គណិតវិទ្យា វិទ្យាល័យ

វិទ្យាល័យ សមរលាភ

គន្លឹះស៊ីតចំនួនពិត

- មេរៀនសង្ខេប
- លំហាត់គំរូ
- លំហាត់អនុវត្តន៍

សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១

ង៉ូន វស្សី

២០២១

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាគោលរបស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

មេរៀនទី១ ស្វ៊ីតចំនួនពិត

១. សញ្ញាណស្វ៊ីត

ឧទាហរណ៍១ គេមានចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាន $1,2,3,4,5,\ldots$ ។

គេមានចំនួនគត់គូតូចជាង16 គឺ $2,4,6,8,10,12,14$ ។

គេមានចំនួនសនិទាន $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\ldots$ ។

- ចំនួនដែលរៀបតាមលំដាប់នេះហៅថា **ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត** ។
- ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលសរសេរ $1,2,3,4,5,\ldots$ ហៅថា **ស្វ៊ីតអនន្តតួ** ។
- ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលសរសេរ $2,4,6,8,10,12,14$ ហៅថា **ស្វ៊ីតរាប់អស់** ។

❖ **និយមន័យ** ស្វ៊ីតចំនួនពិត ជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពីសំណុំនៃចំនួនគត់ $\mathbb{N}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។

ជាទូទៅ គេប្រើអក្សរ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ សម្រាប់តាងឱ្យតួនៃស្វ៊ីតដែល a_1 ជាតួទី1 a_2 ជាតួទី2 រហូតដល់ a_n ជាតួទី n ។

គេតាងស្វ៊ីតដោយនិមិត្តសញ្ញា (a_n) ដែល $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$

ក្នុងករណីដែលគេឱ្យចំនួនគត់ $n = 0 , 1 , 2 , 3, \ ...$ នោះស្វ៊ីត (a_n) ផ្ដើមពីតួ $a_0 , \ a_1 , a_2 , a_3 , \ ... , a_n$ ។

២. តួទី n នៃស្វ៊ីត

ដើម្បីសរសេររូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតគេពិនិត្យមើលតួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត រួចមើលលំនាំគំរូរបស់វា ។ តួនីមួយៗជាអនុគមន៍នៃចំនួនតួ ។

ឧទាហរណ៍១ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $2, 4 , 6 , 8 , ...$ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n

យើងសង្កេតឃើញថា $a_1 = 2 = 2 \times 1$

$$a_2 = 4 = 2 \times 2$$
$$a_3 = 6 = 2 \times 3$$
$$a_4 = 8 = 2 \times 4$$
$$......................$$
$$a_n = 2n$$

ដូចនេះ គេបានតួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $a_n = 2n$ ។

ឧទាហរណ៍២ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $-1, 2 , 7 , 14 , 23 , \ ...$ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n

យើងសង្កេតឃើញថា $a_1 = -1 = 1^2 - 2$

$$a_2 = 2 = 2^2 - 2$$

$$a_3 = 7 = 3^2 - 2$$

$$a_4 = 14 = 4^2 - 2$$

....

$$a_n = n^2 - 2$$

ដូចនេះ គេបានតួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ ។

ឧទាហរណ៍៣ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \ldots$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n

យើងសង្កេតឃើញថា $a_1 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{1+1}{1+2}$

$$a_2 = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2+2}$$

$$a_3 = \frac{4}{5} = \frac{3+1}{3+2}$$

$$a_4 = \frac{5}{6} = \frac{4+1}{4+2}$$

$$-----------$$

$$a_n = \frac{n+1}{n+2}$$

ដូចនេះ គេបានតួទី n នៃស៊្វីតគឺ $a_n = n^2 - 2$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរកំណត់រូបមន្តតួទី n ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ នៃស៊្វីតខាងក្រោម៖

ក. $3, 5, 7, 9, 11, \ ...$

ខ. $-3, -1, 1, 3, 5, \ ...$

គ. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ ...$

ឃ. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ ...$

ង. $1, 4, 9, 16, 25, ...$

ច. $3, 5, 9, 17, 33, 65, \ ...$

៣. អថិរភាពនៃស៊្វីត

❖ ស៊្វីតកើន

ស៊្វីត (a_n) ជាស៊្វីតកើន លុះត្រាតែ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N};\ a_{n+1} > a_n$ ។

❖ ស៊្វីតចុះ

ស៊្វីត (a_n) ជាស៊្វីតចុះ លុះត្រាតែ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N};\ a_{n+1} < a_n$ ។

❖ ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន កាលណា (a_n) ជាស្វ៊ីតកើន ឬ ជាស្វ៊ីតចុះ ឬ ជាស្វ៊ីតថេរ ។

ឧទាហរណ៍ ១. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 3n+1$ ជាស្វ៊ីតកើន ។

២. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 12-2n$ ជាស្វ៊ីតចុះ ។

៣. តើស្វ៊ីតខាងក្រោមមួយណាជាស្វ៊ីតកើន មួយណាជាស្វ៊ីតចុះ ?

ក. $(a_n)_{n\geq 5}$ ដែល $a_n = \dfrac{3n}{2}$

ខ. $(a_n)_{n\geq 3}$ ដែល $a_n = \dfrac{2}{n}$ ។

៤. តើស្វ៊ីតខាងក្រោម ស្វ៊ីតណាជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ?

ក. $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots$

ខ. $a_n = \dfrac{2^n}{n}$

គ. $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}, \dots$

ចម្លើយ

១. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 3n+1$ ជាស្វ៊ីតកើន ។

យើងមាន $a_n = 3n+1$ នោះ $a_{n+1} = 3(n+1)+1 = 3n+4$

យើងបាន $a_{n+1} - a_n = 3n+4-(3n+1) = 3 > 0$

នាំឱ្យ $a_{n+1} > a_n$ ។

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។

២. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 12-2n$ ជាស្វ៊ីតចុះ ។

យើងមាន $a_n = 12-2n$ នោះ $a_{n+1} = 12-2(n+1) = 10-2n$

យើងបាន $a_{n+1} - a_n = 10-2n-(12-2n) = -2 < 0$

នាំឱ្យ $a_{n+1} < a_n$ ។

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

៣. តើស្វ៊ីតខាងក្រោមមួយណាជាស្វ៊ីតកើន មួយណាជាស្វ៊ីតចុះ ?

ក. $(a_n)_{n\geq 5}$ ដែល $a_n = \frac{3n}{2}$

ជាស្វ៊ីតកើន ព្រោះ $a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)}{2} - \frac{3n}{2} = \frac{3}{2} > 0$

មានន័យថា $a_{n+1} > a_n$ ។

ខ. $(a_n)_{n\geq 3}$ ដែល $a_n = \dfrac{2}{n}$

ជាស្វ៊ីតចុះ ព្រោះ $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{2}{n} = -\dfrac{2}{n(n+1)} < 0$

មានន័យថា $a_{n+1} < a_n$ ។

៤. តើស្វ៊ីតខាងក្រោម ស្វ៊ីតណាជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ?

ក. $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ។

ខ. $a_n = \dfrac{2^n}{n}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ។

គ. $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}, \ldots$ មិនមែនជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ។

៤. ស្វ៊ីតទាល់

❖ ស្វ៊ីតទាល់លើ

ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ លុះត្រាតែមានចំនួនពិត M មួយដែលចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \leq M$ ។ ចំនួន M ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត ។

❖ ស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម លុះត្រាតែមានចំនួនពិត N មួយដែលចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \geq N$ ។

ចំនួន N ហៅថាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ។

❖ ស្វ៊ីតទាល់

ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ លុះត្រាតែស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើផង និងទាល់ក្រោមផង ។

ឧទាហរណ៍ ក. រកគោលលើនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{2}{n}$ ។

ខ. រកគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 2n+1$ ។

គ. រកគោលលើ និងគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល

$$a_n = \frac{n}{2n+1} \text{ ។}$$

ចម្លើយ

ក. រកគោលលើនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{2}{n}$ ។

យើងបាន $a_1 = 2 > a_2 = 1 > a_3 = \dfrac{2}{3} > a_4 = \dfrac{1}{2} > \ldots$ គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើ ដែលមាន $M = 2$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត ។

ខ. រកគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 2n+1$ ។

យើងបាន $a_1 = 3 < a_2 = 5 < a_3 = 7 < a_4 = 9 < \ldots$ គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ដែលមាន $N = 3$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ។

គ. រកគោលលើ និងគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ ។

យើងបាន

$$a_1 = \frac{1}{3}\ ,\ a_2 = \frac{2}{5}\ ,\ a_3 = \frac{3}{7}\ ,\ a_4 = \frac{4}{9}\ ,\ \ldots , a_n = \frac{n}{2n+1} , \ldots$$

យើងសង្កេតឃើញថា $\dfrac{1}{3}$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ម្យ៉ាងទៀត បើ n ខិតជិតអនន្ត នោះស្វ៊ីត $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ ខិតជិត $\dfrac{1}{2}$ ដែល $\dfrac{1}{2}$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត ។

ដូចនេះ $\dfrac{1}{2}$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត និង $\dfrac{1}{3}$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ។

មេរៀនទី២ ស្វ៊ីតនព្វន្ត

១. និយមន័យ

ស្វ៊ីតនព្វន្ត គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី១) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកចំនួនថេរ d មួយ ហៅថាផលសងរួម ។

ឧទាហរណ៍ គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $(U_n): 1,3,5,7,9,\ldots$ ។

យើងបាន $U_1 = 1$

$$U_2 = 3 = 1+2 = U_1 + 2$$
$$U_3 = 5 = 3+2 = U_2 + 2$$
$$U_4 = 7 = 5+2 = U_3 + 2$$

....

$$U_n = U_{n-1} + 2$$

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = 2$ ។

❖ ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត កំណត់ដោយ:

$$d = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = \ldots = U_n - U_{n-1}$$ ។

២. តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមានស្វ៊ីត $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម d ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន $U_1 = U_1$

$$U_2 = U_1 + d$$
$$U_3 = U_2 + d = U_1 + 2d$$
$$U_4 = U_3 + d = U_1 + 3d$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_n = U_1 + (n-1)d$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តកំណត់ដោយ $U_n = U_1 + (n-1)d$ ។

ជាទូទៅ បើ (U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទីមួយ U_1 និងផលសងរួម d ។

នោះតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តកំណត់ដោយ៖

$U_n = U_1 + (n-1)d$ ឬ $U_n = U_p + (n-p)d$ ។

លំហាត់គំរូទី១ គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $(U_n): 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ ។

ចូររកតួទី n នៃស្វ៊ីត ។

ដំណោះស្រាយ

រកតួទី n នៃស្វ៊ីត

យើងមាន $(U_n): 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

យើងបាន $U_1 = 2$ និង $d = 2$

តាមរូបមន្ត $U_n = U_1 + (n-1)d$

នាំឱ្យ $U_n = 2+(n-1)2 = 2+2n-2 = 2n$

ដូចនេះ $U_n = 2n$ ។

លំហាត់គំរូទី២ គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត បើគេដឹងថា

ក. $u_{35} = 9$, $u_{45} = 17$ ។ គណនា u_{40} ។

ខ. $u_7 = \dfrac{7}{2}$, $u_{13} = \dfrac{13}{2}$ ។ គណនា u_0 ។

គ. $u_2 = -12$, $S_{12} = 18$ ។ គណនា u_1, d និង u_6 ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា u_{40}

ប្រើរូបមន្ត $U_n = U_p + (n-p)d$

ដែល $u_{35} = 9$, $u_{45} = 17$

យើងបាន $U_{45} = U_{35} + (45-35)d$

សមមូល $17 = 9+10d \Rightarrow d = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

ដោយ $U_{40} = U_{35} + 5d$

នោះ $U_{40} = 9+5\times\dfrac{4}{5} = 13$

ដូចនេះ $U_{40}=13$ ។

ខ. គណនា u_0

ប្រើរូបមន្ត $U_n=U_p+(n-p)d$

ដែល $u_7=\frac{7}{2}$, $u_{13}=\frac{13}{2}$

យើងបាន $U_{13}=U_7+(13-7)d$

សមមូល $\frac{13}{2}=\frac{7}{2}+6d\Rightarrow d=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

ដោយ $U_0=U_7-(0-7)d$

នោះ $U_0=\frac{7}{2}-7\times\frac{1}{2}=0$

ដូចនេះ $U_0=0$ ។

គ. គណនា u_1, d និង u_6

យើងមាន $u_2=-12$, $S_{12}=18$

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$

នាំឱ្យ $S_{12}=\frac{12}{2}(u_1+u_{12})=6(u_2-d+u_2+10d)$

ឬ $S_{12}=6(2u_2+9d)$

សមមូល $18=6[2(-12)+9d] \Leftrightarrow 3=-24+9d$

$$\Rightarrow d=\frac{27}{9}=3$$

ដោយ $U_n=U_p+(n-p)d$

នាំឱ្យ $U_1=U_2+(1-2)d=-12-1\times 3=-15$

និង $U_6=U_1+5d=-15+5\times 3=0$

ដូចនេះ $u_1=-15$, $d=3$ និង $u_6=0$ ។

លំហាត់គំរូទី៣ គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $(U_n): 2,8,14,20,26,\ldots$ ។

ក. រក U_n ខ. គណនាតួទី 10 គ. តើចំនួន 116 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

ដំណោះស្រាយ

ក. រក U_n

យើងមាន $(U_n): 2,8,14,20,26,\ldots$

យើងបាន $U_1=2$ និង $d=6$

តាមរូបមន្ត $U_n=U_1+(n-1)d$

នាំឱ្យ $U_n=2+(n-1)6=2+6n-6=6n-4$

ដូចនេះ $U_n = 6n - 4$ ។

ខ. គណនាតួទី 10

យើងបាន $U_{10} = 6(10) - 4 = 60 - 4 = 54$

ដូចនេះ $U_{10} = 54$ ។

គ. រកតួនៃស្វ៊ីតដែលមានតម្លៃស្មើ 116

យើងមាន $U_n = 6n - 4$

យើងបាន $6n - 4 = 116 \Leftrightarrow 6n = 120 \Rightarrow n = \dfrac{120}{6} = 20$

នាំឱ្យ $n = 20$

ដូចនេះ ចំនួន 116 ជាតួទី 20 នៃស្វ៊ីត ។

លំហាត់គំរូទី៤

ក. គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែល $U_0 = 2$ និង $U_1 = 9$ ។

