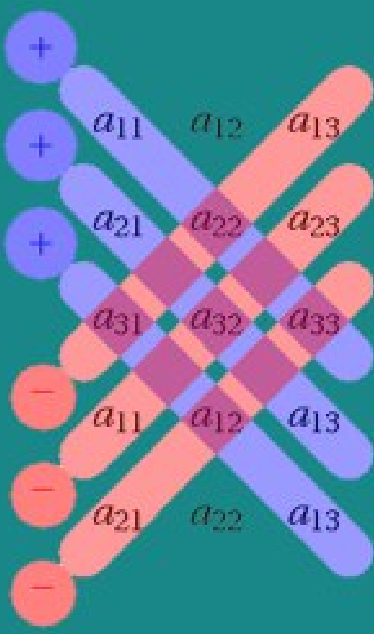
ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

កិច្ចស្រាវជ្រាវ

គណិតវិទ្យា

ម៉ាទ្រីស និង ដេទែមីណង់



រៀបរៀងដោយៈ សេង សុភាសិត

គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យាក្រុម២ ជំនាន់ទី១៨ ឆ្នាំសិក្សា ២០១២-២០១៣

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

សៀវភៅកិច្ចការស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យា មេរៀន និង លំហាត់
សម្រាប់គ្រូ និងសិស្ស មធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

ម៉ាទ្រីស និងដេទែមីណង់

គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យាក្រុម២ ជំនាន់ទី ១៨
សេង សុភាសិត
សេង វដ្ឋា
កៅ សេដា
ម៉ៅ មាន
អ៊ុំ សាន
សៅ អឿន
កែវ សុវណ្ណារ៉ា
ឈួន ឈឿង
ង៉ាក កែម
សាស្ត្រាចារ្យណែនាំ: ថៃ ហេង

ឆ្នាំសិក្សា ២០១២-២០១៣

អារម្ភកថា

សៀវភៅកម្រងស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាសម្រាប់ជំនួយដល់ការសិក្សា និងជាឯកសារស្រាវជ្រាវដើម្បីពង្រីកចំណេះដឹងបន្ថែមលើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាខាងផ្នែក ម៉ាទ្រីស និងដេទែមីណង់ ។ ការរៀបចំឲ្យមានកិច្ចការស្រាវជ្រាវនេះឡើង គឺក្នុងគោលបំណងពង្រឹងនិងពង្រីកសមត្ថភាពបន្ថែមទៅលើផ្នែកគណិតវិទ្យា ដល់គរុនិស្សិតជំនាន់ទី១៨ នៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ផ្នែកដេប៉ាតេម៉ង់ គណិតវិទ្យាទាំងមូលទៅលើគ្រប់ផ្នែក នៃគណិតវិទ្យា និងបានបែងចែកជាក្រុមក្នុងការស្រាវជ្រាវ ។ សៀវភៅកិច្ចការស្រាវជ្រាវនេះផ្តោតសំខាន់ទៅលើផ្នែកម៉ាទ្រីស និងដេទែមីណង់ ។ ខ្លឹមសារមេរៀនត្រូវបានសង្ខេបគន្លឹះសំខាន់ៗព្រមទាំងមានឧទាហរណ៍បញ្ជាក់ ដែលមានសម្រាយងាយយល់ ។ ក្នុងសៀវភៅនេះរួមមានលំហាត់បន្ថែម ព្រមទាំងដំណោះស្រាយ ងាយយល់ និងក្បោះក្បាយ ។ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថាសៀវភៅនេះនឹងអាចជួយដល់កង្វះខាតខ្លះៗ របស់ប្អូនៗ និងមិត្តអ្នកអានក្នុងការស្រាវជ្រាវលើផ្នែកគណិតវិទ្យានេះ ហើយនិងអាចផ្តល់នូវចំណេះដឹងថ្មីៗដល់មិត្តអ្នកអានព្រមទាំងជួយ ដល់សិស្ស និស្សិត និងមិត្តអ្នកអានគ្រប់រូបផងដែរ ។

សូមអភ័យទោសទុកជាមុននូវរាល់កំហុសឆ្គង ដែលបានកើត មានឡើងដោយចេតនាក្តីដោយអចេតនាក្តី ហើយនឹងទទួលនូវមតិ រិៈគន់ដើម្បីស្ថាបនាពីមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ដោយសេចក្តីរីករាយបំផុត ដើម្បីឲ្យសៀវ ភៅកិច្ចការស្រាវជ្រាវនេះកាន់តែប្រសើរ យើងខ្ញុំនឹងទទួលរាល់ការរិះគន់ដើម្បីកែសម្រួលបន្ថែមអំពី សំណាក់អ្នកអាន ជាពិសេសលោកគ្រូអ្នកគ្រូបញ្ញាវន្តសិក្សាលើផ្នែកគណិតវិទ្យានេះឲ្យកាន់តែមានគុណភាព ។

សូមថ្លែងអំណរគុណដល់មាតា បីតា គ្រប់រូបដែលបានខិតខំបីបាច់ថែរក្សាកូនចៅ និងបណ្តុះបណ្តាលចំណេះវិជ្ជា ជាពិសេសវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំដែលបានខិតខំបណ្តុះបណ្តាលនូវគរុនិស្សិតដែលសុទ្ធសឹងតែមានសមត្ថភាព និងចំណេះដឹងពិតៗ ។

សូមជូនពរប្អូនៗ សិស្ស និស្សិត ព្រមទាំង មិត្តអ្នកអានទាំងអស់គ្នា ជួបប្រទះតែសេចក្តីសុខចម្រើន មានសុខភាពល្អ ប្រាជ្ញាវៀងវៃ និងសូមឲ្យទទួលបាននូវលទ្ធផលល្អ តាមដែលខ្លួនប៉ងប្រាថ្នារៀងៗខ្លួន ។

រៀបរៀងដោយ

គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យាក្រុម២

មាតិកា

ម៉ាទ្រីស

ដេទែមីណង់

ឯកសារយោង

1. Elementary Linear Algebra-Howard Anton-6 Edition
2. Linear Algebra "J. Henderson" (University of Sydney)
3. Algébre: tome 2 "Guy Auliac"
4. MathématiQues: DEUG – SCiENCES
5. សៀវភៅ ១៥ ភាគ មេរៀនម៉ាទ្រីស និងដេទែមីណង់
6. សៀវភៅគណិតរបស់ក្រសួងអប់រំយុវជន និង កីឡា

ម៉ាទ្រីស (*Matric*)

1. សញ្ញាណនៃម៉ាទ្រីស (*Matrices Nation*)

1.1. និយមន័យ

ម៉ាទ្រីស គឺជាការរៀបលេខ ឬចំនួនជារាងចតុកោណកែង ឬ ការរេនៅក្នុងសញ្ញាដង្កៀប [ ] ។ យើងតាងម៉ាទ្រីសដោយអក្សរធំ $A,B,C,...$ ។ លេខ ឬ ចំនួន ដែលគេរៀបនេះហៅថា **ធាតុ** (*Entries*) នៃម៉ាទ្រីសដែលកំណត់តាងធាតុម៉ាទ្រីសដោយអក្សរតូច $a,b,c,...$ សម្រាប់តាងឲ្យបរិមាណជាលេខ ។

ឧទាហរណ៍ គេមានម៉ាទ្រីសលំដាប់ 2×3 (អានថា 2 ខ្វែង 3) ដូចខាងក្រោម ៖

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{ជួរឈរទី 1} & \text{ជួរឈរទី 2} & \text{ជួរឈរទី 3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
A= & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{ជួរដេកទី 1} \\ \longleftarrow \text{ជួរដេកទី 2} \end{array}
\end{array}$$

ជាទូទៅ ម៉ាទ្រីស គឺជាការរៀបចំនួនជារាងចតុកោណកែង ឬការដាក់ក្នុងសញ្ញាដង្កៀប [ ] ។ គេកំណត់តាងម៉ាទ្រីសដោយអក្សរធំដូចជា $A,B,C,...$ និងធាតុនៃម៉ាទ្រីសតាងដោយអក្សរតូច $a,b,c,...$។ ម៉ាទ្រីស A មានលំដាប់ $m\times n$ កំណត់ដោយ:

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\,...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33}...\,a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}...\,a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}...a_{mn} \end{bmatrix}}_{n}\left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}}\right\}m$$

- ម៉ាទ្រីស n ដែលមាន n ជួរដេក និង n ជួរឈរហៅថា **ម៉ាទ្រីសការេលំដាប់** n (*Square Matrix of Order n*) ហើយធាតុ a_{11} , a_{22} , $...a_{nn}$ ហៅថា **ធាតុអង្កត់ទ្រូងសំខាន់** (*Main Diagonal Entries*) នៃម៉ាទ្រីស A កំណត់ដោយ:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\,...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33}...\,a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}...\,a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}...a_{nn} \end{bmatrix}$$

- ម៉ាទ្រីសការេ ដែលមានធាតុទាំងអស់ស្មើសូន្យ លើកលែងតែធាតុអង្កត់ទ្រូងសំខាន់ នោះហៅថា **ម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង** (*Diagonal Matrix*) កំណត់សរសេរដោយ:

$$A=\left.\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{n}\right\} m$$

1.2. ប្រភេទម៉ាទ្រីស

ក. ម៉ាទ្រីសសូន្យ

ម៉ាទ្រីសសូន្យ គឺជាម៉ាទ្រីសដែលមានធាតុទាំងអស់ស្មើសូន្យ គេកំណត់តាងដោយ O ។

$$O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad O=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad O=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

លំដាប់ 2×2 លំដាប់ 1×2 លំដាប់ 3×1 លំដាប់ 3×4

ខ. ម៉ាទ្រីសការេ

$A=\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ មាន 2 ជួរដេក និង 2 ជួរឈរ គេថា**ម៉ាទ្រីសការេលំដាប់** 2 ។

$A=\begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ មាន 2 ជួរដេក និង 3 ជួរឈរ គេថា **ម៉ាទ្រីសការេលំដាប់** 3 ។

ជាទូទៅ ម៉ាទ្រីសការេ ជាម៉ាទ្រីសមានចំនួនជួរដេកស្មើនឹងចំនួនជួរឈរ តាងដោយ

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$ ហៅថា **ម៉ាទ្រីសការេលំដាប់** n ។

គ. ម៉ាទ្រីសឯកតា

ម៉ាទ្រីសការេដែលធាតុនៅលើអង្កត់ទ្រូងពិសេស $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\dots=a_{nn}=1$ ហើយធាតុផ្សេងទៀតស្មើនឹងសូន្យ ហៅថា ម៉ាទ្រីសឯកតាតាងដោយ I ។

ឧទាហរណ៍: ម៉ាទ្រីសខាក្រោមសុទ្ធតែជាម៉ាទ្រីសឯកតា

$$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\text{លំដាប់ }2\times2;\ I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\text{ លំដាប់ }3\times3\ ;\ I=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\text{លំដាប់ }4\times4$$

2. ប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីស

2.1. ម៉ាទ្រីសស្មើគ្នា

ម៉ាទ្រីសពីរស្មើគ្នាកាលណា ម៉ាទ្រីសទាំងពីរមានលំដាប់ដូចគ្នានិងមានធាតុត្រូវគ្នាស្មើរៀងគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ គេមានម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}2&9&0\\3&4&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{bmatrix}$មានលំដាប់$2\times3$ដូចគ្នា ។

ម៉ាទ្រីស A ស្មើម៉ាទ្រីស B កាលណា $b_{11}=2;b_{12}=9;b_{13}=0;b_{21}=3;b_{22}=4;b_{23}=0$ ។ ម៉ាទ្រីស A ស្មើនឹងម៉ាទ្រីស B គេសរសេរដោយ: $A=B$ ។

2.2 វិធីបូក និង វិធីដកនៃម៉ាទ្រីស

និយមន័យ បើ A និង B ជាម៉ាទ្រីសពីរដែលមានលំដាប់ដូចគ្នា នោះផលបូក $A+B$ ជាម៉ាទ្រីសដែលបានមកដោយការបូកនូវធាតុដែលត្រូវគ្នាក្នុងម៉ាទ្រីសទាំងពីរ ។ ម៉ាទ្រីសដែលមានលំដាប់ខុសគ្នាមិនអាចធ្វើប្រមាណវិធីបូកបានទេ ។

និយមន័យ បើ A និង B ជាម៉ាទ្រីសពីរដែលមានលំដាប់ដូចគ្នា នោះផលដក $A-B$ ជាម៉ាទ្រីសដែលបានមកដោយការដកនូវធាតុដែលត្រូវគ្នាក្នុងម៉ាទ្រីសទាំងពីរ ។ ម៉ាទ្រីសដែលមានលំដាប់ខុសគ្នាមិនអាចធ្វើប្រមាណវិធីដកបានទេ។

2.3 ផលគុណរវាងចំនួនពិតនឹងម៉ាទ្រីស

ជាទូទៅ បើគេមានចំនួនពិត k និងម៉ាទ្រីស A នោះម៉ាទ្រីស $A\cdot k$ បានដោយគុណធាតុនីមួយៗនៃម៉ាទ្រីស A នឹងចំនួនពិត k ។

បើ $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ នោះ $k\cdot A=k\cdot A=k\cdot\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot k=\begin{bmatrix}ka&kb\\kc&kd\end{bmatrix}$ ។

- លក្ខណ:ផលបូក ផលដក និងផលគុណស្កាលែ

បើ A, B និង C ជាម៉ាទ្រីសមានលំដាប់ $m\times n$ និង c , d ស្កាលែគេបាន:

១) $A+B=B+A$ លក្ខណ:ត្រលប់នៃផលបូកម៉ាទ្រីស

២) $A+(B+C)=(A+B)+C$ លក្ខណ:ផ្តុំនៃផលបូកម៉ាទ្រីស

៣) $(cd)A=c(dA)$ លក្ខណៈផ្តុំនៃផលគុណស្កាលែ

៤) $1\cdot A=A\cdot 1=A$ លក្ខណៈស្កាលែណឺត

៥) $c(A\pm B)=cA\pm cB$ លក្ខណៈបំបែកនៃផលគុណស្កាលែចំពោះវិធីបូកឬវិធីដកម៉ាទ្រីស

៦) $(c\pm d)A=cA\pm dA$ លក្ខណៈបំបែកនៃផលគុណម៉ាទ្រីសចំពោះវិធីបូកឬវិធីដកស្កាលែ

2.4. វិធីគុណនៃពីរម៉ាទ្រីស

និយមន័យ ម៉ាទ្រីសពីរគុណគ្នាបានលុះត្រាតែ ចំនួននៃជួរឈរម៉ាទ្រីសទីមួយស្មើនឹងចំនួនធាតុនៃជួរដេកម៉ាទ្រីសទីពីរ ។

ជាទូទៅ បើ $A=\left[a_{ij}\right]$ ជាម៉ាទ្រីសមានលំដាប់ $m\times n$ និង $B=\left[b_{ij}\right]$ ជាម៉ាទ្រីសមានលំដាប់ $n\times p$ នោះផលគុណម៉ាទ្រីស A និង B កំណត់ដោយ $A\cdot B$ មានលំដាប់ $m\times p$

$$A\cdot B=\left[a_{ij}\right]\times\left[b_{ij}\right]\times\left[c_{ij}\right]$$

លំដាប់ $m\times n$ $\quad n\times p \;=\; m\times p$

ដែល $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}\,a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$ ។

ជាទូទៅ បើ A ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m\times n$ និង B ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n\times p$ នោះផលគុណ AB ជាម៉ាទ្រីស $m\times p$ ដែលធាតុរបស់វាកំណត់ដោយ:

- ដើម្បីរកធាតុនៅក្នុងជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j នៃ AB យើងយកជួរដេកទី i តែមួយគត់ចេញពីម៉ាទីស A និងជួរទី j តែមួយគត់ចេញពីម៉ាទ្រីស B ។
- គុណធាតុដែលត្រូវគ្នាពីជួរដេក និងជួរឈរនេះហើយបូកលទ្ធផលដែលទទួលបាននោះគេសរសេរកំណត់ដោយ

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

- **លក្ខណៈផលគុណម៉ាទ្រីស**

តាង A, B និង C ជាម៉ាទ្រីស និងតាង c ជាស្កាលែ

$i)$ $A(BC)=(AB)C$ លក្ខណៈផ្តុំនៃផលគុណ

$ii)$ $AB\neq BA$ ជាផលគុណគ្មានលក្ខណៈត្រលប់

$iii)$ $A(B+C)=AB+AC$ លក្ខណៈបំបែកខាងឆ្វេងនៃវិធីគុណចំពោះវិធីបូកម៉ាទ្រីស

$iv)$ $(A+B)C=AC+BC$ លក្ខណៈបំបែកខាងស្តាំនៃវិធីគុណចំពោះវិធីបូកម៉ាទ្រីស

$v)\quad c(AB)=(cA)B=A(cB)$

$vi)\quad I_nA=AI_n=A$

$vii)\quad A(B-C)=AB-AC$ លក្ខណៈបំបែកខាងឆ្វេងនៃវិធីគុណចំពោះវិធីដកម៉ាទ្រីស

$viii)\quad (A-B)C=AC-BC$ លក្ខណៈបំបែកខាងស្តាំនៃវិធីគុណចំពោះវិធីបូកម៉ាទ្រីស

$ix)\quad (a+b)C=aC+bC$

$x)\quad (a-b)C=aC-bC$

$xi)\quad a(bC)=(ab)C$

3. ទម្រង់ម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ (*Matrix Form of a Linear System*)

ប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីស គឺជាអនុវត្តមួយដ៏សំខាន់ចំពោះប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ ។ ពិនិត្យប្រព័ន្ធសមីការមួយដែលមាន m សមីការលីនេអ៊ែរ និងមាន n អញ្ញាតខាងក្រោម:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

ដោយម៉ាទ្រីសពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែធាតុដែលត្រូវគ្នាទាំងអស់របស់វាស្មើគ្នា នោះយើងអាចជំនួស m សមីការទៅក្នុងប្រព័ន្ធសមីការនេះដោយសមីការម៉ាទ្រីសមួយ

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ម៉ាទ្រីស $m\times 1$ នៅខាងឆ្វេងនៃសមីការម៉ាទ្រីសនេះអាចសរសេរជាផលគុណម៉ាទ្រីសកំណត់ដោយ:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

តាងម៉ាទ្រីសទាំងបីនេះដោយអក្សរ A, X និង B រៀងគ្នានោះប្រព័ន្ធសមីការដើមដែលមាន m សមីការលីនេអ៊ែរ និងមាន n អញ្ញាតត្រូវជំនួសដោយសមីការម៉ាទ្រីសមួយគឺ $AX=B$ (1)
ម៉ាទ្រីស A ក្នុងសមីការ m ហៅថា **ម៉ាទ្រីសមេគុណ** (*Coeffficient Matrix*) *ចំពោះប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរខាងលើ ។*

ឧទាហរណ៍ គេមានប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម ៖ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=3 \\ 2x_1+3x_2+3x_3+x_4-x_5=0 \\ -x_1+2x_2-5x_3+2x_4-x_5=1 \\ 3x_1-x_2+2x_3-3x_4-2x_5=-1 \end{cases}$

គេបាន $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

គេអាចសរសេរជា $AX=B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

4. ម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូ (*Transpose of a Matrix*)

និយមន័យ ម៉ាទ្រីស $A=\left[a_{ij}\right]$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m\times n$ នោះត្រង់ស្ប៉ូនៃ A កំណត់ដោយ A^T ដែល $A^T=\left[a_{ji}\right]$ ។

ឧទាហរណ៍ ម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$ ម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូនៃ A គឺ $A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$

- *លក្ខណៈម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូ*

  $i)$ $(A^T)^T=A$

  $ii)$ $(A+B)^T=A^T+B^T$

  $iii)$ $(A-B)^T=A^T-B^T$

  $iv)$ $(AB)^T=A^TB^T$

  $v)$ $(\lambda A)^T=\lambda A^T$ ដែល λ ជាស្កាលែ

5. ចំរាស់នៃម៉ាទ្រីសការេ (*Inverse of Square Matrix*)

និយមន័យ បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេមួយហើយបើមានម៉ាទ្រីស A^{-1} ដែល $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ នោះគេបានម៉ាទ្រីស A^{-1} ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A ។

ជាទូទៅ ➢ បើម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ នោះគេបាន **ចំរាស**នៃម៉ាទ្រីស A កំណត់ដោយ A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$ បើ $ad-bc\neq 0$ ។

➢ ករណីបើ $ad-bc=0$ ឬមានន័យថា ដេទែមីណង់នៃ A ស្មើសូន្យ នោះម៉ាទ្រីស A គ្មានចំរាសទេ ។

➢ បើ A^{-1} ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីស A នោះគេបាន $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

ចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់បីឡើងទៅគឺ $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A)$, $adj=adjoint$

និយមន័យ បើ A ជាម៉ាទ្រីស $n\times n$ និង $c_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ ជា Cofactor នៃ a_{ij} នោះ

ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\cdots c_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ c_{n1} & c_{n2}\cdots c_{nn} \end{bmatrix}$ ហៅថាម៉ាទ្រីសនៃ Cofactor នៃ A ។ ម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូ

នៃម៉ាទ្រីសនេះ ហៅថា adjoint នៃ A ដែលគេតាងដោយ $adj(A)$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ នោះម៉ាទ្រីស Cofactor នៃ A កំណត់ដោយ

$$c_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \Rightarrow c_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}=12 \quad , c_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=6$$

$$c_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-16 \ , c_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}=-4$$

$$c_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2 \quad , c_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=16$$

$$c_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}=12 \quad ,c_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-10$$

$$c_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=16$$

គេបានម៉ាទ្រីស Cofactor នៃ A គឺ $\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ -4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$ ។

ហើយ $adj(A)=\begin{bmatrix}12 & 6 & -16\\ -4 & 2 & 16\\ 12 & -10 & 16\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}12 & -4 & 12\\ 6 & 2 & -10\\ -16 & 16 & 16\end{bmatrix}$ ។

- ដើម្បីរកម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីសមានចំរាស់ A យើងត្រូវសម្រួល A ទៅជាម៉ាទ្រីសឯកតាតាមប្រមាណវិធីជួរដេក ហើយអនុវត្តន៍ប្រមាណវិធីនេះលើ I ដើម្បីបាន A^{-1} ។ ដើម្បីបំពេញលក្ខណៈនេះ យើងនឹងភ្ជាប់ម៉ាទ្រីសឯកតាទៅផ្នែកខាងស្តាំនៃ A រួចបង្កើតម៉ាទ្រីសរាង: $[A|I]$ បន្ទាប់មកយើងនឹងអនុវត្តប្រមាណវិធីជួរដេកចំពោះម៉ាទ្រីសនេះរហូតដល់អង្គខាងឆ្វេងត្រូវសម្រួលទៅជា I ។ ប្រមាណវិធីនេះនឹងធ្វើឲ្យអង្គខាងស្តាំផ្លាស់ជា A^{-1} ។

ដូច្នេះ ម៉ាទ្រីសចុងក្រោយនឹងមានទម្រង់: $\left[I\middle|A^{-1}\right]$ មានន័យថា $\left[A\middle|I\right]\rightarrow\left[I\middle|A^{-1}\right]$ ។

ឧទាហរណ៍ $\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9\\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1\end{array}\right]$

ដូច្នេះ $A^{-1}=\begin{bmatrix}-40 & 16 & 9\\ 13 & -5 & -3\\ 5 & -2 & -1\end{bmatrix}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ បើ B និង C ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីស A នោះ $B=C$ ។

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ដោយ B ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A នោះ $BA=I$

គេបាន $(BA)C=IC=C$

$(BA)C=B(AC)=BI=B$ (C ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A)

ដូច្នេះ $B=C$ ។

ទ្រឹស្តីបទ បើ B និង C ជាម៉ាទ្រីសមានចំរាសដែលមានលំដាប់ដូចគ្នា នោះគេបាន ៖

$a)$ ម៉ាទ្រីស AB មានចំរាស

$b)$ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា: $(AB)(B^{-1}A^{-1})=(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$ ។ តាមលក្ខណៈប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីស គេបាន: $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$

ហើយ $(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I$

ដូច្នេះ $(AB)(B^{-1}A^{-1})=(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$ ។

- យើងអាចទាញបញ្ជាក់នូវរូបមន្តដូចខាងក្រោម
  ផលគុណនៃម៉ាទ្រីសច្រាស ជាម៉ាទ្រីសមានចម្រាសជានិច្ច ហើយម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីសផលគុណជាផលគុណនៃម៉ាទ្រីសច្រាសតាមលំដាប់ច្រាស ។
- លក្ខណៈនៃម៉ាទ្រីសច្រាស
  1) $AB = BA = I_n$
  2) $AA^{-1}=I_n$, $A^{-1}A=I_n$
  3) $(A^{-1})^{-1} = A$
  4) $AB=I_n$ នោះ $B=A^{-1}$
  5) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
  6) $A^{-1}(AB) = B$
  7) បើ B និង C ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A នោះ $B=C$

6. ម៉ាទ្រីសស្វ័យគុណ (*Power of a Matrix*)

និយមន័យ

- បើ A ជាម៉ាទ្រីសមានការេ នោះគេកំណត់ស្វ័យគុណចំនួនគត់វិជ្ជមាននៃ A ដោយ $A^0=1$ និង $A^n=\underbrace{AA........A}_{n\ time}$, $(n>0)$ ។
- បើ A មានចម្រាសកំណត់ស្វ័យគុណចំនួនគត់អវិជ្ជមាននៃ A ដោយ $A^{-n}=(A^{-1})^n=\underbrace{A^{-1}A^{-1}...A^{-1}A^{-1}}_{n\ time}$ ។

លក្ខណៈ: បើម៉ាទ្រីស A មានចម្រាស នោះគេបាន

$a)$ A^{-1} មានចម្រាស ហើយ $(A^{-1})^{-1}=A$

$b)$ A^n មានចម្រាស ហើយ $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$, $n=0,1,2,...$

$c)$ ចំពោះស្កាលែ $k=0$, kA មានចម្រាស ហើយ $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

7. លក្ខណៈនៃម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូ (*Property of Transpose's Matrix*)

ទ្រឹស្តីបទ បើលំដាប់នៃម៉ាទ្រីសជាលំដាប់ដែលអាចធ្វើប្រមាណវិធីបាន នោះលក្ខណៈខាងក្រោមនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$a)\quad (A^T)^T = A$

$b)\quad (A+B)^T = A^T + B^T$

$c)\quad (kA)^T = kA^T$ ដែល k ជាស្កាលែ

$d)\quad (AB)^T = B^T A^T$

8. ម៉ាទ្រីសស៊ីមេទ្រី (*Symmetric Matrix*)

- **ម៉ាទ្រីសស៊ីមេទ្រី** *ម៉ាទ្រីសស៊ីមេទ្រីគឺជាម៉ាទ្រីសការេដែលមានធាតុស៊ីមេទ្រីធៀបនឹងអង្កត់ទ្រូងមេស្មើគ្នា ។ យើងប្តូរពីជួរដេកទៅជាជួរឈរនៃម៉ាទ្រីស* A *នោះគេបាន:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ចំពោះម៉ាទ្រីសស៊ីមេទ្រីគេបាន $A = A^T$ ។

- **ម៉ាទ្រីសប្រាសស៊ីមេទ្រី** *ម៉ាទ្រីស* A *ជាម៉ាទ្រីសប្រាសស៊ីមេទ្រីកាលណា* $A^T = -A$

ដេទែមីណង់ (Determinant)

