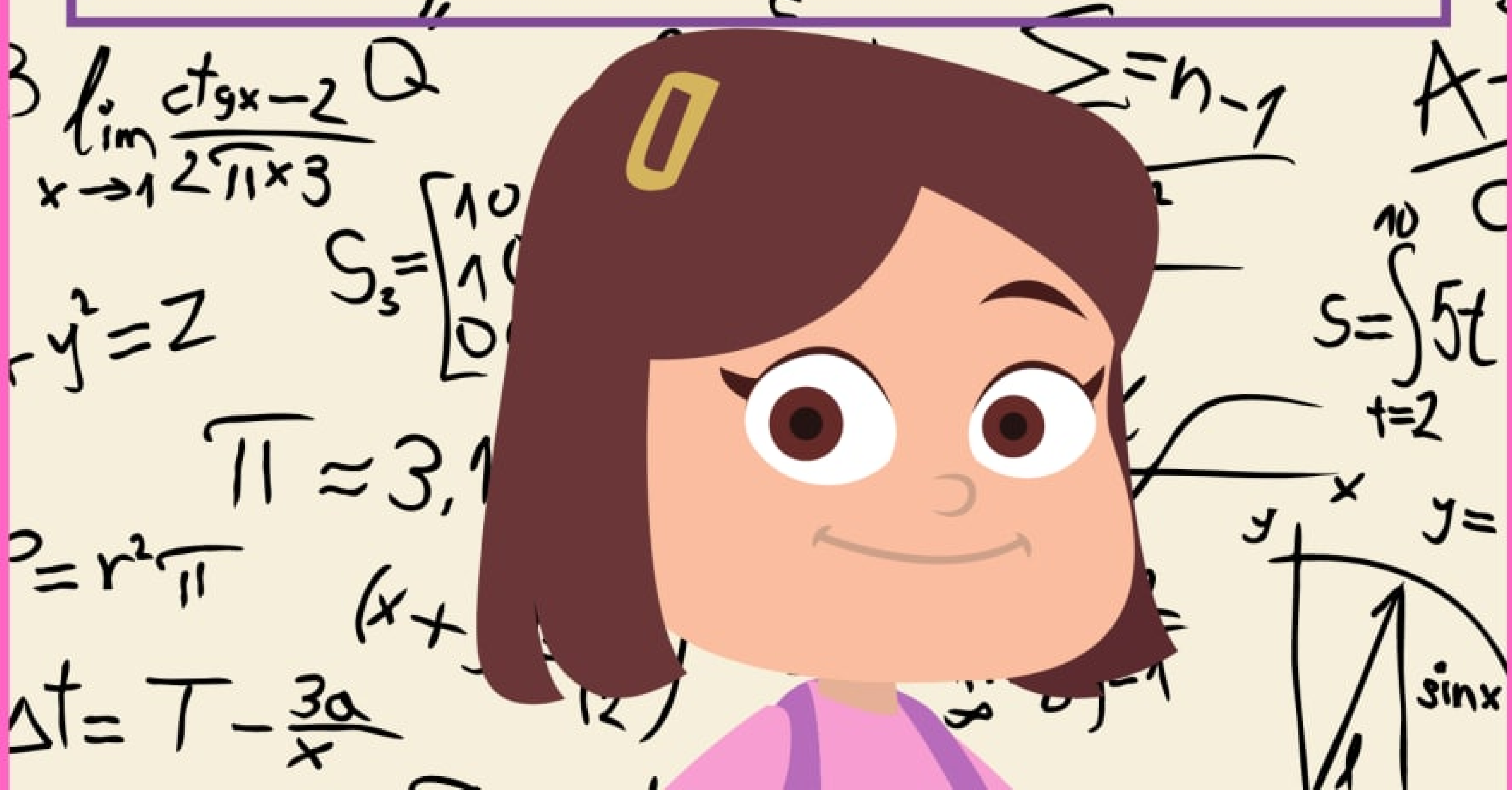
អនុគមន៍

BY SOVANDALIN

មេរៀន អនុគមន៍

- រួមមាន មេរៀនសង្ខេប
- លំហាត់គំរូ និងអនុវត្តន៍
- ចម្លើយ



អនុគមន៍

BY SOVANDALIN

មេរៀន អនុគមន៍ ពហុធា

សិក្សាអនុគមន៍ពហុធា

❖ ចំពោះអនុគមន៍ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

និង $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$

ដើម្បីសិក្សាអនុគមន៍ ឬសិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរគេត្រូវអនុវត្តតាមប្លង់ ដូចខាងក្រោម:

- រកដែនកំណត់
- ទិសសដៅអថេរភាព
  - ➢ គណនាដេរីវេ
  - ➢ សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ
  - ➢ រកតម្លៃបរមាធៀប
  - ➢ គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់
  - ➢ សង់តារាងអថេរភាព
  - ➢ ចំនុចរបត់
- ក្រាប
  - ➢ រកចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាប និងអ័ក្សទាំងពីរ
  - ➢ រកបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចរបត់
  - ➢ រកផ្ចិតឆ្លុះ (អនុគមន៍សេស) ឬអ័ក្សឆ្លុះ (អនុគមន៍គូ)
  - ➢ សង់ក្រាប

I. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី៣

<u>**ឧទាហរណ៍១**</u>: សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$

- ដែនកំណត់: អនុគមន៍ f មានន័យចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នោះ $D = \mathbb{R}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព:
  - ដេរីវេ

    គេមាន $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$

    គេបាន $f'(x) = -3x^2 - 6x$

    បើ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ; x = -2$

    សញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

  - តម្លៃបរមាធៀប

    អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = -2$ ដែល $f(-2) = 0$

    អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 0$ ដែល $f(0) = 4$

  - លីមីត

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x^3 - 3x^2 + 4\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^3 - 3x^2 + 4\right) = -\infty$$

  - តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

  - ចំណុចរបត់

    ដោយ $f'(x) = -3x^2 - 6x$

គេបាន $f''(x)=-6x-6$

បើ $f''(x)=0 \Leftrightarrow -6x-6=0 \Leftrightarrow x=-1$

ចំពោះ $x=-1 \Rightarrow f(-1)=2$

តារាងសញ្ញា $f''(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

តាមតារាងសញ្ញា $f''(x)$ គេបាន $I(-1,2)$ ជាចំណុចរបត់ ។

❖ ក្រាប

▪ ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្ស

$(y'y): x=0 \Rightarrow y=4$

$(x'x): y=0 \Rightarrow -x^3-3x^2+4=0 \Leftrightarrow -x^3+x^2-4x^2+4=0$

$$\Leftrightarrow -x^2(x-1)-4(x^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(-x^2-4x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=-2$$

▪ ផ្ចិតឆ្លុះ៖ តាមបំលែងកិល $\vec{OI}$ គេបាន

រូបមន្តប្តូរតម្រុយ $\begin{cases} x=X-1 \\ y=Y+2 \end{cases}$

គេមាន $y=-x^3-3x^2+4$

គេបាន $Y+2=-(X-1)^3-3(X-1)^2+4$

$Y+2=-(X^3-3X^2+3X-1)-3(X^2-2X+1)+4$

$\Leftrightarrow Y+2=-X^3+3X+2$

នោះ $Y=F(X)=-X^3+3X$

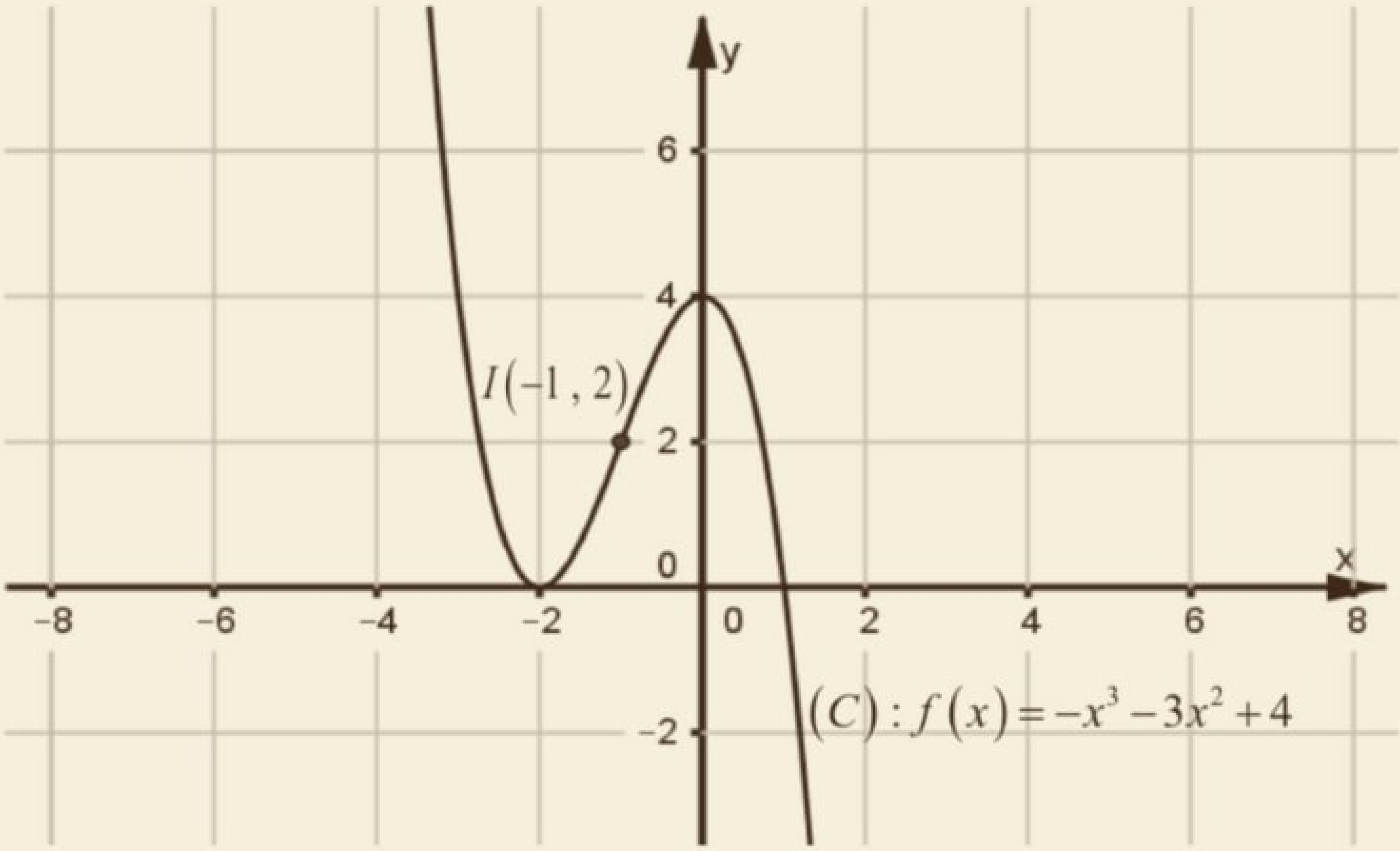
$\forall\ X \in D_F , -X \in D_F$

$F(-X) = -(-X)^3 - X = -\left(-X^3 + X\right) = -F(X)$

នោះ $Y = F(X)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ដូចនេះ ចំណុច $I(-1\ ,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។

- សង់ក្រាប



II. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍បឺការេ

<u>**ឧទាហរណ៍១**</u>: សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប នៃអនុគមន៍

$$y = f(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប

គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$

- ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

គេមាន $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$

គេបាន $f'(x) = -4x^3 + 4x$

បើ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0\ , -1\ , 1$

សញ្ញាដេរីវេ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

- តម្លៃបរមាធៀប

អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបពីរគឺត្រង់ $x = -1\ , x = 1$ ដែល