កំណត់តួទី 5 និងគណនា U_5 ។

ខ. សៀវភៅមួយក្បាលមាន 100 ទំព័រ ចុះលេខពីរ 1 ដល់ 100 ។

រកចំនួនទំព័រដែលមានលេខខាងចុង 5 ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទី 5 និងគណនា U_5

តួទី 5 នៃស្វ៊ីតត្រូវនឹង U_4 $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

ដែល $U_0 = 2$ និង $d = 7$

យើងបាន $U_4 = U_0 + 4d = 2 + 4(7) = 30$

ដូចនេះ តួទី 5 នៃស្វ៊ីតគឺ $U_4 = 30$ ។

+ គណនា U_5

យើងបាន $U_5 = U_0 + 5d = 2 + 5(7) = 37$

ដូចនេះ $U_5 = 37$ ។

ខ. រកចំនួនទំព័រដែលមានលេខខាងចុង 5

ដោយសៀវភៅមួយក្បាលមាន 100 ទំព័រ ចុះលេខពីរ 1 ដល់ 100

នោះទំព័រដែលមានលេខខាងចុង 5 គឺ 5 , 15 , 25 , ...,95 ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដែលមាន $U_1 = 5$, $U_n = 95$ និង $d = 10$

តាមរូបមន្ត $U_n = U_1 + (n-1)d$

សមមូល $95 = 5 + (n-1)10 \Leftrightarrow 95 = 5 + 10n - 10$

$$10n = 100 \Rightarrow n = \frac{100}{10} = 10$$

$$\Rightarrow n = 10$$

ដូចនេះ ទំព័រដែលមានលេខខាងចុង 5 មានចំនួន 10 ទំព័រ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

❖ រកតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម៖

ក. $3 , 5 , 7 , 9 , \ldots$ ខ. $4 , 15 , 26 , 37 , \ldots$

គ. $18 , 13 , 8, 3 ,\ldots ,$ ឃ. $-9 , -4 , 1 , 6 , \ldots$

ង. $10 , 20 , 30 , 40 , \ldots$ ច. $100 , 95 , 90 , 85 , \ldots$

ឆ. $-3 , -5 , -7 , -9 , \ldots$ ជ. $-2 , -9 , -16 , -23 , \ldots$

៣. ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ឧទាហរណ៍១ គណនាផលបូកស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម៖

ក. $1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11$

ខ. $2, 5 , 8 , 11 , 14 , 17 , 20$

ចម្លើយ គណនាផលបូកស្វ៊ីតនព្វន្ត

ក. $1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11$

យើងបាន $S_6 = 1+3+5+7+9+11$

$$= (1+11)+(3+9)+(5+7)$$

$$= 12+12+12 = 3\times 12 = 36$$

ដូចនេះ $S_6 = 36$ ។

ខ. $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20$

យើងបាន

$+$
$$\begin{array}{l} S_7 = 2+5+8+11+14+17+20 \\ S_7 = 20+17+14+11+8+5+2 \\ \hline \end{array}$$

$$2S_7 = (2+20)+(5+17)+(8+14)+(11+11)+\ \dots\ +(20+2)$$

$$2S_7 = 7(2+20)$$

$$\Rightarrow S_7 = \frac{7}{2}(2+20) = \frac{7}{2}\times 22 = 77$$

ដូចនេះ $S_7 = 77$ ។

ឧបមាថា $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ

យើងតាង $S_n = U_1+U_2+U_3+\ \dots\ +U_n$ ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត

យើងបាន $+$
$$\begin{array}{l} S_n = U_1+U_2+U_3+\ \dots\ +U_{n-1}+U_n \\ S_n = U_n+U_{n-1}+U_{n-2}+\ \dots\ +U_2+U_1 \\ \hline \end{array}$$

$$2S_n=\underbrace{(U_1+U_n)+(U_2+U_{n-1})+\ \dots\ +(U_n+U_1)}_{n\text{ តួ}}$$

នាំឱ្យ $2S_n=n(U_1+U_n)$ (ព្រោះ $U_1+U_n=U_2+U_{n-1}=U_3+U_{n-2}=\dots$)

នោះ $S_n=\dfrac{n}{2}(U_1+U_n)$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{n}{2}(U_1+U_n)$ ។

ជាទូទៅ ផលបូក n តួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន U_1 ជាតួទី 1 និង U_n ជាតួទី n

កំណត់ដោយ $S_n=\dfrac{n}{2}(U_1+U_n)$ ។

លំហាត់គំរូ១ គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម៖

ក. $2+4+6+\dots+146$

ខ. $100+95+90+85+\dots-20$

គ. $-193-189-185-\dots-21-17$

ឃ. $5\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}+\dots-3$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ក. $2+4+6+...+146$

យើងមាន $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 4 - 2 = 2$

ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 146 = 2 + (n-1)2$

$$\Leftrightarrow 2n = 146 \Rightarrow n = 73$$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$

យើងបាន $S_{73} = \frac{73}{2}(2+146) = \frac{73}{2} \times 148 = 5402$

ដូចនេះ $S_{73} = 5402$ ។

ខ. $100+95+90+85+...-20$

យើងមាន $u_1 = 100$, $u_2 = 95$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 95 - 100 = -5$

ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow -20 = 100 + (n-1)(-5)$

$$\Leftrightarrow -5n = -20 - 105$$
$$-5n = -125$$
$$\Rightarrow n = \frac{-125}{-5} = 25$$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$

យើងបាន $S_{25}=\frac{25}{2}\left(100+\left(-20\right)\right)=\frac{25}{2}\times 80=1000$

ដូចនេះ $S_{25}=1000$ ។

គ. $-193-189-185-\ldots-21-17$

យើងមាន $u_1=-193$, $u_2=-189$

នាំឱ្យ $d=u_2-u_1=-189-\left(-193\right)=4$

ដោយ $u_n=u_1+\left(n-1\right)d \Leftrightarrow -17=-193+\left(n-1\right)4$

$$\Leftrightarrow 4n=197-17$$

$$4n=180$$

$$\Rightarrow n=\frac{180}{4}=45$$

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{n}{2}\left(U_1+U_n\right)$

យើងបាន $S_{45}=\frac{45}{2}\left(-193+\left(-17\right)\right)=\frac{45}{2}\left(-210\right)=-4725$

ដូចនេះ $S_{45}=-4725$ ។

ឃ. $5\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}+\ldots-3$

យើងមាន $u_1 = 5\frac{1}{4}$, $u_2 = 4\frac{1}{2}$

នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 4\frac{1}{2} - 5\frac{1}{4} = \frac{9}{2} - \frac{21}{4} = -\frac{3}{4}$

ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow -3 = \frac{21}{4} + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}n = -\frac{24}{4} - 3$$

$$-\frac{3}{4}n = -9$$

$$\Rightarrow n = 12$$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$

យើងបាន $S_{12} = \frac{12}{2}\left(\frac{21}{4} + (-3)\right) = 6 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{2}$

ដូចនេះ $S_{12} = \frac{27}{2}$ ។

លំហាត់គំរូ២ គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម៖

ក. $1, 2, 3, 4, ...$ ខ. $1, 3, 5, 7, ...$

គ. $5, 9, 13, 17, ...$ ឃ. $7, 12, 17, 22, ...$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ក. $1,2,3,4,......$

យើងមាន $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ នោះ $d = 1$

ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d$

យើងបាន $u_n = 1 + (n-1)1 = n$

$$u_n = n$$

នាំឱ្យ $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(1+n)$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n}{2}(n+1)$ ។

ខ. $1,3,5,7,......$

យើងមាន $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ នោះ $d = 2$

ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d$

យើងបាន $u_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$

$$u_n = 2n - 1$$

ដោយ $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

នាំឱ្យ $S_n = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2$

ដូចនេះ $S_n = n^2$ ។

គ. 5,9,13,17,......

យើងមាន $u_1 = 5$, $u_2 = 9$ នោះ $d = 4$

ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d$

យើងបាន $u_n = 5 + (n-1)4 = 4n + 1$

$$u_n = 4n + 1$$

ដោយ $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

នាំឱ្យ $S_n = \frac{n}{2}(5 + 4n + 1) = 2n^2 + 3n$

ដូចនេះ $S_n = 2n^2 + 3n$ ។

ឃ. 7,12,17,22,......

យើងមាន $u_1 = 7$, $u_2 = 12$ នោះ $d = 5$

ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d$

យើងបាន $u_n = 7 + (n-1)5 = 5n + 2$

$$u_n = 5n + 2$$

ដោយ $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

នាំឱ្យ $S_n = \frac{n}{2}(7 + 5n + 2) = \frac{5n^2 + 9n}{2}$

ដូចនេះ $S_n = \frac{5n^2 + 9n}{2}$ ។

លំហាត់គំរូ៣

ក. គណនាផលបូក $(-6) + (-1) + 4 + 9 + ... + 64$ ។

ខ. គណនាផលបូក 25 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $2, 9, 16, 25, ...$

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាផលបូក $(-6) + (-1) + 4 + 9 + ... + 64$

យើងមាន $u_1 = -6$, $u_2 = -1$ និង $d = 5$

ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$\Leftrightarrow 64=-6+(n-1)5$$

$$64=5n-11$$

$$5n=75\Rightarrow n=15$$

ដោយ $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$

នាំឱ្យ $S_{15}=\frac{15}{2}(-6+64)=\frac{15}{2}\times 58=435$

ដូចនេះ $S_{15}=435$ ។

ខ. គណនាផលបូក 25 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $2,9,16,25,......$

យើងមាន $u_1=2$, $u_2=9$ និង $d=7$

ដោយ $u_n=u_1+(n-1)d$

យើងបាន $u_n=2+(n-1)7=7n-5$

$$u_n=7n-5\Rightarrow u_{25}=7\times 25-5=170$$

ដោយ $S_{25}=\frac{25}{2}(u_1+u_{25})$

នាំឱ្យ $S_{25}=\frac{25}{2}(2+170)=25\times 86=2150$

ដូចនេះ $S_{25}=2150$ ។

លំហាត់

១. សរសេររូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $4\,,15\,,26\,,37,...$ ខ. $5\,,1\,,-3\,,-7,...$

គ. $\frac{1}{2},\frac{7}{2},\frac{13}{2},\frac{19}{2},...$ ឃ. $\sqrt{2}\,,6\sqrt{2}\,,11\sqrt{2}\,,16\sqrt{2},...$

២. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយ ដែល $u_5=17$ និង $u_{15}=47$ ។

រក u_n ។

៣. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយ ដែល $u_{11}=58$ និង $u_{2021}=10108$ ។

រក u_n ។

៤. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយ ដែលមាន $u_{2020}=8075$ និងមានផលសងរួម $d=4$ ។ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត។

៥. រកបីចំនួនបន្តបន្ទាប់គ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលបូកស្មើនឹង 27 និង ផលគុណស្មើនឹង 405 ។

៦. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $10-3x\,,2x^2+3\,,7-4x$ ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

៧. គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) ដោយដឹងថា $u_{11}=53$ និង $u_{50}=209$ ។

ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត។

ខ. គណនា S_n ។

៨. គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $2, 7, 12, ...$ និង $2, 5, 8, ...$ ។ តើក្នុងចំណោម 121 តួនៃស្វ៊ីត ទាំងពីរនេះមានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ?

៩. បើ x, y, z គឺជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ចូរបង្ហាញថា $(x^2+xy+y^2), (z^2+xz+x^2)$ និង (y^2+yz+z^2) គឺជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

១០. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ ដែល a, b, c, d, e, f គឺជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត និងមានផលសងរួមមិនសូន្យ ។

១១. គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ចូរបង្ហាញថា $a^2+2bc=c^2+2ab$ ។

១២. គេដឹងថា ផលបូកតួទី1 និងតួទី 4 នៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើនឹង 2 និង ផលបូកការេរបស់វាស្មើនឹង 20 ។ ចូររកផលបូកប្រាំបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។

១៣. គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម៖

ក. $2+4+6+...+146$

ខ. $100+95+90+85+...-20$

គ. $-193-189-185-\ldots-21-17$

ឃ. $5\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}+\ldots-3$

១៤. គេឱ្យ a_1 , a_2 , a_3 ,…, a_n ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែល $a_i>0$ ចំពោះគ្រប់ $i=1,2,3,4,\ldots n$ បង្ហាញថា $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$ ។

១៥. បើស្វ៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1+a_2+a_3=3$ និង $a_3+a_4+a_5=33$ ។

កំណត់តម្លៃ $a_{300}+a_{400}+a_{500}$ ។

១៦. ពិនិត្យស្វ៊ីតខាងក្រោម:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4},\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{5}{6},\frac{4}{6},\ldots\ldots$$ ។

ក. តើតួដែលមានចំនួន $\frac{18}{25}$ ជាតួទីប៉ុន្មាន ?

