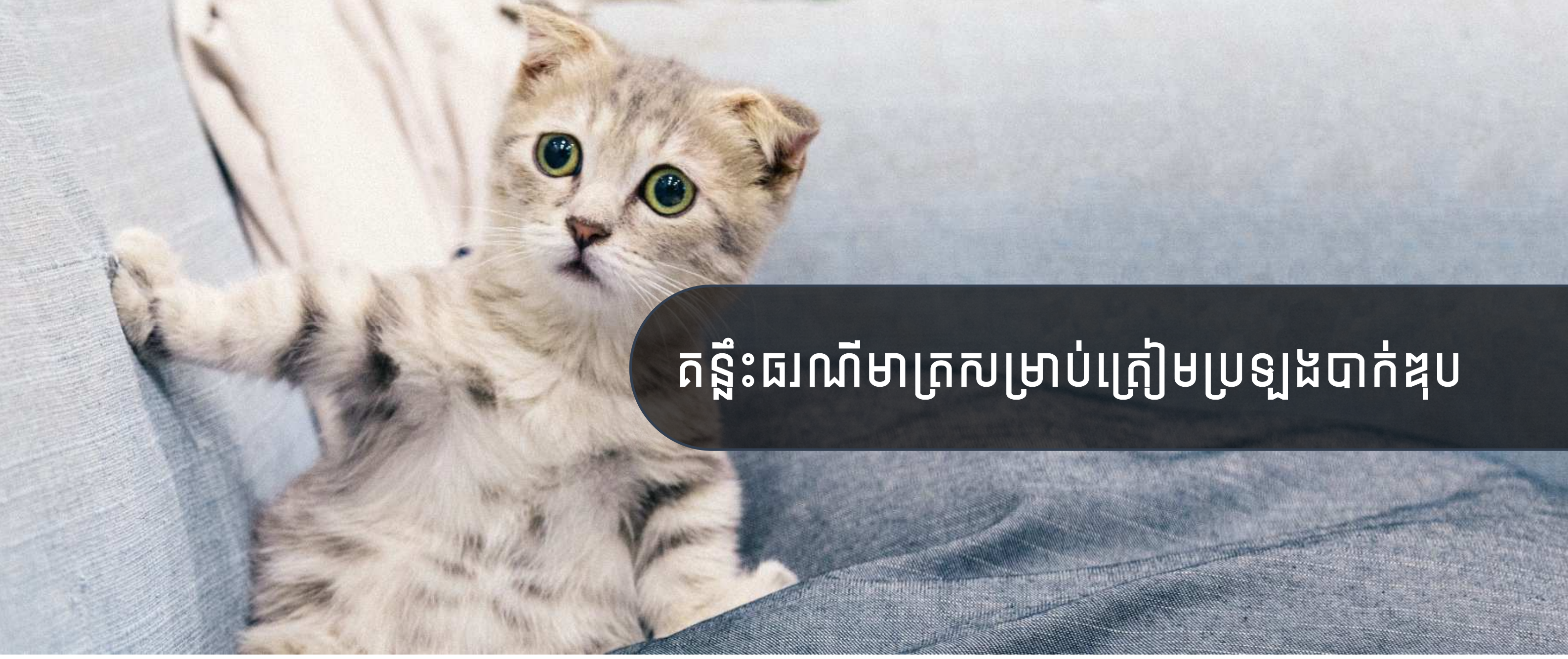


គន្លឹះធរណីមាត្រសម្រាប់ត្រៀមប្រឡងបាក់ឌុប

1. វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

* ឧបមាថា ចំណុច $A(x,y,z)$ និង $B(x',y',z')$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB}=(x'-x,y'-y,z'-z)} \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ចម្ងាយពីចំណុច A ទៅ B គឺ $AB=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ (ខ្នាតគឺឯកតាប្រវែង)

* វ៉ិចទ័រពីរស្មើគ្នាកាលណា $\begin{cases}\text{ស្របគ្នា}\\ \text{មានទិសដៅដូចគ្នា}\\ \text{មានប្រវែងស្មើគ្នា}\end{cases}$

បើ $\vec{u}=(a,b,c)$ និង $\vec{v}=(a',b',c')$ គេបាន $\vec{u}=\vec{v}$ សមមូល $\begin{cases}a=a'\\ b=b'\\ c=c'\end{cases}$

* វ៉ិចទ័រពីរផ្ទុយគ្នាកាលណា $\begin{cases}\text{ស្របគ្នា}\\ \text{មានទិសដៅផ្ទុយគ្នា}\\ \text{មានប្រវែងស្មើគ្នា}\end{cases}$
* វ៉ិចទ័រសូន្យកាលណាណមនៃវ៉ិចទ័រនោះស្មើសូន្យ កំណត់សរសេរដោយ $\vec{t}=\vec{0}$
* កូអរដោនេ I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ $[AB]$ គឺ $\boxed{I\left(\frac{x'+x}{2},\frac{y'+y}{2},\frac{z'+z}{2}\right)}$

