

## Похибки обчислень

### 1.1. Основні джерела виникнення похибок обчислювальних методів.

Обмеженість розрядної сітки ЕОМ і обмеженість її пам'яті є джерелом виникнення різного роду помилок (неточностей) при реалізації обчислювальних алгоритмів. Наприклад, проста функція  $y = x$  на гіпотетичній ЕОМ з фіксованою однорозрядною арифметикою має вигляд, рис.1.1.

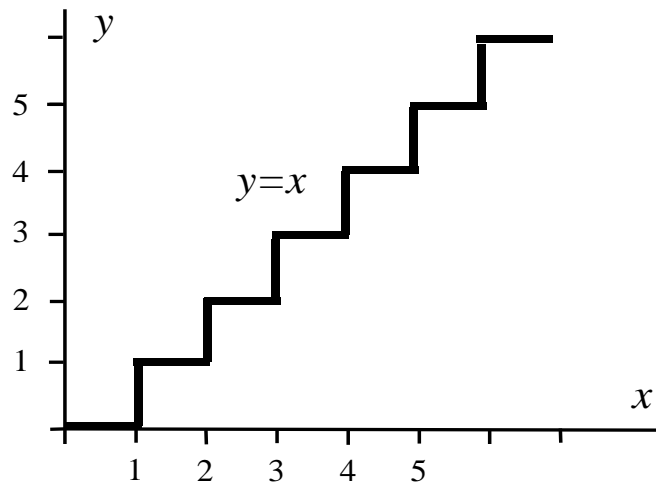
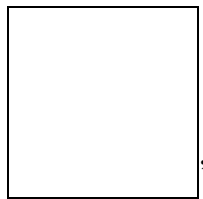


Рис.1.1. Реалізація функції присвоєння на ЕОМ з фіксованою однорозрядною арифметикою

Тобто, при спробі визначення одного з коренів рівняння

$$x^2 + 0,4002x + 0,00008 = 0$$

використовуючи обчислення з точністю до 4-ої цифри після коми, користуючись формулою:



отримуємо результат:  $x = -0,0002$ , замість точного розв'язку:  $x = -0,00015$ . Отже, похибка обчислення у цьому випадку дорівнює 25 %.

Можна виділити такі основні джерела похибок:

- **похибки вихідної інформації.**
- **похибки обмеження.**
- **похибка округлення.**

**Значущими цифрами** числа називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва. Зокрема:

$x=4,870342$  – всі цифри в запису цього числа значущі;

$x=0,007624$  – значущі цифри тільки 7, 6, 2, 4;

$x=0,320400$  – значущі цифри 3, 2, 0, 4, 0, 0 (останні нулі числа є значущі);

$x=3780000$  – всі цифри значущі;

$x=3,78 \cdot 10^{-6}$  – значущі цифри тільки 3, 7, 8.

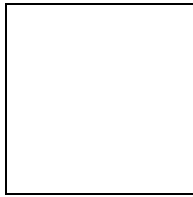
**Значуща цифра вважається вірною**, якщо абсолютна похибка числа не перевищує  $\frac{1}{2}$  одиниці розряду, що відповідає цій цифрі.

## 1.2. Поширення похибок в ході обчислень

**Похибкою**  $\Delta x$  наближеного числа  $\bar{x}$  традиційно називають різницю між істинним значенням  $x$  і її наближеним значенням:

$$\Delta x = x - \bar{x}.$$

де



– істинне значення величини,

– його наближене (обчислене, виміряне, тощо) значення.

Якщо  $x > \bar{x}$  то похибка додатна, якщо  $x < \bar{x}$  то відповідно від’ємна. В багатьох випадках знак похибки невідомий, тоді доцільніше застосовувати абсолютну похибку.