ខ. រកតួទី 666 ។

គ. រកផលបូកនៃស្វ៊ីតនេះដល់តួទី 666 ។

១៧. ឧបមាថា $\{a_n\}$ គឺជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួមវិជ្ជមាន ហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=35$

និង $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=285$ ។

ចូររកផលបូកចាប់ពីតួទី n ដល់តួទី $2n$ ។

១៨. តាង S_n ជាផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $51, 47, 43, \ldots$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ n ដែលធ្វើឱ្យ S_n មានតម្លៃអតិបរមានិងកំណត់តម្លៃនៃ S_n ។

ខ. កំណត់តម្លៃ n ដែលធ្វើឱ្យ $|S_n|$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

១៩. តាង $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែល $a = 1$ និង $a_{3k+1} = -2$ ដែល k ជាចំនួនគត់ថេរវិជ្ជមាន ។ ហើយតាង S_n ជាផលបូកនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ដល់តួទី n ។

ក. រកតួទូទៅនៃ a_n ។

ខ. រកតម្លៃអតិបរមានៃ S_n និងតម្លៃនៃ n ដែលធ្វើឱ្យ S_n មានអតិបរមា ។

គ. កំណត់តម្លៃ S_{2k+1} ។

២០. គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\{a_n\}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

$$(i)\ a_1 = 1$$
$$(ii)\ \ln a_n - \ln a_{n-1} = \ln(n-1) - \ln(n+1)\ ,\ n \geq 2$$

ចូរគណនាតម្លៃ $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ។

លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ

១. សរសេររូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $4\,,15\,,26\,,37,...$ ខ. $5\,,1\,,-3\,,-7,...$

គ. $\frac{1}{2},\frac{7}{2},\frac{13}{2},\frac{19}{2},...$ ឃ. $\sqrt{2}\,,6\sqrt{2}\,,11\sqrt{2}\,,16\sqrt{2},...$

ដំណោះស្រាយ

១. សរសេររូបមន្តតួទី n

ក. $4\,,15\,,26\,,37,...$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1+(n-1)d$ ដែល $u_1=4$ និង $d=11$

យើងបាន $u_n=4+(n-1)11=11n-7$

នាំឱ្យ $u_n=11n-7$

ដូចនេះ $u_n=11n-7$ ។

ខ. $5\,,1\,,-3\,,-7,...$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1+(n-1)d$ ដែល $u_1=5$ និង $d=-4$

យើងបាន $u_n=5+(n-1)(-4)=-4n+9$

នាំឱ្យ $u_n = -4n + 9$

ដូចនេះ $u_n = -4n + 9$ ។

គ. $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{19}{2}, \ldots$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$ ដែល $u_1 = \frac{1}{2}$ និង $d = 3$

យើងបាន $u_n = \frac{1}{2} + (n-1)3 = 3n - \frac{5}{2}$

នាំឱ្យ $u_n = 3n - \frac{5}{2}$

ដូចនេះ $u_n = 3n - \frac{5}{2}$ ។

ឃ. $\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 16\sqrt{2}, \ldots$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$ ដែល $u_1 = \sqrt{2}$ និង $d = 5\sqrt{2}$

យើងបាន $u_n = \sqrt{2} + (n-1)\left(5\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2}n - 4\sqrt{2}$

នាំឱ្យ $u_n = 5\sqrt{2}n - 4\sqrt{2}$

ដូចនេះ $u_n = 5\sqrt{2}n - 4\sqrt{2}$ ។

២. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយ ដែល $u_5 = 17$ និង $u_{15} = 47$ ។

រក u_n ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $u_n = u_p + (n-p)d$

យើងបាន $u_{15} = u_5 + 10d$ ដែល $u_5 = 17$ និង $u_{15} = 47$

នាំឱ្យ $47 = 17 + 10d \Leftrightarrow 10d = 30$

$\Rightarrow d = 3$

យើងបាន $u_n = u_5 + (n-5)d = 17 + (n-5)3$

$u_n = 3n + 2$

ដូចនេះ $u_n = 3n + 2$ ។

៣. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយ ដែល $u_{11} = 58$ និង $u_{2021} = 10108$ ។

រក u_n ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $u_n = u_p + (n-p)d$

យើងបាន $u_{2011} = u_{11} + 2010d$ ដែល $u_{11} = 58$ និង $u_{2021} = 10108$

នាំឱ្យ $10108 = 58 + 2010d \Leftrightarrow 2010d = 10050$

$$\Rightarrow d=\frac{10050}{2010}=5$$

យើងបាន $u_n=u_{11}+(n-11)d=58+(n-11)5$

$$u_n=5n+3$$

ដូចនេះ $u_n=5n+3$ ។

៤. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n)មួយ ដែលមាន $u_{2020}=8075$ និងមានផលសងរួម $d=4$ ។ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $u_n=u_p+(n-p)d$

នាំឱ្យ $u_n=u_{2020}+(n-2020)d$ ដែល $u_{2020}=8075$ និង $d=4$

យើងបាន $u_n=8075+(n-2020)4=4n+8075-8080$

$$u_n=4n-5$$

ដូចនេះ $u_n=4n-5$ ។

៥. រកបីចំនួនបន្តបន្ទាប់គ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលបូកស្មើនឹង 27 និង ផលគុណស្មើនឹង 405 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង u_1, u_2 និង u_3 ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

យើងបាន $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=27 \\ u_1u_2u_3=405 \end{cases}$

តាមមធ្យមនព្វន្ត យើងបាន $u_1+u_3=2u_2$

គេបាន $2u_2+u_2=27 \Leftrightarrow 3u_2=27$

នាំឱ្យ $u_2=\frac{27}{3}=9$

នោះ $\begin{cases} u_1+u_3=18 \\ u_1u_3=45 \end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការជាឫសរបស់សមីការ $x^2+18x+45=0$

សមមូល $(x-3)(x-15)=0$

នាំឱ្យ $x=3$, $x=15$

យើងបាន $x=u_1=3$, $x=u_3=15$

ដូចនេះ $u_1=3$, $u_2=9$, $u_3=15$ ។

៦. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $10-3x$, $2x^2+3$, $7-4x$ ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វីតនព្វន្ត ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ x

យើងមាន $10-3x$, $2x^2+3$, $7-4x$

ដើម្បីឱ្យចំនួននេះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត លុះត្រាតែ

$$10-3x+7-4x=2\left(2x^2+3\right)$$

$$-7x+17=4x^2+6$$
$$4x^2+7x-11=0$$
$$\Rightarrow x=1\ ,\ \ x=-\frac{11}{4}$$

ដូចនេះ $x=1\ ,\ \ x=-\frac{11}{4}$ ។

៧. គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) ដោយដឹងថា $u_{11}=53$ និង $u_{50}=209$ ។

ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត។

ខ. គណនា S_n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត

យើងមាន $u_{11}=53$ និង $u_{50}=209$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_p+(n-p)d$

នាំឱ្យ $u_{50}=u_{11}+39d$

សមមូល $209 = 53 + 39d \Leftrightarrow 39d = 156$

នាំឱ្យ $d = \frac{156}{39} = 4$

នោះ $u_n = 53 + (n - 11)4 = 4n + 9$

ដូចនេះ $u_n = 4n + 9$ ។

ខ. គណនា S_n

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$

ដោយ $u_n = 4n + 9$ នាំឱ្យ $u_1 = 13$

យើងបាន $S_n = \frac{n(13 + 4n + 9)}{2} = \frac{4n^2 + 22n}{2} = 2n^2 + 11n$

ដូចនេះ $S_n = 2n^2 + 11n$ ។

៨. គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $2, 7, 12, \ldots$ និង $2, 5, 8, \ldots$ ។ តើក្នុងចំណោម 121 តួនៃស្វ៊ីត ទាំងពីរនេះមានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ?

ដំណោះស្រាយ

តាង $(a_n): 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, \ldots$

និង $(b_n): 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, \ldots$

យើងបាន

$$a_1 = b_1 = 2$$
$$a_2 = b_2 = 17$$
$$a_3 = b_3 = 32$$

យើងតាង $(c_m) : 2 , 17 , 32 , \ldots$

នោះ (c_m) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១ ស្មើនឹង 2 និងផលសងរួមស្មើនឹង 15 ។

គេបាន $c_m = 2 + (m-1)15$

នាំឱ្យ $c_m = 15m - 13$

ដោយ $c_m \le b_{121}$ ព្រោះស្វ៊ីត (b_n) មានផលសងរួមតូចជាងផលសងរួមស្វ៊ីត (a_n)

ដែល $b_{121} = 2 + (121-1)3 = 362$

យើងបាន $15m - 13 \le 362$

$$15m \le 375 \Rightarrow m \le \frac{375}{15} = 25$$

ដូចនេះ មានចំនួន 25 តួ ដែលមានតម្លៃស្មើៗគ្នា ។

៩. បើ x, y, z គឺជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ចូរបង្ហាញថា $(x^2 + xy + y^2), (z^2 + xz + x^2)$ និង $(y^2 + yx + z^2)$ គឺជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\left(x^2+xy+y^2\right),\left(z^2+xz+x^2\right)$ និង $\left(y^2+yz+z^2\right)$ គឺជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដោយ x,y,z គឺជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តគេបាន $x+z=2y$

ដើម្បីឱ្យ$\left(x^2+xy+y^2\right),\left(z^2+xz+x^2\right)$ និង $\left(y^2+yx+z^2\right)$ គឺជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត លុះត្រាតែ $\left(x^2+xy+y^2\right)+\left(y^2+yx+z^2\right)=2\left(z^2+xz+x^2\right)$

គេបាន$\left(x^2+xy+y^2\right)+\left(y^2+yz+z^2\right)$

$$
\begin{aligned}
&=\left[x^2+x\left(\frac{x+z}{2}\right)+\left(\frac{x+z}{2}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{x+z}{2}\right)^2+z\left(\frac{x+z}{2}\right)+z^2\right]\\
&=\left[x^2+\frac{1}{2}x(x+z)+\frac{1}{4}(x+z)^2\right]+\left[\frac{1}{4}(x+z)^2+\frac{1}{2}z(x+z)+z^2\right]\\
&=x^2+\frac{1}{2}(x+z)^2+\frac{1}{2}(x+z)^2+z^2\\
&=x^2+(x+z)^2+z^2\\
&=x^2+x^2+2xz+z^2+z^2=2\left(x^2+xz+z^2\right)
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\left(x^2+xy+y^2\right),\left(z^2+xz+x^2\right)$ និង $\left(y^2+yz+z^2\right)$ គឺជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

១០. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ ដែល a,b,c,d,e,f គឺជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត និងមានផលសងរួមមិនសូន្យ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ dx+ey=f & (2) \end{cases}$

យើងបាន $\begin{cases} ax+by=c & \times(-d) \\ dx+ey=f & \times(a) \end{cases}$

$$\begin{cases} -adx-bdy=-cd \\ adx+aey=af \end{cases}$$

នាំឱ្យ $(ae-bd)y=af-cd$

$\Rightarrow y=\dfrac{af-cd}{ae-bd}$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន

$$ax+b\times\frac{af-cd}{ae-bd}=c$$

$$ax=\frac{ace-bcd-abf+bcd}{ae-bd}=\frac{ace-abf}{ae-bd}$$

$$\Rightarrow x=\frac{ce-bf}{ae-bd}$$

ដោយ a,b,c,d,e,f គឺជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត និងមានផលសងរួមមិនសូន្យ ។

យើងតាង t ជាផលសងរួម ។

យើងបាន $b=a+t$, $c=a+2t$, $d=a+3t$,$e=a+4t$, $f=a+5t$

ដោយ $x=\dfrac{ce-bf}{ae-bd}$

យើងបាន $x=\dfrac{(a+2t)(a+4t)-(a+t)(a+5t)}{(a)(a+4t)-(a+t)(a+3t)}$

$$=\frac{a^2+6at+8t^2-a^2-6t-5t^2}{a^2+4at-a^2-4at-3t^2}=\frac{3t^2}{-3t^2}=-1$$

នាំឱ្យ $x=-1$ ។

ហើយ $y=\dfrac{af-cd}{ae-bd}$

យើងបាន $y=\dfrac{a(a+5t)-(a+2t)(a+3t)}{(a)(a+4t)-(a+t)(a+3t)}$

$$=\frac{a^2+5at-a^2-5at-6t^2}{a^2+4at-a^2-4at-3t^2}=\frac{-6t^2}{-3t^2}=2$$

នាំឱ្យ $y=2$ ។

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយតែមួយគត់គឺ $(-1\,,\,2)$ ។

១១. គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ចូរបង្ហាញថា $a^2+2bc=c^2+2ab$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a^2+2bc=c^2+2ab$

ដោយ a , b , c ជាបីចំនួនរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

នោះគេតាង d ជាផលសងរួម

យើងបាន $a^2+2bc=(c-2d)^2+2b(a+2d)$

$$
\begin{aligned}
&=c^2-4cd+4d^2+2ab+4bd\\
&=c^2+2ab-4d(b+d)+4d^2+4b\\
&=c^2+2ab
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $a^2+2bc=c^2+2ab$ ។

១២. គេដឹងថា ផលបូកតួទី1 និងតួទី 4 នៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើនឹង 2 និង ផលបូកការេរបស់វាស្មើនឹង 20 ។ ចូររកផលបូកប្រាំបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។

ដំណោះស្រាយ

រកផលបូកប្រាំបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីត

យើងមាន $\begin{cases} a_1 + a_4 = 2 & (1) \\ a_1^2 + a_4^2 = 20 & (2) \end{cases}$

តាម (1) យើងបាន $a_1 + a_1 + 3d = 2$ ឬ $2a_1 = 2 - 3d \Rightarrow a_1 = 1 - \frac{3d}{2}$

តាម (2) យើងបាន $a_1^2 + (a_1 + 3d)^2 = 20 \Leftrightarrow 2a_1^2 + 6a_1 + 9d^2 = 20$

សមមូល $\left(1 - \frac{3d}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{3d}{2} + 3d\right)^2 = 20$

$$\Leftrightarrow \left(1 - 3d + \frac{9}{4}d^2\right) + \left(1 + 3d + \frac{9}{4}d^2\right) = 20$$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{18}{4}d^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{18}{4}d^2 = 18$$

$$\Rightarrow d^2 = 4$$

នាំឱ្យ $d = \pm 2$

+ ចំពោះ $d = -2$ យើងបាន

$$a_1 = 1 - \frac{3}{2}(-2) = 4$$
$$a_8 = a_1 + 7d = 4 + 7(-2) = -10$$

គេបាន $S_8 = \frac{8}{2}(a_8 + a_1) = 4(-10 + 4) = -24$ ។

+ ចំពោះ $d = 2$ យើងបាន

$a_1 = 1 - \frac{3}{2}(2) = -2$

$a_8 = a_1 + 7d = -2 + 7(2) = 12$

គេបាន $S_8 = \frac{8}{2}(a_8 + a_1) = 4(12 - 2) = 40$ ។

១៣. គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម៖

ក. $2 + 4 + 6 + ... + 146$

ខ. $100 + 95 + 90 + 85 + ... - 20$

គ. $-193 - 189 - 185 - ... - 21 - 17$

ឃ. $5\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} + ... - 3$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ក. $2 + 4 + 6 + ... + 146$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

