8. ЗНАХОДЖЕННЯ ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

$F(x_1, x_2, ..., x_n)$

Задачі параметричної оптимізації розділяють на два класи:

- ***задачі безумовної оптимізації***. Такі задачі зводяться до пошуку такого поєднання параметрів, що оптимізують $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*\right)^T$, яке зумовлює досягнення мінімуму цільової функції:

$$\min_x F(x); \tag{8.1}$$

- ***задачі умовної оптимізації***. Такі задачі виникають при накладанні обмежень на простір (границі існування) змінних, що оптимізуються, тобто:

$$\begin{gathered} \min_x F(x), \\ g_i(x) \le 0,\ i = 1,2,...m \end{gathered} \tag{8.2}$$

де $g_i(x)$ - деякі функції, що пов'язують параметри, які оптимізують.

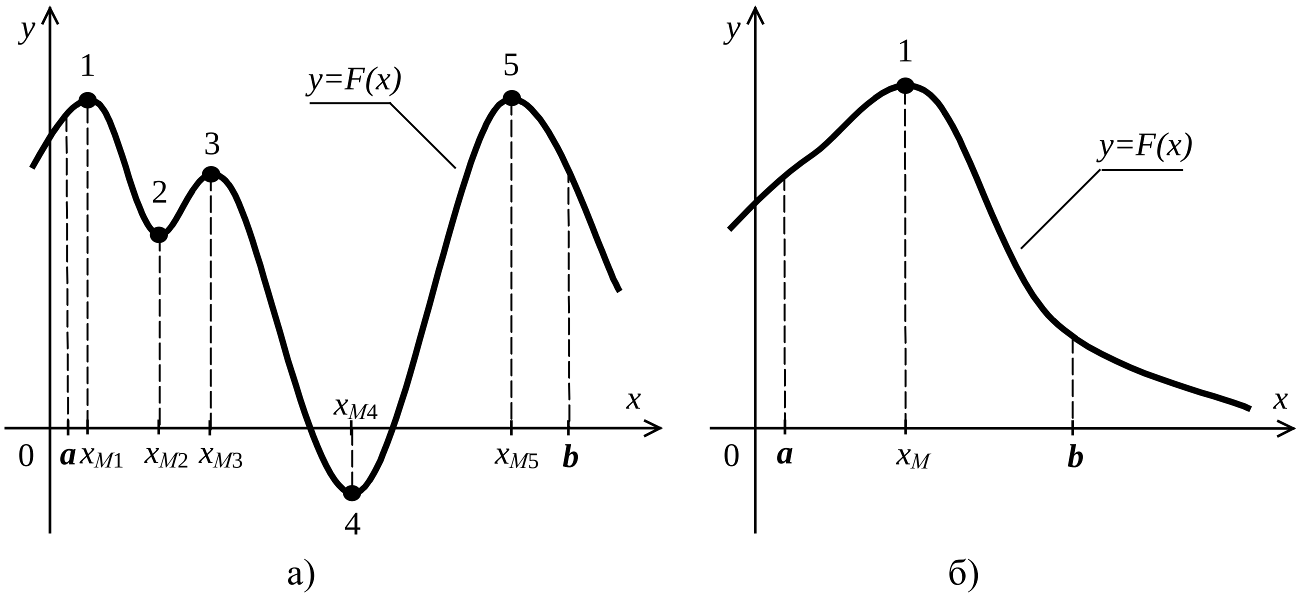

Рис.8.1. Функція з кількома екстремумами – а) та унімодальна функція з одним екстремумом – б)

8.1. Евристичний вибір початкового інтервалу невизначеності – алгоритм Свенна.