2. ផលគុណស្កាលែ

ផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ៖

* បើ $\vec{u}=0$ ឬ $\vec{v}=0$ នោះ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
* បើ $\vec{u}\neq 0$ និង $\vec{v}\neq 0$ នោះ $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$ ដែល θ ជាមុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$
* បើ $\vec{u}=(x,y,z)$ និង $\vec{v}=(x',y',z')$ នោះ $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

ចំណាំ
* បើ $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$ នោះមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាមុំស្រួច
* បើ $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ នោះមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាមុំទាល
* បើ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, $(\vec{u}\neq 0$ និង $\vec{v}\neq 0)$ នោះមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាមុំកែង។
* មុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

3. ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$

ឧបមាថា $\vec{u}=(x,y,z)$; $\vec{v}=(x',y',z')$

$$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ x' & y' & z'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y & z\\ y' & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & z\\ x' & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & y\\ x' & y'\end{vmatrix}\vec{k}=\boxed{\vec{i}(yz'-y'z)-\vec{j}(xz'-x'z)+\vec{k}(xy'-x'y)}$$

ចំណាំ
- បើ $\vec{u}\times\vec{v}=0$ នោះវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា ។
- វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកែងនឹង $\vec{u}$ ផង និង $\vec{v}$ ផង
- បើ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ នោះបីចំណុច A,B និង C រត់ត្រង់គ្នា
- បើ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ នោះបីចំណុច A ,B និង C រត់មិនត្រង់គ្នាដែលវាកំណត់បានប្លង់មួយដែលវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) ។

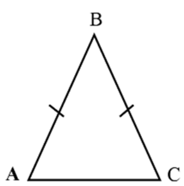
4. ផលគុណចម្រុះ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

ឧបមាថា $\vec{u}=(x,y,z)$; $\vec{v}=(x',y',z')$;$\vec{w}=(\alpha,\gamma,\beta)$

$$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\alpha & \gamma & \beta\\ x & y & z\\ x' & y' & z'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y & z\\ y' & z'\end{vmatrix}\alpha-\begin{vmatrix}x & z\\ x' & z'\end{vmatrix}\gamma+\begin{vmatrix}x & y\\ x' & y'\end{vmatrix}\beta=\boxed{\alpha(yz'-y'z)-\gamma(xz'-x'z)+\beta(xy'-x'y)}$$

ចំណាំ
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$
- បើ $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=0$ នោះ បួនចំណុច A ,B ,C និង D នៅក្នុងប្លង់តែមួយ (បួនចំណុចនោះបង្កើតបានជាចតុកោណប៉ោងមួយ)
- បើ $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\neq 0$ នោះបួនចំណុច A,B,C និង D មិនបិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ (មានន័យថាចំណុចមួយមិនមែនជារបស់ប្លង់ ដែលកើតឡើងដោយចំណុចបីទៀត)
- ក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ គឺ $\boxed{S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}$ ឬ $S=\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}\right|$
- ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC គឺ $\boxed{S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\right|$
- មាឌប្រលេពីប៉ែត $ABCDEFGH$ គឺ $\boxed{V=\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|}$ ឬ $V=\left|\left(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BE}\right)\cdot\overrightarrow{BF}\right|=\cdots$
- មាឌតេត្រាអែត ឬពីរ៉ាមីត ឬចតុមុខ $ABCD$ គឺ $\boxed{V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|}$ ឬ$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BD}\right|=\cdots$

5. ស្រាយថាត្រីកោណΔABC ជាត្រីកោណសមបាត



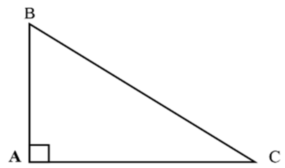
ត្រីកោណសមបាតជាត្រីកោណដែលមានប្រវែងជ្រុងពីរស្មើគ្នា ដូចរូបគ្រាន់តែបង្ហាញថា $AB=BC$ នោះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត។

6. ស្រាយថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

ត្រីកោណសម័ង្សជាត្រីកោណដែលមានប្រវែងជ្រុងទាំងបីស្មើគ្នា។

បើ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្សយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $AB=AC=BC$ ។