**Абсолютна похибка** - модуль різниці між істинним значенням величини і її наближеним (обчисленим, виміряним, тощо) значенням:

$$e_x = |x - \bar{x}|, \quad (1.1)$$

**Відносна похибка** - відношення абсолютної похибки до модуля наближеного (обчисленого, виміряного, тощо) значення:

$$\delta = \left| \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}} \right| = \frac{e_x}{|\bar{x}|} \quad (1.2)$$

Доцільно зазначити, що істинне значення  $x$ , як правило, невідоме і немає можливості визначити абсолютну похибку  $e_x$ . В цьому випадку замість невідомої теоретичної абсолютної похибки  $e_x$  вводять її оцінку зверху, так звану граничну абсолютну похибку  $\Delta_x$ , тоді отримуємо:

$$e_x = |x - \bar{x}| \leq \Delta_x,$$

отже істинне  $x$  знаходиться в межах:  $\bar{x} - \Delta_x \leq x \leq \bar{x} + \Delta_x$ , тобто  $x = \bar{x} \pm \Delta_x$ .

Застосовується також поняття граничної відносної похибки. Отже граничною відносною похибкою наближеного числа  $\bar{x}$  називається будь-яке число, що не менше відносної похибки цього числа, тобто  $\delta \leq \delta_x$ . В результаті за граничну відносну похибку деякого наближеного числа  $\bar{x}$  можна прийняти:

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{\bar{x} - \Delta_x}$$

Враховуючи те, що  $\Delta_x \ll \bar{x}$  і  $\delta_x \ll 1$  то наближено можна прийняти, що:

$$\delta_x \approx \frac{\Delta_x}{\bar{x}} \quad (1.3)$$

При практичних розрахунках (обчисленні функцій  $f(x)$ ) часто використовують оцінку граничної абсолютної похибки виду:

$$\Delta_y \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_j} \right| \cdot \Delta_{x_j} \quad (1.4)$$

яку називають лінійною оцінкою похибки.

Виходячи з вище поданої оцінки, нескладно знайти відносну похибку:

$$\delta_y \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_j}}{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} \right| \quad (1.5)$$

Використовуючи формули (1.4), (1.5), можна визначити похибки результатів математичних операцій.

- **похибка суми.** якщо ж позначити  $\Delta_{x+y}$  – граничною абсолютною похибкою суми, то відповідно отримаємо:

$$\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y; \quad (1.6)$$

- **похибка різниці.** При виконанні операції віднімання аналогічно (до операції додавання) отримуємо:

$$\Delta_{x-y} = \Delta_x + \Delta_y \quad (1.7)$$

- **похибка множення.** При виконанні операції множення граничну абсолютну похибку наближено можна визначити за формулою:

$$\Delta_{xy} \approx |\bar{x}| \cdot \Delta_y + |\bar{y}| \cdot \Delta_x \quad (1.8)$$

- **похибка ділення.** У випадку виконання операції ділення граничну абсолютну похибку наближено можна визначити за формулою:

$$\Delta_{x/y} \approx \frac{|\bar{y}| \cdot \Delta_x + |\bar{x}| \cdot \Delta_y}{\bar{y}^2}. \quad (1.9)$$

Аналогічно до виведення формул поширення граничних абсолютних похибок чотирьох основних арифметичних операцій, нескладно отримати відповідні формули і для граничних відносних похибок:

- **додавання:**

$$\frac{\Delta_{x+y}}{|\bar{x} + \bar{y}|} = \left| \frac{\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y}} \right| \left( \frac{\Delta_x}{|\bar{x}|} \right) + \left| \frac{\bar{y}}{\bar{x} + \bar{y}} \right| \left( \frac{\Delta_y}{|\bar{y}|} \right),$$

звідки отримуємо:

$$\delta_{x+y} = \frac{|\bar{x}| \cdot \delta_x + |\bar{y}| \cdot \delta_y}{|\bar{x} + \bar{y}|}; \quad (1.10)$$