យើងមាន $a_1 = 2$, $d = 2$

ដោយ $a_n = a_1 + (n-1)d$ ដែល $a_n = 146$

សមមូល $2+(n-1)2=146$

$$\Leftrightarrow 2n=146$$

$$\Rightarrow n=\frac{146}{2}=73$$

យើងបាន $S_{73}=\frac{73}{2}(a_1+a_{73})$

$$=\frac{73}{2}(2+146)=73\times74=5402$$

ដូចនេះ $S_{73}=5402$ ។

ខ. $100+95+90+85+...-20$

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

យើងមាន $a_1=100$, $d=-5$

ដោយ $a_n=a_1+(n-1)d$ ដែល $a_n=-20$

សមមូល $100+(n-1)(-5)=-20$

$$\Leftrightarrow -5n=-20-105=-125$$

$$\Rightarrow n=\frac{-125}{-5}=25$$

យើងបាន $S_{25}=\frac{25}{2}(a_1+a_{25})$

$$=\frac{25}{2}(100-20)=25\times 40=1000$$

ដូចនេះ $S_{25}=1000$ ។

គ. $-193-189-185-...-21-17$

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

យើងមាន $a_1=-193$, $d=4$

ដោយ $a_n=a_1+(n-1)d$ ដែល $a_n=-17$

សមមូល $-193+(n-1)4=-17$

$$\Leftrightarrow 4n=-17+197=180$$

$$\Rightarrow n=\frac{180}{4}=45$$

យើងបាន $S_{45}=\frac{45}{2}(a_1+a_{45})$

$$=\frac{45}{2}(-193-17)=45\times(-105)=-4725$$

ដូចនេះ $S_{25}=-4725$ ។

ឃ. $5\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}+...-3$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

យើងមាន $a_1 = 5\frac{1}{4} = \frac{21}{4}$, $d = -\frac{3}{4}$

ដោយ $a_n = a_1 + (n-1)d$ ដែល $a_n = -3$

សមមូល $\frac{21}{4} + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) = -3$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}n + \frac{24}{4} = -3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}n + 6 = -3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}n = -3 - 6 = -9$$

$$\Rightarrow n = \frac{-9 \times 4}{-3} = 3 \times 4 = 12$$

យើងបាន $S_{12} = \frac{12}{2}(a_1 + a_{12})$

$$= 6\left(\frac{21}{4} - 3\right) = 6 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{2}$$

ដូចនេះ $S_{12} = \frac{27}{2}$ ។

១៤. គេឱ្យ a_1 , a_2 , a_3 ,..., a_n ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែល $a_i > 0$ ចំពោះគ្រប់ $i = 1,2,3,4,...n$ ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$

ដោយ a_1 , a_2 , a_3 ,..., a_n ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះគេតាង d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីត

យើងបាន $\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{a_1\left(a_1+d\right)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+d}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)$

$$\frac{1}{a_2a_3}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)$$

$$\frac{1}{a_3a_4}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)$$

....

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)$$

នោះយើងបាន $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{a_n-a_1}{a_1a_n}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{\left[a_1+(n-1)d\right]-a_1}{a_1a_n}\right)$$

$$=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$ ។

១៥. បើស្វ៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1+a_2+a_3=3$ និង $a_3+a_4+a_5=33$ ។

កំណត់តម្លៃ $a_{300}+a_{400}+a_{500}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ $a_{300}+a_{400}+a_{500}$

យើងមាន $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=3\\ a_3+a_4+a_5=33\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=3\\ (a_1+2d)+(a_1+3d)+(a_1+4d)=33\end{cases}$

$$\begin{cases}3a_1+3d=3\\ 3a_1+9d=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1+d=1\\ a_1+3d=11\end{cases}$$

គេទាញបាន $a_1=-4$, $d=5$

នាំឱ្យ $a_{300}+a_{400}+a_{500}=(a_1+299d)+(a_1+399d)+(a_1+499d)$

$$= 3a_1 + 1197d$$
$$= 3(-4) + 1197 \times 5 = 5973$$

ដូចនេះ $a_{300} + a_{400} + a_{500} = 5973$ ។

១៦. ពិនិត្យស្វ៊ីតខាងក្រោម:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, ...$$ ។

ក. តើតួដែលមានចំនួន $\frac{18}{25}$ ជាតួទីប៉ុន្មាន ?

ខ. រកតួទី 666 ។

គ. រកផលបូកនៃស្វ៊ីតនេះដល់តួទី 666 ។

ដំណោះស្រាយ

ក. តើតួដែលមានចំនួន $\frac{18}{25}$ ជាតួទីប៉ុន្មាន ?

យើងមាន $\left\{\frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}, \left\{\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}\right\}, \left\{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\}, ...$

នោះគេបានក្រុមតួទី n មានផ្ទុក n តួគឺ:

$$\left\{\frac{n}{n+1}, \frac{n-1}{n+1}, \frac{n-2}{n+1}, ..., \frac{1}{n+1}\right\}$$

នាំឱ្យតួចុងក្រោយនៃក្រុមទី n គឺជាតួទី $\frac{n(n+1)}{2}$ នៃស្វ៊ីតដើម។

ដោយចំនួន $\frac{18}{25}$ គឺជាតួទី 7 នៃក្រុមតួទី 24 ។

ដោយចំនួនតួចុងក្រោយនៃក្រុមទី 23 គឺជាតួទី $\frac{23(23+1)}{2}=276$

នាំឱ្យចំនួន $\frac{18}{25}$ គឺជាតួទី $276+7=283$ នៃស្វ៊ីតដើម ។

ដូចនេះ ចំនួន $\frac{18}{25}$ ជាតួទី 283 ។

ខ. រកតួទី 666

យើងបាន $\frac{n(n+1)}{2}=666$

$$n(n+1)=1332 \Leftrightarrow n^2+n-1332=0$$

គេទាញបាន $n=-37$, $n=36$ ដោយ $n\in\mathbb{N}$

នាំឱ្យចំនួនតួចុងក្រោយនៃក្រុមទី 36 គឺជាតួទី $\frac{36(36+1)}{2}=666$

ដូចនេះ តួទី 666 នៃស្វ៊ីតដើមគឺជាតួចុងក្រោយនៃក្រុមទី 36 គឺ $\frac{1}{37}$ ។

គ. រកផលបូកនៃស្វ៊ីតនេះដល់តួទី 666

ដោយផលបូកតួក្នុងក្រុមទី n គឺ:

$$\frac{n}{n+1}+\frac{n-1}{n+1}+\frac{n-2}{n+1}+...+\frac{1}{n+1}=\frac{n(n+1)}{2(n+1)}=\frac{n}{2}$$

នោះផលបូកនៃស្វ៊ីតរហូតដល់តួទី 666 គឺ

$$\sum_{n=1}^{36}\frac{n}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{36(36+1)}{2}=\frac{1}{2}\times 666=333$$

ដូចនេះ ផលបូកនៃស្វ៊ីតរហូតដល់តួទី 666 ស្មើនឹង 333 ។

១៧. ឧបមាថា $\{a_n\}$ គឺជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួមវិជ្ជមាន ហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=35$

និង $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=285$ ។

ចូររកផលបូកចាប់ពីតួទី n ដល់តួទី $2n$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកផលបូកចាប់ពីតួទី n ដល់តួទី $2n$

តាង d ជាផលសងរួម

នោះយើងបាន $a_1=a_3-2d$, $a_2=a_3-d$, $a_4=a_3+d$, $a_5=a_3+2d$

តាមលក្ខខណ្ឌទី១ នាំឱ្យ $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=35$

$$\Leftrightarrow a_3-2d+a_3-d+a_3+a_3+d+a_3+2d=35$$

$\Leftrightarrow 5a_3 = 35 \Rightarrow a_3 = 7$

តាមលក្ខខណ្ឌទី២ នាំឱ្យ $a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + a_4^{\,2} + a_5^{\,2} = 285$

$$\Leftrightarrow (a_3 - 2d)^2 + (a_3 - d)^2 + a_3^{\,2} + (a_3 + d)^2 + (a_3 + 2d)^2 = 285$$
$$\Leftrightarrow (7 - 2d)^2 + (7 - d)^2 + 7^2 + (7 + d)^2 + (7 + 2d)^2 = 285$$
$$\Leftrightarrow 10d^2 = 40$$
$$\Rightarrow d^2 = 4 \Rightarrow d = 2 \qquad (d > 0)$$

យើងបាន $a_n = a_3 + (n-3)d = 7 + (n-3)\times 2 = 2n+1$

នាំឱ្យ $a_{2n} = 4n+1$

នោះយើងបានរកផលបូកចាប់ពីតួទី n ដល់តួទី $2n$ គឺ

$$\frac{(n+1)\left[(4n+1)+(2n+1)\right]}{2} = \frac{(n+1)(6n+2)}{2} \quad (\text{ព្រោះមាន } n+1 \text{ តួ })$$
$$= (n+1)(3n+1)$$

ដូចនេះ ផលបូកចាប់ពីតួទី n ដល់តួទី $2n$ គឺ $(n+1)(3n+1)$ ។

១៨. តាង S_n ជាផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $51, 47, 43, \ldots$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ n ដែលធ្វើឱ្យ S_n មានតម្លៃអតិបរមានិងកំណត់តម្លៃនៃ S_n ។

ខ. កំណត់តម្លៃ n ដែលធ្វើឱ្យ $|S_n|$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់តម្លៃ n ដែលធ្វើឱ្យ S_n មានតម្លៃអតិបរមានិងកំណត់តម្លៃនៃ S_n ។

យើងមាន ស្វីតនព្វន្ត $51,47,43,\ldots$ ដែលមាន $a_1=51$, $d=-4$

នាំឱ្យ $a_n=a_1+(n-1)d=51+(n-1)(-4)=55-4n$

នាំឱ្យ $a_n>0$ ចំពោះ $n=1,2,3,\ldots,13$ និង $a_n<0$ ចំពោះ $n=14,15,16,\ldots$

ដូចនេះ S_n មានតម្លៃអតិបរមាពេល $n=13$ ។

$$S_{13}=\frac{13(51+55-4\times13)}{2}=\frac{13(54)}{2}=351$$

ដូចនេះ $S_{13}=351$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ n ដែលធ្វើឱ្យ $|S_n|$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

$$S_n=\frac{n(55-4n+51)}{2}=\frac{n(106-4n)}{2}=n(53-2n)$$

ពិនិត្យ $|S_1|$, $|S_{26}|$, $|S_{27}|$

យើងបាន $|S_1|=51$

$$|S_{26}|=|26(53-2\times26)|=26$$
$$|S_{27}|=|27(53-2\times27)|=27$$

នាំឱ្យ $|S_n|$ មានតម្លៃអប្បបរមា ពេល $n=26$

ដូចនេះ $n=26$ ។

១៩. តាង $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែល $a_1=1$ និង $a_{3k+1}=-2$ ដែល k ជចំនួនគត់ថេរវិជ្ជមាន ។ ហើយតាង S_n ជាផលបូកនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ដល់តួទី n ។

ក. រកតួទូទៅនៃ a_n ។

ខ. រកតម្លៃអតិបរមានៃ S_n និងតម្លៃនៃ n ដែលធ្វើឱ្យ S_n មានអតិបរមា ។

គ. កំណត់តម្លៃ S_{2k+1} ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកតួទូទៅនៃ a_n

យើងមាន $a_1=1$ និង $a_{3k+1}=-2$

ដោយ $a_{3k+1}=a_1+(3k)d$

សមមូល $1+3kd=-2\Rightarrow d=-\dfrac{1}{k}$

នាំឱ្យ $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\left(-\dfrac{1}{k}\right)$

$$=\frac{k+1-n}{k}$$

ដូចនេះ $a_n=\dfrac{k+1-n}{k}$ ។

ខ. រកតម្លៃអតិបរមានៃ S_n និងតម្លៃនៃ n ដែលធ្វើឱ្យ S_n មានអតិបរមា ។

យើងមាន $a_n = \dfrac{k+1-n}{k}$

នាំឱ្យ S_n មានអតិបរមាពេល $n = k$

យើងបាន: $a_k = \dfrac{k+1-k}{k} = \dfrac{1}{k}$

នោះ $S_k = \dfrac{k(a_1 + a_k)}{2} = \dfrac{k\left(1+\dfrac{1}{k}\right)}{2} = \dfrac{k+1}{2}$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{n+1}{2}$ និង $n = k$ ដែលធ្វើឱ្យ S_n មានអតិបរមា ។

គ. កំណត់តម្លៃ S_{2k+1}

យើងមាន $a_n = \dfrac{k+1-n}{k} \Rightarrow a_{2k+1} = \dfrac{k+1-(2k+1)}{k} = -1$

នាំឱ្យ $S_{2k+1} = \dfrac{(2k+1)(a_1 + a_{2k+1})}{2} = \dfrac{(2k+1)(1+(-1))}{2} = 0$

ដូចនេះ $S_{2k+1} = 0$ ។

២០. គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\{a_n\}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

$$(i)\ a_1 = 1$$
$$(ii)\ \ln a_n - \ln a_{n-1} = \ln(n-1) - \ln(n+1) \ ,\ n \geq 2$$

ចូរគណនាតម្លៃ $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $\sum_{k=1}^{n} a_k$

តាម (ii) យើងបាន $\ln\frac{a_n}{a_{n-1}} = \ln\frac{n-1}{n+1}$

សមមូល $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\times....\times\frac{a_2}{a_1} = \frac{n-1}{n+1}\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\frac{n-4}{n-2}\times...\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$$

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{2}{n(n+1)} \quad , \ n \geq 2$$

នាំឱ្យ $a_n = \frac{2a_1}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

នោះ $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$$= 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 2\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2n}{n+1}$ ។

មេរៀនទី៣ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

១. និយមន័យ

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស្វ៊ីតចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី១) ស្មើនឹងតួមុខបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q មួយដែល $q \neq 0$ ។ ដែល q ហៅថាផលធៀបរួម ឬ រេសុងនៃស្វ៊ីត ។

ឧទាហរណ៍ គេមានស្វ៊ីត $(a_n): 1, 2, 4, 8, 16, ...$

យើងបាន $a_1 = 1$

$$a_2 = 2 = 1 \times 2 = a_1 \times 2$$
$$a_3 = 4 = 2 \times 2 = a_2 \times 2$$
$$a_4 = 8 = 4 \times 2 = a_3 \times 2$$
$$a_5 = 16 = 8 \times 2 = a_4 \times 2$$
$$-------------$$
$$a_n = a_{n-1} \times 2$$

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀប $q = 2$ ។

ជាទូទៅ ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ តាងដោយ q ដែល $q \neq 0$ ។

កំណត់ដោយ $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{u_4}{u_3} = ... = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ ។

២. តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

បើ $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានផលធៀបរួម q ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន $u_1 = u_1$

$$u_2 = u_1 \times q$$
$$u_3 = u_2 \times q = u_1 \times q^2$$
$$u_4 = u_3 \times q = u_1 \times q^3$$
$$-----------$$
$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

ដូចនេះ រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ កំណត់ដោយៈ

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ឬ $u_n = u_p \times q^{n-p}$ ។

លំហាត់គំរូ១ គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $(u_n): 6, 12, 24, 48, \ldots$ ។

ចូររកតួទី n នៃស្វ៊ីត ។

ដំណោះស្រាយ

រកតួទី n នៃស្វ៊ីត

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $u_1 = 6$ និង $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{12}{6} = 2$

យើងបាន $u_n = 6\times 2^{n-1} = 3\times 2^n$

ដូចនេះ $u_n = 3\times 2^n$ ។

លំហាត់គំរូ២ គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $(u_n): 3 , 12 , 48 , 192 , \dots$ ។

ក. គណនាតួទី 9

ខ. តើចំនួន 12288 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាតួទី 9

យើងមាន $(u_n): 3 , 12 , 48 , 192 , \dots$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1\times q^{n-1}$

ដោយ $u_1 = 3$ និង $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{12}{3} = 4$

យើងបាន $u_9 = 3\times 4^{9-1} = 3\times 4^8$

ដូចនេះ $u_9 = 3\times 4^8$ ។

ខ. តើចំនួន 12288 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1\times q^{n-1}$ ដោយ $u_n = 12288$

យើងបាន $12288 = 3\times 4^{n-1} \Leftrightarrow 4096 = 4^{n-1}$

$$4^6 = 4^{n-1} \Leftrightarrow 6 = n-1$$
$$\Rightarrow n = 7$$

ដូចនេះ ចំនួន 12288 ជាតួទី 7 នៃស្វ៊ីត ។

៣. ផលគុណតួ ស្មើចម្ងាយពីតួចុង

បើ $u_1 , u_2 , u_3 , \dots , u_k , \dots , u_{n-k+1} , \dots , u_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

យើងបាន $u_1 \times u_n = u_1 \times u_1 \times q^{n-1} = u_1{}^2 \times q^{n-1}$

$$u_2 \times u_{n-1} = u_1 \times q \times u_1 \times q^{n-2} = u_1{}^2 \times q^{n-1}$$
$$u_3 \times u_{n-2} = u_1 \times q^2 \times u_1 \times q^{n-3} = u_1{}^2 \times q^{n-1}$$
$$-----------------------$$
$$u_k \times u_{n-k+1} = u_1 \times q^{k-1} \times u_1 \times q^{n-k} = u_1{}^2 \times q^{n-1}$$

ដូចនេះ $u_1 \times u_n = u_2 \times u_{n-1} = \dots = u_k \times u_{n-k+1} = u_1{}^2 \times q^{n-1}$ ។

ជាទូទៅ ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង ស្មើនឹងផលគុណតួចុងទាំងពីរ ។

កំណត់ដោយ $u_1 \times u_n = u_k \times u_{n-k+1} = u_1{}^2 \times q^{n-1}$ ។

- ❖ បីចំនួនតគ្នា a , b , c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ សមមូល $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$ ឬ $b^2 = a \times c$ ឬ $b = \sqrt{a \times c}$ ហៅថាមធ្យមធរណីមាត្រនៃ a និង c ។

៤. ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ឧទាហរណ៍១ គណនាផលបូក នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$(u_n): 1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243$ ។

ចម្លើយ គណនាផលបូក នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងតាង S_6 ជាផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមាន ផលធៀបរួមស្មើនឹង 3 ។

យើងបាន $S_6 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 \qquad (1)$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (1) **នឹងផលធៀបរួមស្មើ** 3

យើងបាន $3S_6 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 \quad (2)$

យក $(2) - (1)$ **យើងបាន**

$$2S_6 = 729 - 1 = 728$$
$$\Rightarrow S_6 = \frac{728}{2} = 364$$
$$\Rightarrow S_6 = 364$$

ដូចនេះ $S_6 = 364$ ។

ឧទាហរណ៍២ គណនាផលបូក នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$(u_n): 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128$ ។

ចម្លើយ គណនាផលបូក នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងតាង S_7 ជាផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមាន ផលធៀបរួមស្មើនឹង 2 ។

យើងបាន $S_6 = 2+4+8+16+32+64+128 \qquad (1)$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (1) **នឹងផលធៀបរួមស្មើ** 2

យើងបាន $2S_7 = 4+8+16+32+64+128+256 \quad (2)$

យក $(2)-(1)$ **យើងបាន**

$$S_7 = 256-2 = 254$$
$$\Rightarrow S_7 = 254$$

ដូចនេះ $S_7 = 254$ ។

បើ $u_1 , u_2 , u_3 , \ldots , u_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

យើងតាង $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ (1) ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។

យើងបាន $qS_n = qu_1 + qu_2 + qu_3 + \ldots + qu_n$

ឬ $qS_n = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + qu_n \qquad (2)$

យក $(2)-(1)$ យើងបាន $(q-1)S_n = qu_n - u_1$

ដោយ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

នាំឱ្យ $(q-1)S_n = q\left(u_1 \times q^{n-1}\right) - u_1 = u_1 \times q^n - u_1$

$$S_n = u_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

ដូចនេះ $S_n = u_1 \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ ដែល $q \neq 1$ ។

ជាទូទៅ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទីមួយ u_1 និង

ផលធៀបរួម q ដែល $q \neq 1$ ។ កំណត់ដោយ $S_n = u_1 \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ ។

លំហាត់គំរូ១ គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $(u_n): 3 \,,\ 6 \,,\ 12 \,,\ 24 \,, \ldots.$

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។

តាមរូបមន្ត $S_n = u_1 \times \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$ ដែល $u_1 = 3 \,,\ u_2 = 6$

នោះ $q = \dfrac{u_2}{u_1} = 2$

យើងបាន $S_n = 3 \times \dfrac{1 - 2^n}{1 - 2} = -3\left(1 - 2^n\right)$

$$= 3\left(2^n - 1\right)$$

ដូចនេះ $S_n = 3\left(2^n - 1\right)$ ។

លំហាត់គំរូ២

១. គេមានស្វីតធរណីមាត្រ $6 , 3 , 1.5 , 0.75 , \ ...$ ។

ក. គណនាតួទី 7

ខ. គណនាផលបូក 7 តួដំបូងនៃស្វីត ។

២. គណនា $S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + ... + 777...$ (n ដងលេខ 7)។

៣. គណនា

$$A = 100 \times \left(1 + \frac{0.10}{12}\right) + 100 \times \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^2 + \ ... + 100 \times \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{60}$$

ដំណោះស្រាយ

១.ក. គណនាតួទី 7

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ដែល $u_1 = 6$ និង $q = \frac{1}{2}$

យើងបាន $u_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 \times \frac{1}{2^{n-2}}$

$$u_n = \frac{3}{2^{n-2}}$$

នាំឱ្យ $u_7 = \frac{3}{2^{7-2}} = \frac{3}{2^5} = 0.09375$

ដូចនេះ $u_7 = 0.09375$ ។

ខ. គណនាផលបូក 7 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត

តាមរូបមន្ត $S_n = u_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$

នាំឱ្យ $S_7 = u_1 \times \frac{q^7 - 1}{q - 1}$ ដែល $u_1 = 6$ និង $q = \frac{1}{2}$

យើងបាន $S_7 = 6 \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{381}{32} = 11.90625$

ដូចនេះ $S_7 = 11.90625$ ។

២. គណនា $S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \ldots + 777\ldots$ (n ដងលេខ 7)។

យើងបាន $S_n = \frac{7}{9}\left(9 + 99 + 999 + 999 + \ldots + 999\ldots9\right)$

$$S_n = \frac{7}{9}\left(10 - 1 + 100 - 1 + 1000 - 1 + \ldots + 1000\ldots0 - 1\right)$$

$$= \frac{7}{9}\left(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n - n\right)$$

$$= \frac{7}{9}\left(10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n\right) = \frac{7\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}{81}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{7\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}{81}$ ។

៣. គណនា

$$A = 100\times\left(1+\frac{0.10}{12}\right) + 100\times\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^2 + \ldots + 100\times\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{60}$$

យើងមាន $u_1 = 100\times\left(1+\dfrac{0.10}{12}\right)$ និង $q = \left(1+\dfrac{0.10}{12}\right)$

យើងបាន $A = S_{60} = u_1 \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

នាំឱ្យ $A = S_{60} = 100\times\left(1+\dfrac{0.10}{12}\right)\times\dfrac{\left(1+\dfrac{0.10}{12}\right)^n - 1}{\left(1+\dfrac{0.10}{12}\right) - 1}$

$$A = S_{60} = 100\times\left(1+\frac{0.10}{12}\right)\times\frac{\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{60} - 1}{\frac{0.10}{12}}$$

$$= 100\left(\frac{12}{0.10}+1\right)\left[\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{60} - 1\right] = 12100\left[\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{60} - 1\right]$$

$$= 7808.24$$

ដូចនេះ $A = 7808.24$ ។

៥. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

បើ $u_1 , u_2 , u_3 , \dots , u_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

យើងបាន $S_n = u_1 \times \dfrac{q^n - 1}{q-1}$ ដែល $q \neq 1$

ឬ $S_n = \dfrac{u_1 q^n}{q-1} - \dfrac{u_1}{q-1}$

បើ $|q| < 1$ នោះតម្លៃ $q^n \to 0$ កាលណា $n \to +\infty$

នោះយើងបាន $S_n = 0 - \dfrac{u_1}{q-1} = -\dfrac{u_1}{q-1}$

ឬ $S_n = \dfrac{u_1}{1-q}$ ។

ជាទូទៅ ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ ដែល $|q| < 1$

កំណត់ដោយ $S_n = \dfrac{u_1}{1-q}$ ។

លំហាត់គំរូ១ គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

ក. $18 , 1.8 , 0.18 , 0.018 , 0.0018 , 0.00018 , \dots$ ។

ខ. $18 , 6 , 2 , \dfrac{2}{3} , \dfrac{2}{9} , \dfrac{2}{27} , \dots$ ។

ចម្លើយ

ក. $18\ ,1.8\ ,0.18\ ,0.018\ ,0.0018\ ,0.00018\ ,\ldots$ ។

យើងមាន $u_1=18$ និង $q=\dfrac{1}{10}<1$

តាមរូបមន្ត $S_n=\dfrac{u_1}{1-q}$

យើងបាន $S_n=\dfrac{18}{1-\dfrac{1}{10}}=\dfrac{180}{9}=20$

ដូចនេះ $S_n=20$ ។

ខ. $18\ ,6\ ,2\ ,\dfrac{2}{3}\ ,\dfrac{2}{9}\ ,\dfrac{2}{27}\ ,\ldots$ ។

យើងមាន $u_1=18$ និង $q=\dfrac{1}{3}<1$

តាមរូបមន្ត $S_n=\dfrac{u_1}{1-q}$

យើងបាន $S_n=\dfrac{18}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{54}{2}=27$

ដូចនេះ $S_n = 27$ ។

លំហាត់គំរូ២ សរសេរចំនួនទសភាគខួប $2.\overline{25}$ ជាចំនួនសនិទានដែលមានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $2.\overline{25} = 2 + 0.25 + 0.0025 + 0.000025 + \ldots$

ចាប់ពីតួទីពីរទៅ ជាផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $u_1 = 0.25$ និង $q = \frac{1}{100}$ ។

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{u_1}{1-q}$

គេបាន $2.\overline{25} = 2 + \frac{0.25}{1 - \frac{1}{100}} = 2 + \frac{25}{99}$

$$= \frac{198 + 25}{99} = \frac{223}{99}$$

ដូចនេះ $2.\overline{25} = \frac{223}{99}$ ។

ផ្នែកលំហាត់

1. កំណត់ចំនួនតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $1,2,4,8,...$ ខ. $20,10,5,\frac{5}{2},...$

គ. $2,4,8,16,...$ ឃ. $3,9,27,81,...$

ង. $\frac{1}{10},\frac{1}{100},\frac{1}{1000},...$ ច. $\frac{1}{6},\frac{1}{18},\frac{1}{54},...$

2. បង្ហាញថាស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

ក. $u_n = 7\times(3)^{n-1}$ ខ. $u_n = \frac{1}{8}\times(4)^n$

3. គេឱ្យ u_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ បើគេដឹងថា ៖

ក. $u_4 = 18$, $u_7 = 1458$ ។ គណនា q និង u_{10} ។

ខ. $u_3 = 20$, $u_6 = 1280$ ។ គណនា q និង u_1 ។

គ. $u_1 = 3$, $S_3 = 21$ ។ គណនា q និង S_7 ។

4. គណនាផលបូក S_n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $2,4,8,16,...$ ខ. $20,10,5,\frac{5}{2},...$

គ. $\sqrt{3},3,3\sqrt{3},9,...$ ឃ. $3,9,27,81,...$

ង. $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{4},...$ ច. $\frac{1}{6},\frac{1}{18},\frac{1}{54},...$

5. គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $48+24+12+...+\frac{3}{8}$

ខ. $\frac{1}{3}+1+3+...+6561$

គ. $9-6+4-...-\frac{128}{244}$

ឃ. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{2^5}+...-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}$

6. គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $2,6,18,54,...$

ក. គណនាតួទី n ។

ខ. តើចំនួន 39366 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត?