Алгоритм Свенна. Встановлення меж інтервалу $[a,b]$ для функції $F(x)$ можна реалізувати так:

1. Виконати ввід довільної точки початкового (i = 0) наближення x_i, задати величину кроку $h > 0$;

2. Обчислити: $y_a = F(x_i - h)$, $y_i = F(x_i)$, $y_b = F(x_i + h)$;

3. Перевірити виконання умов:

- якщо $y_a \ge y_i \le y_b$, то початковий інтервал невизначеності встановлено: $[a,b] = [\,x_i - h, x_i + h\,]$;

- якщо $y_a \le y_i \ge y_b$, то задана функція не унімодальна, а інтервал невизначеності встановити неможливо (необхідно спробувати задати іншу точку початкового наближення);
- якщо $y_a \ge y_i \ge y_b$, то $\Delta = h;\ a_0 = x_0;\ x_1 = x_0 + h;\ i = 1;$
- якщо $y_a \le y_i \le y_b$, то $\Delta = -h;\ b_0 = x_0;\ x_1 = x_0 - h;\ i = 1;$

4. Обчислити наступну точку: $x_{i+1} = x_i + 2^i \Delta;$
5. Перевірити умови:
   - якщо $F(x_{i+1}) < F(x_i)$ і $\Delta = h$, то $a_0 = x_i;\ i = i + 1$, перейти до п.4;
   - якщо $F(x_{i+1}) < F(x_i)$ і $\Delta = -h$, то $b_0 = x_i;\ i = i + 1$, перейти до п.4;
   - якщо $F(x_{i+1}) \ge F(x_i)$то процедура завершується. При $\Delta = h$ прийняти $b_0 = x_{i+1}$, при $\Delta = -h$ прийняти $a_0 = x_{i+1}$, в результаті отримуємо [a_0,b_0] – шуканий початковий інтервал невизначеності.

8.2. Метод рівномірного пошуку (сітки).

Алгоритм розв'язання. Метод послідовного пошуку екстремуму на відрізку [a,b] функції $F(x)$ можна реалізувати так:

1. Виконати ввід інтервалу [a,b], задати кількість його розбиттів n та початкове значення $x_i \in [a,b]$;
2. Визначити приріст: $h = (b - a)/n$;
3. Обчислити: $y_a = F(x_i - h)$, $y_b = F(x_i + h)$;
4. Якщо $y_a \le y_b$, то обчислювати $x_{i+1} = x_i - h$, інакше $x_{i+1} = x_i + h$;
5. Обчислити: $y_i = F(x_i)$ та $y_{i+1} = F(x_{i+1})$;
6. Якщо $y_{i+1} \le y_i$ то повернутись до п.5 з врахуванням п.4;
7. Обчислення припиняють якщо $y_{i+1} > y_i$ або x_{i+1} виходить за межі відрізку [a,b], за шуканий екстремум приймають $x^* = x_i$.

Таким чином порівняння $F(x_i\text{-}h)$ і $F(x_i+h)$ дозволяє скоротити довжину відрізку, на якому повинно знаходитись результуюче значення екстремуму. При малій заданій похибці ($h \to 0$) метод неефективний з погляду використання обчислювальних ресурсів.

8.3. Метод порозрядного наближення (дроблення).

Алгоритм розв'язання. Метод порозрядного наближення для пошуку екстремуму функції $F(x)$ на відрізку [a,b] можна реалізувати так:

1. Виконати ввід інтервалу [a,b], задати початкове наближення $x_i \in [a,b]$, приріст (крок) $h = \Delta x$ та точність обчислення ε;
2. Обчислити: $y_i = F(x_i)$, $x_{i+1} = x_i + h$, $y_{i+1} = F(x_{i+1})$;
3. Якщо $y_{i+1} > y_i$ то повернутись до п.2, інакше до п.4;

4. Обчислити: $h = -h/4$;

5. Якщо $|h| > \varepsilon / 4$ повернутись до п.2, інакше до п.6;

6. Обчислення припиняють якщо $|h| \le \varepsilon / 4$ або x_{i+1} виходить за межі відрізку $[a,b]$, за шуканий екстремум приймають $x^* = x_i$.

Блок-схему реалізації розглянутого методу подано на рис.8.2.