1. អនុគមន៍ដេទែមីណង់

យើងនឹងសិក្សានូវអនុគមន៍ទាំងឡាយណាដែលមានទម្រង់ដូចគ្នានឹងអនុគមន៍ $f(x)=x^2$ និង $f(x)=\sin x$ ដែលកំណត់បាននូវចំនួនពិត $f(x)$ មួយចំពោះតម្លៃនៃអថេរពិត x ។ ដោយហេតុថា x និង $f(x)$ មានតម្លៃជាចំនួនពិត ដូច្នេះ អនុគមន៍បែបនេះគេហៅថា ***អនុគមន៍យក តម្លៃពិតនៃអថេរពិតមួយ*** ។ ***អនុគមន៍ដេទែមីណង់*** ដែលជា***អនុគមន៍យកតម្លៃពិតនៃអថេរមានរាងជាម៉ាទ្រីសមួយ*** មានន័យថា វានឹងកំណត់បាននូវតម្លៃពិតនៃ $f(x)$ តាមតម្លៃនៃម៉ាទ្រីស X ។ ការសិក្សាអនុគមន៍ដេទែមីណង់នេះ និងផ្តល់សារៈសំខាន់សម្រាប់អនុវត្តចំពោះទ្រឹស្តីបទនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេ-អ៊ែរ ហើយនឹងនាំឲ្យយើងអាចទាញបាននូវរូបមន្តចម្រាសនៃម៉ាទ្រីសដែលអាចធ្វើចម្រាសបាន ។

និយមន័យ A ជាម៉ាទ្រីសការេមួយ ។ អនុគមន៍ដេទែមីណង់តាងដោយ det ហើយយើងអាចតាង $\det(A)$ គឺជាផលបូកនៃគ្រប់ផលគុណដំបូងដែលមានសញ្ញាទាំងអស់នៃម៉ាទ្រីស A ។ លទ្ធផលនៃ $\det(A)$ នេះហៅថា **ដេទែមីណង់នៃ** A ។

2. ដេទែមីណង់លំដាប់ 2

បើគេមានម៉ាទ្រីសលំដាប់ 2 ដែល $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ។ កន្សោម $ad-cb$ ហៅថា***ដេទែមីណង់លំដាប់ 2*** នៃម៉ាទ្រីស A ។ គេកំណត់សរសេរដោយ: $\det(A)$ ឬ $|A|$ ឬ $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ ។

ដូច្នេះ $$\det A=|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

3. ដេទែមីណង់លំដាប់3

3.1 គណនាដេទែមីណង់លំដាប់ 3 តាមក្បួនរបស់សារុស

គេមានម៉ាទ្រីស A លំដាប់3 ដែល $A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$ ។ ដេទែមីណង់នៃ A កំណត់ដោយ

$$\det(A)=\begin{array}{|ccc|cc} & & + & + & + \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ & & - & - & - \end{array}=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1$$ ។

3.2 គណនាដេទែមីណង់លំដាប់ 3 តាមមីន័រ

គេមាន $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$

គេអាចសរសេរ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3) - (b_1a_2c_3 - b_1c_2a_3) + (c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3)$

$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$

ដូច្នេះ $\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$ ។

គេហៅថាពន្លាតមីន័រតាមជួរដេកទី 1 ព្រោះ a_1 , b_1 , c_1 ជាធាតុស្ថិតនៅជួរដេកទី 1 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ មីន័រនៃធាតុ a_1 , $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ មីន័រនៃធាតុ b_1 , $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ មីន័រនៃធាតុ c_1 ។

- ➢ មីន័រនៃធាតុ a_1 បានពីការលុបជួរឈរ និងជួរដេកដែលមានធាតុ a_1 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
- ➢ មីន័រនៃធាតុ b_1 បានពីការលុបជួរឈរ និងជួរដេកដែលមានធាតុ b_1 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
- ➢ មីន័រនៃធាតុ c_1 បានពីការលុបជួរឈរ និងជួរដេកដែលមានធាតុ c_1 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

ចំណាំ ក្នុងការគណនាដេទែមីណង់លំដាប់តាមមីន័រ គេអាចពន្លាតតាមជួរណាមួយក៏បានប៉ុន្តែ សញ្ញានៃតម្លៃនីមួយៗអាស្រ័យនឹងលំដាប់ទីដែលធាតុស្ថិតនៅដូចជា ៖ $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$
c_1 មានសញ្ញា $+$ ព្រោះ a_1 ជាធាតុនៅជួរដេកទី 1 និងជួរឈរទី $1 , 1+1=2$ គូ , b_1 មានសញ្ញា $-$ ព្រោះ b_1 ជាធាតុនៅជួរដេកទី 1 និងជួរឈរទី $2 , 1+2=3$ សេស ។

4. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

4.1 ទម្រង់ម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

ប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីស គឺជាអនុវត្តមួយដ៏សំខាន់ចំពោះប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ ។ ពិនិត្យប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរដែលមាន m សមីការលីនេអ៊ែរនិងមាន n

អញ្ញាតខាងដែលមានរាង $\begin{cases} a_{11}x_1 & a_{12}x_2\dots & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2\dots & a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2\dots & a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

ដោយម៉ាទ្រីសពីរស្មើគ្នាលុះត្រាតែ ធាតុដែលត្រូវគ្នាទាំងអស់របស់វាស្មើគ្នា នោះយើងអាចជំនួស m សមីការទៅក្នុងប្រព័ន្ធសមីការនេះដោយសមីការម៉ាទ្រីសមួយ:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2\dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2\dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2\dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ម៉ាទ្រីស $m\times 1$ នៅអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការម៉ាទ្រីសនេះអាចសរសេរជាផលគុណម៉ាទ្រីសកំណត់ដោយ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

បើយើងតាងម៉ាទ្រីសទាំងបីនេះដោយអក្សរ A, X និង B រៀងគ្នានោះប្រព័ន្ធសមីការដើមដែលមាន m សមីការលីនេអ៊ែរនិងមាន n អញ្ញាតត្រូវជំនួសដោយសមីការមួយគឺ: $AX = B$ ។

4.2 ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការតាមក្រាម័រ $(Cramer\ \text{Rule})$

បើ $AX = B$ ជាប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរដែលមាន n អញ្ញាតិ ដែល $\det(A) = 0$ នោះប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយតែមួយគត់គឺ៖

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}\ ,\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}\ , \dots\dots, x_2 = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

ដែល A_j ជាម៉ាទ្រីសដែលបានមកពីការជំនួសធាតុទៅក្នុងជួរទី j នៃម៉ាទ្រីស A ដោយម៉ាទ្រីស B ។

ដែលម៉ាទ្រីស B កំណត់ដោយ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការតាមវិធីក្រាម័រ $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 2 \\ 2x - 3y - z = -2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

គេបាន $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$, $D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & 2 & -2\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=4 \quad , \quad D_z=\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & -3 & -2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=12$$

គេបាន $x=\dfrac{D_x}{D}=2$, $y=\dfrac{D_y}{D}=1$, $z=\dfrac{D_z}{D}=3$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ } x=2\ ,\ y=1\ ,\ z=3 \text{ ។}}$

4.3 **ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការតាម** $(Guass-Jordan)$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមតាមវិធី $(Guass-Jordan)$

$$\begin{cases}3x+2y-2z=2\\ 2x-3y-z=-2\\ x+y-z=0\end{cases}$$

គេបាន
$$\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & -2 & 2\\ 2 & -3 & -1 & -2\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right] \quad R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & -3 & -1 & -2\\ 3 & 2 & -2 & 2\end{array}\right] \quad \begin{array}{l}R_1 \to R_2-2R_1\\ R_3 \to R_3-3R_1\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -5 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{array}\right] \quad R_2 \to -\frac{1}{5}R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{array}\right] \quad \begin{array}{l}R_1 \to R_1-R_2\\ \\ R_3 \to R_3+R_2\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -4/5 & -2/5\\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5\\ 0 & 0 & 4/5 & 12/5\end{array}\right] \quad R_3 \to \frac{5}{4}R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -4/5 & -2/5\\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right] \quad \begin{array}{l}R_1 \to R_1+\frac{4}{5}R_3\\ R_2 \to R_2+\frac{1}{5}R_3\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{array}\right]$$

ដូច្នេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ: } x=2,\ y=1, z=3 \quad ។}$

4.4 ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការតាមចម្រាសនៃម៉ាទ្រីស

បើ A ជាម៉ាទ្រីសដែលមានចម្រាស នោះម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A តាងដោយ A^{-1} កំណត់ដោយ

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A) \quad ។$$

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការតាមវិធីម៉ាទ្រីសច្រាស (Inverse Matrix)

$$\begin{cases}3x+2y-2z=2\\2x-3y-z=-2\\x+y-z=0\end{cases}$$

តាង $A=\begin{bmatrix}3&2&-2\\2&-3&-1\\1&1&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

ប្រព័ន្ធសមីការអាចសរសេរបានជារាង $AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$

តាមរូបមន្ត $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}adj(A)$ ដោយ $\det(A)=4$

- តាម *cofactor*

$$c_{11}=\begin{vmatrix}-3&-1\\1&-1\end{vmatrix}=4,\quad c_{12}=-\begin{vmatrix}2&-1\\1&-1\end{vmatrix}=1\ ,\ c_{13}=\begin{vmatrix}2&-3\\1&1\end{vmatrix}=5$$

$$c_{21}=-\begin{vmatrix}2&-2\\1&-1\end{vmatrix}=0\ ,\ c_{22}=\begin{vmatrix}3&-2\\1&-1\end{vmatrix}=-1\ ,c_{23}=-\begin{vmatrix}3&-2\\1&-1\end{vmatrix}=-1$$

$$c_{31}=\begin{vmatrix}2&-2\\-3&-1\end{vmatrix}=-8\ ,c_{32}=-\begin{vmatrix}3&-2\\2&-1\end{vmatrix}=-1\ ,c_{33}=\begin{vmatrix}3&2\\2&-3\end{vmatrix}=-13$$

$$\Rightarrow cof(A)=\begin{bmatrix}4&1&5\\0&-1&-1\\-8&-1&-13\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow adj(A)=\left[(cof)\right]^T=\begin{bmatrix}4&1&5\\0&-1&-1\\-8&-1&-13\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4&0&-8\\1&-1&-1\\5&-1&0\end{bmatrix}$$

គេបាន $X = A^{-1}B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

ដូច្នេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការមានគូរចម្លើយមានចំលើយ } x=2\,,\, y=1, z=3 \text{ ។}}$

ផ្នែកលំហាត់

១. គេឲ្យម៉ាទ្រីស

$$A=\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}4&-1\\0&2\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1&4&2\\3&1&5\end{bmatrix};\ D=\begin{bmatrix}1&5&2\\-1&0&1\\3&2&4\end{bmatrix};\ E=\begin{bmatrix}6&1&3\\-1&1&2\\4&1&3\end{bmatrix}$$

គណនាកន្សោមខាងក្រោមបើអាចធ្វើបាន:

ក. $D+E$ ខ. $D-E$ គ. $5A$ ឃ. $-7C$ ង. $3B-C$

ច. $4E-2D$ ឆ. $-3(D+2E)$ ជ. $A-A$។

២. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរខាងក្រោមតាមរូបមន្តក្រាម៉ែរ ($Gramer's\ Rule$)

ក. $\begin{cases}3x-y=1\\x+2y=0\end{cases}$ ខ. $\begin{cases}4x-3y=2\\3x+4y=5\end{cases}$

គ. $\begin{cases}x-17y+18z=2\\19x-18y-z=0\\x+3y-2z=2\end{cases}$ ឃ. $\begin{cases}x+y+z=4\\x+2y+z=5\\x-y=-1\end{cases}$

ង. $\begin{cases}x+3y+2z=2\\x+4y+3z=3\\2x+7y+6z=8\end{cases}$ ច. $\begin{cases}2x+6y-4z=1\\x+3y-2z=4\\2x+y-3z=-7\end{cases}$

៣. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមតាមរូបមន្ត $Guass-Jordan$

ក. $\begin{cases}2x-3y=-5\\3x+2y=12\end{cases}$ ខ. $\begin{cases}x-2y-3z=-1\\2x+y+z=6\\x+3y-2z=13\end{cases}$

គ. $\begin{cases}x-2y+3z=1\\x-y-7z=-4\\2x+4y+9z=-9\end{cases}$ ឃ. $\begin{cases}x+y+z=1\\x+2y-2z=0\\2x+3y-z=5\end{cases}$

ង. $\begin{cases}2x+y+z=0\\x-2y-2z=0\\x+y+z=0\end{cases}$ ច. $\begin{cases}a+2b-c-3d=2\\3a+b-2c-d=6\\a+b+3c-2d=-3\\-2a-2b+3c+d=-9\end{cases}$

ឆ. $\begin{cases}2\sin\alpha-\cos\beta+3\tan\gamma=3\\4\sin\alpha+2\cos\beta-2\tan\gamma=2\\6\sin\alpha-3\cos\beta+\tan\gamma=9\end{cases}$ ដែល $\begin{cases}0\le\alpha\le2\pi\\0\le\beta\le2\pi\\0\le\gamma\le2\pi\end{cases}$

ជ. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x^2-y^2+2z^2=2\\2x^2+y^2-z^2=3\end{cases}$

៤. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ, មានចម្លើយតែមួយគត់ និងមានចម្លើយរាប់មិនអស់

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 3x-y+5z=2 \\ 4x+y+(a^2-14)z=a+2 \end{cases}$$

៥. រកម៉ាទ្រីស A , X និង B ដែលសរសេរប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរខាងក្រោមជាសមីការម៉ាទ្រីស $AX=B$

ក. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3=7 \\ 9x_1-x_2+x_3=-1 \\ x_1+5x_2+4x_3=0 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} 4x_1 \qquad -3x_3+x_4=1 \\ 5x_1+x_2 \qquad -8x_4=3 \\ 2x_1-5x_2+9x_3-x_4=0 \\ \qquad 3x_2-x_3+7x_4=2 \end{cases}$

៦ សរសេរសមីការម៉ាទ្រីស ជាប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

៧. គេឲ្យម៉ាទ្រីស

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \; ; \; D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix} \; ; \; E=\begin{bmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