$f(-1) = f(1) = -1$ ។

អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាមួយត្រង់ $x = 0$ ដែល $f(0) = -2$

- លីមីត

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (-x^4 + 2x^2 - 2) = -\infty$$

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	-1	↘	$-\infty$

- ចំណុចរបត់

ដោយ $f'(x) = -4x^3 + 4x$

គេបាន $f''(x) = -12x^2 + 4$

បើ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

បើ $x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{13}{9}$

បើ $x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{13}{9}$

តារាងសញ្ញា $f''(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

តាមតារាងសញ្ញា $f''(x)$ គេបាន $I\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{13}{9}\right)$ & $I'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{13}{9}\right)$

ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប ។

❖ ក្រាប

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិង អ័ក្ស

$(y'y): x = 0 \Rightarrow y = -2$

$(x'x): y=0 \Rightarrow -x^4+2x^2-2=0$

តាង $t=x^2,\ (t\geq 0)$

គេបាន $-t^2+2t-2=0$

$\Delta = 2^2-4(-1)(-2)=-4<0$ នោះសមីការគ្មានឫសជាចំនួនពិត

ដូចនេះ ក្រាបនៃអនុគមន៍មិនកាត់អ័ក្ស $(x'x)$ ទេ ។

- អ័ក្សឆ្លុះ

គេមាន $f(x)=-x^4+2x^2-2$

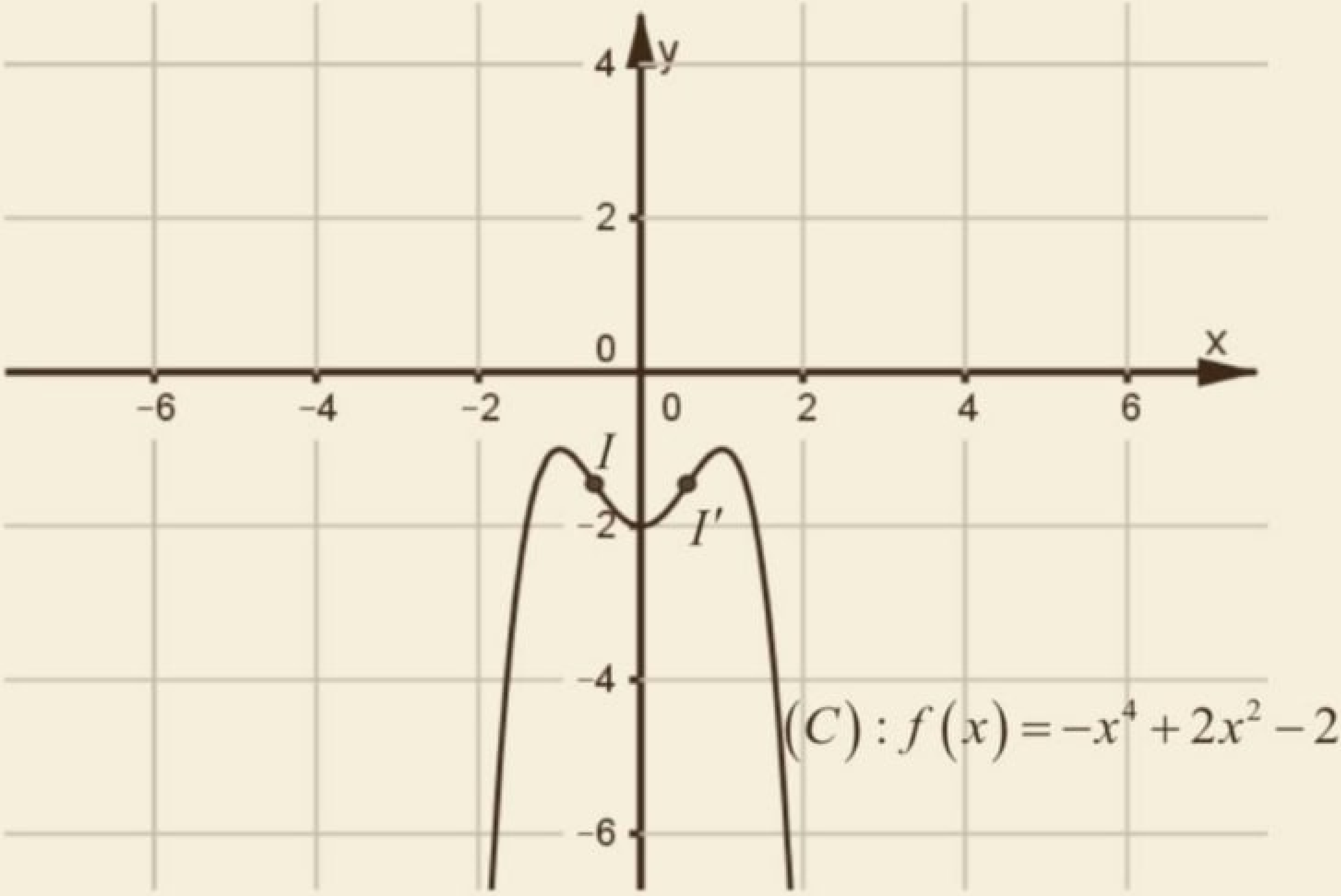
$\forall x\in D, -x\in D$

$f(-x)=-(-x)^4+2(-x)^2-2=-x^4+2x^2-2=f(x)$

នោះ f ជាអនុគមន៍គូ ។

ដូចនេះ អ័ក្សអរដោនេ $(y'y)$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប ។

- សង់ក្រាប



អនុគមន៍

BY SOVANDALIN

មេរៀន អនុគមន៍ សនិទាន

សិក្សាអនុគមន៍សនិទាន

1. សិក្សាអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

 a. ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

 b. ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

 $\forall x\in D,(cx+d)^2>0\Rightarrow f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $ad-bc$

- បើ $ad-bc=0$ នោះ $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍ថេរ
- បើ $ad-bc>0\Rightarrow f'(x)>0$ នោះ $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍កើន
- បើ $ad-bc<0\Rightarrow f'(x)<0$ នោះ $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះ
- សម្គាល់ អនុគមន៍ដែលមានរាងបែបនេះគ្មានចំណុចបរមាធៀបទេ ។
- លីមីត និងអាស៊ីមតូត

 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}\Rightarrow y=\dfrac{a}{c}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

 $\lim\limits_{x\to-\frac{d}{c}}f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{d}{c}}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\pm\infty\Rightarrow x=-\dfrac{d}{c}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

- តារាងអថេរភាព
- ករណី $ad-bc>0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{d}{c}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$\dfrac{a}{c}\nearrow+\infty$	‖	$-\infty\nearrow\dfrac{a}{c}$

- ករណី $ad-bc<0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{d}{c}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$\dfrac{a}{c} \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow \dfrac{a}{c}$

c. ខ្សែកោង

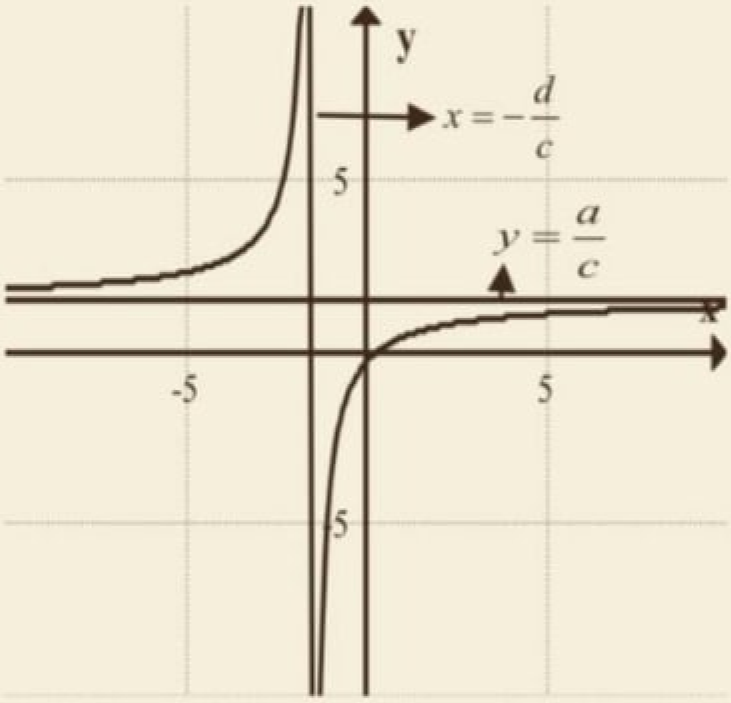
- ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអ័ក្ស

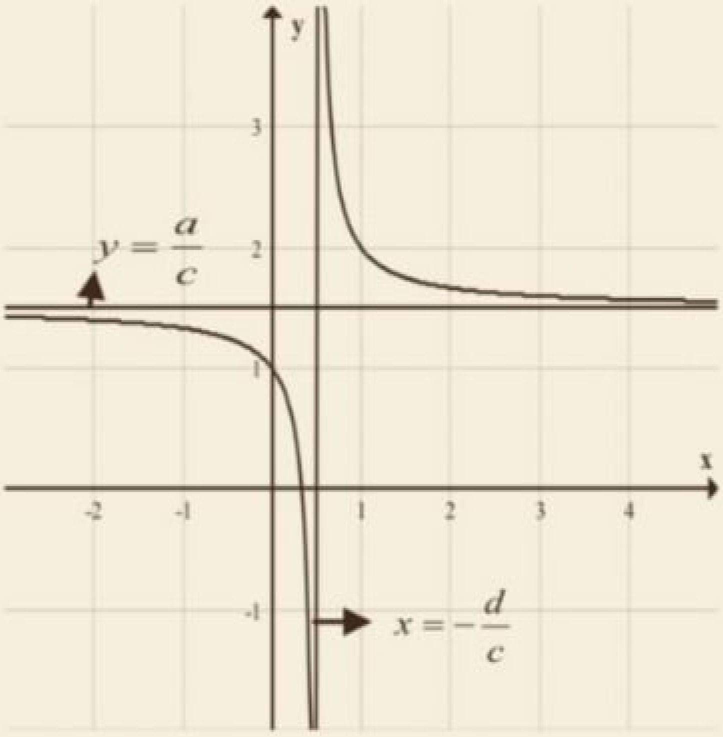
- $(x'x): y=0 \Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$

- $(y'y): x=0 \Rightarrow y=\dfrac{b}{d}$

- សង់ក្រាប

ករណី $ad-bc>0$ ករណី $ad-bc<0$





- ចំពោះក្រាបនៃអនុគមន៍នេះមានផ្ចិតឆ្លុះជានិច្ច ដែលវាជាចំណុចប្រសព្វរវាង

អាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេក គឺ $I(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c})$ ។

ឧទាហរណ៍1 សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y=\dfrac{2x-2}{2-x}$ ។

<u>*ដំណោះស្រាយ*</u>

គេមាន $y=\dfrac{2x-2}{2-x}$

+ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{2\}$

+ ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ $y'=\dfrac{2(2-x)+(2x-2)}{\left(2-x\right)^2}=\dfrac{2}{(2-x)^2}>0\ ,\forall x\in D$

នោះ $y=\dfrac{2x-2}{2-x}$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច ហើយគ្មានចំណុចបរមាធៀបទេ ។

- លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-2}{2-x}=-2\ \Rightarrow y=-2$$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$$\lim_{x\to 2}y=\lim_{x\to 2}\frac{2x-2}{2-x}=\pm\infty\Rightarrow x=2$$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$+$	||	$+$
y	$-2 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow -2$

+ ខ្សែកោង

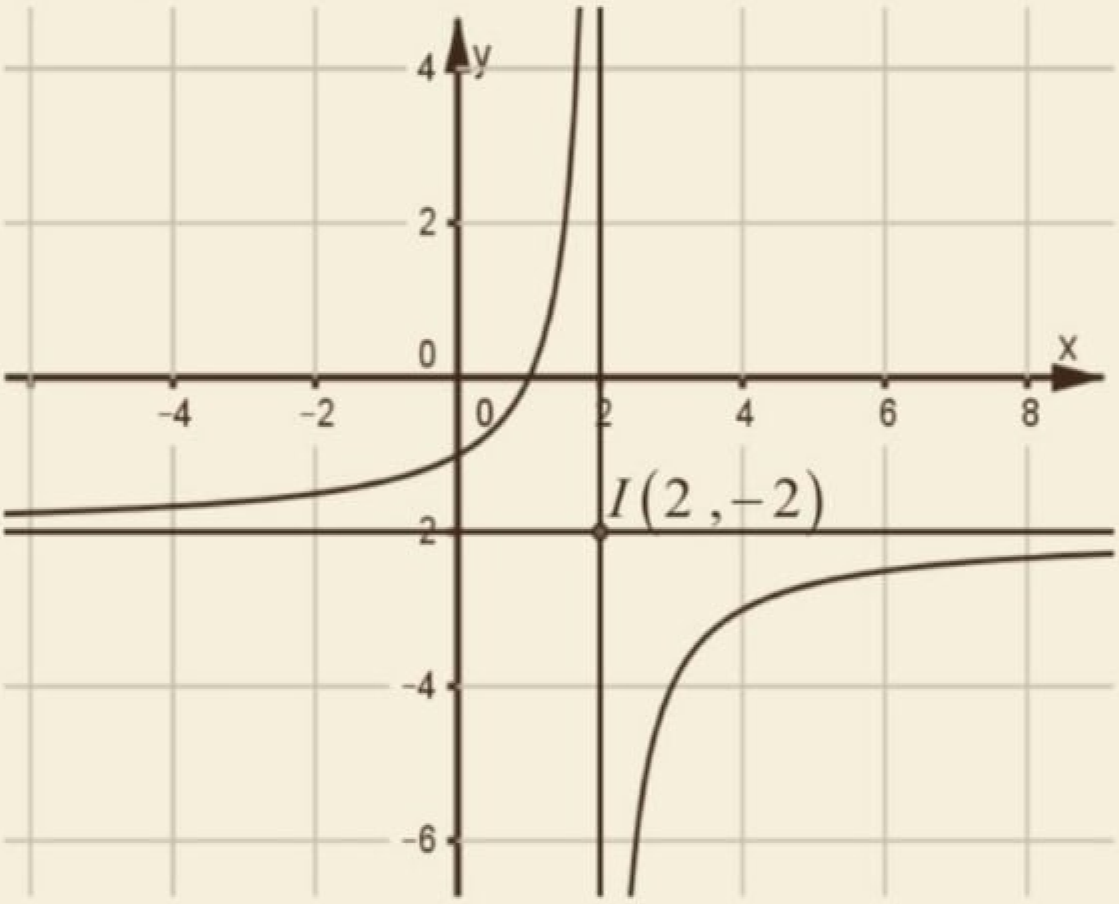
- ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអ័ក្ស

- $(x'x): y=0\Rightarrow x=1$
- $(y'y): x=0\Rightarrow y=-1$

- តារាងតម្លៃលេខ

x	-1	$3/2$	$5/2$	3	4	5	6
y	$-4/3$	2	-6	-4	-3	$-8/3$	$-5/2$

- $I(2,-2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។
- សង់ក្រាប



2. សិក្សាអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}\ ;(a\ ,\ a'\neq 0)$

ចំពោះអនុគមន៍ នេះគេអាចសរសេរជា $y=f(x)=Ax+B+\dfrac{C}{a'x+b'}$

$\left(A=\dfrac{a}{a'}\ ,\ B=\dfrac{a'b-ab'}{a'}\ ,\ C=\dfrac{a'^2c-a'bb'+ab'^2}{a'^2} \right)$

a. ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{b'}{a'}\right\}$

b. ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ $f'(x)=A-\frac{a'C}{(a'x+b')^2}=\frac{A(a'x+b')^2-a'C}{(a'x+b')^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow A(a'x+b')^2-a'C=0$

$\Rightarrow (a'x+b')^2=\frac{a'C}{A}$ មានពីរករណីដែលកើតឡើងគឺ

➢ ករណី A & $a'C$ មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា

ក្នុងករណីនេះសមីការ $(a'x+b')^2=\frac{a'C}{A}$ គ្មានឫស

ដូចនេះ $f'(x)>0$ បើ $A>0$ និង $f'(x)<0$ បើ $A<0$ ហើយអនុគមន៍គ្មានចំណុចបរមាទេ ។

➢ ករណី A & $a'C$ មានសញ្ញាដូចគ្នា

ក្នុងករណីនេះសមីការ $(a'x+b')^2=\frac{a'C}{A}$ មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា

គឺ $x_1=-\frac{b'}{a'}-\frac{1}{a'}\sqrt{\frac{a'C}{A}}$, $x_2=-\frac{b'}{a'}+\frac{1}{a'}\sqrt{\frac{a'C}{A}}$ ។ ហើយ $f'(x)=0$ ចំពោះ $x=x_1$, $x=x_2$ និងប្តូរសញ្ញា ដូចនេះអនុគមន៍ f មានតម្លៃបរមាធៀបត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស x_1 , x_2 ។

- លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{b'}{a'}} f(x)=\lim_{x\to-\frac{b'}{a'}}\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}=\pm\infty$$

នោះបន្ទាត់ $x=-\frac{b'}{a'}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)(Ax+B)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{C}{a'x+b'}=0$$

$\Rightarrow y=Ax+B$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប។

តារាងអថេរភាព

➢ ករណី A & $a'C$ មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា

- $A>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b'}{a'}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- $A<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b'}{a'}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

➢ ករណី A & $a'C$ មានសញ្ញាដូចគ្នា

- $A>0$

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{b'}{a'}$		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

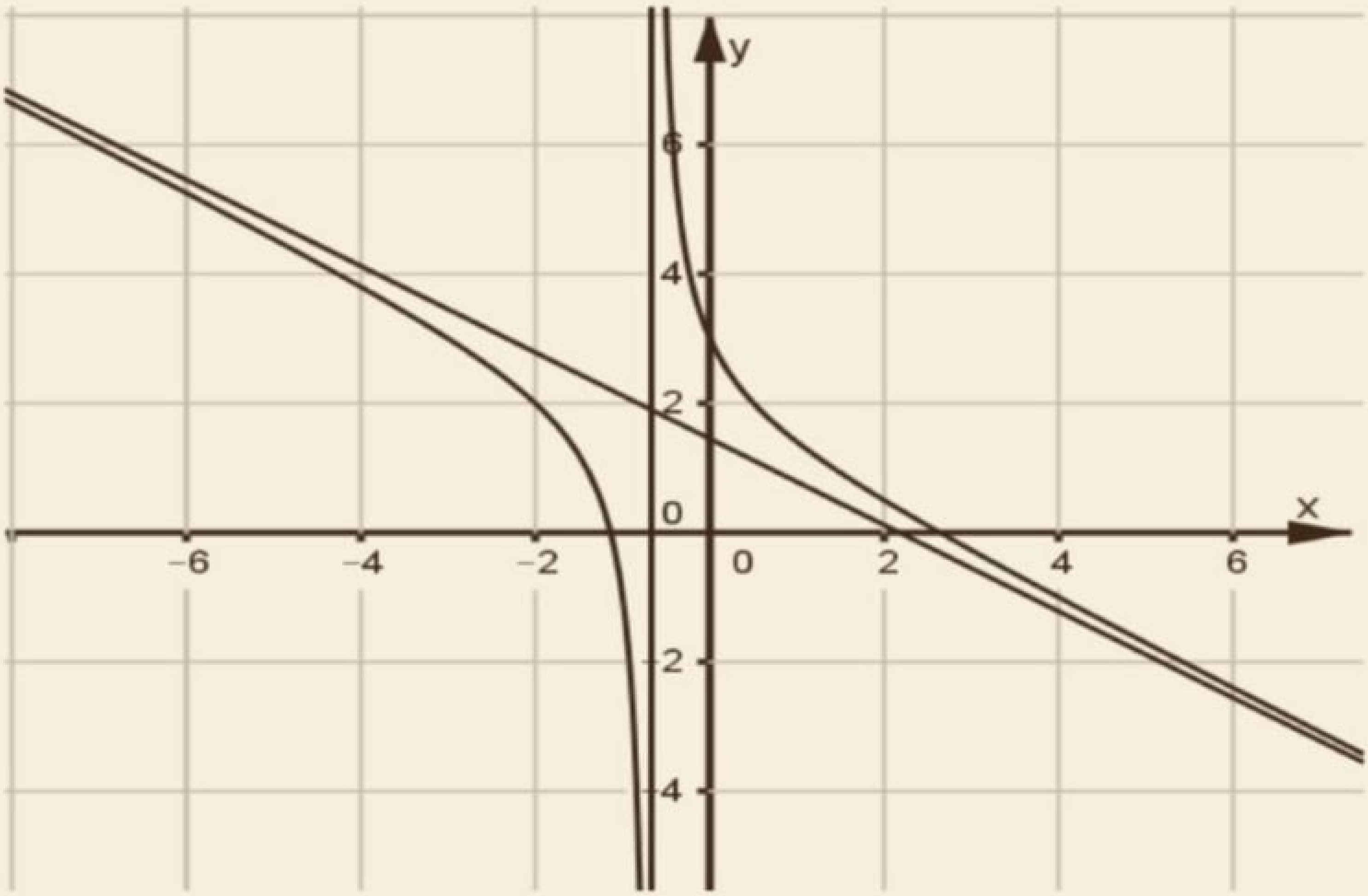
- $A<0$

x	$-\infty$		x_1		$-\dfrac{b'}{a'}$		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	$\Vert$	$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$