7. ស្រាយថាត្រីកោណABC ជាត្រីកោណកែង

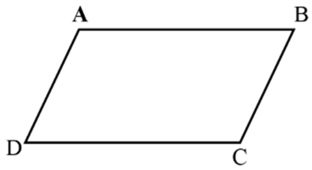


បើ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A យើងអាចបង្ហាញថាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ នោះមានន័យថា $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ ។ឬ យើងអាចបង្ហាញតាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រដែល $a^2=b^2+c^2$ ដែល aជាប្រវែងBC ,b ជាប្រវែង AB និង c ជាប្រវែង AC ។

8. ស្រាយថាត្រីកោណABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត

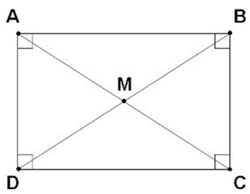
ជាដំបូងយើងត្រូវបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមបាតសិនដោយបង្ហាញឱ្យឃើញប្រវែងជ្រុងពីរស្មើគ្នា បន្ទាប់មកចាំបង្ហាញវាជាត្រីកោណកែងតាមរយៈផលគុណស្កាលែឬតាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ។

9. ស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម



យើងអាចបង្ហាញថា$ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមគឺគ្រាន់តែបង្ហាញថា $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ឬ $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{BC}$ មានន័យថា $AD=BC$ និង $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$ ។

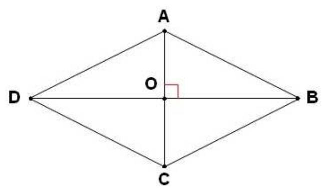
10. ស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ជាចតុកោណកែង



ចតុកោណកែង ជាចតុកោណដែលមានរាងទ្រវែង ដែលមានជ្រុងស្របគ្នា ពីរ ពីរ និងកែងគ្នាដែលបង្កើតបានជាមុំកែង៤។ ជ្រុងវែងស្របគ្នា ហៅថាបណ្តោយ ហើយជ្រុងខ្លីស្របគ្នាហៅថាទទឹង។ចតុកោណកែង គឺជាប្រលេឡូក្រាមដែលមានមុំកែង៤។ យើងអាចបង្ហាញវាជាប្រលេឡូក្រាមសិន រួចចាំបង្ហាញជ្រុងកែងណាមួយរបស់វាតាមផលគុណស្កាលែ។

ចំណាំ៖ បើជ្រុងទាំង៤របស់វាមានប្រវែងស្មើៗគ្នានោះ $ABCD$ ជាការេ។

11. ស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ជាចតុកោណស្មើ



ចតុកោណស្មើ ជាប្រលេឡូក្រាមដែលមានជ្រុងជាប់គ្នាមានប្រវែងស្មើគ្នា។ ដូចនេះជាដំបូងយើងត្រូវបង្ហាញវាជាប្រលេឡូក្រាម បន្ទាប់មកបង្ហាញជ្រុងជាប់របស់វាមានប្រវែងស្មើគ្នា។

12. សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់

បន្ទាត់ (L)កាត់តាមចំណុច $M(x_0,y_0,z_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a,b,c)$ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រកំណត់ដោយ៖

$\boxed{(L):\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\ ,t\in\mathbb{R}\\z=z_0+ct\end{cases}}$ និងសមីការឆ្លុះកំណត់ដោយ $\boxed{(L):\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}}$

សម្គាល់៖ ដើម្បីសរសេរសមីការបន្ទាត់បានយើងត្រូវស្គាល់ចំណុចកាត់តាមនិងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់វា។

13. សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច $A(x_1,y_1,z_1)$និង $B(x_2,y_2,z_2)$

បើបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច $A(x,y,z)$ និង$B(x',y',z')$ យក $\overrightarrow{AB}$ ឬ $\overrightarrow{BA}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ រីឯចំណុចកាត់តាមយក A ក៏បាន B ក៏បាន ។

14. បន្ទាត់កាត់ចំណុច $A(x,y,z)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

បើបន្ទាត់កាត់ចំណុច $A(x,y,z)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)ដែល(P): $ax+by+cz+d=0$មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(a,b,c)$ នោះយើងយក $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ ។

15. សមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច A ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (D)

បើបន្ទាត់(L)កាត់ចំណុច $A(x,y,z)$ ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (D)នោះគេបានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់វាស្មើគ្នា ។

16. បន្ទាត់កើតឡើងដោយប្រសព្វរវាងប្លង់ពីរ

គេមាន $\begin{cases}(P_1): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\(P_2): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$ យក $z=t\,,t\in\mathbb{R}$ ជំនួសក្នុងប្រព័ន្ធសមីការ

គេបាន $\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1t-d_1\\a_2x+b_2y=-c_2t-d_2\end{cases}$ បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការយើងនឹងទទួលបានសមីការបន្ទាត់