ក. គណនា DA និង AE

ខ. កំណត់ជួរដេកនៃ DA និងជួរឈរនៃ AE រួចទាញរកវិធានពីរយ៉ាងសម្រាប់ធ្វើប្រមាណវិធីគុណលើម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងមួយ ។

គ. គណនា AB និង BA ដោយប្រើវិធានដែលបាននៅក្នុងសំណួរ ខ ដែល

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ និង } B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

៨. ដោះស្រាយសមីការម៉ាទ្រីសរក a,b,c និង d បើ $\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ ។

៩. គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

ក. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ គ. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

ឃ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ ង. $\begin{bmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ ច. $\begin{bmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{bmatrix}$

១០. គេមានម៉ាទ្រីសពីរគឺ $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ចូរគណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសទាំងពីរតាម *Cofactor* ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក. ជួរដេកទី១ ខ. ជួរឈរទី១

១១. គេមានម៉ាទ្រីសបីដូចខាងក្រោម ៖

$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

ក. ចូរត្រង់ស្ប៉ូនៃម៉ាទ្រីសទាំងបីនេះ ។

ខ. បង្ហាញថា $det(B) = det(B^T)$ និង $det(C) = det(C^T)$

១២. គេឲ្យម៉ាទ្រីស A មានលំដាប់ 3×3 ដែល $\det(A) = -7$, ដែលម៉ាទ្រីស A កំណត់ដូចខាងក្រោម $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ។

ចូរគណនា

ក. $a)\ det(3A)$, $b)\ 3det(A)$, $c)\ det(2A^{-1})$, $d)\ det((2A)^{-1})$

ខ. ធ្វើការសន្និដ្ឋានចំពោះ $a)$ និង $b)$ រួចចំពោះ $c)$ និង $d)$

១៣. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ។

ក. គណនា *Minors* ទាំងអស់នៃ A

ខ. គណនា *Cofactors* ទាំងអស់នៃ A

១៤. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $E=\begin{bmatrix}1&3&1&1\\2&5&2&2\\1&3&8&9\\1&3&2&2\end{bmatrix}$ ។ ចូរគណនា $adj(E)$ និង E^{-1} ។

១៥. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $F=\begin{bmatrix}2&-1&1\\4&1&-3\\2&-1&3\end{bmatrix}$ ។ គណនា $\det(F)$ និង $\det(F^{-1})$ ។

១៦. ចូររក $adj(A)$ ដោយដឹងថា $A=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}$, $\lambda\neq 0$, $i=1,2,...,n$

១៧. រកតម្លៃ λ ដើម្បីឲ្យ $det(A)=0$

ក. $A=\begin{bmatrix}\lambda-2&1\\-5&\lambda+4\end{bmatrix}$ ខ. $A=\begin{bmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&2\\0&3&\lambda-1\end{bmatrix}$

១៨. គេមានម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}3&1&2\\0&1&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$ ចូរបង្ហាញថា $adj(A).A=(det(A)).I$ ។

១៩. បង្ហាញថាម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ មានចម្រាសចំពោះគ្រប់តម្លៃ θ ។

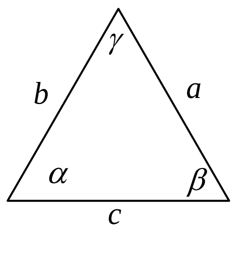
រួចគណនា A^{-1} ដោយប្រើរូបមន្ត $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}adj(A)$ ។

២០. ដោយប្រើវិធានក្រាម័រ ចូររកមុំ θ,β,γ ដែល $0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\beta\leq 2\pi, 0\leq\gamma\leq 2\pi$ នៃប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases}2\sin\theta-\cos\beta+3\tan\gamma=3\\4\sin\theta+2\cos\beta-2\tan\gamma=2\\6\sin\theta-3\cos\beta+\tan\gamma=9\end{cases}$$

២១. ចំពោះត្រីកោណក្នុងរូបដោយប្រើត្រីកោណមាត្រចូរបង្ហាញថា៖

$a)$ $\begin{cases}b\cos\gamma+c\cos\beta=a\\c\cos\alpha+a\cos\gamma=b\\a\cos\beta+b\cos\alpha=c\end{cases}$



$b)$ ដោយប្រើវិធានក្រាម័រ បង្ហាញថា $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

រួចទាញរករូបមន្តចំពោះ $\cos\beta$ និង $\cos\gamma$ ដោយប្រើវិធានក្រាម៉េរ ។

២២. ចូរកំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមមាន ចម្លើយតែមួយគត់ , គ្មានចម្លើយ និង ចម្លើយរាប់មិនអស់

ក. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+kz=3 \\ x+ky+3z=2 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} x \quad\quad -3z=-3 \\ 2x+ky-z=-2 \\ x+2y+kz=1 \end{cases}$

២៣. $a)$ បង្ហាញថា ចំពោះម៉ាទ្រីសការេ A និង B គេបានសមភាព

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ លុះត្រាតែ $AB=BA$ ។

$b)$ បង្ហាញថា $A^2=4A-I$ ហើយទាញរក $A^4=56A-15I$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការចុងក្រោយនេះទៅនឹងការគណនាដោយផ្ទាល់នៃ A^4 ។

២៤. ចូរពិនិត្យមើលម៉ាទ្រីសខាងក្រោម:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} , \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} , \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ ។}$$

ចូររកម៉ាទ្រីសងាយៗ E_1, E_2, E_3 និង E_4 ដែល $E_1A=B$, $E_2B=A$, $E_3A=C$, $E_4C=A$

រកម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ E_1, E_2, E_3 និង E_4 ។

២៥. គេមានម៉ាទ្រីស A លំដាប់ 3×3 ដែល $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ។ គណនា A^2 ហើយនឹង A^3

រួចបង្ហាញថា $A^3=2A$ ។ ទាញចេញពីសមីការនេះ ថា A គ្មានច្រាស ។

២៦. រកម៉ាទ្រីសដែលមានលំដាប់ 2×2 , A មួយដែល $A^2=O_{2\times 2}$ ប៉ុន្តែ $A\neq 0_{2\times 2}$ ទេ ។

២៧. គេមានស្វ៊ីត *Fibonacci* កំណត់ដោយទំនាក់ $f_0=1, f_1=1, f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ ដែល $n\geq 1$ ។

$a)$ ចូររកតម្លៃ $f_2, f_3, ..., f_{10}$ ។

$b)$ តាង $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ហើយ $X_n=\begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$ ចំពោះ $n\geq 1$ ។ បង្ហាញថា $AX_n=X_{n+1}$

ចំពោះ $n\geq 1$ និង បង្ហាញថា $A^nX_1=X_{n+1}$ ។

$c)$ គណនា A^2, A^3, A^5 ហើយ $A^5X_1=X_6$ ដើម្បីរក f_6 ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយរបស់អ្នក ទៅនឹងលទ្ធផលរបស់អ្នកនៅក្នុងលំហាត់ $a)$ ។

២៨. គេអោយ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 3×2 ដែលកំណត់ដោយ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ។

ចូររកគ្រប់ម៉ាទ្រីស B ដែល $BA=I$, I ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 2 ។

២៩. គេអោយ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 2×2 ដែល $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ ហើយ $a,b\in\mathbb{R}$ ។

យើងហៅថា I និង J ជាម៉ាទ្រីសដែល $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ និង $J=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ។

$a)$ គណនា A^2 ។

$b)$ គណនា $A^2-2aA+a^2$ ។

$c)$ ចូរសរសេរ A ជាអនុគមន៍នៃ a,I និង b ។ គណនា A^n ជាអនុគមន៍នៃ n (n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ) ។

៣០. គេមានម៉ាទ្រីស A មានទម្រង់ (m,n) មានមេគុណជាចំនួនពិត ។ យើងហៅសញ្ញាសម្គាល់ A^T ជាម៉ាទ្រីសត្រង់ស្បូនៃ A ។ ឧបមាម៉ាទ្រីស X មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} AXA=A & (1) \\ (XA)^T=XA & (2) \end{cases}$$

$a)$ រកវិមាត្ររបស់ម៉ាទ្រីស X ។

$b)$ បង្ហាញថាសំណុំលក្ខណៈ (1) និង (2) សមមូលនឹងលក្ខណៈ $(3): X^TAX=A^T$ ។

៣១. រកគ្រប់ម៉ាទ្រីស A ដែលជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 2×2 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $A^2=A$ ។

៣២. ពិនិត្យម៉ាទ្រីស $M=\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$ ដែល $a,b,c\in\mathbb{R}$ ។

$a)$ រកទំនាក់ទំនងរវាង M^3 និង M ។

$b)$ តាង δ ជាចំនួនពិតមិនសូន្យ ។ បង្ហាញថាម៉ាទ្រីស $(\delta I+M)$ និង $(\delta I-M)$ មានម៉ាទ្រីសច្រាស ។

$c)$ ឧបមាថា $N=(\delta I+M)^{-1}(\delta I-M)$ ។ បង្ហាញថា N មានចម្រាសហើយចម្រាសនោះគឺ $N^{-1}=N^T$ ។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

១. គណនាកន្សោមខាងក្រោមបើអាចធ្វើបាន:

យើងមាន

$$A=\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}4&-1\\0&2\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1&4&2\\3&1&5\end{bmatrix};\ D=\begin{bmatrix}1&5&2\\-1&0&1\\3&2&4\end{bmatrix};\ E=\begin{bmatrix}6&1&3\\-1&1&2\\4&1&3\end{bmatrix}$$

ក. $A+D=\begin{bmatrix}1&5&2\\-1&0&1\\3&2&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&1&3\\-1&1&2\\4&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6&5+1&2+3\\-1-1&0+1&1+2\\3+4&2+1&4+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&6&5\\-2&1&3\\7&3&7\end{bmatrix}$

ខ. $D-E=\begin{bmatrix}1&5&2\\-1&0&1\\3&2&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&1&3\\-1&1&2\\4&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-6&5-1&2-3\\-1-(-1)&0-1&1-2\\3-4&2-1&4-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&4&-1\\0&-1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

គ. $5A=5\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\times3&5\times0\\5\times(-1)&5\times2\\5\times1&5\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&0\\-5&10\\5&5\end{bmatrix}$

ឃ. $-7C=-7\begin{bmatrix}1&4&2\\3&1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\times1&-7\times4&-7\times2\\-7\times3&-7\times1&-7\times5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&-28&-14\\-21&-7&-35\end{bmatrix}$

ង. $2B-C$ មិនអាចកំណត់បាន

ច. $4E-2D=4\begin{bmatrix}6&1&3\\-1&1&2\\4&1&3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&5&2\\-1&0&1\\3&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24&4&12\\-4&4&8\\16&4&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&10&4\\-2&0&2\\6&4&8\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}22&-6&8\\-2&4&6\\10&0&4\end{bmatrix}$

ឆ. $-3(D+2E)=-3D-6E=-3\begin{bmatrix}1&5&2\\-1&0&1\\3&2&4\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}6&1&3\\-1&1&2\\4&1&3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-3&-15&-6\\3&0&-3\\-9&-6&-12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-36&-6&-18\\6&-6&-12\\-24&-6&-18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-39&-21&-24\\9&-6&-15\\-33&-12&-30\end{bmatrix}$

ជ. $A-A=\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$

២. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរខាងក្រោមតាមរូបមន្តក្រាមម័រ (*Gramer's Rule*)

ក. $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ គេបាន $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1) = 7$, $D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$

$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$ នាំឲ្យ $x = \frac{D_x}{D} = \frac{2}{7}$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{7}$

ដូចនេះ $\boxed{x = \frac{2}{7}, y = \frac{-1}{7} \text{ ជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ។}}$

ខ. $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$ គេបាន $D = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - (-9) = 25$

$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-15) = 23$, $D_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14$

នាំឲ្យ $x = \frac{D_x}{D} = \frac{23}{25}$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{14}{25}$

ដូចនេះ $\boxed{x = \frac{23}{25}, y = \frac{14}{25} \text{ ជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ។}}$

គ. $\begin{cases} x - 17y + 18z = 2 \\ 19x - 18y - z = 0 \\ x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$ \

គេបាន $D = \begin{vmatrix} 1 & -17 & 18 \\ 19 & -18 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 36 + 17 + 1026 - (-324) - 646 - (-3) = 760$

$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -17 & 18 \\ 0 & -18 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 72 + 34 + 0 - (-648) - 0 - (-6) = 760$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 18 \\ 19 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 + (-2) + 684 - 0 - (-76) - (-2) = 760$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -17 & 2 \\ 19 & -18 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -36 + 0 + 114 - (-36) - (-646) - 0 = 760$

នាំឲ្យ $x = \frac{D_x}{D} = \frac{760}{760} = 1, y = \frac{D_y}{D} = \frac{760}{760} = 1, z = \frac{D_z}{D} = \frac{760}{760} = 1$

ដូចនេះ $\boxed{x = 1, y = 1, z = 1 \text{ ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ ។}}$

ឃ. $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+2y+z=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ គេបាន $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0+1+(-1)-2-0-(-1)=-1$

$$D_x=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0+(-1)+(-5)-(-2)-0-(-4)=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0+4+(-1)-5-0-(-1)=-1$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-2+5+(-4)-8-(-1)-(-5)=-3$$

នាំឲ្យ $x=\frac{D_x}{D}=\frac{0}{-1}=0, y=\frac{D_y}{D}=\frac{-1}{-1}=1, z=\frac{D_z}{D}=\frac{-3}{-1}=3$

ដូចនេះ: $x=0, y=1, z=3$ ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ ។

ង. $\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ x+4y+3z=3 \\ 2x+7y+6z=8 \end{cases}$ គេបាន $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}=24+18+14-16-18-21=1$

$$D_x=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{vmatrix}=48+72+42-64-54-42=2$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix}=18+12+16-12-12-24=-2$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}=32+18+14-16-24-21=3$$

នាំឲ្យ $x=\frac{D_x}{D}=\frac{2}{1}=2, y=\frac{D_y}{D}=\frac{-2}{1}=-2, z=\frac{D_z}{D}=\frac{3}{1}=3$