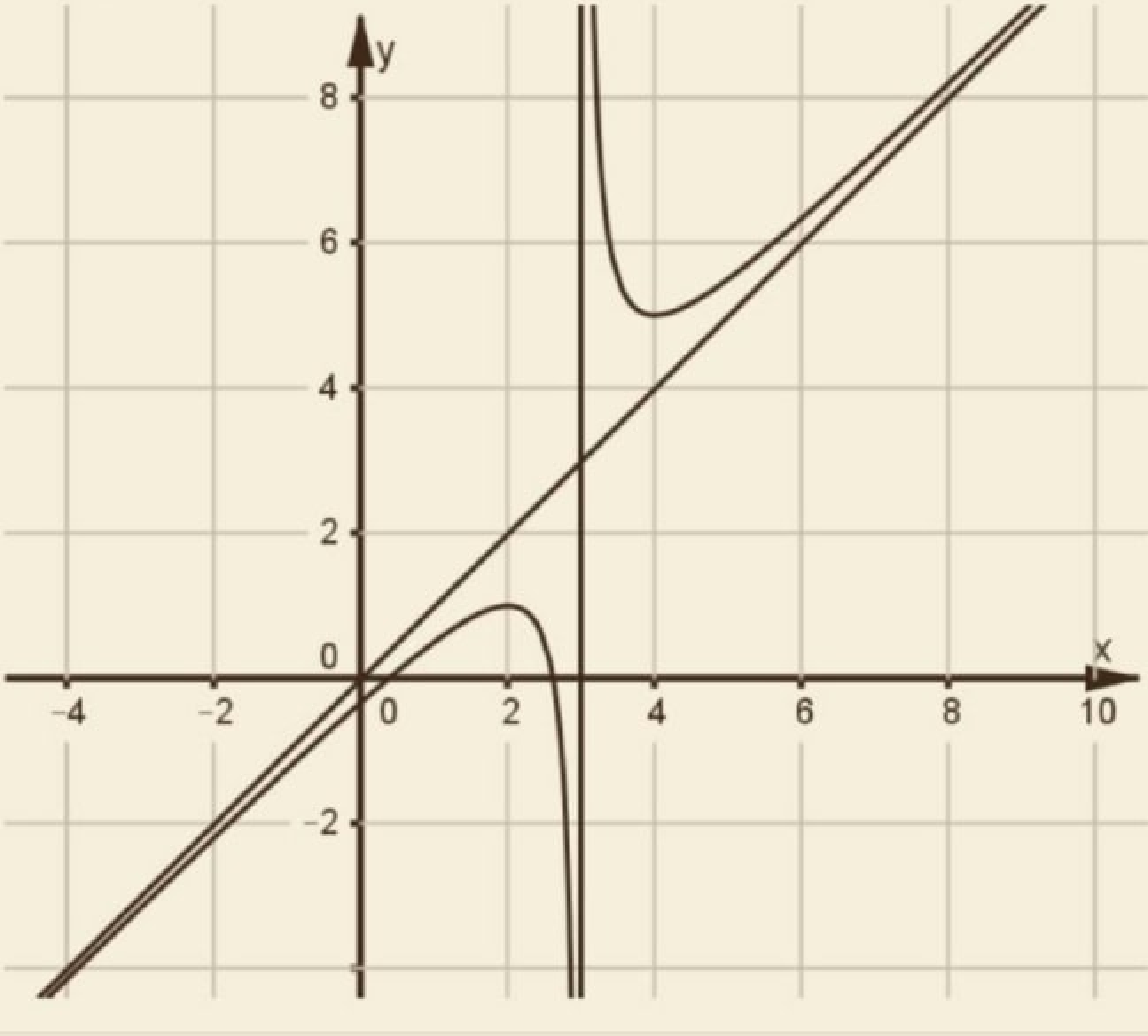
c. ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍នេះ អាចមានមួយក្នុងចំណោមខ្សែកោងទាំងបួនខាងក្រោម

- $A>0$

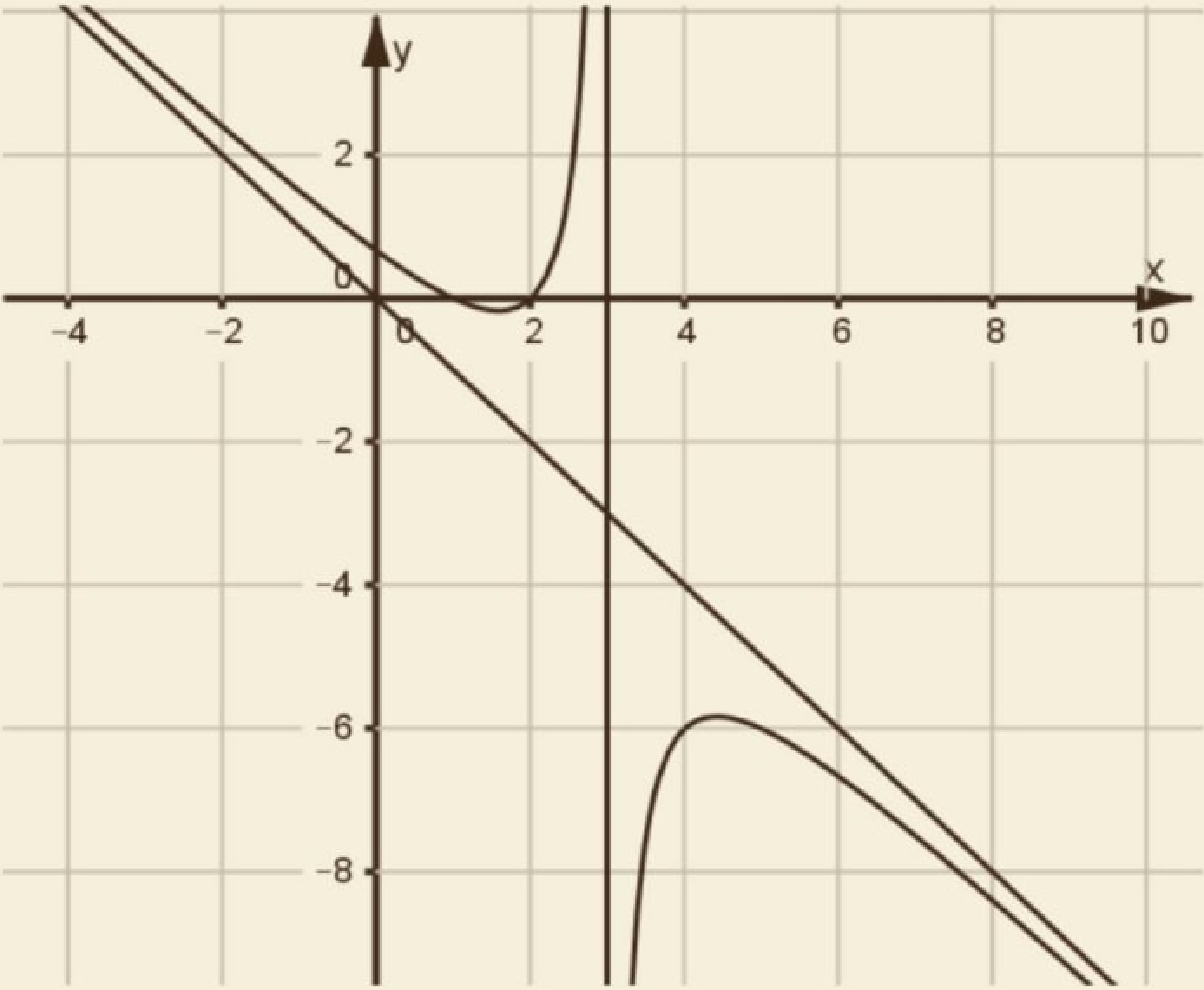
- $A < 0$



- $A > 0$



- $A < 0$



- ➢ ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍អាចកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស អ័ក្សអរដោនេ ឬ មិនកាត់ ។
- ➢ ចំណុចប្រសព្វនៃអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង។

3. សិក្សាអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$;$(a\ ,\ a'\neq 0)$

ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍នេះមានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម ៖

- គ្មានអាស៊ីមតូតទ្រេតទេ
- មានអាស៊ីមតូតដេកមួយជានិច្ច
- ចំនួនអាស៊ីមតូតឈរអាស្រ័យនិងឫសនៃសមីការ $a'x^2+b'x+c'=0$

➢ បើ $\Delta=(b')^2-(a')(c')<0$ គ្មានអាស៊ីមតូតឈរ

➢ បើ $\Delta=(b')^2-(a')(c')=0$ មានអាស៊ីមតូតឈរមួយគឺ $x=-\dfrac{b'}{2a'}$

➢ បើ $\Delta=(b')^2-(a')(c')>0$ មានអាស៊ីមតូតឈរពីរគឺ $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta}}{2a'}$

អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ អាចសរសេរ

$$f(x)=A+\frac{Bx+C}{a'x^2+b'x+c'}$$

ដូចនេះ ខ្សែកោងតាង $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ ដូចគ្នានិងខ្សែកោងតាង

$f(x)=\dfrac{Bx+C}{a'x^2+b'x+c'}$ ។

<u>**ឧទាហរណ៍4**</u> សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{4x^2+4x-9}{4(x^2-1)}$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

❖ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

❖ ទិសដៅអថេរភាព

▪ ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{4(8x+4)(x^2-1)-8x(4x^2+4x-9)}{4(x^2-1)}$

$$=\frac{-2x^2+5x-2}{2\left(x^2-1\right)^2}$$

$\forall\ x\in D, 2\left(x^2-1\right)^2>0 \Rightarrow f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-2x^2+5x-2$ ។

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow x=2, x=-\frac{1}{2}$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

- ចំណុចបរមាធៀប

អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=\frac{1}{2}$ គឺ $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ ។

អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ គឺ $f(2)=\frac{5}{4}$ ។

- លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2+4x-9}{4\left(x^2-1\right)}=1\Rightarrow y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{4x^2+4x-9}{4\left(x^2-1\right)}=\pm\infty\Rightarrow x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{4x^2+4x-9}{4\left(x^2-1\right)}=\pm\infty\Rightarrow x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	1

❖ ក្រាប

- ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង និងអ័ក្ស

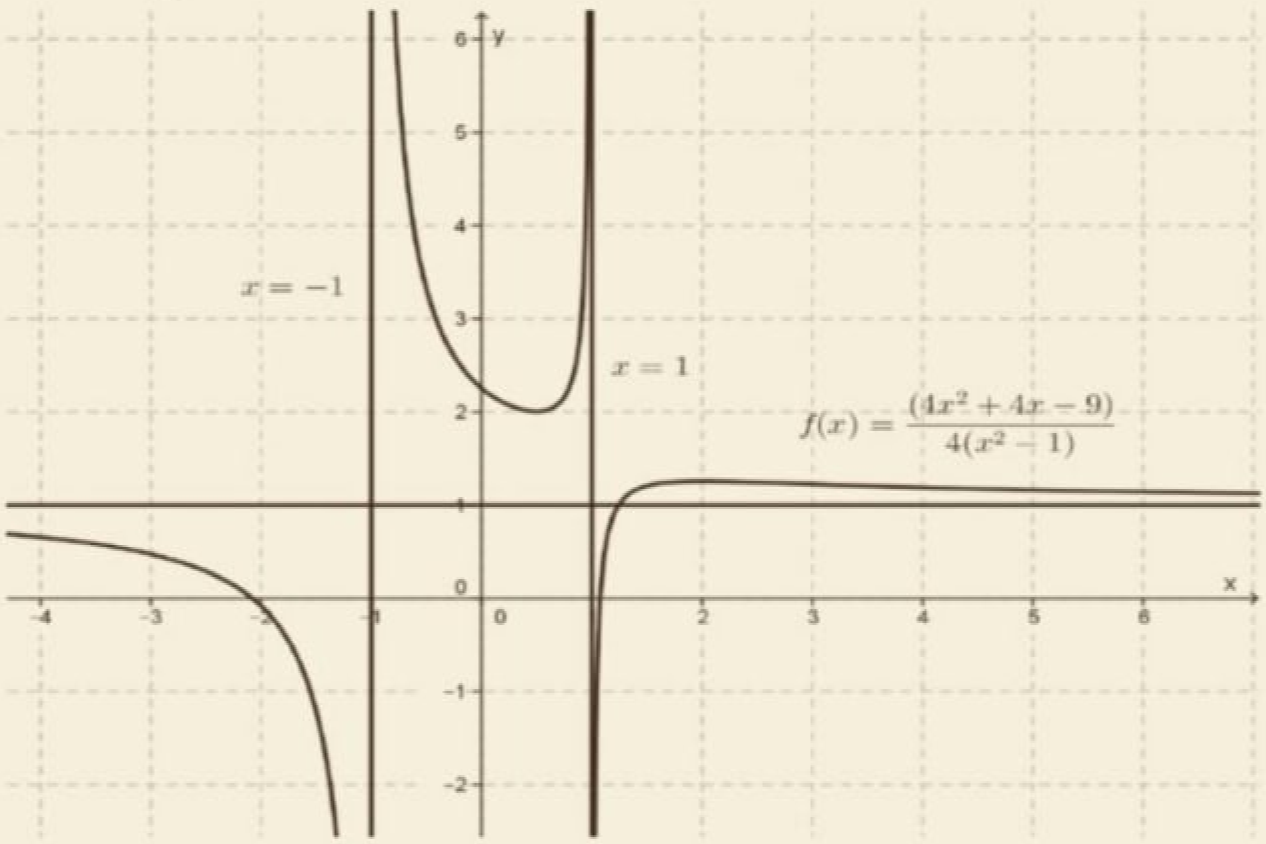
$$(y'y): x=0 \Rightarrow y=\frac{9}{4}$$

$$(x'x): y=0 \Rightarrow 4x^2+4x-9=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{10}}{2}$$

- ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង និងអាស៊ីមតូតដេក $y=1$

$$\frac{4x^2+4x-9}{4(x^2-1)}=1 \Rightarrow x=\frac{5}{4} \text{ ។}$$

- សំណង់ក្រាប



អនុគមន៍

BY SOVANDALIN

មេរៀន អនុគមន៍ អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

សិក្សាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ប្លង់សិក្សាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ៖

១. ដែនកំណត់

២. ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេទី១
- លីមីតចុងដែនកំណត់
- អាស៊ីមតូត
- តារាងអថេរភាព

៣. ក្រាភិច

- ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង និងអ័ក្សទាំងពីរ និងចំណុចពិសេសខ្លះៗទៀត ។
- ចំណុចរបត់ (ដេរីវេទី ២)

លំហាត់គំរូ ១ សិក្សាអនុគមន៍ $y = e^x$

១. ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$

២. ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេទី១ $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

ដោយ $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $y' = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ មានន័យថា អនុគមន៍ $y = e^x$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច ។

-លីមីតចុងដែនកំណត់

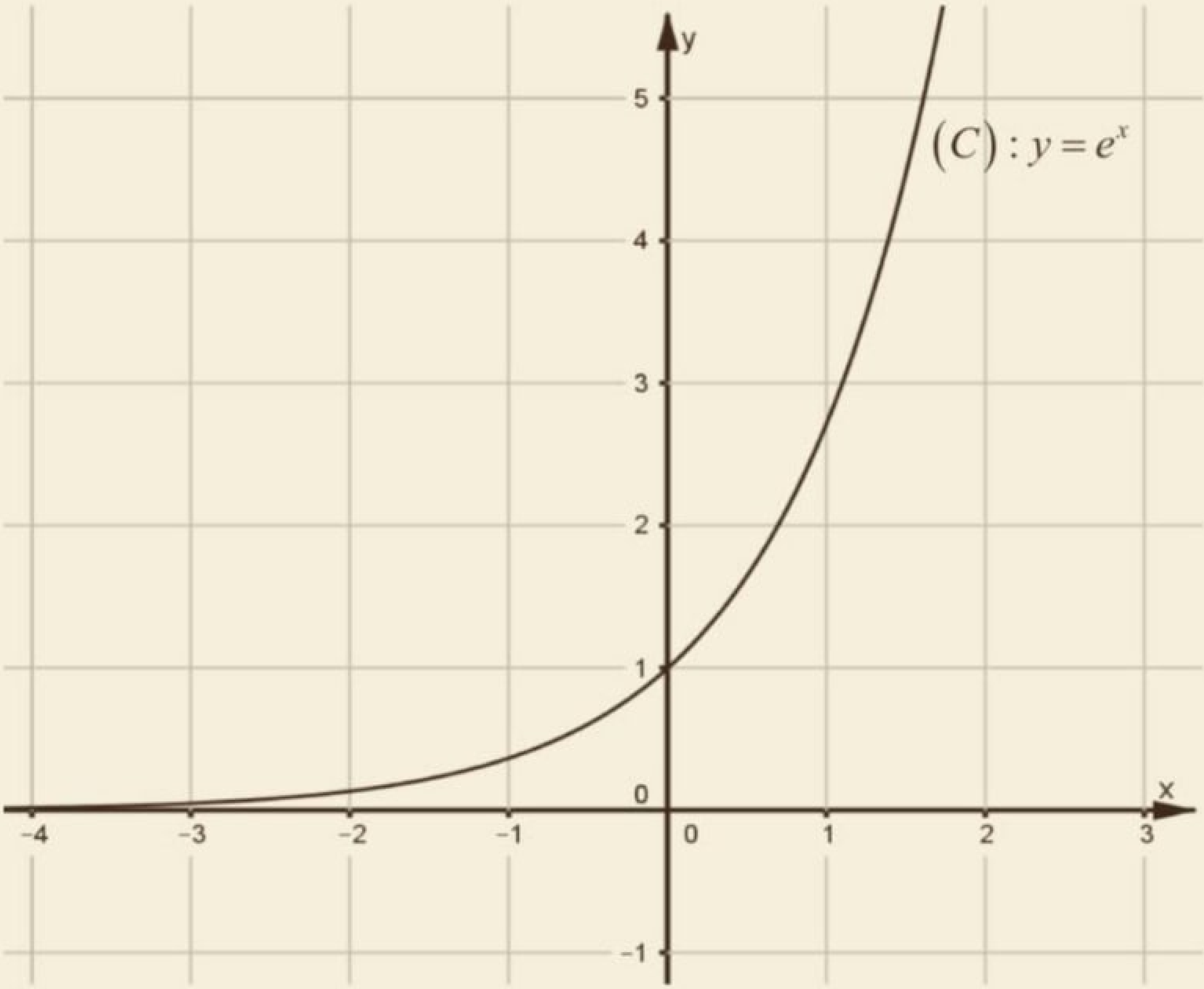
+ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ នោះ $y = 0$ គឺជាអាស៊ីមតូតដេក ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty \qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

៣. ក្រាប



លំហាត់គំរូ ២ សិក្សាអនុគមន៍ $y = xe^x$

១. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $D = \mathbb{R}$

២. ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេទី១ $y' = (x)' e^x + (e^x)' x = e^x (x+1)$

ដោយ $e^x > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$, y' មានសញ្ញាដូច $x+1$

បើ $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	

-ត្រង់ $x=-1$ អនុគមន៍ $y=f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមា

$f(-1)=-e^{-1}=-0.36$

-លីមីត

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ ហើយ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់សមីការ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x}=+\infty$

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-0.36	$\nearrow$	$+\infty$

៣. ក្រាប $y=xe^{x}$

- ចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាប នឹងអ័ក្ស

$(x'x): y=0 \Rightarrow x=0$

- ចំនុចរបត់ : $y''=(x+2)e^{x}$

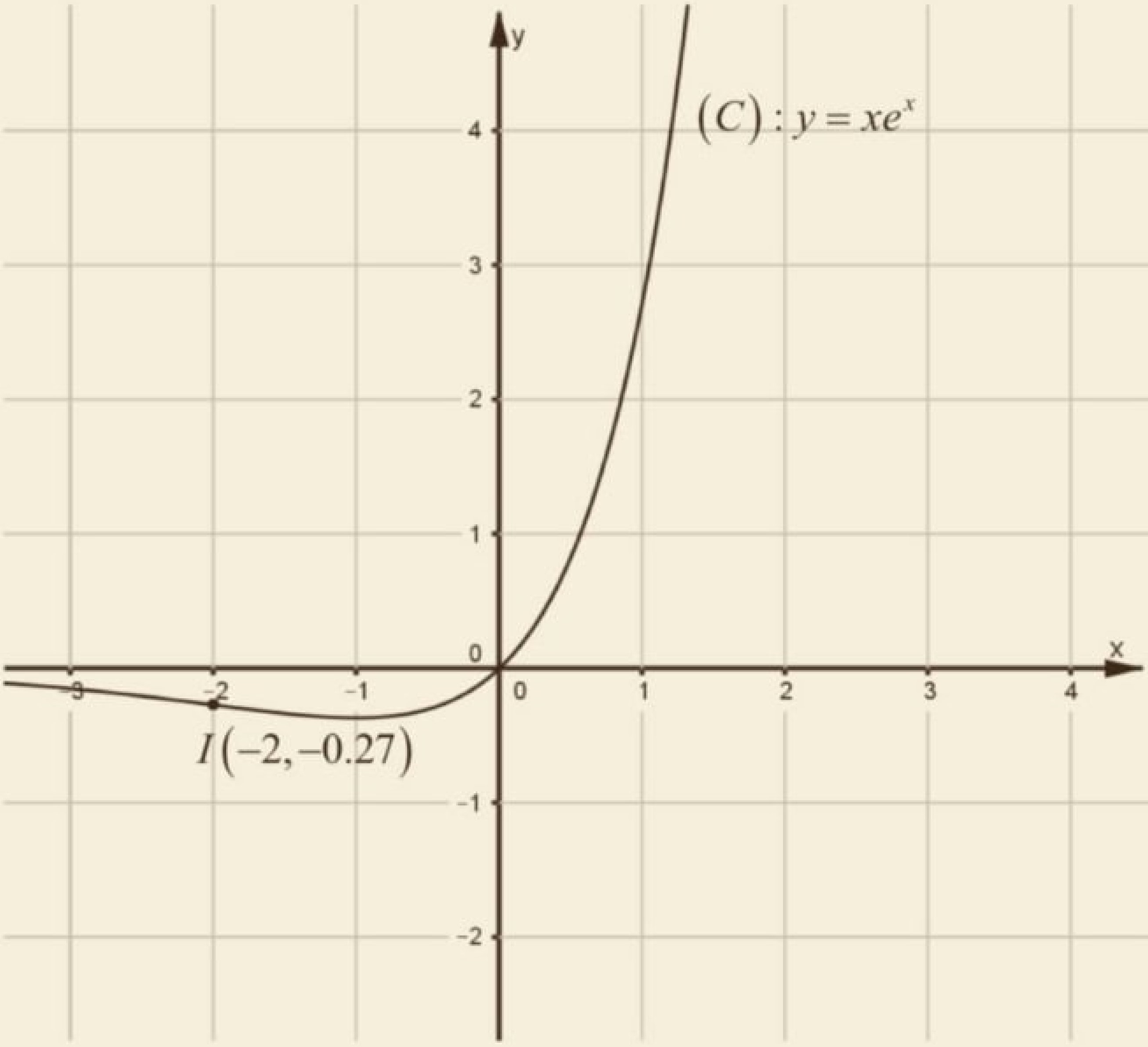
ដោយ $\forall\ x\in\mathbb{R}, e^{x}>0 \ \Rightarrow y''$ មានសញ្ញាដូច $x+2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	

តាមតារាងដេរីវេទី២ គេបានអនុគមន៍ f មានចំនុចរបត់មួយ $I(-2,-2e^{-2})$

ឬ $I(-2,-0.27)$ ។

- សង់ក្រាប



y
x
$(C): y = xe^x$
$I(-2, -0.27)$
0
1
2
3
4
-1
-2
-3

អនុគមន៍

BY SOVANDALIN

មេរៀន អនុគមន៍ លោការីតនេពែ

សិក្សាអនុគមន៍លោការីតនេពែ

- រូបមន្តលីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

1). $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ 2). $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