គឺ $\begin{cases}x=x_o+at\\y=y_o+bt\,,t\in\mathbb{R}\\z=z_o+ct\end{cases}$

17. បន្ទាត់(D)កាត់ចំណុច A ហើយកែងនឹងពីរបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

ដោយបន្ទាត់ (L_1)មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$និងបន្ទាត់(L_2)មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$ នោះគេបាន $\vec{u}_1\times\vec{u}_2$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (D)។

18. បន្ទាត់(L)កាត់ចំណុច A ហើយស្របនឹងពីរប្លង់(α_1) និង (α_2)

ដោយ ប្លង់ (α_1)មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_1=(a_1,b_1,c_1)$និងប្លង់ (α_2) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_2=(a_2,b_2,c_2)$ នោះ គេបាន (L)មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$

19. ស្រាយថាបន្ទាត់ (L_1) ប្រសព្វនឹងបន្ទាត់ (L_2) ឬទេ ?

គេមាន (L_1): $\begin{cases}x=x_1+a_1t\\y=y_1+b_1t\,,t\in\mathbb{R}\\z=z_1+c_1t\end{cases}$ កាត់តាម $M_1(x_1,y_1,z_1)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$

និង (L_2): $\begin{cases}x=x_2+a_2t\\y=y_2+b_2t\,,t\in\mathbb{R}\\z=z_2+c_2t\end{cases}$ កាត់តាម $M_2(x_2,y_2,z_2)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$

គេបាន $\overrightarrow{M_1M_2}=(a_o,b_o,c_o)$ និង $\vec{u}_1$ មិនកូលីនេអ៊ែរ $\vec{u}_2$ បន្ទាត់ (L_1) ប្រសព្វនឹងបន្ទាត់ (L_2) កាលណា៖ $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)=0$ ។ បើ $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)\neq 0$ នោះ (L_1)មិនប្រសព្វ (L_2) ។

20. ស្រាយថាបន្ទាត់ (L_1) និង បន្ទាត់ (L_2)ជាបន្ទាត់តែមួយ

គេមាន (L_1): $\begin{cases}x=x_1+a_1t\\y=y_1+b_1t\,,t\in\mathbb{R}\\z=z_1+c_1t\end{cases}$ កាត់តាម $M_1(x_1,y_1,z_1)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$

និង (L_2): $\begin{cases}x=x_2+a_2t\\y=y_2+b_2t\,,t\in\mathbb{R}\\z=z_2+c_2t\end{cases}$ កាត់តាម $M_2(x_2,y_2,z_2)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$

គេបាន $\overrightarrow{M_1M_2}=(a_o,b_o,c_o)$ បើបន្ទាត់ (L_1) និង បន្ទាត់ (L_2)ជាបន្ទាត់តែមួយកាលណា៖

$\vec{u}_1$ កូលីនេអ៊ែរ $\vec{u}_2$និង កូលីនេអ៊ែរ $\overrightarrow{M_1M_2}$ បានន័យថា $\vec{u}_1\parallel\vec{u}_2\parallel\overrightarrow{M_1M_2}$ ។

21. ស្រាយថាបន្ទាត់ (L_1) និង បន្ទាត់ (L_2) ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ

គេមាន (L_1): $\begin{cases}x=x_1+a_1t\\y=y_1+b_1t\,,t\in\mathbb{R}\\z=z_1+c_1t\end{cases}$ កាត់តាម $M_1(x_1,y_1,z_1)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$

និង $(L_2):\begin{cases}x = x_2 + a_2t\\ y = y_2 + b_2t\\ z = z_2 + c_2t\end{cases}, t \in \mathbb{R}$ កាត់តាម $M_2(x_2, y_2, z_2)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

ករណីទី១៖ បើ $\vec{u}_1$ មិនកូលីនេអ៊ែ $\vec{u}_2$ គេបាន $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = 0$ នោះ បន្ទាត់ (L_1) និង បន្ទាត់ (L_2) ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។

ករណីទី២៖ បើ $\vec{u}_1$ កូលីនេអ៊ែ $\vec{u}_2$ នោះ បន្ទាត់ (L_1) និង បន្ទាត់ (L_2) ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។

22. ស្រាយថាបន្ទាត់ (L) កាត់ប្លង់ (P) បានមួយចំណុច

ដោយ $(L):\begin{cases}x = x_2 + a_2t\\ y = y_2 + b_2t\\ z = z_2 + c_2t\end{cases}, t \in \mathbb{R}$ កាត់តាម $M_2(x_2, y_2, z_2)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$(P): a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a_1, b_1, c_1)$