ដូចនេះ: $x=2, y=-2, z=3$ ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ ។

ច. $\begin{cases} 2x+6y-4z=1 \\ x+3y-2z=4 \\ 2x+y-3z=-7 \end{cases}$

គេបាន $$D=\begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-18-24-4+24+18+4=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \\ -7 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-9+84-16-84+72+2=49$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & -3 \end{vmatrix}=-24-4+28+32+3-28=7$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \end{vmatrix}=-42+48+1-6+42-8=35$$

ដោយ $D=0, D_x\neq 0, D_y\neq 0, D_z\neq 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ ។}}$

៣. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមតាមរូបមន្ត *Guass Jordan*

ក. $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 3x+2y=12 \end{cases} c$

គេបាន $$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -5 \\ 3 & 2 & 12 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & -5/2 \\ 3 & 2 & 12 \end{array}\right] \quad L_1 \to 1/2\,L_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & -5/2 \\ 0 & 13/2 & 39/2 \end{array}\right] \quad L_2 \to -3L_1+L_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad L_2 \to 2/13\,L_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad L_1 \to L_1+3/2\,L_2$$

ដូចនេះ $\boxed{x=2, y=3 \text{ ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ ។}}$

ខ. $\begin{cases} x-2y-3z=-1 \\ 2x+y+z=6 \\ x+3y-2z=13 \end{cases}$

គេបាន $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 13 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 1 & -6 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right]$ $L_3 \to L_2 - L_3$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ $L_3 \to 1/6\,L_3$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_1 \to L_1 + 3L_3 \\ L_2 \to L_2 - 7L_3 \end{array}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ $L_2 \to 1/5\,L_2$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ $L_1 \to L_1 + 2L_2$

ដូចនេះ $\boxed{x=2, y=3, z=-1 \text{ ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ ។}}$

គ. $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ x-y-7z=-4 \\ 2x+4y+9z=-9 \end{cases}$

គេបាន $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 7 & -4 \\ 2 & 4 & 9 & -9 \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&1\\0&-1&-4&5\\0&8&3&-11\end{array}\right]\begin{array}{l}\\L_2\to L_1-L_2\\L_3\to L_3-2L_1\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&1\\0&-1&-4&5\\0&0&-29&29\end{array}\right]\begin{array}{l}\\\\L_3\to L_3+8L_1\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&1\\0&-1&-4&5\\0&0&-1&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\\\L_3\to 1/29\,L_3\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&4\\0&-1&0&1\\0&0&1&-1\end{array}\right]\begin{array}{l}L_1\to L_1-3L_3\\L_2\to L_2+4L_3\\\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&4\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\L_2\to -L_2\\\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&4\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{array}\right]\begin{array}{l}L_1\to L_1+2L_2\\\\\end{array}$$

ដូចនេះ $\boxed{x=2, y=-1, z=-1 \text{ ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ ។}}$

ឃ. $\begin{cases}x+y+z=1\\x+2y-2z=0\\2x+3y-z=5\end{cases}$ គេបាន $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&-2&0\\2&3&-1&5\end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&3&1\\0&1&-3&3\end{array}\right]\begin{array}{l}\\L_2\to L_2-L_1\\L_3\to L_3-2L_1\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&3&1\\0&0&0&4\end{array}\right]\begin{array}{l}\\\\L_3\to L_3+L_2\end{array}$$

ដោយ $0x+0y+0z=4$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x, y, z

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ ។}}$

ង. $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-2y-2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

គេបាន $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_1 - 2L_2 \\ L_3 \to L_3 - L_2 \end{array}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to 1/5\,L_2 \\ L_3 \to 1/3\,L_3 \end{array}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - L_2$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] L_1 \to L_1 - L_2$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] L_1 \to 1/2\,L_1$

ដោយ $0x+0y+0z=0$ សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x,y,z

គេបាន ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយរាប់មិនអស់

ដោយ $\begin{cases} x \qquad\quad =0 \\ \quad y+z \ =0 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$ តាង $z=t\ ,t\in IR$

គេបាន $y+z=0 \Rightarrow y=-z=-t$

ដូចនេះ គេបាន $x=0, y=-t, z=t\ ,t\in IR$ ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ។

ច. $\begin{cases} a+2b-c-3d=2 \\ 3a+b-2c-d=6 \\ a+b+3c-2d=-3 \\ -2a-2b+3c+d=-9 \end{cases}$

គេបាន $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & 1 & -9 \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 + 2L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & -15 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \to L_4 - 2L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \to L_2 + 5L_3 \\ L_4 \to 1/3\, L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -20 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \to 19L_4 + 3L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \to -1/10\, L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -19 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + 3L_4 \\ L_2 \to L_2 - 8L_4 \\ L_3 \to L_3 - 3L_4 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \to -1/19\, L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + L_3 \\ L_2 \to L_3 - L_2 \\ L_3 \to -1/19\, L_3 \\ \; \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] L_2 \to 1/5\, L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] L_1 \to L_1 - 2L_2$$

ដូចនេះ $\boxed{a=1, b=3, c=-1, d=2 \text{ ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ ។}}$

ឆ. $\begin{cases} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma = 3 \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma = 2 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma = 9 \end{cases}$ ដែល $\begin{cases} 0 \le \alpha \le 2\pi \\ 0 \le \beta \le 2\pi \\ 0 \le \gamma \le 2\pi \end{cases}$ តាង $\begin{cases} X = \sin\alpha \\ Y = \cos\beta \\ Z = \tan\gamma \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} 2X - Y + 3Z = 3 \\ 4X + 2Y - 2Z = 2 \\ 6X - 3Y + Z = 9 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \; \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \; \\ L_2 \to 1/4\, L_2 \\ L_3 \to -1/8\, L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \to L_3 - 3L_3 \\ L_2 \to L_2 + 2L_3 \\ \; \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad L_1 \to L_1 + L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad L_1 \to 1/2\, L_1$$

នាំឲ្យ $X = 1, Y = -1, Z = 0$ គេបាន $\begin{cases} \sin\alpha = 1 \\ \cos\beta = -1 \\ \tan\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pi/2 \ , \ 0 \le \alpha \le 2\pi \\ \beta = \pi \ , \ 0 \le \beta \le 2\pi \\ \gamma = 0 \ , \ 0 \le \gamma \le 2\pi \end{cases}$

ដូចនេះ: $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \pi, \gamma = 0 \text{ ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ។}}$

ជ. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 = 2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 = 3 \end{cases}$ តាង $X = x^2, Y = y^2, Z = z^2$ ដែល $X, Y, Z \ge 0$

គេបាន $\begin{cases} X + Y + Z = 6 \\ X - Y + 2Z = 2 \\ 2X + Y - Z = 3 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_1 - L_2 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right] \quad L_3 \to L_2 + 2L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad L_3 \to -1/7\, L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - L_3 \\ L_2 \to L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad L_2 \to 1/2\,L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad L_1 \to L_1 - L_2$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} X = 1 \\ Y = 3 \\ Z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 3 \\ z^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm\sqrt{3} \\ z = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

ដូចនេះ $x = \pm 1, y = \pm\sqrt{3}, z = \pm\sqrt{2}$ ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ។

៤. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ, មានចម្លើយតែមួយគត់ និងមានចម្លើយរាប់មិនអស់

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$$

គេបាន $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2 - 2 & a - 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & -7 & a^2 - 2 & a - 6 \end{array}\right] \quad L_2 \to -1/7\,L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & a^2 - 16 & a + 4 \end{array}\right] \quad L_3 \to L_3 + 7L_2$$

- ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយកាលណា $\begin{cases} a^2 - 16 = 0 \\ a + 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 4 \\ a \neq -4 \end{cases} \Rightarrow a = 4$
- ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយតែមួយគត់កាលណា $a^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow a \neq \pm 4$
- ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយរាប់មិនអស់កាលណា $\begin{cases} a^2 - 16 = 0 \\ a + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 4 \\ a = -4 \end{cases} \Rightarrow a = -4$ ។

៥. រកម៉ាទ្រីស A, X និង B ដែលសរសេរប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរខាងក្រោមជាសមីការម៉ាទ្រីស $AX = B$

ក. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ អាចសរសេរ $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 9 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ដូច្នេះ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 9 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ។

ខ. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - 8x_4 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$ អាចសរសេរ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -8 \\ 2 & -5 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

ដូច្នេះ $\boxed{A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -8 \\ 2 & -5 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ និង } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ។}}$

៦. សរសេរសមីការម៉ាទ្រីសជាប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ គេបាន $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

ខ. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ គេបាន $\begin{cases} 3w - 2x + z = 0 \\ 5w + 2y - 2z = 0 \\ 3w + x + 4y + 7z = 0 \\ -2w + 5x + y + 6z = 0 \end{cases}$

៧. ក. គណនា DA និង AE

យើងមានម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix}$

$$\text{និង}\quad E=\begin{bmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_n \end{bmatrix}\ \text{គេបាន}$$

$$DA=\begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & \cdots & d_1a_{1n} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \cdots & d_2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_ma_{m1} & d_ma_{m2} & \cdots & d_ma_{mn} \end{bmatrix}$$

$$AE=\begin{bmatrix} a_{11}e_1 & a_{12}e_2 & \cdots & a_{1n}e_n \\ a_{21}e_2 & a_{22}e_2 & \cdots & a_{2n}e_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}e_1 & a_{m2}e_2 & \cdots & a_{mn}e_n \end{bmatrix}$$

ខ. + ជួរដេកនៃម៉ាទ្រីស DA គឺមាន m ជួរដេក និងជួរឈរនៃម៉ាទ្រីស AE មាន n ជួរឈរ ។

+ ដើម្បីគុណម៉ាទ្រីស A ខាងឆ្វេងដោយម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង D គុណគ្រប់ធាតុនៃជួរដេកទី i របស់ម៉ាទ្រីស A ដោយធាតុអង្កត់ទ្រូងទី i នៃ D ដើម្បីបានជួរដេកទី i នៃផលគុណ

+ ដើម្បីគុណម៉ាទ្រីស A ខាងស្តាំដោយម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង E គុណគ្រប់ធាតុនៃជួរឈរទី j របស់ ម៉ាទ្រីស A ដោយធាតុអង្កត់ទ្រូង j នៃ D ដើម្បីបានជួរឈរទី j នៃផលគុណ ។

គ. គណនា AB និង BA ដោយប្រើវិធានដែលបាននៅក្នុងសំណួរ ខ ដែល

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 5 \end{bmatrix}\ \text{និង}\ B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{គេបាន}\ AB=\begin{bmatrix} -8 & 1 & -15 \\ 12 & 0 & -6 \\ -28 & 1 & -15 \end{bmatrix}\ \text{និង}\ BA=\begin{bmatrix} -8 & 4 & 20 \\ 3 & 0 & 2 \\ 21 & -3 & -15 \end{bmatrix}\ ។$$

៨. ដោះស្រាយសមីការរក a,b,c និង d

$$\text{យើងមាន}\ \begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{គេបាន}\ \begin{cases} a-b=8 & (1) \\ 3d+c=7 & (2) \\ b+c=1 & (3) \\ 2a-4d=6 & (4) \end{cases}$$

យក $(1)+(3)$ និងយក $4\times(2)+3\times(4)$

គេបាន $\begin{cases} a+c=9 & (5) \\ 6a+4c=46 & (6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=9 & (5) \\ 3a+2c=23 & (6) \end{cases}$

យក $3\times(5)+6$ គេបាន $c=4$

យក $c=4$ ជំនួសក្នុង (2) និង (3) គេបាន $d=1$ និង $b=-3$

យក $b=-3$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $a=5$

ដូច្នេះ $\boxed{a=5; b=-3; c=4 \text{ និង } d=1}$

៩. គណនាដេទែមីណង់ខាងក្រោម៖

ក. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (3)(4) — 2(5) = 22$

ខ. $\begin{vmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (3)(5)(-2) = -30$

គ. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 1\cdot 4\cdot 2 + (-3)\cdot 1\cdot 5 + 0\cdot(-1)(-2) \\ = -5\cdot 4\cdot 0 - (-2)(-1)\cdot 0 - (-3)\cdot 1\cdot 5 = -7 \end{matrix}$

ឃ. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 1\cdot 7(-5)\cdot 3 + 0 + 0 + 3\cdot 1\cdot 6\cdot 2 - 0 - 0 - 0 - 1\cdot 3\cdot 3\cdot 6 \\ = -546 \end{matrix}$

ង. $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} = (-2)\cdot 1\cdot 4 + 7(-2)\cdot 3 + 8\cdot 5\cdot 6 - 3\cdot 1\cdot 6 - 5\cdot 7\cdot 4 \\ -8(-2)(-2) = 0 \end{matrix}$

ច. $\begin{vmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{vmatrix} = (a-3)(a-2) - (-3)(5) = a^2 - 5a + 6 + 15 = a^2 - 5a + 21$

១០. គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសទាំងពីរតាម *Cofactor* ក្នុងករណី

ក. ជួរដេកទី១

$$A = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-5)(-5) + 0 + (2)(16) = 57$$

$$B = \begin{vmatrix} -5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-5)(-5) - 6(6) + (2)(-2) = 57$$

ដូចនេះ $\boxed{\det(A) = \det(B) = 57 \text{ ។}}$

ខ. ជួរឈរទី១

$$A=\begin{vmatrix}-5 & 0 & 2\\ 6 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=(-5)(-5)-(6)(-6)+2(-2)=57$$

$$B=\begin{vmatrix}-5 & 6 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}6 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}6 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-5(-5)-0+2\cdot 16=57$$

ដូចនេះ $\boxed{\det(A)=\det(B)=57}$ ។

១១. គេមាន $A=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 3\\ 6 & -3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 6 & 5\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 5 & -3 & 6\end{bmatrix}$

ក. ចូរត្រង់ស្ប៉ូនៃម៉ាទ្រីសទាំងបី

$$A^T=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 3\\ 6 & -3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 6\\ -4 & 3 & -3\end{bmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 6\\ -4 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

$$B^T=\begin{bmatrix}7 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 6 & 5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}7 & 1 & -1\\ -3 & -2 & 6\\ 2 & 3 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{bmatrix}7 & 1 & -1\\ -3 & -2 & 6\\ 2 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

$$C^T=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 5 & -3 & 6\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -1 & 2 & -3\\ 3 & 4 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow C^T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -1 & 2 & -3\\ 3 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