3). $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \ , n>0$ 4). $\lim_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$

5). $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ 6). $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0 \ , n>0$

- រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

1. $y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}$
2. $y = \ln\left(u(x)\right) \Rightarrow y' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
3. $y = \ln(ax+b) \Rightarrow y' = \frac{a}{ax+b}$

- ប្លង់សិក្សាអនុគមន៍លោការីតនេពែ

ដើម្បីសិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍
2. ទិសដៅអថេរភាព
   - រកដេរីវេ និងសិក្សាសញ្ញារបស់ដេរីវេ
   - សង់តារាងដេរីវេនិងតម្លៃបរិមា
   - រកលីមីតចុងដែនកំណត់
   - រកអាស៊ីមតូត
   - ចំនុចរបត់(បើមាន)
   - សង់តារាងអថេរភាព
3. សង់ក្រាប

➢ ចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង និងអ័ក្ស រឺ តារាងជំនួយ

<u>ឧទាហរណ៍១</u> សិក្សានិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=1+x\ln x$ ។

<u>*ដំណោះស្រាយ*</u>

1. ដែនកំនត់

អនុមន៍មានន័យកាលណា $x>0$

នោះ $D=(0,+\infty)$

2. ទិសដៅអថេរភាព

➢ ដេរីវេ

គេមាន $f(x)=1+x\ln x \Rightarrow f'(x)=(1+x\ln x)'$

$$\Rightarrow f'(x)=\ln x+1$$

- បើ $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow x>e^{-1}=\dfrac{1}{e}$
- បើ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$
- បើ $f'(x)<0 \Leftrightarrow \ln x+1<0 \Leftrightarrow x<e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

តារាងសញ្ញាដេរីវេទី១

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

➢ ចំណុចបរមាធៀប

អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=e^{-1}$ គឺ $f\left(e^{-1}\right)=1-e^{-1}$ ។

➢ លីមីតចុងដែនកំណត់ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x\ln x)=1$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x\ln x)=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x=+\infty$

➢ អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x=+\infty$ នោះនាំឱ្យបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

3. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$ និងមានក្រាប (C) ។

a. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

b. គណនា និងសិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$ ។ បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយនិងអប្បបរមាមួយ រួចគណនាតម្លៃនោះ ។

c. គណនាលីមីតចុងដែន។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

d. សិក្សាទីតាំងរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត និងខ្សែកោង (C) ។

e. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

3. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$

a. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ដោយ $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$

ដូចនេះ អនុកមន៍មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{1\}$ ។

b. គណនា និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

ដោយ $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$

គេបាន $f'(x)=(x+2)'+4\left[-\dfrac{(x-1)'}{(x-1)^2}\right]=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}$

$$=\frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

ដោយ $(x-1)^2>0\ ;\forall x\in D$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច x^2-2x-3

បើ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1\ ,\ x=3$

តារាងសញ្ញាដេរីវេទី១

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

➢ បង្ហាញថា f មានអតិបរមាមួយនិងអប្បបរមាមួយ

- ត្រង់ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=-1$ ។

- ត្រង់ $x=3$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=3$ ។

➢ គណនាតម្លៃបរមា

- តម្លៃអតិបរមា $f(-1)=-1+2+\dfrac{4}{-1-1}=-1$

- តម្លៃអប្បបរមា $f(3)=3+2+\dfrac{4}{3-1}=7$

c. គណនាលីមីតចុងដែន

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(x+2+\frac{4}{x-1})=-\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x\to1^-}\frac{4}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(x+2+\frac{4}{x-1})=+\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x\to1^+}\frac{4}{x-1}=\frac{4}{0^+}+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+2+\frac{4}{x-1})=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2+\frac{4}{x-1})=+\infty$$

➢ រកសមីការអាសុីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim_{x\to1} f(x)=\pm\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x=1$ ជាអាសុីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

ដោយ $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$

គេបាន $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x-1}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

d. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេតនិងខ្សែកោង (C)

គេមាន ខ្សែកោង $(C): y=f(x)=x+2+\frac{4}{x-1}$

អាស៊ីមតូតទ្រេត $(\Delta): y=x+2$

គេបាន $y_C-y_\Delta=(x+2+\frac{4}{x-1})-(x+2)=\frac{4}{x-1}$

តារាងសញ្ញានៃ y_C-y_Δ

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y_C-y_Δ	$-$	‖	$+$

តាមតារាងសញ្ញានៃ y_C-y_Δ គេបាន

បើ $x>1\Rightarrow y_C-y_\Delta>0\Leftrightarrow y_C>y_\Delta$ ដូចនេះ ក្រាប (C) នៅខាងលើអាស៊ីមតូតទ្រេត (Δ) ។

បើ $x<1\Rightarrow y_C-y_\Delta<0\Leftrightarrow y_C<y_\Delta$ ដូចនេះ ក្រាប (C) នៅក្រោមអាស៊ីមតូតទ្រេត (Δ) ។

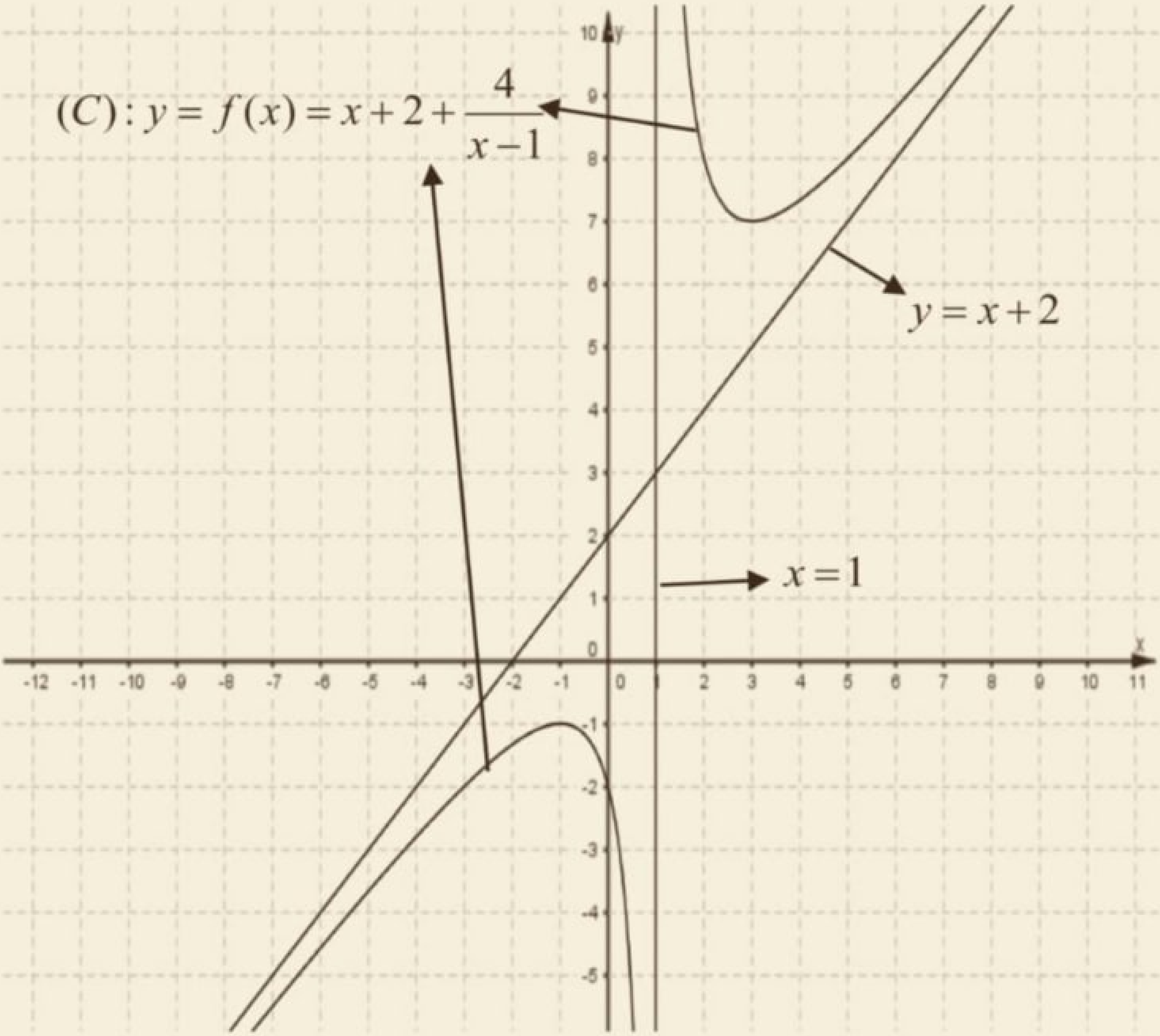
e. សង់តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	7	↗	$+\infty$

- សង់ក្រាប

តារាងតម្លៃលេខ

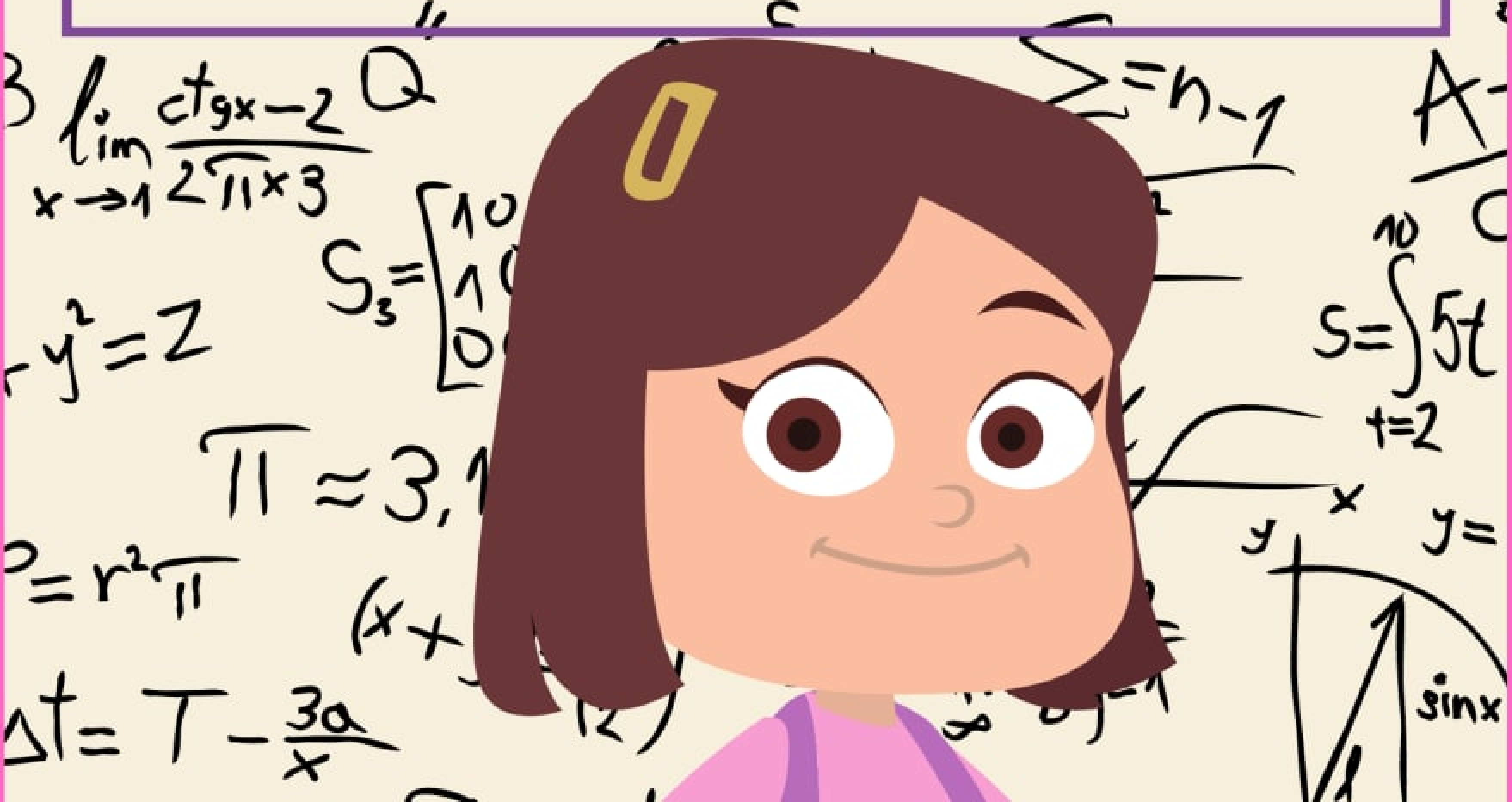
x	-2	0	2	4
$y = x + 2 + \dfrac{4}{x-1}$	$-\dfrac{4}{3}$	-2	8	$\dfrac{22}{3}$