បើបន្ទាត់ (L) កាត់ប្លង់ (P)បានមួយចំណុចកាលណា៖ $\vec{u}_2 \cdot \vec{n} \neq 0$ មានន័យថា $\vec{u}_2$មិនអរតូកូណាល់ $\vec{n}$ ។

23. ស្រាយថាបន្ទាត់ (L) ស្រប នឹងប្លង់ (P)

ដោយ $(L):\begin{cases}x = x_2 + a_2t\\ y = y_2 + b_2t\\ z = z_2 + c_2t\end{cases}, t \in \mathbb{R}$ កាត់តាម $M_2(x_2, y_2, z_2)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$(P): a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a_1, b_1, c_1)$

បើបន្ទាត់ L ស្របនឹងប្លង់ (P)កាលណា៖ $\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0$មានន័យថា $\vec{u}_2 \perp \vec{n}$ និង $M_2 \notin (P)$ ។

24. ស្រាយថាបន្ទាត់ L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P)

ដោយ $(L):\begin{cases}x = x_2 + a_2t\\ y = y_2 + b_2t\\ z = z_2 + c_2t\end{cases}, t \in \mathbb{R}$ កាត់តាម $M_2(x_2, y_2, z_2)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$(P): a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a_1, b_1, c_1)$

បើបន្ទាត់ (L)ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P)កាលណា៖ $\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0$មានន័យថា $\vec{u}_2 \perp \vec{n}$ និង $M_2 \in (P)$ ។

25. ចម្ងាយពីចំណុច M ទៅបន្ទាត់ (L)

គេមានចំណុច $M(x_M, y_M, z_M)$ និងបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាម $A(x_A, y_A, z_A)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a, b, c)$

នោះគេបានចម្ងាយពីចំណុច M ទៅបន្ទាត់(L) កំណត់ដោយ $d[M,(L)] = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

26. ចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ពីរ

គេមាន $(L_1):\begin{cases}x = x_1 + a_1t\\ y = y_1 + b_1t\\ z = z_1 + c_1t\end{cases}, t \in \mathbb{R}$ កាត់តាម $M_1(x_1, y_1, z_1)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$

និង $(L_2):\begin{cases}x = x_2 + a_2t\\ y = y_2 + b_2t\\ z = z_2 + c_2t\end{cases}, t \in \mathbb{R}$ កាត់តាម $M_2(x_2, y_2, z_2)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

គេបាន ចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1)និង (L_2) កំណត់ដោយ $\boxed{d = \dfrac{|(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}}$

27. រកចំណុច H ប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង បន្ទាត់ (L_2)

ឧបមាថាគេមាន $(L_1):\begin{cases}x = x_1 + a_1t_1\\ y = y_1 + b_1t_1\\ z = z_1 + c_1t_1\end{cases}, t \in \mathbb{R}$ និង$(L_2):\begin{cases}x = x_2 + a_2t_2\\ y = y_2 + b_2t_2\\ z = z_2 + c_2t_2\end{cases}, t \in \mathbb{R}$

ផ្ទឹម x និងx ,yនិងy,zនិងz គេបាន $\begin{cases} x_1+a_1t_1=x_2+a_2t_2 & (i)\\ y_1+b_1t_1=y_2+b_2t_2 & (ii)\\ z_1+c_1t_1=z_2+c_2t_2 & (iii)\end{cases}$ តាម (i)និង (ii) យើងអាចរកបាន $t_1=\alpha$

និង $t_2=\beta$ បន្ទាប់មកយកចម្លើយ t_1និង t_2 ជំនួសក្នុង (iii) បើផ្ទៀងផ្ទាត់នោះ (L_1)ប្រសព្វ (L_2) បានមួយចំណុច H

ដែលយក$t_1=\alpha$ជំនួសចូលក្នុង (L_1) គេបាន $H(x_1+a_1\alpha, y_1+b_1\alpha, z_1+c_1\alpha)$

សម្គាល់៖ បើយក t_1 និង t_2 ជំនួសក្នុង (iii) មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ នោះ (L_1) មិនប្រសព្វ (L_2) ទេ ។

28. សមីការប្លង់កាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$

ប្លង់កាត់តាមចំណុច$A(x_A, y_A, z_A)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(a,b,c)$មានសមីការស្តង់ដា

កំណត់ដោយ $\boxed{(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0}$

សម្គាល់៖ បើគេពន្លាតសមីការប្លង់ (P) គេបាន $\boxed{(P): ax+by+cz+d=0 \text{ ហៅថាសមីការទូទៅនៃប្លង់}}$ ។

29. ប្លង់កាត់តាមចំណុច M ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (L)

បន្ទាត់ (L)មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a,b,c)$ បើប្លង់ (P)កាត់តាមចំណុច Mហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (L)គេបាន (P)

មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\vec{u}=(a,b,c)$ ។

30. ប្លង់កាត់តាមបីចំណុច A ,B និង C

ប្លង់កាត់តាមបីចំណុច A,B និង C មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

31. ប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB]$

ប្លង់ (P)ជាប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB]$ កាត់តាមចំនុច Iជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AB]$និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}$ ។

32. ប្លង់ដែលកើតឡើងដោយពីរបន្ទាត់ប្រសព្វគ្នា

គេមាន $(L_1): \begin{cases} x=x_1+a_1t\\ y=y_1+b_1t\\ z=z_1+c_1t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ កាត់តាម $M_1(x_1,y_1,z_1)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$

និង $(L_2): \begin{cases} x=x_2+a_2t\\ y=y_2+b_2t\\ z=z_2+c_2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ កាត់តាម $M_2(x_2,y_2,z_2)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$

ដោយប្លង់ (P)កើតឡើងដោយ (L_1) កាត់ (L_2) គេបាន (P)កាត់តាម M_1និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2$ ។

33. ប្លង់ដែលកើតឡើងពីរបន្ទាត់ស្របគ្នា (L_1)ស្របនឹង (L_2)

គេមាន $(L_1): \begin{cases} x=x_1+a_1t\\ y=y_1+b_1t\\ z=z_1+c_1t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ កាត់តាម $M_1(x_1,y_1,z_1)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$

និង $(L_2): \begin{cases} x=x_2+a_2t\\ y=y_2+b_2t\\ z=z_2+c_2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ កាត់តាម $M_2(x_2,y_2,z_2)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$

គេបាន $\overrightarrow{M_1M_2}$ មិនកូលីនេអ៊ែរ $\vec{u}_1$ តែ $\vec{u}_1$កូលីនេអ៊ែរ $\vec{u}_2$

ដូចនេះ គេបានប្លង់ (P)កាត់តាម M_1 និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{u}_1$ ។

34. ប្លង់កាត់តាមពីរចំណុច M_1 ,M_2 និងស្របនឹងបន្ទាត់ (L) មួយ

ដោយប្លង់ (P)កាត់តាមពីរចំណុច M_1 ,M_2 និងស្របនឹងបន្ទាត់ (L)ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a,b,c)$

ដូចនេះ គេបានប្លង់ (P)មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{u}$

35. **ប្លង់(P) ដែលកាត់តាមចំណុច M និង ស្របនឹងប្លង់ (P')**

ដោយប្លង់ (P') មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(a,b,c)$ ហើយ $(P')\parallel(P)$

ដូចនេះ គេបានប្លង់ (P)កាត់តាម M និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ។

36. **ប្លង់កាត់តាមពីរចំណុច M_1 និង M_2 និងកែងនឹងប្លង់ (α) មួយ**

ដោយប្លង់ (α)មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_1=(a,b,c)$

នោះគេបាន ប្លង់ (P)កាត់តាម M_1 ,M_2 និងកែងនឹងប្លង់ (α)មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n}_1$ ។

37. **គណនាចម្ងាយពីប្លង់ (α_1)ទៅប្លង់ (α_2)**

គេមាន(α_1): $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ និង(α_2): $a_2x+b_2y\ c_2z+d_2=0$ ដោយ$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$គេបាន $(\alpha_1)\parallel(\alpha_2)$

យក $x=0$,$y=0$ ជំនួសក្នុង (α_1)គេបាន $z=-\frac{d_1}{c_1}=\beta$ គេបានចំណុច $M(0,0,\beta)$ ស្ថិតក្នុងប្លង់ (α_1)

ដូច្នេះ ចម្ងាយពីចំណុច $M(0,0,\beta)$ទៅប្លង់(α_2)គឺជាចម្ងាយរវាងប្លង់ (α_1)និងប្លង់ (α_2)។

សម្គាល់៖ បើប្លង់ (α_1) មិនស្រប(α_2) គេបានចម្ងាយ $d=0$ ។

38. **គណនាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ L និង ប្លង់ (P)**

គេមាន (L): $\begin{cases}x=x_o+at\\ y=y_o+bt\\ z=z_o+ct\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ និង (P): $a'x+b'y+c'z+d=0$

ដោយ $aa'+bb'+cc'=0$ និង $a'x_o+b'y_o+c'z_o+d\neq0$ គេបាន $(L)\parallel(P)$ យក $t=0$ គេបាន $M(x_o,y_o,z_o)\in(L)$

ដូចនេះ គេបានចម្ងាយពីចំណុចM ទៅប្លង់ (P) ជាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (L)នឹងប្លង់ (P) ។