ខ. + បង្ហាញថា $\det(B)=\det(B^T)$

ដោយ $\det(B)=7(-2)\cdot 5+(-3)\cdot 3\cdot(-1)+2\cdot 1\cdot 6-(-1)(-2)\cdot 2$

$-1(-3)\cdot 5-7\cdot 3\cdot 6=-164$

ហើយ $\det(B^T)=(7)(-2)(5)+(1)(6)(2)+(-1)(3)(-3)-(2)(-2)(-1)$

$-(-3)(1)(5)-(7)(3)(6)=-164$

ដូច្នេះ $\boxed{\det(B)=\det(B^T)}$ ។

+ បង្ហាញថា $\det(C)=\det(C^T)$

ដោយ $\det(C)=(2)(2)(6)+(-1)(4)(5)+(1)(-3)(3)-(5)(2)(3)$

$-(1)(-1)(6)-(2)(-3)(4)=-5$

ហើយ $\det(C^T)=(2)(2)(6)+(1)(-3)(3)+(5)(4)(-1)-(3)(2)(5)$

$-(-1)(1)(6)-(2)(-3)(4)=-5$

ដូច្នេះ $\boxed{\det(C)=\det(C^T)}$ ។

១២. ដោយ A ជាម៉ាទ្រីស 3×3 ហើយ $\det(A) = -7$

ក. គណនាដេទែមីណង់

$a)$ គណនា $det(3A)$

យើងបាន $\det(3A) = 3^3\det(A) = 3^3(-7) = -189$

$b)$ គណនា $3\det(A)$

យើងបាន $3\det(A) = 3\times(-7) = -21$

$c)$ គណនា $\det(2A^{-1})$

យើងបាន $\det(2A^{-1}) = \dfrac{2^3}{\det(A)} = \dfrac{8}{-7} = -\dfrac{8}{7}$

$d)$ គណនា $\det((2A)^{-1})$

យើងបាន $\det(2A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(2A)} = \dfrac{1}{2^3\det(A)} = \dfrac{1}{8(-7)} = -\dfrac{1}{56}$

ខ. ធ្វើការសន្និដ្ឋានចំពោះ $a)$ និង $b)$ រួចចំពោះ $c)$ និង $d)$

តាមសម្រាយខាងលើយើងឃើញថា

$$\boxed{\det(3A) \neq 3det(A) \quad ; \quad \det(2A^{-1}) \neq \det(2A)^{-1}}$$

១៣. គណនា *Minors* និង *Cofactors* ទាំងអស់នៃ A

ដោយ $C_{i,j} = (-1)^{i+j}M_{i,j}$; $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$M_{1,1} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7\cdot 4 - 1\cdot(-1) = 29$ យើងបាន $C_{1,1} = 29$

$M_{1,2} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 3 = 21$ យើងបាន $C_{1,2} = -21$

$M_{1,3} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 21 = 27$ យើងបាន $C_{1,3} = 27$

$M_{2,1} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11$ យើងបាន $C_{2,1} = 11$

$M_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 9 = 13$ យើងបាន $C_{2,2} = 13$

$M_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$ យើងបាន $C_{2,2} = 5$

$$M_{3,1}=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 7 & -1\end{vmatrix}=2-21=-19$$ យើងបាន $C_{3,1}=-19$

$$M_{3,2}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 6 & -1\end{vmatrix}=-1-18=-19$$ យើងបាន $C_{3,2}=19$

$$M_{3,3}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 6 & 7\end{vmatrix}=7+\ 12\ =19$$ យើងបាន $C_{3,3}=19$

១៤. គណនា $adj(E)$ និង E^{-1}

$adj(E)$ គឺជាម៉ាទ្រីសដែលកើតឡើង ដោយម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូនៃម៉ាទ្រីស $Cofactor(E)$ ដែល

$$E=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 8 & 9\\ 1 & 3 & 2 & 2\end{bmatrix}$$ យើងបាន $$adj(E)=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34}\\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44}\end{bmatrix}^T$$ ដែល

$$C_{11}=\begin{vmatrix}5 & 2 & 2\\ 3 & 8 & 9\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=80+54+12-48-12-90=-4$$

$$C_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 8 & 9\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=-(32+18+4\ -\ 16\ -\ 4-\ 36)=2$$

$$C_{13}=\begin{vmatrix}2 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=12+45+6-6-10-54=-7$$

$$C_{14}=-\begin{vmatrix}2 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 8\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=-(12+40+6-\ 6\ -10\ -\ 48)=6$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 3 & 8 & 9\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=-(48+27+6-24-6-54)=3$$

$$C_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 8 & 9\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=16+9+2-\ 8\ -\ 2-\ 18=\ -\ 1$$

$$C_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=-(6+27+3-3-6-27)=0$$

$$C_{24}=\begin{vmatrix}1&3&1\\1&3&8\\1&3&2\end{vmatrix}=6+24+3-3-6-24=0$$

$$C_{31}=\begin{vmatrix}3&1&1\\5&2&2\\3&2&2\end{vmatrix}=12+6+10-6-10-12=0$$

$$C_{32}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&2&2\end{vmatrix}=-\left(4+2+4-2-4-4\right)=0$$

$$C_{33}=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&5&2\\1&3&2\end{vmatrix}=10+6+6-5-12-6=-1$$

$$C_{34}=-\begin{vmatrix}1&3&1\\2&5&2\\1&3&2\end{vmatrix}=-\left(10+6+6-5-12-6\right)=1$$

$$C_{41}=-\begin{vmatrix}3&1&1\\5&2&2\\3&8&9\end{vmatrix}=-\left(54+6+40-6-45-48\right)=-1$$

$$C_{43}=-\begin{vmatrix}1&3&1\\2&5&2\\1&3&9\end{vmatrix}=-\left(45+6+6-5-54-6\right)=8$$

$$C_{44}=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&5&2\\1&3&8\end{vmatrix}=40+6+6-5-48-6=-7$$

យើងបាន ៖

$$adj(E)=\begin{bmatrix}-4&2&-7&6\\3&-1&0&0\\0&0&-1&1\\-1&0&8&-7\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-4&3&0&-1\\2&-1&0&0\\-7&0&-1&8\\6&0&1&-7\end{bmatrix}$$

$$E^{-1}=\frac{1}{\det(E)}\cdot adj(E)=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}-4&3&0&-1\\2&-1&0&0\\-7&0&-1&8\\6&0&1&-7\end{bmatrix}$$ ។

១៥. គណនា $\det(F)$ និង $\det(F^{-1})$

ដោយ $F=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & 1 & -3\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ យើងបាន

$$\det(F)=(2)(1)(3)+(-1)(-3)(2)+(1)(-1)(4)-(2)(1)(1)-(4)(-1)(3)$$
$$-(2)(-3)(-1)=12$$

ដូច្នេះ $\boxed{\det(F)\ =\ 12\ \text{ គេបាន } \det(F^{-1})=\dfrac{1}{12}\ \text{ ។}}$

១៦. ចូររក $adj(A)$ ដោយដឹងថា

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}\ ,\ \lambda\neq 0\ ,\ i=1,2,\ldots,n$$

ដោយម៉ាទ្រីស A ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងយើងទាញបាន

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1/\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_n\end{bmatrix}$$

ដោយ $\det(A)=\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3\ldots\lambda_n\ =\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

ហើយ $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot adj(A)$

យើងបាន $\text{adj(A)}=A^{-1}.\det(A)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\begin{bmatrix}1/\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_n\end{bmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{adj(A)}=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\begin{bmatrix}1/\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_n\end{bmatrix}\ \text{ ។}}$

១៧. រកតម្លៃ λ ដើម្បីឲ្យ $\det(A)=0$

ក. $A=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 1\\ -5 & \lambda+4\end{bmatrix}$

ដោយ $\det(A)=(-2)(+4)-(-5)(1)=\lambda^2+2\lambda-3$

យើងបាន $\lambda^2+2\lambda-3=0$ នោះ $\lambda=1\ ;\ -3$ ។

ខ. $A=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 2\\ 0 & 3 & \lambda-1\end{bmatrix}$

ដោយ $\det(A)=(\lambda-2)(\lambda)(\lambda-1)-(\lambda-2)(2)(3)=\ (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+2)$

យើងបាន $(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+2)$

ដូចនេះ $\boxed{\lambda=2\ ;\ 3\ ;-2\ \text{។}}$

១៨. បង្ហាញថា $adj(A).A=(det(A)).I$

យើងមានម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

គេបាន $\det(A)=3\cdot1\cdot1+1\cdot(-1)\cdot1+2\cdot1\cdot0-(-1)\cdot1\cdot2-0\cdot1\cdot0-3\cdot1\cdot1=-2$

ហើយ $adj(A)=[Cofactor(A)]^T=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{21} & C_{31}\\ C_{12} & C_{22} & C_{32}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33}\end{bmatrix}$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-1=-1$$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-(0-(-1))=-1$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0-(-1)=1$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-(0-2)=2$$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0-(-2)=2$$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-(3-(-1)=-4$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-2=-1$$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-(3-0)=-3$$

$$C_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3-0=3$$

យើងបាន $adj(A)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix}$

គេបាន $adj(A)\cdot A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

ហើយ $\det(A)\cdot I=(-2)\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

ដូច្នេះ $\boxed{adj(A).A=det(A).I}$ ។

១៨. បង្ហាញថាម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}cos\theta & sin\theta & 0\\ -sin\theta & cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ មានចម្រាសចំពោះគ្រប់តម្លៃ θ

ម៉ាទ្រីស A មានចម្រាសលុះត្រាតែ $\det(A)\neq 0$

ដែល $\det(A)=1\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\cos^2\theta+\sin^2\theta\neq 0$

ដូច្នេះ ម៉ាទ្រីស A មានចម្រាសចំពោះគ្រប់តម្លៃ θ ។

គណនា A^{-1} ដោយប្រើរូបមន្ត $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}adj(A)$

ដោយ $adj(A)=\left[Cofactor(A)\right]^T=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{21} & C_{31}\\ C_{12} & C_{22} & C_{32}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33}\end{bmatrix}$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\cos\theta-0=\cos\theta$$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-\sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-(-\sin\theta-0)=\sin\theta$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0-0=0$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}\sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-(\sin\theta-0)=-\sin\theta$$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\cos\theta-0=\cos\theta$$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ 0 & 0\end{vmatrix}=-(0-0)=0$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}\sin\theta & 0\\ \cos\theta & 0\end{vmatrix}=0-0=0$$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}\cos\theta & 0\\ -\sin\theta & 0\end{vmatrix}=-(0-0)=0$$

$$C_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

គេបាន $adj(A)=\begin{bmatrix}cos\theta & -sin\theta & 0\\ sin\theta & cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

យើងបាន $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix}cos\theta & -sin\theta & 0\\ sin\theta & cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\theta & -sin\theta & 0\\ sin\theta & cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\ ។}$

២០. ដោយប្រើវិធានក្រាម័រ រកមុំ θ , β , γ ដែល $0\le\theta\le 2\pi, 0\le\beta\le 2\pi, 0\le\gamma\le 2\pi$ នៃប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

$$\begin{cases}2sin\theta-cos\beta+3tan\gamma=3\\ 4sin\theta+2cos\beta-2tan\gamma=2\\ 6sin\theta-3cos\beta+tan\gamma=9\end{cases}\quad \text{តាង}\quad \begin{cases}\sin\theta=X\\ \cos\beta=Y\\ \tan\gamma=Z\end{cases}$$

គេបាន $\begin{cases}2X-Y+3Z=3\\ 4X+2Y-2Z=2\\ 6X-3Y+Z=9\end{cases}$ យើងអាចសរសេរ៖ $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & -2\\ 6 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 9\end{bmatrix}$

គេបាន $D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & -2\\ 6 & -3 & 1\end{vmatrix}=-64$, $D_X=\begin{vmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & 2 & -2\\ 9 & -3 & 1\end{vmatrix}=-64$

$$D_Y=\begin{vmatrix}2&3&3\\4&2&-2\\6&9&1\end{vmatrix}=64\quad,\quad D_Z=\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&2&2\\6&-3&9\end{vmatrix}=0$$

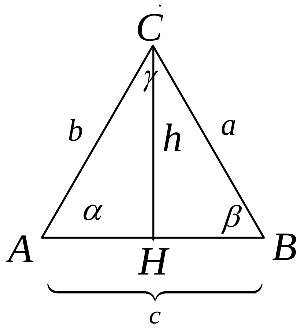
គេបាន $X=\dfrac{D_X}{D}=\dfrac{-64}{-64}=1$, $Y=\dfrac{D_Y}{D}=\dfrac{64}{-64}=-1$, $Z=\dfrac{D_Z}{D}=\dfrac{0}{-64}=0$

យើងបាន $\begin{cases}\sin\theta=1\\ \cos\beta=-1\\ \tan\gamma=0\end{cases}$ គេបាន $\begin{cases}\theta=\pi/2\\ \beta=\pi\\ \lambda=0\end{cases}$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ } \theta=\pi/2\ ,\ \beta=\pi\ ,\ \lambda=0\text{ ។}}$

២១. $a)$ ចំពោះត្រីកោណក្នុងរូប ដោយប្រើត្រីកោណមាត្រ បង្ហាញថា ៖

$$\begin{cases}b\cos\gamma+c\cos\beta=a\\ c\cos\alpha+a\cos\gamma=b\\ a\cos\beta+b\cos\alpha=c\end{cases}$$



ដោយគូសកំពស់ CH មកលើបាត AB យើងបាន ៖

$AH\ +\ HB\ =\ c$ តែ $AH=b\cos\alpha$, $HB=a\cos\beta$

គេបាន $b\cos\alpha+a\cos\beta=c$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរយើងបាន $b\cos\gamma+c\cos\beta=a$, $c\cos\alpha+a\cos\gamma=b$