អនុគមន៍

BY SOVANDALIN

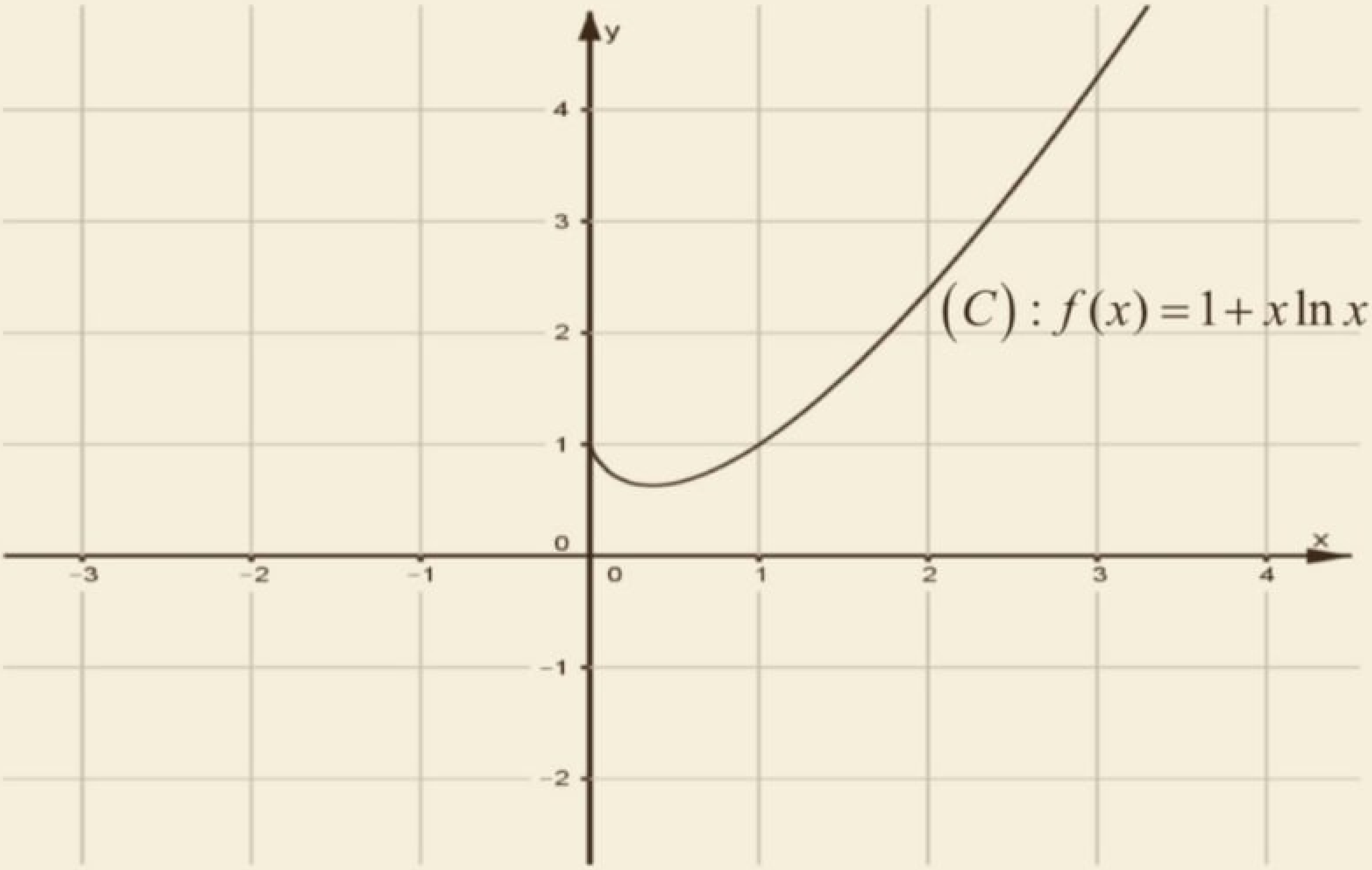
ចង់បានលំហាត់មាន ដំណោះស្រាយបន្ថែម សូមchatចូលpage



➢ តារាងអថេរភាព

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

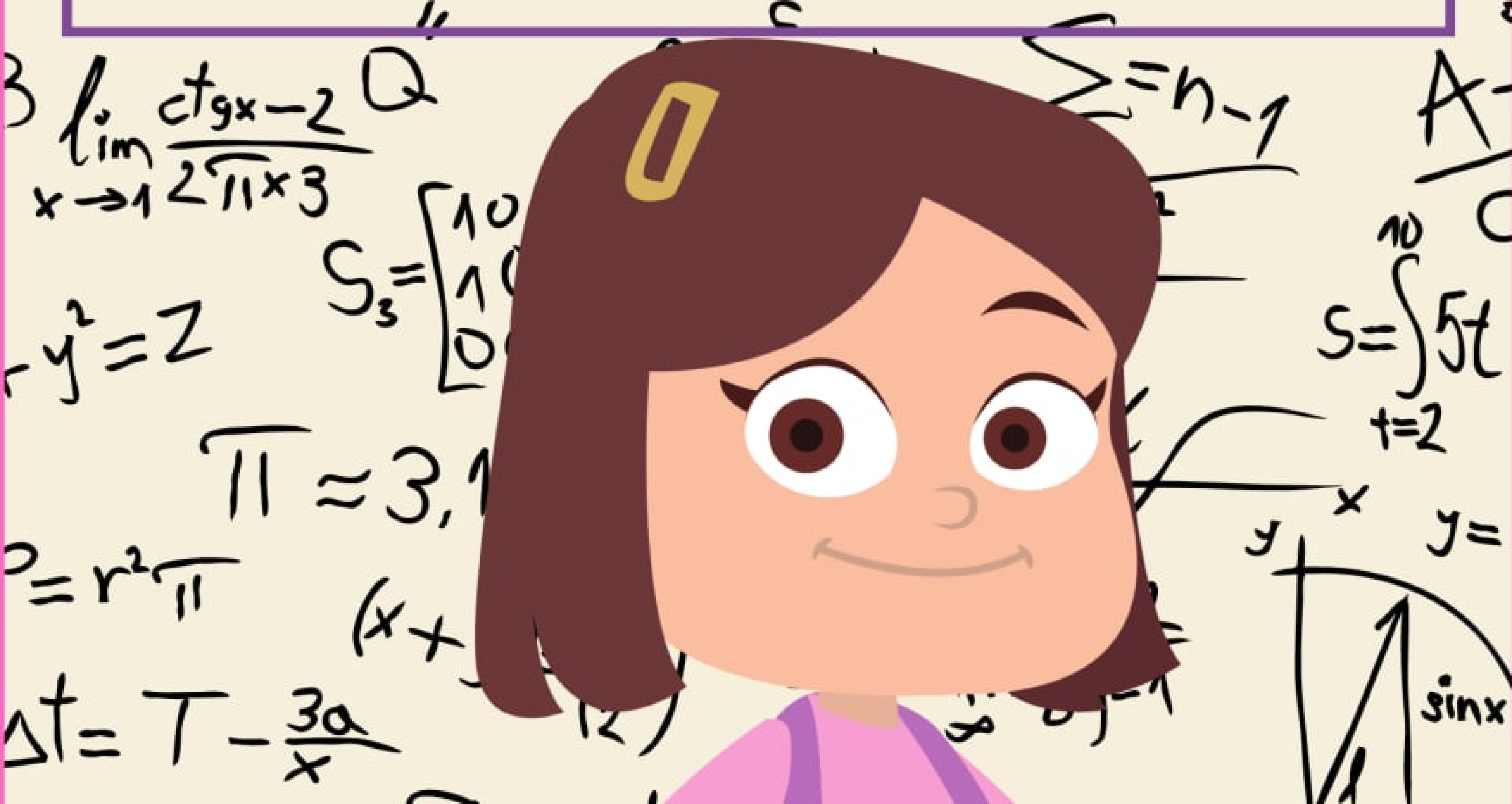
3. ក្រាប



អនុគមន៍

BY SOVANDALIN

លំហាត់មាន ដំណោះស្រាយ



ផ្នែកលំហាត់មានដំណោះស្រាយ

1. អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $y=f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$ និងមានក្រាប (C) ។

a. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតក្រាប (C) ។

b. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាមួយ និងអតិបរមាធៀបមួយ ។ គណនាតម្លៃបរមានោះ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

c. បង្ហាញថាក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយ ។

d. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ត្រង់ចំណុច $O(0\ ,\ 0)$ ។ សង់ (T) និង (C) ។

e. រកតម្លៃ k ដោយប្រើក្រាប (C) ដើម្បីឲ្យសមីការ $kx^2-4x+4k=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនវិជ្ជមាន ។

<u>*ដំណោះស្រាយ*</u>

1. គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}\ ;\ D=\mathbb{R}$

a) គណនាលីមីត

➢ $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2(1+\frac{4}{x^2})}=0$$

➢ $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x^2(1+\frac{4}{x^2})}=0$$

- ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (c)

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

b) គណនាដេរីវេ

ដោយ $f(x)=\frac{4x}{x^2+4}$

គេបាន $f'(x)=\frac{(4x)'(x^2+4)-(x^2+4)'4x}{(x^2+4)^2}=\frac{4(x^2+4)-2x\times 4x}{(x^2+4)^2}$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{4x^2+16-8x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{16-4x^2}{(x^2+4)^2}$$

ដូចនេះ: $f'(x)=\frac{16-4x^2}{(x^2+4)^2}$

- បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាមួយ និងអតិបរមាមួយ

➢ សញ្ញានៃដេរីវេ

ដោយ $f'(x)=\frac{16-4x^2}{(x^2+4)^2}$

$(x^2+4)^2>0;\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $16-4x^2$

បើ $f'(x)=0\Leftrightarrow 16-4x^2=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

តាមតារាងសញ្ញាដេរីវេ

- ត្រង់ $x=-2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

ដូចនេះ: អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=-2$ ។

- ត្រង់ $x=2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

ដូចនេះ: អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=2$ ។

- គណនាតម្លៃបរមាធៀប

- តម្លៃអប្បបរមាធៀប $f(-2)=\dfrac{4(-2)}{(-2)^2+4}=\dfrac{-8}{8}=-1$
- តម្លៃអតិបរមាធៀប $f(2)=\dfrac{4.2}{2^2+4}=\dfrac{8}{8}=1$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c) បង្ហាញថាក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយ

ដោយ $(C): y=f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$, $D=\mathbb{R}$

ចំពោះ $\forall x\in D \Rightarrow -x\in D$

គេបាន $f(-x)=\dfrac{4(-x)}{(-x)^2+4}=-\dfrac{4x}{x^2+4}=-f(x)$

នោះ f ជាអនុគមន៍សេស ។

ដូចនេះ ក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយត្រង់ $O(0,\ 0)$ ។

d) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ត្រង់ចំណុច $O(0,0)$

តាមរូបមន្ត $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

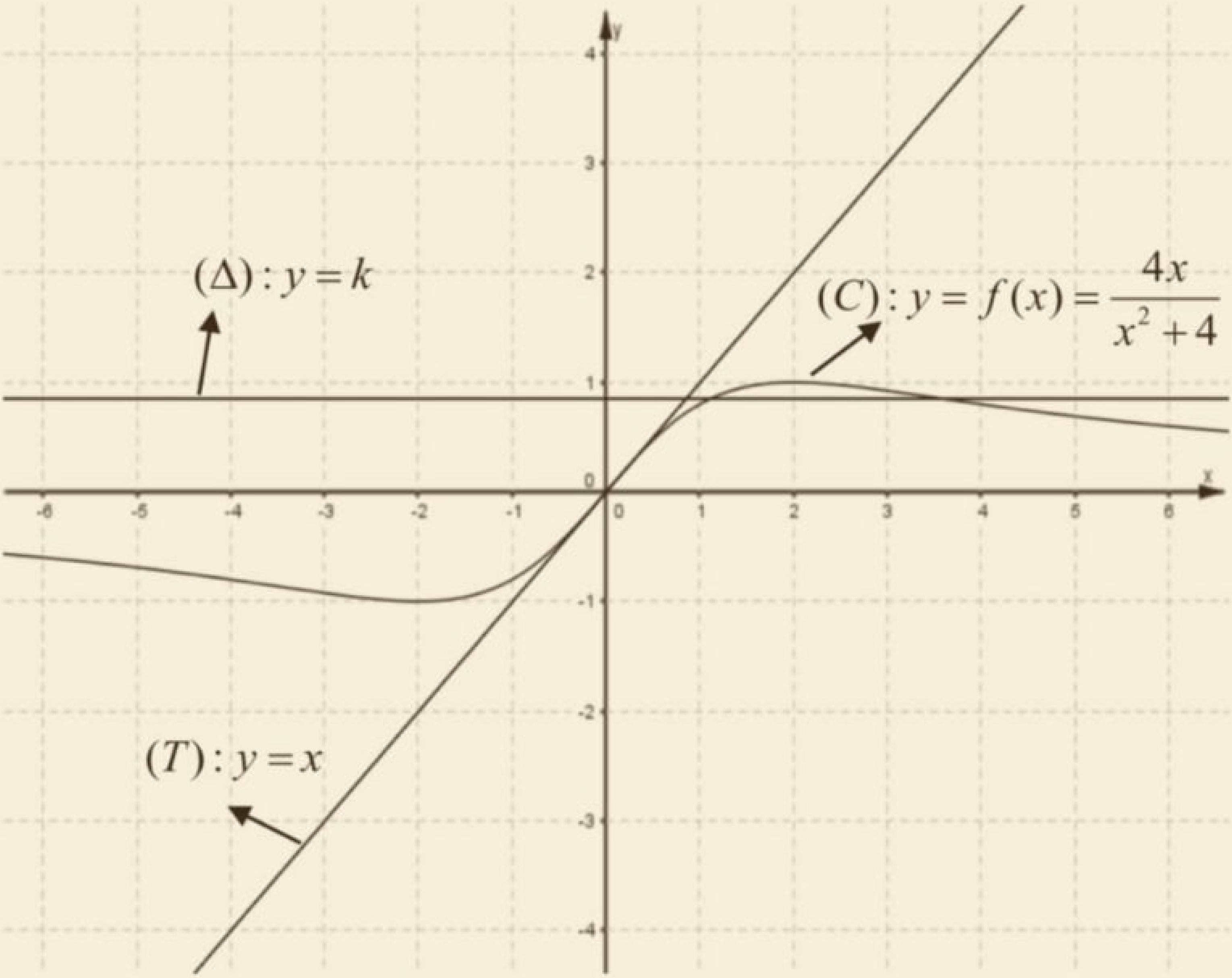
ដោយ $x_0=0$, $y_0=0$

ហើយ $f'(x_0)=f'(0)=\dfrac{16-0}{(0+4)^2}=\dfrac{16}{16}=1$

គេបាន $(T):\ y=1\times(x-0)+0=x$

ដូចនេះ $(T): y=x$ ។

• សង់ (T) និង (C)



e) រកតម្លៃ k ដើម្បីឲ្យសមីការ $kx^2-4x+4k=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនវិជ្ជមានដោយប្រើខ្សែកោង (C)

គេមានសមីការ $kx^2-4x+4k=0$

$$kx^2+4k=4x \Leftrightarrow k(x^2+4)=4x$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{4x}{x^2+4} \quad (1)$$

(1) ជាសមីការអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ $(\Delta): y=k$ ដើម្បីឲ្យសមីការ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនវិជ្ជមានលុះត្រាតែ (Δ) កាត់ (C) ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នាដែលមានអាប់ស៊ីសជាចំនួនវិជ្ជមាន ។

តាមក្រាប (C) គេបាន $k\in(0,1)$ ។

2. គេអោយអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ ដែលមានក្រាប (C) ។

a. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

b. គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

c. រកតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

d. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

e. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស។ បញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

f. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស។ បញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

g. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។

h. ដោះស្រាយវិសមីការ $\dfrac{x^2+1}{x}>x$ តាមក្រាភិច ។

ដំណោះស្រាយ

2. គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

a. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x\neq 0$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $D=\mathbb{R}-\{0\}$ ។

b. គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

c. រកតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ f

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(x^2+1)'\times x - x'\times(x^2+1)}{x^2}=\dfrac{2x\times x-(x^2+1)}{x^2}$

$$=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

ដោយ $x^2>0$, $\forall x\in D$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច x^2+1 ។

បើ $f'(x)=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1)=\dfrac{(-1)^2+1}{-1}=-2$ ។
- អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=\dfrac{1^2+1}{1}=2$ ។
- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

d. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$

ដូចនេះ ត់បន្ទា $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

e. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, $D=\mathbb{R}-\{0\}$

គេបាន $\forall x\in D$, $-x\in D$

ជំនួស x ដោយ $-x$ ចូលក្នុងអនុគមន៍ f

គេបាន $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{-x}=-\dfrac{x^2+1}{x}=-f(x)$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍សេស ។

- បញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)

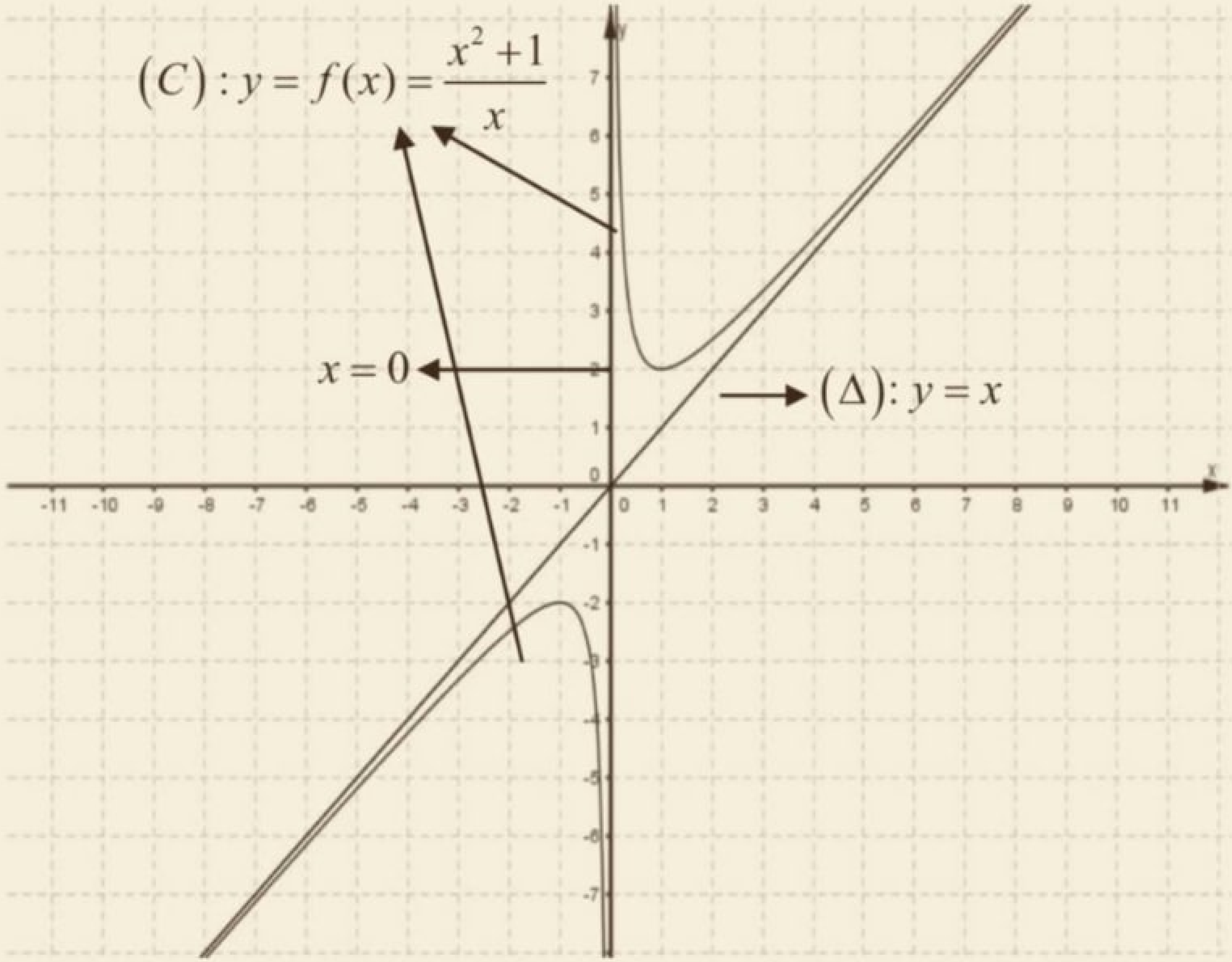
ដោយ f ជាអនុគមន៍សេស

ដូចនេះ ចំណុច $O(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

f. សង់ក្រាប

តារាងតម្លៃលេខ

x	-2	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	2
$y=\dfrac{x^2+1}{x}$	$-\dfrac{5}{2}$	$-\dfrac{5}{2}$	$\dfrac{5}{2}$	$\dfrac{5}{2}$



g. ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{x^2+1}{x} > x$

គេមានវិសមីការ $\frac{x^2+1}{x} > x \quad (E)$

ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ និង $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

តាមក្រាបគេបាន ចម្លើយនៃវិសមីការ (E) គឺជាសំណុំនៃ x ដែលខ្សែកោង (C) ស្ថិតនៅលើអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ដូចនេះ $x \in (0, +\infty)$ ។