- **віднімання:**

$$\frac{\Delta_{x-y}}{|\bar{x} - \bar{y}|} = \left| \frac{\bar{x}}{\bar{x} - \bar{y}} \right| \left( \frac{\Delta_x}{|\bar{x}|} \right) + \left| \frac{\bar{y}}{\bar{x} - \bar{y}} \right| \left( \frac{\Delta_y}{|\bar{y}|} \right),$$

звідки отримуємо:

$$\delta_{x-y} = \frac{|\bar{x}| \cdot \delta_x + |\bar{y}| \cdot \delta_y}{|\bar{x} - \bar{y}|}; \quad (1.11)$$

- **множення:**

$$\frac{\Delta_{x \cdot y}}{|\bar{x} \cdot \bar{y}|} = \frac{\Delta_x}{|\bar{x}|} + \frac{\Delta_y}{|\bar{y}|},$$

звідки отримуємо:

$$\delta_{x \cdot y} = \delta_x + \delta_y;$$

(1.12)

- **ділення:**

$$\frac{\Delta_{x/y}}{|\bar{x}/\bar{y}|} = \left| \frac{\bar{y}}{\bar{y} \cdot \bar{x}} \right| \cdot \Delta_x + \left| \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{y}^2 \cdot \bar{x}} \right| \cdot \Delta_y = \frac{\Delta_x}{|\bar{x}|} + \frac{\Delta_y}{|\bar{y}|},$$

звідки отримуємо:

$$\delta_{x/y} = \delta_x + \delta_y. \quad (1.13)$$

### **Приклад 1:**

Заокруглюючи числа 0,1545 та 1,343 до трьох значущих цифр, визначити абсолютну та відносну похибки отриманих наближених чисел:

**Розв'язання.**

$x = 0,1545$  заокруглення до трьох значущих цифр дає:  $\bar{x} = 0,155$ .

Звідки:

- абсолютна похибка:  $e_x = 0,0005 = 5 \cdot 10^{-4}$ ,
- відносна похибка:  $\delta_x = 5 \cdot 10^{-4} / 0,155 \approx 0,32 \cdot 10^{-4}$ .

$x = 1,343$  тоді  $\bar{x} = 1,34$ .

Звідки:

- абсолютна похибка:  $e_x = |\bar{x} - x| = 0,003$ ,
- відносна похибка:  $\delta_x = 3 \cdot 10^{-3} / 1,34 = 2,2 \cdot 10^{-3}$ .

### **Приклад 2:**

Визначити кількість вірних цифр в числах -22,351 та 9,4698 якщо відомо, що їх відносні похибки складають відповідно 0,1 та  $0,1 \cdot 10^{-2}$ .

**Розв'язання.**

$\bar{x} = -22,351$ ;  $\delta_x = 0,1$  обчислюємо абсолютну похибку:  $\Delta_x = |\bar{x}| \cdot \delta_x = 2,2351$ .

Отже в числі  $\bar{x} = -22,351$  вірною є тільки одна (перша) цифра 2.  
22,351  
2,2351

$\bar{x} = 9,4698$ ;  $\delta_x = 0,1 \cdot 10^{-2}$  обчислюємо:  $\Delta_x = 9,4698 \cdot 0,1 \cdot 10^{-2} = 0,0094698$ .  
Отже в числі  $\bar{x} = 9,4698$  будуть вірними дві перші цифри 9 та 4.  
9,4698  
0,0094698

### **Приклад 3:**

Здійснити оцінку похибки обчислення значення заданої функції, якщо початкові дані:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 z}{y^3}; \quad x = 0,15 \pm 0,005; \quad y = 2,13 \pm 0,01; \quad z = 1,14 \pm 0,007.$$