ដូច្នេះ: $\boxed{\text{គេបាន }\begin{cases}b\cos\gamma+c\cos\beta=a\\ c\cos\alpha+a\cos\gamma=b\\ a\cos\beta+b\cos\alpha=c\end{cases}\text{ ។}}$

$b)$ ដោយប្រើវិធានក្រាម័រ បង្ហាញថា $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

ប្រព័ន្ធសមីការខាងលើអាចសរសេរជា ៖ $\begin{bmatrix}0&c&b\\c&0&a\\b&a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

គេបាន

$$D=\begin{vmatrix}0&c&b\\c&0&a\\b&a&0\end{vmatrix}=0+abc+abc-0-0=2abc$$

$$D_{\cos\alpha}=\begin{vmatrix}a&c&b\\b&0&a\\c&a&0\end{vmatrix}=0+ac^2+ab^2-a^3-0-0=ac^2+ab^2-a^3$$

$$D_{\cos\beta}=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ c & b & a\\ b & c & 0\end{vmatrix}=0+a^2b+bc^2-b^3-0-0=a^2b+bc^2-b^3$$

$$D_{\cos\gamma}=\begin{vmatrix}0 & c & a\\ c & 0 & b\\ b & a & c\end{vmatrix}=0+b^2c+a^2c-0-c^3-0=b^2c+a^2c-c^3$$

គេបាន $\cos\alpha=\dfrac{D_{\cos\alpha}}{D}=\dfrac{ac^2+ab^2-a^3}{2abc}=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$

$$\cos\beta=\frac{D_{\cos\beta}}{D}=\frac{a^2b+bc^2-b^3}{2abc}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma=\frac{D_{\cos\gamma}}{D}=\frac{b^2c+a^2c-c^3}{2abc}=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\alpha=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}\ ,\ \cos\beta=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\ ,\ \cos\gamma=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab}\ \text{។}}$

២២. ចូរកំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមមាន ចម្លើយតែមួយគត់ , គ្មានចម្លើយ និង ចម្លើយរាប់មិនអស់

ក. $\begin{cases}x+y-z=1\\ 2x+3y+kz=3\\ x+ky+3z=2\end{cases}$

គេបាន $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & k & 3\\ 1 & k & 3 & 2\end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & k+2 & 1\\ 0 & k-1 & 4 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ L_2\to L_2-2L_1\\ L_3\to L_3-L_1\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & k+2 & 1\\ 0 & 0 & -k^2-k+6 & -k+2\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ L_3\to L_3-(k-1)L_1\end{array}$$

- ដើម្បីឲ្យប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយតែមួយគត់លុះត្រាតែ

$$-k^2-k+6\neq 0$$

$$\Leftrightarrow -k^2+2k-3k+6\neq 0$$

$$\Rightarrow -k(k-2)-3(k-2)\neq 0$$

$$\Rightarrow \quad (k-2)(-k-3)\neq 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} k-2\neq 0 \\ -k-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\neq 2 \\ k\neq -3 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយតែមួយគត់ លុះត្រាតែ } k\neq 2\ ;\ -3 \text{ ។}}$

- ដើម្បីឲ្យប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយលុះត្រាតែ

$$\begin{cases} -k^2-k+6=0 \\ -k+2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k-2)(-k-3)=0 \\ k\neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2\ ;-3 \\ k\neq 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយតែមួយគត់លុះត្រាតែ } k=-3 \text{ ។}}$

- ដើម្បីឲ្យប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយរាប់មិនអស់លុះត្រាតែ

$$\begin{cases} -k^2-k+6=0 \\ -k+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k-2)(-k-3)=0 \\ k=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2\ ;-3 \\ k=2 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយរាប់មិនអស់លុះត្រាតែ } k=2 \text{ ។}}$

ខ. $\begin{cases} x \qquad -3z=-3 \\ 2x+ky-z=-2 \\ x+2y+kz=1 \end{cases}$

គេបាន $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 5 & 4 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2\to L_2-2L_1 \\ L_3\to L_3-L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 5 & 4 \\ 0 & 0 & k^2+3k-10 & 4k-8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3\to kL_3-2L_1 \end{array}$$

- ដើម្បីឲ្យប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយតែមួយគត់លុះត្រា

$$k^2+3k-10\neq 0 \quad \Rightarrow \quad k^2-2k+5k-10\neq 0$$
$$\Rightarrow \quad k(k-2)+5(k-2)\neq 0$$
$$\Rightarrow \quad (k-2)(k+5)\neq 0$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{គេបាន } k\neq 2 \text{ ឬ } k\neq -5 \text{ ប្រព័ន្ធមានចម្លើយតែមួយគត់ ។}}$

- ដើម្បីឲ្យប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយលុះត្រាតែ

$$\begin{cases} k^2+3k-10=0 \\ 4k-8\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k-2)(k+5)=0 \\ 4k-8\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2\,;-5 \\ k\neq 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{គេបាន } k=-5 \text{ ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ ។}}$

- ដើម្បីឲ្យប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយរាប់មិនអស់លុះត្រាតែ

$$\begin{cases} k^2+3k-10=0 \\ 4k-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k-2)(k+5)=0 \\ 4k-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2\,;-5 \\ k=2 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{គេបាន } k=2 \text{ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយរាប់មិនអស់ ។}}$

២៣. $a)$ បង្ហាញថាបើ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ នោះ $AB=BA$

គេបាន $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+2AB+B^2$

$\Rightarrow$ បើ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ នោះគេបាន

$A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2 \Rightarrow AB=BA$ ពិត

$\Leftarrow$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $AB=BA$ នោះ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

ដោយ $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+2AB+B^2$

បើ $AB=BA$ នោះ

$$A^2+AB+BA+B^2=A^2+AB+AB+B^2=A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$$

ដូចនេះ $\boxed{(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \Leftrightarrow AB=BA \text{ ។}}$

$b)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ នោះ $A^2=4A-I$

គេបាន

- $A\times A=A^2=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\times2+3\times1 & 2\times3+3\times2 \\ 1\times2+2\times1 & 1\times3+2\times2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}(1)$
- $4A=4\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ ហើយ $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow 4A-I=\begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8-1 & 12-0 \\ 4-0 & 8-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}\ (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន $A^2=4A-I$

ទាញបញ្ជាក់ថា $A^4=56A-15I$

គេមាន $A^2=4A-I$ និង $AI=IA=A\ ;I^2=I$

គេបាន $\left(A^2\right)^2=(4A-I)^2=16A^2-8AI+I^2=16A^2-8A+I$

តែ $A^2=4A-I \Rightarrow A^4=16(4A-I)-8A+I=64A-16I-8A+I=56A-15I$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{A^4=56A-15I}$

- គណនា A^4 ដោយផ្ទាល់

ដោយ $A^2=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}$ នោះគេបាន

$$A^4=A^2\times A^2=\begin{pmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\times7+12\times4 & 7\times12+12\times7\\ 4\times7+7\times4 & 4\times12+7\times7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}97 & 168\\ 56 & 97\end{pmatrix} \quad (i)$$

$$56A-15I=56\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}-15\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}112 & 168\\ 56 & 112\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15 & 0\\ 0 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}97 & 168\\ 56 & 97\end{pmatrix} \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $\boxed{A^4=56A-15I \text{ ។}}$

២៤. រកម៉ាទ្រីស E_1 , E_2 , E_3 ,E_4

គេមាន $E_1A=B \Rightarrow E_1=BA^{-1}$

តែ $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}cof\,(A^T)$

គេបាន $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -5 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=5+1=6$$

$$cof\left(A^T\right)=\begin{bmatrix}-11 & 1 & 7\\ 5 & -1 & -1\\ 7 & 1 & -5\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-11 & 1 & 7\\ 5 & -1 & -1\\ 7 & 1 & -5\end{bmatrix}$$ គេបាន

$$E_1=BA^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-11 & 1 & 7\\ 5 & -1 & -1\\ 7 & 1 & -5\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-22+15+7 & 2-3+1 & 14-3-5\\ -33+5+28 & 3-1+4 & 21-1-20\\ -11+10+7 & 1-2+1 & 7-2-5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0 & 0 & 6\\ 0 & 6 & 0\\ 6 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{E_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\text{ ។}}$

$$E_2B=A\Rightarrow E_2=AB^{-1}\text{ ដែល }B=\begin{bmatrix}2&3&1\\3&1&4\\1&2&1\end{bmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{bmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&4&1\end{bmatrix}$$

តែ $B^{-1}=\dfrac{1}{\det(B)}adjA=\dfrac{1}{\det A}cof\left(B^T\right)$

$$\Rightarrow\det(B)=\begin{vmatrix}2&3&1\\3&1&4\\1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&1\\-5&-11&0\\-1&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&-11\\-1&-1\end{vmatrix}=5-11=-6$$

$$cof\left(B^T\right)=\begin{bmatrix}-7&-1&11\\1&1&-5\\5&-1&-7\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-7&-1&11\\1&1&-5\\5&-1&-7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E_2=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&2&1\\3&1&4\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&-1&11\\1&1&-5\\5&-1&-7\end{bmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-7+2+5&-1+2-1&11-10-7\\-21+1+20&-3+1-4&33-5-28\\-14+3+5&-2+3-1&22-15-7\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&0&-6\\0&-6&0\\-6&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=E_1$$

ដូចនេះ $\boxed{E_1=E_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\text{ ។}}$

$$E_3=CA^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&1\\7&7&6\\2&3&1\end{bmatrix}\times\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-11&1&7\\5&-1&-1\\7&1&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$E_4=AC^{-1}$ តែ $C^{-1}=\dfrac{1}{\det C}adjA=\dfrac{1}{\det A}cof\left(C^T\right)$

ដោយ $C=\begin{bmatrix}1&2&1\\7&7&6\\2&3&1\end{bmatrix}\Rightarrow C^T=\begin{bmatrix}1&7&2\\2&7&3\\1&6&1\end{bmatrix}$

$$\det(C)=\begin{vmatrix}1&2&1\\7&7&6\\2&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-7&-1\\0&-1&-1\end{vmatrix}=7-1=6\ ,\quad cof\left(C^T\right)=\begin{bmatrix}-11&1&5\\5&-1&1\\7&1&-7\end{bmatrix}$$

គេបាន $E_4 = AC^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -11 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -11 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -11+10+7 & 1-2+1 & 5+2-7 \\ -33+5+28 & 3-1+4 & 15+1-28 \\ -22+15+7 & 2-3+1 & 10+3-7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ។}}$

រកម៉ាទ្រីសច្រាស E_1^{-1} , E_2^{-1} , E_3^{-1} , E_4^{-1}

គេមាន $E_1A = B$, $E_2B = A$, $E_3A = C$, $E_4C = A$

គេបាន

$$E_1A = B \Leftrightarrow E_1(E_2B) = B \Leftrightarrow E_1E_2B = B \Leftrightarrow (E_1E_2B)B^{-1} = BB^{-1}$$

$$\Leftrightarrow E_1E_2 = I \Rightarrow E_2 = E_1^{-1}$$

ហើយ $E_2 = E_1$ (សំរាយខាងលើ) $\Rightarrow E_1^{-1} = E_1$, $E_2^{-1} = E_1$

ម្យ៉ាងទៀត $E_3A = C$, $E_4C = A \Rightarrow E_3(E_4C) = C$

$$\Leftrightarrow E_3E_4C = C \quad \Leftrightarrow (E_3E_4C)C^{-1} = CC^{-1} \Leftrightarrow E_3E_4 = I \Leftrightarrow E_3 = E_4^{-1}, E_4^{-1} = E_3$$

ដូចនេះ $\boxed{E_1^{-1} = E_1 = E_2 \text{ , } E_2^{-1} = E_1 \text{ , } E_3^{-1} = E_4 \text{ , } E_4^{-1} = E_3 \text{ ។}}$

២៥. គណនា A^2, A^3 ដែល $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

គេបាន $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ទាញបញ្ជាក់ថា $A^3 = 2A$

ដោយ $A^3 = 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2A$ ពិត ដូចនេះ $\boxed{A^3 = 2A \text{ ។}}$

ទាញបញ្ជាក់ថា A គ្មានចម្រាស់

ដោយ $A^3 = 2A$ នោះ $A = \frac{1}{2}A^3 \Rightarrow \det A = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \det A^3$

ដោយ $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ នោះ $\det A^3 = 0$ ព្រោះ $\det A^3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

មានជួរឈរទី១ និងទី៣ ដូចគ្នា ។ គេបាន $\det A = 0$ នោះ A គ្មានចម្រាស ។

២៦. រកម៉ាទ្រីស A ដែល A មានលំដាប់ 2×2 ដែល $A^2 = 0$

តាង $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ដែល $A \neq 0$ គេបាន

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

តែ $A^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 & (1) \\ ab+bd=0 & (2) \\ ac+cd=0 & (3) \\ bc+d^2=0 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 & (1) \\ b(a+d)=0 & (2) \\ c(a+d)=0 & (3) \\ bc+d^2=0 & (4) \end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ករណីបើ $a=b=c=d=0$ នោះគេបាន $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

មិនអាចព្រោះ $A \neq 0$ យើងចង់រកម៉ាទ្រីស $A \neq 0$ តែ $A^2 = 0$

ប្រព័ន្ធសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ករណីដែរបើ $a=b=c=d=0$ និង $b\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ម៉ាទ្រីសដែលរកមានទម្រង់ } A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \forall b\in\mathbb{R} \text{ ដែល } A^2 = 0 \text{ ។}}$

២៧. $a)$ គណនាតម្លៃ $f_1, f_2, ..., f_n$

គេមាន $f_0 = 1, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ $, n\geq 1$ គេបាន:

$$f_2 = f_1 + f_0 = 1+1 = 2$$
$$f_3 = f_2 + f_1 = 2+1 = 3$$
$$f_4 = f_3 + f_2 = 3+2 = 5$$
$$f_5 = f_4 + f_3 = 5+3 = 8$$
$$f_6 = f_5 + f_4 = 8+5 = 13$$
$$f_7 = f_6 + f_5 = 13+8 = 21$$
$$f_8 = f_7 + f_6 = 21+13 = 34$$
$$f_9 = f_8 + f_7 = 34+21 = 55$$
$$f_{10} = f_9 + f_8 = 55+34 = 89$$