គ. គណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

7. គេឱ្យ a_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម q ។ បើគេដឹងថា:

   ក. $a_1 = 6$, $a_4 = 48$ គណនា a_{15} ។

   ខ. $a_4 = 48$, $a_8 = 3$ គណនា a_0 ។

8. គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

   ក. $1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{11\ldots111}_{n \text{ ដងលេខ } 1}$

   ខ. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}$

   គ. $9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{99\ldots999}_{n \text{ ដងលេខ } 9}$

9. គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $u_2 = -9$ និង $u_5 = \frac{1}{3}$ ។

10. គណនាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $u_1 = 5$ និង $S_\infty = 15$ ។

11. ផលបូកពីរតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើនឹង 9 និងផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួស្មើនឹង 25 ។ គណនា q និង u_1 បើផលធៀបរួម $q > 0$ ។

12. ចូរសរសេរជាចំនួនសនិទានដែលមានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ នូវចំនួនទសភាគខួបខាងក្រោមនេះ៖

   ក. $0.\overline{7}$ ខ. $2.\overline{34}$ គ. $0.\overline{452}$

13. គេមានស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន៖ $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+2$ និង $a_1=6$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

ក. គេតាង $b_n=a_n-4$ ។ ចូរស្រាយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

14. តួទី 3 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើនឹង 3 និងតួទី 6 ស្មើ $\frac{3}{8}$ ។ គណនាផលធៀបរួម តួទី1 និងផលបូក 8 តួដំបូង ។

15. គណនា a ដើម្បីឱ្យបីចំនួន $(a-3)$, $(a+1)$ និង $(4a-2)$ ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

16. គេទិញផ្ទះមួយតម្លៃ 30000 ដុល្លារ ។ អ្នកទិញត្រូវបង់ប្រាក់ជា 6 ដំណាក់កាល ដែលបង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួមស្មើ $\frac{9}{10}$ ។ កំណត់ប្រាក់ដែលត្រូវបង់តាមដំណាក់កាលនីមួយៗ ។

17. តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើ 3 ហើយមានផលធៀបរួម r ដែលតម្លៃដាច់ខាតនៃ r តូចជាង 1 ។ ផលបូកបីតួដំបូងស្មើ $\frac{8}{9}$ នៃផលបូក 6 តួដំបូង ។ គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ ។

18. ក. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ សមីការ $3x^2-8x+4=0\ \ (E)$ ។

ខ. គេមាន $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វីតធរណីមាត្រកើនដែលមាន u_3 និង u_4 នៃស្វីតនេះជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។ ទាញរកផលធៀបរួមនៃស្វីត និងគណនាតួទីមួយ u_1 នៃស្វីត ។

19. គេមានស្វីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1=3$ និង $a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{a_n+3}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ក. តាង $b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$ ។ ចូរស្រាយថា (b_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n=b_1+b_2+b_3+...+b_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. គណនា b_n រួចទាញរក a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

20. គេឱ្យស្វីតធរណីមាត្រមាន 7 តួ ដែលផលបូកបីតួដំបូងស្មើ 7 និងផលបូកបីតួចុងក្រោយស្មើនឹង 112 ។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

1. កំណត់ចំនួនតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $1,2,4,8,...$ ខ. $20,10,5,\frac{5}{2},...$

គ. $2,4,8,16,...$ ឃ. $3,9,27,81,...$

ង. $\frac{1}{10},\frac{1}{100},\frac{1}{1000},...$ ច. $\frac{1}{6},\frac{1}{18},\frac{1}{54},...$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនតួទី n

ក. $1,2,4,8,...$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $u_1 = 1$, $q = \frac{u_2}{u_1} = 2$

យើងបាន $u_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

ដូចនេះ $u_n = 2^{n-1}$ ។

ខ. $20,10,5,\frac{5}{2},...$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $u_1 = 20$, $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2}$

យើងបាន $u_n = 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ដូចនេះ $u_n = 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ។

គ. $2, 4, 8, 16, \ldots$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $u_1 = 2$, $q = \frac{u_2}{u_1} = 2$

យើងបាន $u_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

ដូចនេះ $u_n = 2^n$ ។

ឃ. $3, 9, 27, 81, \ldots$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $u_1 = 3$, $q = \frac{u_2}{u_1} = 3$

យើងបាន $u_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$

ដូចនេះ $u_n = 3^n$ ។

ង. $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $u_1 = \frac{1}{10}$, $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{10}$

យើងបាន $u_n = \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10^n}$

ដូចនេះ $u_n = \frac{1}{10^n}$ ។

ច. $\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \ldots$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $u_1 = \frac{1}{6}$, $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{3}$

យើងបាន $u_n = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2 \times 3^n}$

ដូចនេះ $u_n = \frac{1}{2 \times 3^n}$ ។

2. បង្ហាញថាស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

ក. $u_n = 7 \times (3)^{n-1}$ ខ. $u_n = \frac{1}{8} \times (4)^n$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ក. $u_n = 7 \times (3)^{n-1}$

នាំឱ្យ $u_{n+1} = 7\times(3)^n = 3\times 7\times(3)^{n-1} = 3u_n$

ដូចនេះ (u_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q=3$ និងតួទី1 $u_1 = 7$ ។

ខ. $u_{n+1} = \frac{1}{8}\times(4)^n$

នាំឱ្យ $u_n = \frac{1}{8}\times 4^{n-1} = \frac{1}{8}\times\frac{(4)^n}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\times 4^n\right) = \frac{1}{4}u_{n+1}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = 4u_n$

ដូចនេះ (u_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម$q=4$ និងតួទី1 $u_1 = \frac{1}{8}$ ។

3. គេឱ្យ u_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ បើគេដឹងថា ៖

ក. $u_3 = 18$, $u_7 = 1458$ ។ គណនា q និង u_{10} ។

ខ. $u_3 = 20$, $u_6 = 1280$ ។ គណនា q និង u_1 ។

គ. $u_1 = 3$, $S_3 = 21$ ។ គណនា q និង S_7 ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $u_3 = 18$, $u_7 = 1458$ ។ គណនា q និង u_{10} ។

តាមរូបមន្ត $u_n = u_p \times q^{n-p}$

យើងបាន $u_7 = u_3 \times q^4 \Leftrightarrow 1458 = 18q^4$

$$q^4=\frac{1458}{18}=81\Rightarrow q=\pm 3$$

ដោយ (u_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកើន នោះគេយក $q=3$

យើងបាន $u_{10}=u_3\times q^6=18\times 3^7=39366$

ដូចនេះ $q=3$ និង $u_{10}=39366$ ។

ខ. $u_3=20$, $u_6=1280$ ។ គណនា q និង u_1 ។

តាមរូបមន្ត $u_n=u_p\times q^{n-p}$

យើងបាន $u_6=u_3\times q^3\Leftrightarrow 1280=20q^3$

$$q^3=\frac{1280}{20}=64$$
$$\Rightarrow q=4$$

ដោយ $u_3=u_1\times q^2$

សមមូល $20=u_1\times 4^2\Rightarrow u_1=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$

ដូចនេះ $q=4$ និង $u_1=\frac{5}{4}$ ។

គ. $u_1=3$, $S_3=21$ ។ គណនា q និង S_7 ។

ដោយ $S_3=u_1\times\frac{q^3-1}{q-1}$

នោះគេបាន $21=3\times\dfrac{q^3-1}{q-1}\Leftrightarrow 21(q-1)=3(q^3-1)$

$$\begin{aligned}&21(q-1)=3(q-1)(q^2+q+1)\\&\Leftrightarrow 7=q^2+q+1\\&\Leftrightarrow q^2+q-6=0\\&\Leftrightarrow (q+3)(q-2)=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow q=-3<0$ មិនយក

$q=2$ យក

យើងបាន $S_7=u_1\times\dfrac{q^7-1}{q-1}=3\times\dfrac{2^7-1}{1}=3(127)=381$

ដូចនេះ $q=2$ និង $S_7=381$ ។

4. គណនាផលបូក S_n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $2,4,8,16,...$ ខ. $20,10,5,\dfrac{5}{2},...$

គ. $\sqrt{3},3,3\sqrt{3},9,...$ ឃ. $3,9,27,81,...$

ង. $\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\dfrac{1}{4},...$ ច. $\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{18},\dfrac{1}{54},...$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក S_n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ក. $2,4,8,16,...$

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ ដែល $u_1=2$, $q=2$

នោះគេបាន $S_n=\frac{2\left(2^n-1\right)}{2-1}=2\left(2^n-1\right)=2^{n+1}-2$

ដូចនេះ $S_n=2^{n+1}-2$ ។

ខ. $20,10,5,\frac{5}{2},...$

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ ដែល $u_1=20$, $q=\frac{1}{2}$

នោះគេបាន $S_n=\frac{20\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=\frac{20\left(\frac{1-2^n}{2^n}\right)}{-\frac{1}{2}}=40\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)$

ដូចនេះ $S_n=40\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)$ ។

គ. $\sqrt{3},3,3\sqrt{3},9,...$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{u_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$ ដែល $u_1 = \sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$

នោះគេបាន $S_n = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}^n - 1\right)}{\sqrt{3}-1}$

ដូចនេះ $S_n = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}^n - 1\right)}{\sqrt{3}-1}$ ។

ឃ. $3, 9, 27, 81, \ldots$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{u_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$ ដែល $u_1 = 3$, $q = 3$

នោះគេបាន $S_n = \frac{3\left(3^n - 1\right)}{2} = \frac{3}{2}\left(3^n - 1\right)$

ដូចនេះ $S_n = \frac{3}{2}\left(3^n - 1\right)$ ។

ង. $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}, \ldots$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{u_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$ ដែល $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

នោះគេបាន

$$S_n=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n-1\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}\times 2^{n-1}}\left(\frac{\sqrt{2}^n-2^n}{\sqrt{2}-2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2^n}\left(\frac{\sqrt{2}^n-2^n}{\sqrt{2}-2}\right)$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{\sqrt{2}}{2^n}\left(\frac{\sqrt{2}^n-2^n}{\sqrt{2}-2}\right)$ ។

ច. $\frac{1}{6},\frac{1}{18},\frac{1}{54},\ldots$

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ ដែល $u_1=\frac{1}{6}$, $q=\frac{1}{3}$

នោះគេបាន $S_n=\frac{\frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{3^n-1}{3^n}\right)$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{4}\left(\frac{3^n-1}{3^n}\right)$ ។

5. គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $48+24+12+...+\frac{3}{8}$

ខ. $\frac{1}{3}+1+3+...+6561$

គ. $9-6+4-...-\frac{128}{244}$

ឃ. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{2^5}+...-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូកស្វីតធរណីមាត្រ

ក. $48+24+12+...+\frac{3}{8}$

យើងមាន $u_1=48$, $q=\frac{1}{2}$

នោះគេបាន $u_n=48\times\frac{1}{2^{n-1}}=3\times\frac{1}{2^{n-5}}$

+ កំណត់ចំនួនតួនៃស្វីត

ដោយ $u_n=\frac{3}{8}$

នោះយើងបាន $3\times\frac{1}{2^{n-5}}=\frac{3}{8}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$

$\Leftrightarrow n-5=3$

$\Rightarrow n=8$

នោះគេបាន $S_8=u_1\times\frac{1-q^8}{1-q}=48\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{\frac{1}{2}}=48\times2\times\frac{2^8-1}{2^8}=\frac{765}{8}$

ដូចនេះ $S_8=\frac{765}{8}$ ។

ខ. $\frac{1}{3}+1+3+...+6561$

គ. $9-6+4-...-\frac{128}{244}$

ឃ. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{2^5}+...-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}$

6. គេមានស្វីតធរណីមាត្រ $2,6,18,54,...$

ក. គណនាតួទី n ។

ខ. តើចំនួន 39366 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វីត ?

គ. គណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស្វីតធរណីមាត្រ ។

7. គេឱ្យ a_n ជាស្វីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម q ។ បើគេដឹងថា:

n ដងលេខ 1

ក. $a_1 = 6$, $a_4 = 48$ គណនា a_{15} ។

ខ. $a_4 = 48$, $a_8 = 3$ គណនា a_0 ។

8. គណនាផលបូកនៃស្វីតខាងក្រោម៖ n ដងលេខ 9

ក. $1+11+111+1111+\ldots+\underbrace{11\ldots111}$

ខ. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}$

គ. $9+99+999+9999+\ldots+\underbrace{99\ldots999}$

9. គណនាផលបូកស្វីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $u_2 = -9$ និង $u_5 = \frac{1}{3}$ ។

10. គណនាផលធៀបរួមនៃស្វីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $u_1 = 5$ និង $S_\infty = 15$ ។

11. ផលបូកពីរតួដំបូងនៃស្វីតធរណីមាត្រស្មើនឹង 9 និងផលបូកនៃស្វីតធរណីមាត្រអនន្តតួស្មើនឹង 25 ។ គណនា q និង u_1 បើផលធៀបរួម $q > 0$ ។

12. ចូរសរសេរជាចំនួនសនិទានដែលមានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ នូវចំនួនទសភាគខួបខាងក្រោមនេះ៖

ក. $0.\overline{7}$ ខ. $2.\overline{34}$ គ. $0.\overline{452}$

13. គេមានស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន៖ $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+2$ និង $a_1=6$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

ក. គេតាង $b_n=a_n-4$ ។ ចូរស្រាយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

14. តួទី 3 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើនឹង 3 និងតួទី 6 ស្មើ $\frac{3}{8}$ ។ គណនាផលធៀបរួម តួទី1 និងផលបូក 8 តួដំបូង ។

15. គណនា a ដើម្បីឱ្យបីចំនួន $(a-3)$, $(a+1)$ និង $(4a-2)$ ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

16. គេទិញផ្ទះមួយតម្លៃ 30000 ដុល្លារ ។ អ្នកទិញត្រូវបង់ប្រាក់ជា 6 ដំណាក់កាល ដែលបង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួមស្មើ $\frac{9}{10}$ ។ កំណត់ប្រាក់ដែលត្រូវបង់តាមដំណាក់កាលនីមួយៗ ។

17. តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើ 3 ហើយមានផលធៀបរួម r ដែលតម្លៃដាច់ខាតនៃ r តូចជាង 1 ។ ផលបូកបីតួដំបូងស្មើ $\frac{8}{9}$ នៃផលបូក 6 តួដំបូង ។ គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ ។

18. ក. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ សមីការ $3x^2-8x+4=0$ (E) ។

ខ. គេមាន $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកើនដែលមាន u_3 និង u_4 នៃស្វ៊ីតនេះជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។ ទាញរកផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីត និងគណនាតួទីមួយ u_1 នៃស្វ៊ីត ។

19. គេមានស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1=3$ និង $a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{a_n+3}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ក. តាង $b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$ ។ ចូរស្រាយថា (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n=b_1+b_2+b_3+...+b_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. គណនា b_n រួចទាញរក a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

20. គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន 7 តួ ដែលផលបូកបីតួដំបូងស្មើ 7 និងផលបូកបីតួចុងក្រោយស្មើនឹង 112 ។