### **Розв'язання.**

Згідно з формулою (1.4), для обчислення абсолютної похибки результату отримаємо:

$$\begin{aligned} \Delta_f &= \left| \frac{2 \cdot \bar{x} \cdot \bar{z}}{\bar{y}^3} \right| \cdot \Delta_x + \left| \frac{3 \cdot \bar{x}^2 \bar{z}}{\bar{y}^4} \right| \cdot \Delta_y + \left| \frac{\bar{x}^2}{\bar{y}^3} \right| \cdot \Delta_z = \\ &= \frac{2 \cdot 0,15 \cdot 1,14}{(2,13)^3} \cdot 0,005 + \frac{3 \cdot (0,15)^2 \cdot 1,14}{(2,13)^4} \cdot 0,01 + \frac{(0,15)^2}{(2,13)^3} \cdot 0,007 = \\ &= 0,00017695 + 0,00003738 + 0,000016298 \approx 0,00023 = 2,3 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Знаходимо:  $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{(0,15)^2 \cdot 1,14}{(2,13)^3} = 0,0022265429$ .

Обчислюємо:  $\delta(\bar{f}) = \frac{2,3 \cdot 10^{-4}}{0,00265429} = 0,08665$ .

## Завдання до розділу 1.

За припущенням, що аргумент функції  $f(x)$  і її коефіцієнти задані неточно здійснити оцінку абсолютної та відносної похибок виконання математичних операцій враховуючи, що відносні похибки представлення чисел і виконання арифметичних операцій рівні  $0,5 \cdot 10^{-t}$ , де  $t = 15$  – кількість значущих цифр в розрядної сітки ЕОМ, а також обчислити функцію з 5-ма значущими цифрами для заданого  $x$  згідно варіанту.

Провести порівняння між результатом отриманим з ЕОМ та обчисленням функції із заданою кількістю вірних значущих цифр.

Варіант	Рівняння	$x$	Варіант	Рівняння	$x$
1	$f(x) = 7^x - 3x + 1.23$	4,00	16	$f(x) = x^3 - 10.3x^2$	2,31
2	$f(x) = x^5 - 0.3x$	0,88	17	$f(x) = x^2 - \frac{3}{x} - 1.27$	0,37
3	$f(x) = (x + 3.33)^3 \sqrt{x}$	3,14	18	$f(x) = x^4 - \frac{4.44}{x}$	1,21
4	$f(x) = (x - \frac{1}{3.11})^2$	2,55	19	$f(x) = x^3 - 10x + 5.11$	0,73
5	$f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x + 1.1$	0,17	20	$f(x) = x^5 - 3x - 1.47$	1,11
6	$f(x) = 1 - \frac{x^4}{2.33}$	0,13	21	$f(x) = 7^x - 3 \cdot 2^x + 0.1$	1,27
7	$f(x) = x^4 - 13x + 3.63$	3,47	22	$f(x) = x^5 - 4x + 0.2$	-0,71
8	$f(x) = x^3 - 2x - 2.11$	1,99	23	$f(x) = x^3 - 3x + 0.3$	-3,33
9	$f(x) = \frac{x}{2 - x^2}$	0,11	24	$f(x) = (x - 1)^3 \sqrt{x^2}$	0,27
10	$f(x) = (x - 1)^3 + 2x$	0,78	25	$f(x) = x^2 - 2.44 \cdot x - 0.51$	1,5
11	$f(x) = 1.333 - x^4$	0,12	26	$f(x) = 5 + \frac{x^2}{0.18}$	0,05

12	$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$	1,15	27	$f(x) = 2^x + 2.32x - 0.12$	2,23
13	$f(x) = x^4 - 1.12x + \frac{1}{3}$	0,33	28	$f(x) = (x - 0.11)^2 - 0.11x$	1,11
14	$f(x) = x^3 - 1.33x + 0.17$	0,11	29	$f(x) = x^3 + \frac{5.25}{x}$	1,34
15	$f(x) = \frac{x^2}{1.38 - x}$	2,77	30	$f(x) = 5.325 - x^3 + 2x$	1,27
			31	$f(x) = x^2 - 2.12x + 4.01$	1,01