ដូចនេះ $\boxed{f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5, f_5 = 8, f_6 = 13, f_7 = 21, f_8 = 34, f_9 = 55, f_{10} = 89 \text{ ។}}$

b) បង្ហាញថា $AX_n = X_{n+1}$, $n \geq 1$

គេមាន: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $X_n = \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$, $X_{n+1} = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix}$

គេបាន: $AX_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix}$ ដែរ $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$

$\Rightarrow AX_n = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = X_{n+1}$ ពិត

បង្ហាញថា $A^n X_1 = X_{n+1}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, X_n = \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$

យើងស្រាយកំណើនថា $A^n X_1 = X_{n+1}$ ចំពោះ $\forall n \geq 1$

បើ $n = 1$ គេបាន $AX_1 = X_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 + f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = X_2$ ពិត

បើ $n = 2$ គេបាន $A^2 X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 + 2f_1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 + f_1 + f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 + f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{bmatrix}$ ពិត

ឧបមាពិតដល់ n គឺ $A^n X_1 = X_{n+1}$ យើងនឹងស្រាយថាពិតដល់ $n+1$ គឺ $A^{n+1} X_1 = X_{n+2}$

គេមាន: $A^n X_1 = X_{n+1}$

$\Rightarrow A^{n+1} X_1 = AX_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+3} \end{bmatrix} = X_{n+2}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{A^n X_1 = X_{n+1} \text{ ពិត } \forall n \geq 1 \text{ ។}}$

$c)$ គណនា A^2, A^3, A^5 និង $A^5X_1 = X_6$

យើងមាន $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

គេបាន: $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^3.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

គណនា A^5X_1 , $X_1 = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_6 = \begin{bmatrix} f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}$

គេបាន $A^5X_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}$

គេបាន $A^5X_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix} = X_6 = \begin{bmatrix} f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}$ គេបានវិបាក: $\begin{cases} f_5 = 8 \\ f_6 = 13 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, A^5X_1 = X_6 = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}}$ ។

២៨. រកម៉ាទ្រីស B ដែល $BA = I$

គេមាន $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ដោយ A មានវិមាត្រ $(3,2)$ និង I មានវិមាត្រ $(2,2)$

$\Rightarrow B$ មានវិមាត្រ $(2,3)$ តាងដោយ $B = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$

គេបាន $BA = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3c-e & 2a+4c+4e \\ b+3d-f & 2b+4d+4f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

គេបាន $\begin{cases} a+3c-e = 1 & (1) \\ 2a+4c+4e = 0 & (2) \\ b+3d-f = 0 & (3) \\ 2b+4d+4f = 1 & (4) \end{cases}$

តាម (2) និង (1) គេបាន: $a+3c-e = -2(c+e)+3c-e = 1$

$\Rightarrow c-3e=1 \Leftrightarrow c=1+3e$

តាម (3) និង (4) គេបាន: $2(f-3d)+4d+4f=1$

$\Rightarrow 6f-2d=1 \Leftrightarrow d=\dfrac{6f-1}{2}=3f-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow a=-2(1+3e)-2e=-2-6e-2e=-2(1+4e)$, $b=f-\dfrac{18f}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}-8f$

ដូច្នេះ ម៉ាទ្រីស B ដែលរកគឺ $B=\begin{bmatrix} -2(1+4e) & 1+3e & e \\ \dfrac{3}{2}-8f & 3f-\dfrac{1}{2} & f \end{bmatrix}$, $e, f \in \mathbb{R}$

២៩. ក. គណនា A^2

យើងមាន $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$, $a,b \in \mathbb{R}$

គេបាន $A^2=A.A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 2ab & a^2 \end{bmatrix}$

ខ. គណនា $A^2-2aA+a^2I$

គេបាន $A^2-2aA+a^2I=\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 2ab & a^2 \end{bmatrix}-2a\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} a^2-2a^2+a^2 & 0 \\ 2ab-2ab & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ដូចនេះ: $\boxed{A^2-2aA+a^2I=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=J}$ ។

គ. សរសេរ A ជាអនុគមន៍នៃ a , I និង b

យើងមានម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ គេបាន

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A=aI+b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

គណនា A^n

យើងដឹងថា $I^n=I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I^n=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ហើយ $\forall p \geq 2$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^p=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

នោះយើងគណនា A^n តាមរូបមន្តទ្វេធា Newton រវាង I និង $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

គេបាន $A^n=\left[aI+b\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right]^n=a^nI+na^{n-1}b\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$

ព្រោះ $\forall p\geq 2\quad,\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{A^n=\begin{bmatrix}a^n&0\\0&a^n\end{bmatrix}+na^{n-1}b\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^n&0\\na^{n-1}b&a^n\end{bmatrix},\forall n\geq 0}$ ។

៣០. ក. រកវិមាត្ររបស់ X

ដោយ A មានវិមាត្រ (m,n) តាង (x,y) ជាវិមាត្ររបស់ X

តាម (1) គេបាន $(m,n)(x,y)(m,n)=(m,n)\ \Rightarrow\begin{cases}x=n\\y=m\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ម៉ាទ្រីស } X \text{ មានវិមាត្រ } (m,n)}$ ។

ខ. បង្ហាញថាសំណុំលក្ខខណ្ឌ (1) និង (2) សមមូលនឹង (3) : $X^TAX=A^T$

តាម (1): $AXA=A\Rightarrow(AXA)^T=A^T$

តែ $(AXA)^T=\left[A.(XA)\right]^T=(XA)^TA^T$ (ព្រោះ $(XA)^T=XA$ តាម (2))

គេបាន $\boxed{XA.A^T=A^T}$ ។

៣១. រកម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 2×2 ដែល $A^2=A$

តាង $A=\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$ គេបាន $A.A=A\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x^2+yz&xy+yt\\xz+zt&yz+t^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$$

គេបាន $\Rightarrow\begin{cases}x^2+yz=x\\xz+tz=z\\xy+ty=y\\yz+t^2=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}yz=x(1-x)\ (1)\\z(x+t-1)=0\ (2)\\y(x+t-1)=0\ (3)\\yz=t(1-t)\ (4)\end{cases}$

តាមសមីការ (2) និង (3) គេបាន

(2): $z(x+t-1)=0$ គេបានបីករណីដូចខាងក្រោម៖

$\begin{cases}z=0\\x+t-1=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}z\neq 0\\x+t-1=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}z=0\\x+t-1\neq 0\end{cases}$

(3): $y(x+t-1)=0$ គេបានបីករណីដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{cases} y=0 \\ x+t-1=0 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} y\neq 0 \\ x+t-1=0 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} y=0 \\ x+t-1\neq 0 \end{cases}$$

តាមករណីខាងលើគេបាន៖ $z=0$, $x+t-1=0$, $y=0$

ដូចនេះ $x=1-t$, $y=0$, $z=0$

នោះ (1) និង (4) គេបាន $\begin{cases} x(1-x)=0 \\ t(t-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=1 \\ t=0 \vee t=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{គេបានម៉ាទ្រីស } A \text{ គឺ } A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ។}}$

$b)$ សមីការ (2) និងសមីការ (3) ផ្ទៀងផ្ទាត់បើ $y=0$, $z=0$ នោះគេបាន

$x(1-x)=0$, $t(1-t)=0$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយដូចករណី a

$c)$ បើ $y\neq 0$ នោះ $x+t-1=0$ គេបាន $t=1-x$ និង $z=\dfrac{x(1-x)}{y}$

ដូចនេះ ម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} x & y \\ \dfrac{x(1-x)}{y} & 1-x \end{bmatrix}$

$d)$ បើ $y=0$, $x+t-1=0$ គេបាន $\begin{cases} t=1 \\ x=0 \end{cases}$ និង $\forall z$, $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}$

ម្យ៉ាងទៀត $y=0$ នោះ $\begin{cases} t=0 \\ x=1 \end{cases}$ និង $\forall z$, $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix}$

៣២. $a)$ រកទំនាក់ទំនងរវាង M^3 និង M ដែល $M=\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$

គេបាន

$$M^2=M.M=\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -(c^2+b^2) & ab & ac \\ ab & -(c^2+a^2) & bc \\ ac & bc & -(b^2+c^2) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M^3 = M^2.M = \begin{bmatrix} -(c^2+b^2) & ab & ac \\ ab & -(c^2+a^2) & bc \\ ac & bc & -(b^2+c^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -c(a^2+b^2+c^2) & b(a^2+b^2+c^2) \\ c(a^2+b^2+c^2) & 0 & -a(a^2+b^2+c^2) \\ -b(a^2+b^2+c^2) & a(a^2+b^2+c^2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -(a^2+b^2+c^2)\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{M^3 = -(a^2+b^2+c^2).M \text{ ។}}$

$b)$ បង្ហាញថាម៉ាទ្រីស $(\delta I + M)$ និង $(\delta I - M)$ មានចម្រាស់ចំពោះ $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta \neq 0$

គេមាន $M = \begin{bmatrix} o & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$

គេបាន $\delta I + M = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & c & -b \\ -c & \delta & a \\ b & -a & \delta \end{bmatrix}$

និង $\delta I - M = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & -c & b \\ c & \delta & -a \\ -b & a & \delta \end{bmatrix}$

គេបាន

$$\det(\delta I + M) = \begin{vmatrix} \delta & c & -b \\ -c & \delta & a \\ b & -a & \delta \end{vmatrix} = \delta\begin{vmatrix} \delta & a \\ -a & \delta \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} -c & a \\ b & \delta \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} -c & \delta \\ b & -a \end{vmatrix}$$

$$= \delta(\delta^2 + a^2) - c(-\delta c - ab) - b(ac - \delta b)$$

$$= \delta^3 + \delta a^2 + \delta c^2 + abc - abc + \delta b^2$$

$$= \delta^3 + \delta(a^2+b^2+c^2) \neq 0$$

$$\det(\delta I - M) = \begin{vmatrix} \delta & -c & b \\ c & \delta & -a \\ -b & a & \delta \end{vmatrix} = \delta \begin{vmatrix} \delta & -a \\ a & \delta \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} c & -a \\ -b & \delta \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} c & \delta \\ -b & a \end{vmatrix}$$

$$= \delta^3 + \delta a^2 + \delta c^2 - abc + abc + \delta b^2$$

$$= \delta^3 + \delta\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \neq 0$$

ដោយ $\det(\delta I + M) \neq 0$ និង $\det(\delta I - M) \neq 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ម៉ាទ្រីស } (\delta I + M) \text{ និង } (\delta I - M) \text{ មានចម្រាស់ ។}}$

$c)$ បង្ហាញថា $N = (\delta I + M)^{-1}(\delta I - M)$ មានចម្រាស់

គេបាន $\det N = \det\left((\delta I + M)^{-1}(\delta I - M)\right) = \det\left((\delta I + M)^{-1}\right).\det(\delta I - M)$

ដោយ $\det(\delta I + M) \neq 0 \Rightarrow \det\left((\delta I + M)^{-1}\right) \neq 0$ និង $\det(\delta I - M) \neq 0$

នោះគេបាន $\det\left((\delta I + M)^{-1}\right).\det(\delta I - M) \neq 0$

ដូច្នេះ $\boxed{N \text{ មានចម្រាស់ ។}}$

បង្ហាញថា $N^{-1} = N^t$

គេមាន $N = (\delta I + M)^{-1}(\delta I - M)$ នោះគេបាន

$$N^{-1} = \left[(\delta I + M)^{-1}(\delta I - M)\right]^{-1} = (\delta I - M)^{-1}(\delta I + M) \quad (1) \text{ និង}$$

$$N^T = \left[(\delta I + M)^{-1}(\delta I - M)\right]^T = (\delta I - M)^T\left[(\delta I + M)^{-1}\right]^T$$

$$= (\delta I - M)^T\left[(\delta I + M)^T\right]^{-1}$$

$$= \left((\delta I)^T - M^T\right)\left[(\delta I)^T + M^t\right]^{-1}$$

$$= \left(\delta I - M^T\right)\left[\delta I + M^T\right]^{-1}$$

ដោយ $M = \begin{bmatrix} o & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$ នោះគេបាន

$$M^T = \begin{bmatrix} o & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} o & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} = -M$$

គេបាន $N^t = (\delta I + M)(\delta I - M)^{-1} \quad (2)$

យើងនឹងបង្ហាញថា $(1)=(2)$ មានន័យថា $(\delta I+M)^{-1}$ និង $\delta I-M$ មានលក្ខណៈត្រលប់

- ចំពោះ $\left(\delta I-M\right)^{-1}\left(\delta I+M\right)$

  តាង $C=\left(\delta I-M\right)^{-1}\left(\delta I+M\right)=\left(\delta I-M\right)^{-1}\left(M-\delta I+2\delta I\right)$

  $$=-\left(\delta I-M\right)^{-1}(\delta I-M)+2\delta I\left(\delta I-M\right)^{-1}$$

  គេបាន $C=-I+2\delta(\delta I-M)^{-1}$ $\quad(*)$

- ចំពោះ $\left(\delta I+M\right)\left(\delta I-M\right)^{-1}$

  តាង $D=\left(\delta I+M\right)\left(\delta I-M\right)^{-1}=\left(M-\delta I+2\delta I\right)\left(\delta I-M\right)^{-1}$

  $$=-(\delta I-M)^{-1}(\delta I-M)+2\delta I(\delta I-M)^{-1}$$

  គេបាន $D=-I+2\delta(\delta I-M)^{-1}$ $\quad(**)$

  តាម $(*)$ និង $(**)$ គេបាន $C=D$ មានន័យថា $(\delta I+M)^{-1}$ និង $(\delta I-M)$ មានលក្ខណៈត្រលប់

  ដូចនេះ គេបាន $(1)=(2)$ ។ វិបាក $N^{-1}=N^t$ ។