39. **រកចំណុច H ប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និង ប្លង់(P)**

ឧបមាថា $\begin{cases}(L): x=x_o+at\,;y=y_o+bt\,;z=z_o+ct\ ,t\in\mathbb{R}\\ (P): Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$

យក x ,y និង z របស់បន្ទាត់ (L)ជំនួសចូលក្នុងប្លង់ (P) នោះគេបាន $A(x_o+at)+B(y_o+bt)+C(z_o+ct)+D=0$

បន្ទាប់មកដោះស្រាយរក $t\Rightarrow t=t_o$ យក $t=t_o$ ជំនួសក្នុងបន្ទាត់ (L)

គេបានចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) គឺ $H(x_o+at_o\,,y_o+bt_o\,,z_o+ct_o)$ ។

40. **សមីការស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(a;b;c)$ និងកាំ R**

សមីការស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(a,b,c)$ និងកាំ R មានសមីការស្តង់ដា $\boxed{(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$

41. **សមីការស្វ៊ែមានមានអង្កត់ផ្ចិត$[AB]$**

ស្វ៊ែ (S)ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$មាន ផ្ចិត I កណ្តាលអង្កត់ $[AB]$និងកាំ $R=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}$

42. **សមីការស្វ៊ែមានផ្ចិត I និងប៉ះនឹងប្លង់ (P)**

ស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(a,b,c)$ និងប៉ះនឹងប្លង់ (P): $a'x+b'y+c'z+d=0$ មានកាំ R ជាចម្ងាយពី I ទៅប្លង់ (P)

43. **សមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាមបួនចំណុច $A;\ B;C$ និង D**

ដោយស្វ៊ែ (S)មានសមីការទូទៅ $(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ កាត់តាម $A(x_A,y_A,z_A)$; $B(x_B,y_B,z_B)$; $C(x_C,y_C,z_C)$ និង $D(x_D,y_D,z_D)$

យកបួនចំណុច A,B,C និង D ជំនួសក្នុងសមីការ (S) គេបានប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{cases} x_A^2+y_A^2+z_A^2+ax_A+by_A+cz_A+d=0 \\ x_B^2+y_B^2+z_B^2+ax_B+by_B+cz_B+d=0 \\ x_C^2+y_C^2+z_C^2+ax_C+by_C+cz_C+d=0 \\ x_D^2+y_D^2+z_D^2+ax_D+by_D+cz_D+d=0 \end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ យកចម្លើយជំនួសចូលក្នុងសមីការ (S) នោះនឹងទទួលបានស្វ៊ែ (S)។

44. រកផ្ចិត និង កាំរង្វង់ដែលកើតឡើងដោយប្រសព្វរវាងប្លង់ និង ស្វ៊ែ

ដោយ $(c): \begin{cases} (S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \\ (P): Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$ ចម្ងាយពីផ្ចិតស្វ៊ែទៅប្លង់

គឺ $d\big(I,(P)\big)=\dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\beta$

* បើ $\beta=0$ នោះស្វ៊ែ (S)មានផ្ចិត $I(a,b,c)$ និងកាំ R
* បើ $\beta\neq 0\,;\beta<R$ នោះស្វ៊ែ (S)មានកាំ $r=\sqrt{R^2-\beta^2}$ តាង H ជាផ្ចិតរង្វង់ (c)

  គេបាន H ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L)កាត់តាម $I(a,b,c)$មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(A,B,C)$ជាមួយប្លង់ (P)

  គេបាន $H: \begin{cases} (L): x=a+At\,;y=b+Bt\,;z=c+Ct\,,t\in\mathbb{R} \\ (P): Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$ យក $x,y,z\in(L)$ជំនួសក្នុងប្លង់ (P)

  គេបាន $A(a+At)+B(b+Bt)+C(c+Ct)+D=0\Rightarrow t=t_o$ យក $t=t_o$ ជំនួសចូលក្នុង (L)

  គេបាន $\begin{cases} x=a+At_o=\alpha \\ y=b+Bt_o=\theta \\ z=c+Ct_o=\lambda \end{cases}$ គេបាន $H(\alpha,\theta,\lambda)$ ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ (c) ។

45. កំណត់ទីតាំងរវាងស្វ៊ែ (S) និង ប្លង់ (P)

ស្វ៊ែ $(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ មានផ្ចិត $I(a,b,c)$ និង កាំ R

គណនាចម្ងាយពី I ទៅប្លង់ $(P): Ax+By+Cz+D=0$ ដែល $d\big(I,(P)\big)=\dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\beta$