មេរៀនទី៤ ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតផ្សេងៗ

១. របៀបគណនាផលបូក

ឧទាហរណ៍១ គណនាផលបូក $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ ។

យើងអាចគណនាផលបូកនេះបានដោយប្រើសមភាព

$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ ដែល $k = 1, 2, 3, ..., n$

យើងបាន
$$2^3 - 1^3 = 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1$$
$$4^3 - 3^3 = 3\times 3^2 + 3\times 3 + 1$$
$$5^3 - 4^3 = 3\times 4^2 + 3\times 4 + 1$$
$$-----------$$
$$(n+1)^3 - n^3 = 3\times n^2 + 3n + 1$$

បូកអង្គ និងអង្គ យើងបាន

$$(n+1)^3 - 1 = 3\left(1^2 + 2^2 + ... + n^2\right) + 3(1 + 2 + ... + n) + (1 + 1 + ... + 1)$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n + 3\times\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$3S_n = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3n^2 + 3n + 2n}{2}$$

$$= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 5n}{} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ដូចនេះ $S = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនាផលបូក $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ ។

យើងអាចគណនាផលបូកនេះបានដោយប្រើសមភាព

$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ ដែល $k = 1, 2, 3, \ldots, n$

យើងបាន $2^4 - 1^4 = 4\times 1^3 + 6\times 1^2 + 4\times 1 + 1$

$$3^4 - 2^4 = 4\times 2^3 + 6\times 2^2 + 4\times 2 + 1$$

$$4^4 - 3^4 = 4\times 3^3 + 6\times 3^2 + 4\times 3 + 1$$

$$5^4 - 4^4 = 4\times 4^3 + 6\times 4^2 + 4\times 4 + 1$$

$$-----------------$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 4\times n^3 + 6\times n^2 + 4\times n + 1$$

បូកអង្គ និងអង្គ យើងបាន

$$(n+1)^4-1=4\left(1^3+2^3+...+n^3\right)+6\left(1^2+2^2+...+n^2\right)$$
$$+4(1+2+...+n)+(1+1+...+1)$$

$$(n+1)^4-1=4S_n+6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$\begin{aligned}4S_n&=n^4+4n^3+6n^2+4n-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n\\&=n^4+4n^3+6n^2+4n-2n^3-n^2-2n^2-n-2n^2-2n-n\\&=n^4+2n^3+n^2\\&=n^2\left(n^2+2n+1\right)\\&=\left[n(n+1)\right]^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

ដូចនេះ $S_n=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនាផលបូក $S_n=1!1+2!2+3!3+...+n!n$ ។

យើងមាន $k!k=k!(k+1-1)=k!(k+1)-k!=(k+1)!-k!$

យើងបាន $S_n=(2!-1!)+(3!-2!)+(4!-3!)+...+\left[(n+1)!-n!\right]$

$$=(n+1)!-1$$

ដូចនេះ $S_n=(n+1)!-1$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនាផលបូក $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$

ពិនិត្យ $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

យើងបាន $S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n}{n+1}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនាផលបូក

$S_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ។

ពិនិត្យ $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{A}{k(k+1)}+\frac{B}{(k+1)(k+2)}$

សមមូល $1=(k+2)A+kB=(A+B)k+2A$

យើងទាញបាន $\begin{cases}2A=1\\A+B=0\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\ ,\ B=-\frac{1}{2}$

គេបាន $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2k(k+1)}-\frac{1}{2(k+1)(k+2)}$

នាំឱ្យ

$$S_n=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{24}\right)+...+\left(\frac{1}{2n(n+1)}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)(n+2)-2}{4(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនាផលបូក

$$S_n=\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+...+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$ ។

ពិនិត្យ $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$

យើងបាន

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)+...+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនាផលបូក

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$ ។

ពិនិត្យ $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{A}{(3k-2)}+\frac{B}{(3k+1)}$

សមមូល $1=(3n+1)A+(3n-2)B$

$$1=(3A+3B)n+A-2B$$

គេទាញបាន $\begin{cases}3A+3B=0\\ A-2B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\ B=-\frac{1}{3}\end{cases}$

គេបាន $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3(3k-2)}-\frac{1}{3(3k+1)}$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(3k-2)}-\frac{1}{(3k+1)}\right]$$

យើងបាន

$$S_n=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{n}{3n+1}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនាផលបូក $S_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\ldots+\dfrac{n}{3^n}$ ។

យើងមាន $S_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\ldots+\dfrac{n}{3^n}\quad(1)$

និង $\dfrac{1}{3}S_n=\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{3}{3^4}+\ldots+\dfrac{n}{3^{n+1}}\quad(2)$

យក (1)ដក(2) គេបាន

$$S_n-\frac{1}{3}S_n=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3}\times\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{3^n-1}{2\left(3^n\right)}-\frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3}S_n = \frac{3^{n+1}-2n-3}{2\times 3^{n+1}}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{3^{n+1}-2n-3}{4\times 3^{n}}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{3^{n+1}-2n-3}{4\times 3^{n}}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាផលបូកខាងក្រោម៖

a) $S_n=\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+...+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

b) $S_n=\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+...+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$

c) $S_n=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+...+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

d) $S_n=\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\frac{1}{7\cdot 9\cdot 11}+...+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$

e) $S_n=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+n}$

f) $S_n=\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{3}{7^3}+...+\frac{n}{7^n}$

g) $S_n=2\cdot 4+3\cdot 4^2+4\cdot 4^3+...+(n+1)4^n$

២. គណនាផលបូកតាមលំនាំគំរូ

ចំពោះស្វ៊ីតដែលមានតួជាចំនួនគត់ គេអាចគណនាផលបូករបស់វា តាមរយៈនៃកាសង្កេតលំនាំគំរូ ។

ឧទាហរណ៍១ គណនាផលបូក $S_n=1+3+5+7+...+(2n-1)$ ។

យើងមាន $S_1=1=1^2$

$$S_2 = 1+3 = 4 = 2^2$$
$$S_3 = 1+3+5 = 9 = 3^2$$
$$S_4 = 1+3+5+7 = 16 = 4^2$$
$$-----------------$$
$$S_n = 1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2$$

ដូចនេះ $S_n = n^2$ ។

ឧទាហរណ៍២ គណនាផលបូក $S_n = 2+4+6+\ldots+2n$ ។

យើងមាន $S_1 = 2 = 1\times 2$

$$S_2 = 2+4 = 6 = 2\times 3$$
$$S_3 = 2+4+6 = 12 = 3\times 4$$
$$S_4 = 2+4+6+8 = 20 = 4\times 5$$
$$--------------------$$
$$S_n = 2+4+6+8+\ldots+2n = n(n+1)$$

ដូចនេះ $S_n = n(n+1)$ ។

ឧទាហរណ៍៣ គណនាផលបូក $S_n = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ ។

យើងមាន $S_1 = 1^3 = 1^2$

$$S_2 = 1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2$$

$$S_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2$$

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+4+\ldots+n)^2$$

នាំឱ្យ $S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

ដូចនេះ: $S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ។

៣. និមិត្តសញ្ញា $\sum$ សម្រាប់ផលបូកនៃស្វ៊ីត

ក. សញ្ញាណ $\sum$

ក្នុងការសរសេរផលបូកតួនៃស្វ៊ីត u_1 , u_2 , u_3 ,...,u_n គេប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\sum$ អានថា **ស៊ិចម៉ា** ។ គេកំណត់សរសេរ $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ ។

ឧទាហរណ៍ សរសេរផលបូកខាងក្រោមដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\sum$ (ស៊ិចម៉ា)

ក. $1+2+3+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k$

ខ. $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$

គ. $1+3+5+...+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

ឃ. $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}$

ង. $2+4+6+8+...+100=\sum_{k=1}^{50}2k$

ច. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{50}=\sum_{k=2}^{50}\frac{(-1)^k}{k}$

ឆ. $1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+99\times 100=\sum_{k=1}^{99}k(k+1)$

ជ. $3+6+12+...+3(2)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}3(2)^{k-1}$

ឈ. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}=\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k}$

ខ. លក្ខណៈផលបូក

1) $\sum_{k=1}^{n}c=c+c+c+...+c=cn$ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

2) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=ca_1+ca_2+ca_3+...+ca_n=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

3) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

4) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

5) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2$

ឧទាហរណ៍ គណនាផលបូកខាងក្រោម៖

a) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(4k+3)=4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$

$$=4(1+2+3+...+n)+3n$$

$$=4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+3n=2n(n+1)+3n$$

$$=2n^2+5n$$

b) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(k+3)k=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k$

$$=1^2+2^2+3^2+...+n^2+3(1+2+3+...+n)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

c) $S_n=\sum_{k=1}^{50}3k=3\sum_{k=1}^{50}k=3(1+2+3+...+50)$

$$=3\left[\frac{50(50+1)}{2}\right]=3\times25\times51=3825$$

d) $S_n=\sum_{k=1}^{25}(5k-1)=5\sum_{k=1}^{25}k-\sum_{k=1}^{25}1$

$=5(1+2+3+...+25)-1\times 25$

$=5\left[\frac{25(25+1)}{2}\right]-25=5\times 25\times 13-25$

$=1600$

e) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(k+3)^2=\sum_{k=1}^{n}(k^2+6k+9)=\sum_{k=1}^{n}k^2+6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}9$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+6\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]+9n$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3n(n+1)+9n$

$=\frac{2n^3+21n^2+73n}{6}$

f) $S_n=\sum_{k=1}^{n}2^k=2+2^2+2^3+...+2^n=2\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)=2^{n+1}-2$

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. សរសេរផលបូកខាងក្រោមដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\sum$

a) $1+2+3+4+5+6+7+8$

b) $1+2+3+4+...+100$

c) $1+4+9+16+...+484$

d) $1-2+3-4+5-6+7$

e) $3+3+3+3+3+3$

f) $4+8+12+16+20+24$

g) $1-3+5-7+9-...+101$

h) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$

i) $1+2^2+3^2+...+n^2$

j) $2\times3+3\times4+4\times5+...+(n+1)(n+2)$

2. សរសេរគ្រប់តួទាំងអស់នៃផលបូក ដោយមិនប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\sum$

a) $\sum_{k=1}^{6} k$

b) $\sum_{k=4}^{9} (3k-1)$

c) $\sum_{k=2}^{7} (-1)^k k$

d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

e) $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k(k+1)}$

f) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)}$

g) $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{4^k+1}$

h) $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-1}{5^k+1}$

i) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-1)(5k+4)(5k+9)}$

3. គណនាផលបូក

a) $\sum_{k=1}^{11}k^2$ b) $\sum_{k=12}^{24}k^2$ c) $\sum_{k=3}^{10}k^3$

d) $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ e) $\sum_{k=1}^{10}k(k+2)$ f) $\sum_{k=2}^{50}\frac{(-1)^k}{3k-1}$

g) $\sum_{k=1}^{n}\frac{2n+1}{n^2(2n+1)}$ h) $\sum_{k=1}^{n}\frac{6^n}{(3^n-2^n)(3^{n+1}-2^{n+1})}$

៤. របៀបកំណត់តួទី n តាមផលសងតួនៃស្វ៊ីត

ក. ផលសងតួលំដាប់ទី១ នៃស្វ៊ីត

ឧបមាថា គេមានស្វ៊ីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n$ ។

បើយើងសង្កេតឃើញថា ស្វ៊ីត(a_n)មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយក៏មិនមែនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ នោះគេតាង (b_n)ជាផលសងលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត (a_n)ដែល (b_n) មានតួកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} + a_n$ ។

នោះយើងបាន $b_1 = a_2 - a_1$

$$\begin{aligned} b_2 &= a_3 - a_2 \\ b_3 &= a_4 - a_3 \\ b_4 &= a_5 - a_4 \quad + \\ &------ \\ b_{n-1} &= a_n - a_{n-1} \end{aligned}$$

គេបាន $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} = a_n - a_1$

ឬ $\sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_n - a_1 \Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ដែល $n \geq 2$

ដូចនេះ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ។

ឧទាហរណ៍១ កំណត់តួទី nនៃស្វ៊ីត $(a_n): 1, 3, 7, 13, 21, 31, \ldots$ ។

ដោយស្វ៊ីត (a_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយក៏មិនមែនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

នោះគេតាង (b_n) ជាផលសងលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល (b_n) មានតួកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} + a_n$ ។

យើងបាន $(b_n): 2, 4, 6, 8, 10, ...$

នោះ (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែលមានផលសងរួម $d = 2$ និងតួទី1 $b_1 = 2$ ។

គេបាន $b_n = b_1 + (n-1)d = 2 + 2(n-1) = 2n$

នោះគេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ដែល $n \geq 2$

នាំឱ្យ $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k$

$$= 1 + 2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = 1 + n(n-1)$$

$$= n^2 - n + 1$$

ដូចនេះ $a_n = n^2 - n + 1$ ។

ឧទាហរណ៍២ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n): 4, 5, 7, 10, 14, ...$ ។

ដោយស្វ៊ីត (a_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយក៏មិនមែនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

នោះគេតាង (b_n) ជាផលសងលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល (b_n) មានតួកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} + a_n$ ។

យើងបាន $(b_n): 1,2,3,4,\ldots$

នោះ (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែលមានផលសងរួម $d=1$ និងតួទី1 $b_1=1$ ។

គេបាន $b_n=b_1+(n-1)d=1+1(n-1)=n$

នោះគេបាន $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ ដែល $n\geq 2$

នាំឱ្យ $a_n=4+\sum_{k=1}^{n-1}k$

$$=4+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+8}{2}$$

ដូចនេះ $a_n=\frac{n^2-n+8}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍3 កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n): 7,9,13,21,37,\ldots$ ។

ដោយស្វ៊ីត (a_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយក៏មិនមែនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

នោះគេតាង (b_n) ជាផលសងលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល (b_n) មានតួកំណត់ដោយ $b_n=a_{n+1}+a_n$ ។

យើងបាន $(b_n): 2,4,8,16,\ldots$

នោះ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q=2$ និងតួទី1 $b_1=2$ ។

គេបាន $b_n=b_1\times q^{n-1}=2\times 2^{n-1}=2^n$

នោះគេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ដែល $n \geq 2$

នាំឱ្យ $a_n = 7 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

$$= 7 + 2 \times \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 7 + 2^n - 2$$
$$= 2^n + 5$$

ដូចនេះ $a_n = 2^n + 5$ ។

ខ. ផលសងតួលំដាប់ទី២ នៃស្វ៊ីត

ឧបមាថា គេមានស្វ៊ីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n$ ។

បើយើងសង្កេតឃើញថា ស្វ៊ីត (a_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយក៏មិនមែនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