* បើ $\beta<R$ នោះស្វ៊ែ (S) និងប្លង់ (P) ប្រសព្វគ្នាបានរង្វង់ (C)
* បើ $\beta=0$ នោះស្វ៊ែ (S) និងប្លង់ (P)ប្រសព្វគ្នាបានរង្វង់ (C) ដែលមានផ្ចិត I និង កាំ R
* បើ $\beta=R$ នោះស្វ៊ែ (S)ប៉ះប្លង់ (P)
* បើ $\beta>R$ នោះស្វ៊ែ (S) និងប្លង់ (P)មិនប្រសព្វគ្នា។

46. ទីតាំងស្វ៊ែនឹងបន្ទាត់

ទីតាំងស្វ៊ែនឹងបន្ទាត់អាចកើតឡើងពទីតាំង បើស្វ៊ែ (S)មានផ្ចិត I និងកាំ R ហើយ (D) ជាបន្ទាត់

ដែលកាត់តាម A និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ ៖ ដែលគេបានចម្ងាយពី I ទៅបន្ទាត់ (D)គឺ $d[I,(D)]=\dfrac{|\overrightarrow{IA}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\beta$

* បើ $\beta<R$ នោះបន្ទាត់ (D)កាត់ស្វ៊ែបានពីរចំណុច
* បើ $\beta=R$ នោះបន្ទាត់ (D)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ
* បើ $\beta>R$ នោះបន្ទាត់ (D) មិនអាចកាត់ស្វ៊ែ ។

47. រកចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L)និង ស្វ៊ែ(S)

ឧបមាថា $\begin{cases}(L): x = x_o + at\,; y = y_o + bt\,; z = z_o + ct \;\;, t \in \mathbb{R} \\ (S): (x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2 = R^2\end{cases}$ យក $x; y\,; z \in (L)$ជំនួសក្នុងស្វ៊ែ (S)គេបាន

$(x_o + at - a')^2 + (y_o + bt - b')^2 + (z_o + ct - c')^2 = R^2$ បន្ទាប់មកយើងដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរដែល មាន t ជាអថេរតាមរយៈ $\Delta = b^2 - 4ac$

* បើ $\Delta > 0$ គេបាន $t = t_1$ ឬ $t = t_2$ យក $t = t_1$ ឬ $t = t_2$ ជំនួសក្នុងសមីការ (L)

  គេបានចំណុចប្រសព្វរវាង(L)និង(S)មានពីរចំណុច
* បើ $\Delta = 0$ គេបាន ឬសឌុបដែល $t = t_o$ យក $t = t_o$ ជំនួសក្នុងសមីការ(L)

  គេបានចំណុចប្រសព្វរវាង (L)និង (S)មានមួយចំណុច
* បើ $\Delta < 0$ សមីការគ្មានឬស គេបាន (L)មិនកាត់ (S) ទេ ។

48. ចម្ងាយពីផ្ចិតស្វ៊ែ (S) ទៅប្លង់ (P)

គេមាន ស្វ៊ែ$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ មានផ្ចិត $I(a, b, c)$ កាំ R និងប្លង់ $(P): a_p\, x + b_p\, y + c_p\, z + d = 0$

ដូចនេះ គេបានចម្ងាយពីផ្ចិតស្វ៊ែ (S) ទៅប្លង់ (P)គឺចម្ងាយពីចំណុច I ទៅ (P) ដែល

កំណត់ដោយ $\boxed{d = \dfrac{|aa_p + bb_p + cc_p + d|}{\sqrt{a_p^2 + b_p^2 + c_p^2}}}$

49. ចម្ងាយពីផ្ចិតស្វ៊ែ (S_1)ទៅផ្ចិតស្វ៊ែ (S_2)

ស្វ៊ែ (S_1)មានផ្ចិត $I_1(a_1, b_1, c_1)$ និង ស្វ៊ែ (S_2)មានផ្ចិត $I_2(a_2, b_2, c_2)$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីផ្ចិតស្វ៊ែ(S_1)ទៅផ្ចិតស្វ៊ែ (S_2)គឺ $d = |\overrightarrow{I_1I_2}|$

50. ចម្ងាយជិតបំផុតពីផ្ទៃស្វ៊ែ (S_1) ទៅផ្ទៃស្វ៊ែ (S_2)

ស្វ៊ែ (S_1)មានផ្ចិត $I_1(a_1, b_1, c_1)$ និង កាំ R_1 ស្វ៊ែ (S_2)មានផ្ចិត $I_2(a_2, b_2, c_2)$ និង កាំ R_2

គេបាន ចម្ងាយជិតបំផុតពីផ្ទៃស្វ៊ែ (S_1) ទៅផ្ទៃស្វ៊ែ (S_2) គឺ $\boxed{d = |\overrightarrow{I_1I_2}| - (R_1 + R_2)}$