នោះគេតាង (b_n) ជាផលសងលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល (b_n) មានតួកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} + a_n$ ។ នោះ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ដែល $n \geq 2$ ។

ហើយបើសិនជា (b_n) នៅតែមិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយក៏មិនមែនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

នោះគេតាង (c_n) ជាផលសងលំដាប់ទី2 នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺជាផលសងលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} + b_n$ ។ នោះ $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$, $n \geq 2$ ។

ឧទាហរណ៍១ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n): 1, 2, 6, 15, 31, 56, \ldots$ ។

នោះគេតាង (b_n) ជាផលសងលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល (b_n) មានតួកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} + a_n$ ។

យើងបាន $(b_n): 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

តាង (c_n) ជាផលសងលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត (b_n) ដែល (c_n) មានតួកំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} + b_n$ ។

យើងបាន $(c_n): 3, 5, 7, 9, \ldots$

នោះ (c_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = 2$ និងតួទី1 $c_1 = 3$

គេបាន $c_n = c_1 + (n-1)d = 3 + 2(n-1) = 2n+1$

នោះ $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$ ដែល $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
b_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
&= 1 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) \\
&= n^2
\end{aligned}$$

នាំឱ្យ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ដែល $n \geq 2$

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$= \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)n + 1$$

ដូចនេះ $a_n = \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)n + 1$ ។

ឧទាហរណ៍២ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n): 1, 2, 5, 12, 27, 58, 121, \ldots$ ។

គេតាង (b_n) ជាផលសងលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល (b_n) មានតួកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} + a_n$ ។

យើងបាន $(b_n): 1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$

តាង (c_n) ជាផលសងលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត (b_n) ដែល (c_n) មានតួកំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} + b_n$ ។

យើងបាន $(c_n): 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

នោះ (c_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q = 2$ និងតួទី1 $c_1 = 2$

គេបាន $c_n = c_1 \times q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

នោះ $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$ ដែល $n \geq 2$

$$b_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1+\left(2+2^2+2^3+...+2^{n-1}\right)$$
$$= 1+2\times\frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 1+\left(2^n-2\right)$$
$$= 2^n - 1$$

នាំឱ្យ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ដែល $n \geq 2$

$$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(2^k-1\right) = 1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k - \sum_{k=1}^{n-1}1$$
$$= 1+2\times\frac{2^{n-1}-1}{2-1}-(n-1)$$
$$= 1+2^n-2-n+1$$
$$= 2^n - n$$

ដូចនេះ $a_n = 2^n - n$ ។

ឧទាហរណ៍៣

ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n): 1, 5, 14, 30, 55, 91, ...$ ។

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n): 1, 5, 14, 30, 55, 91, ...$

គេតាង (b_n) ជាផលសងលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល (b_n) មានតួកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} + a_n$ ។

យើងបាន $(b_n): 4, 9, 16, 25, , 36, \ldots$

តាង (c_n) ជាផលសងលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត (b_n) ដែល (c_n) មានតួកំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} + b_n$ ។

យើងបាន $(c_n): 5, 7, 9, 11, \ldots$

នោះ (c_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = 2$ និងតួទី1 $c_1 = 5$

គេបាន $c_n = c_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)2 = 2n + 3$

នោះ $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$ ដែល $n \geq 2$

$$\begin{aligned} b_n &= 4 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+3) = 4 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \\ &= 4 + 2 \times \frac{(n-1)n}{2} + 3(n-1) \\ &= 4 + n^2 - n + 3n - 3 = n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

នាំឱ្យ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ដែល $n \geq 2$

$$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(k^2+2k+1\right) = 1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2+2\sum_{k=1}^{n-1}k-2\sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$= 1+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+2\times\frac{(n-1)n}{2}+(n-1)$$

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+n^2$$

ដូចនេះ $a_n = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}+n^2$ ។

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ។

យើងបាន $S_n = a_1+a_2+a_3+...+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

ដែល $a_k = \dfrac{k(k-1)(2k-1)}{6}+k^2$

នោះ $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{k(k-1)(2k-1)}{6}+k^2\right]$

$$= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k(k-1)(2k-1)+\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(2k^3-3k^2+k\right)+\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(2k^3+k\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\frac{1}{6}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)}{12}\times\left[n(n+1)+1+(2n+1)\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{12}\times\left[n(n+1)+2(n+1)\right]$$

$$=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ ។

មេរៀនទី៥ ទំនាក់ទំនងតួនៃស្វ៊ីត

១. កំណត់តួទី n ដោយប្រើស្វ៊ីតជំនួយ

ក. ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_1 = \alpha$, $u_{n+1} = au_n + b$

- សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីត $u_{n+1} = au_n + b$ គឺ $r = ar + b$ ទាញរក r ។
- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = u_n - r$ រួចបង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។
- រកតួ v_n រួចទាញរក $u_n = v_n + r$

ឧទាហរណ៍១ កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_1 = 1$, $u_{n+1} = 4u_n + 1$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន $u_{n+1} = 4u_n + 1$ មានសមីការសម្គាល់ $r = 4r + 1$

គេទាញបាន $r = -\dfrac{1}{3}$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$

គេបាន $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{3}$ ដោយ $u_{n+1}=4u_n+1$

នោះ $v_{n+1}=4u_n+1+\frac{1}{3}$

$$=4u_n+\frac{4}{3}$$

$$=4\left(u_n+\frac{1}{3}\right)$$

$$v_{n+1}=4v_n$$

នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q=4$ និងតួទី1

$v_1=u_1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

គេបាន $v_n=v_1\times q^{n-1}=\frac{4}{3}\times 4^{n-1}=\frac{4^n}{3}$

ដោយ $v_n=u_n+\frac{1}{3}$ នោះ $u_n=v_n-\frac{1}{3}=\frac{4^n}{3}-\frac{1}{3}=\frac{4^n-1}{3}$

ដូចនេះ $u_n=\frac{4^n-1}{3}$ ។

ខ. ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_1=\alpha$, $u_{n+1}=au_n+f(n)$

- រកអនុគមន៍ $g(n)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $g(n+1)=ag(n)+f(n)$
- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n=u_n-g(n)$

- បង្កើតទំនាក់ទំនង $v_{n+1}=av_n$
- រកតួ v_n រួចទាញរក $u_n=v_n+g(n)$

ឧទាហរណ៍ កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_1=5\ ,\ u_{n+1}=2u_n-n$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $u_n=v_n+an+b$ ដែល $a\ ,b$ ជាចំនួនថេរ

$$u_{n+1}=v_{n+1}+a(n+1)+b=v_{n+1}+an+a+b$$

ដោយ $u_{n+1}=2u_n-n$

យើងបាន $v_{n+1}+an+a+b=2(v_n+an+b)-n$

$$\begin{aligned}v_{n+1}+an+a+b&=2v_n+2an+2b-n\\ v_{n+1}&=2v_n+an-a+b-n\\ &=2v_n+(a-1)n+b-a\end{aligned}$$

ឱ្យ $(a-1)n+b-a=0$

គេទាញបាន $\begin{cases}a-1=0\\ b-a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$

នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q=2$

និងតួទី1 $v_1 = u_1 - 1(1) - 1 = 3$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$

ដោយ $u_n = v_n + n - 1$

នោះ $u_n = 3 \times 2^{n-1} + n + 1$

ដូចនេះ $u_n = 3 \times 2^{n-1} + n + 1$ ។

ឧទាហរណ៍២ កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន
$u_1 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n + (3n+1)5^n$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន $u_{n+1} = 2u_n + (3n+1)5^n$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $u_n = v_n + (an+b)5^n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_{n+1} + \left[a(n+1)+b\right]5^{n+1} \\ &= v_{n+1} + (an+a+b)5 \times 5^n \end{aligned}$$

យើងបាន $v_{n+1} + (an+a+b)5 \times 5^n = 2\left[v_n + (an+b)5^n\right] + (3n+1)5^n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2v_n + (-3an - 3b - 5a + 3n + 1)5^n \\ &= 2v_n + \left[(-3a+3)n + (-3b-5a+1)\right]5^n \end{aligned}$$

ឱ្យ $\left[(-3a+3)n+(-3b-5a+1)\right]5^n=0$

គេទាញបាន $\begin{cases}-3a+3=0\\-3b-5a+1=0\end{cases}$

គេបានឬស $a=1$, $b=-\dfrac{4}{3}$ ។

នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុង $q=2$ និងតួទី1 $v_1=\dfrac{11}{3}$ ។

តាមរូបមន្ត $v_n=v_1\times q^{n-1}=\dfrac{11}{3}\times 2^{n-1}$

នាំឱ្យ $u_n=\dfrac{11}{3}\times 2^{n-1}+\left(n-\dfrac{4}{3}\right)5^n$

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{11}{3}\times 2^{n-1}+\left(n-\dfrac{4}{3}\right)5^n$ ។

គ. ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_1=\alpha$, $u_2=\beta$, $u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n=0$

- មានសមីការសម្គាល់ $r^2+ar+b=0$

- ទាញរកឬសនៃសមីការសម្គាល់

+ បើសមីការមានឬសឌុប r_0

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $u_n=(A+Bn)r_0^n$ ដែល A,B ជាចំនួនថេរ ដែលត្រូវកំណត់ ។

+ បើសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត r_1 , r_2

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរ ដែលត្រូវកំណត់ ។

+ បើសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

$r = a(\alpha \pm i\beta) = a(\cos\theta \pm i\sin\theta)$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $u_n = a^n\left[A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right]$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរ ដែលត្រូវកំណត់ ។

ឧទាហរណ៍១ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ

$u_1 = 1$, $u_2 = 6$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$,$(n = 1, 2, 3, ...)$

ចម្លើយ

១ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n)

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីត $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ គឺ $r^2 = 4r - 4$

ឬ $r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r-2)^2 = 0$

នោះសមីការឫសឌុប $r = 2$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $u_n = (A + Bn)r^n$

យើងបាន $u_n = (A + Bn)2^n$ ដែល $u_1 = 1$, $u_2 = 6$

នោះយើងទាញបាន

$$\begin{cases}(A+B)2=1\\(A+2B)4=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2A+2B=1\\4A+8B=6\end{cases}$$

ឬ $\begin{cases}2A+2B=1 & (1)\\2A+4B=3 & (2)\end{cases}$

យកសមីការ $(1)-(2)$ គេបាន៖ $-2B=-2\Rightarrow B=1$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $2A+2(1)=1\Rightarrow A=-\dfrac{1}{2}$

ដោយ $u_n=(A+Bn)2^n$ ហើយ $A=-\dfrac{1}{2}$ និង $B=1$

នាំឱ្យ $u_n=\left(-\dfrac{1}{2}+n\right)2^n=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)2^n$

ដូចនេះ៖ $u_n=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)2^n$ ។

ឧទាហរណ៍២ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases}u_1=1\,,\,u_2=3\\u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n\end{cases}$

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីត $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$ គឺ $r^2=3r-2$

ឬ $r^2-3r+2=0$ ឬ $(r-1)(r-2)=0$

នោះសមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិត គឺ $r_1=1$, $r_2=2$

តាង $u_n=Ar_1^n+Br_2^n$

យើងបាន $u_n=A+B\times 2^n$ ដែល $u_1=1$, $u_2=3$

គេទាញបាន$\begin{cases} A+2B=1 & (1) \\ A+4B=3 & (2) \end{cases}$

យកសមីការ $(1)-(2)$យើងបាន

$-2B=-2\Rightarrow B=1$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $A+2(1)=1\Rightarrow A=-1$

នាំឱ្យ $u_n=-1+(1)2^n=2^n-1$

ដូចនេះ $u_n=2^n-1$ ។

ឧទាហរណ៍៣ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ$\begin{cases} u_1=2 \text{ , } u_2=0 \\ u_{n+2}=u_{n+1}-u_n \end{cases}$

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីត $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$ គឺ $r^2=r-1$

ឬ $r^2-r+1=0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$

$r = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

នោះសមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ គឺ $r = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \pm i\sin\dfrac{\pi}{3}$

តាង $u_n = a^n \left[A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right]$

យើងបាន $u_n = 1^n \left[A\cos\left(\dfrac{\pi}{3}n\right) + B\sin\left(\dfrac{\pi}{3}n\right)\right]$ ដែល $u_1 = 2$, $u_2 = 0$

គេទាញបាន$\begin{cases} A\cos\dfrac{\pi}{3} + B\sin\dfrac{\pi}{3} = 2 \\ A\cos\dfrac{2\pi}{3} + B\sin\dfrac{2\pi}{3} = 0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} \dfrac{1}{2}A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}B = 2 & (1) \\ -\dfrac{1}{2}A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}B = 0 & (2) \end{cases}$

យកសមីការ $(1)+(2)$ យើងបាន

$\sqrt{3}B = 2 \Rightarrow B = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន

$\dfrac{1}{2}A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}A = 2 - 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}A = 1 \Rightarrow A = 2$

នាំឱ្យ $u_n = 2\cos\frac{\pi}{3}n + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}n$

ឬ $u_n = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{3}n + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}n\right)$

$$u_n = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}n + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}n\right)$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\frac{(n+1)\pi}{3}$$

ដូចនេះ $u_n = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\frac{(n+1)\pi}{3}$ ។

ឧទាហរណ៍៤ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 0 \text{ , } u_2 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីត $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$ គឺ $r^2 = 2r - 2$

ឬ $r^2 - 2r + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4 < 0$

$$r=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

ឬ $r=1\pm i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $u_n=a^n\left[A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta)\right]$

យើងបាន $u_n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left[A\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+B\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right]$ ដែល $u_1=0$, $u_2=1$

គេទាញបាន $\begin{cases}\sqrt{2}\left(A\cos\frac{\pi}{4}+B\sin\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \left(\sqrt{2}\right)^2\left(A\cos\frac{\pi}{2}+B\sin\frac{\pi}{2}\right)=1\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}A+\frac{\sqrt{2}}{2}B\right)=0\\ 2B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=0\\ B=\frac{1}{2}\end{cases}$

នោះ $A=-B=-\frac{1}{2}$

នាំឱ្យ $u_n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}n+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}n\right)$

ឬ $u_n=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}n+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{4}n\right)$

$$u_n=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}n+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}n\right]$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}$$

ដូចនេះ $u_n=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ

លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