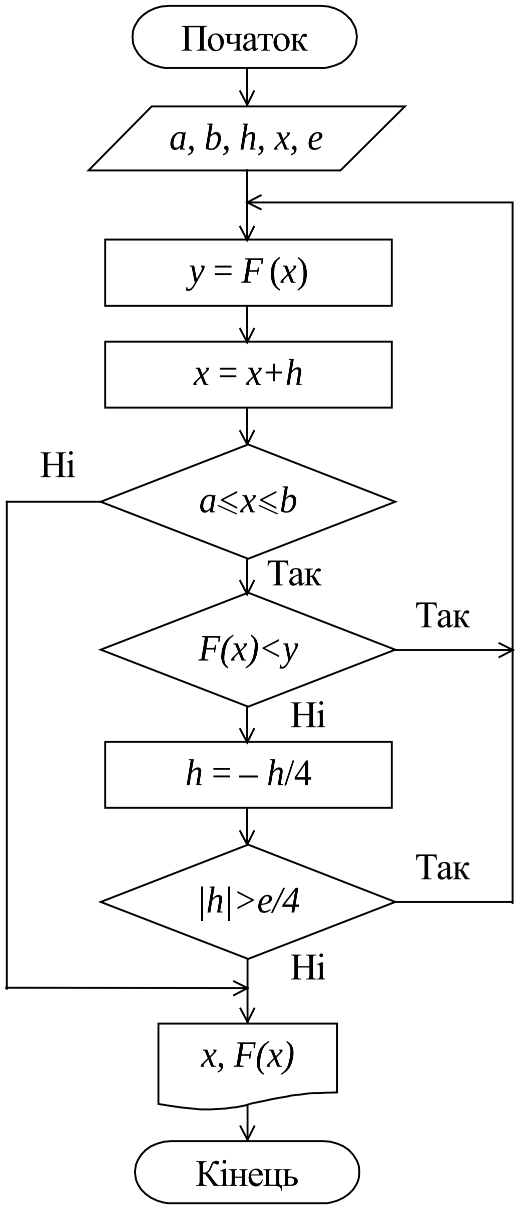

Рис.8.2. Блок-схема реалізації методу порозрядного наближення

8.4. Метод золотого перерізу.

$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a}$$

Поділ відрізку $[a,b]$ здійснюється за правилом золотого перерізу. Коефіцієнт дроблення (поділу) r в такому випадку визначають:

$$r = 0{,}5(\sqrt{5} - 1) = 0{,}618033.$$

При заданому значенні коефіцієнту дроблення r алгоритм методу має три важливі **властивості**:

– після кожної ітерації нова величина відрізку в $1/r$ разів менше від попередньої величини. Таким чином, після n ітерацій оптимальне значення x знаходиться на відомому сегменті, розмір якого визначається як $r^n(b - a)$. Значення r^n для $n \le 10$ подано в табл.8.1.

Таблиця 8.1.

Значення коефіцієнтів дроблення відрізка для 10-ти ітерацій

n	r^n	$0{,}5^{n+1}$	***n***	r^n	$0{,}5^{n+1}$
1	0,618	0,25	6	0,0557	0,0078
2	0,382	0,125	7	0,0344	0,0039
3	0,2361	0,0625	8	0,0213	0,002
4	0,1459	0,0313	9	0,0132	0,001
5	0,0902	0,0156	10	0,0081	0,0005

– після кожної ітерації x_1 і x_2 знаходяться на однаковій відстані від найближчих до них кінців сегменту, тобто $x_1 – a = b – x_2$.

– на всіх ітераціях, крім першої, обчислюється лише одна з точок x_1 чи x_2, для функції $F(x)$.

Алгоритм розв’язання. Метод золотого перерізу для пошуку екстремумів на відрізку $[a,b]$ функції $F(x)$ можна реалізувати так:

1. Виконати ввід інтервалу $[a,b]$, та точність обчислення ε;
2. Визначити: $x_1 = a + r^2(b - a)$ та $x_2 = a + r(b - a)$;
3. Обчислити: $y_1 = F(x_1)$ та $y_2 = F(x_2)$;
4. Якщо $y_1 \ge y_2$ то звузити інтервал: $b=x_2$, $x_2=x_1$, обчислити: $x_1 = a + r^2(b - a)$, $y_2 = y_1$, $y_1 = F(x_1)$ і повернутись до п.4;
5. Якщо $y_1 < y_2$ то звузити інтервал: $a=x_1$, $x_1=x_2$, обчислити: $x_2 = a + r(b - a)$, $y_1 = y_2$, $y_2 = F(x_2)$ і повернутись до п.4;
6. Обчислення припиняють якщо $(b - a) < \varepsilon$, за шуканий екстремум приймають $x^* = x_i$.

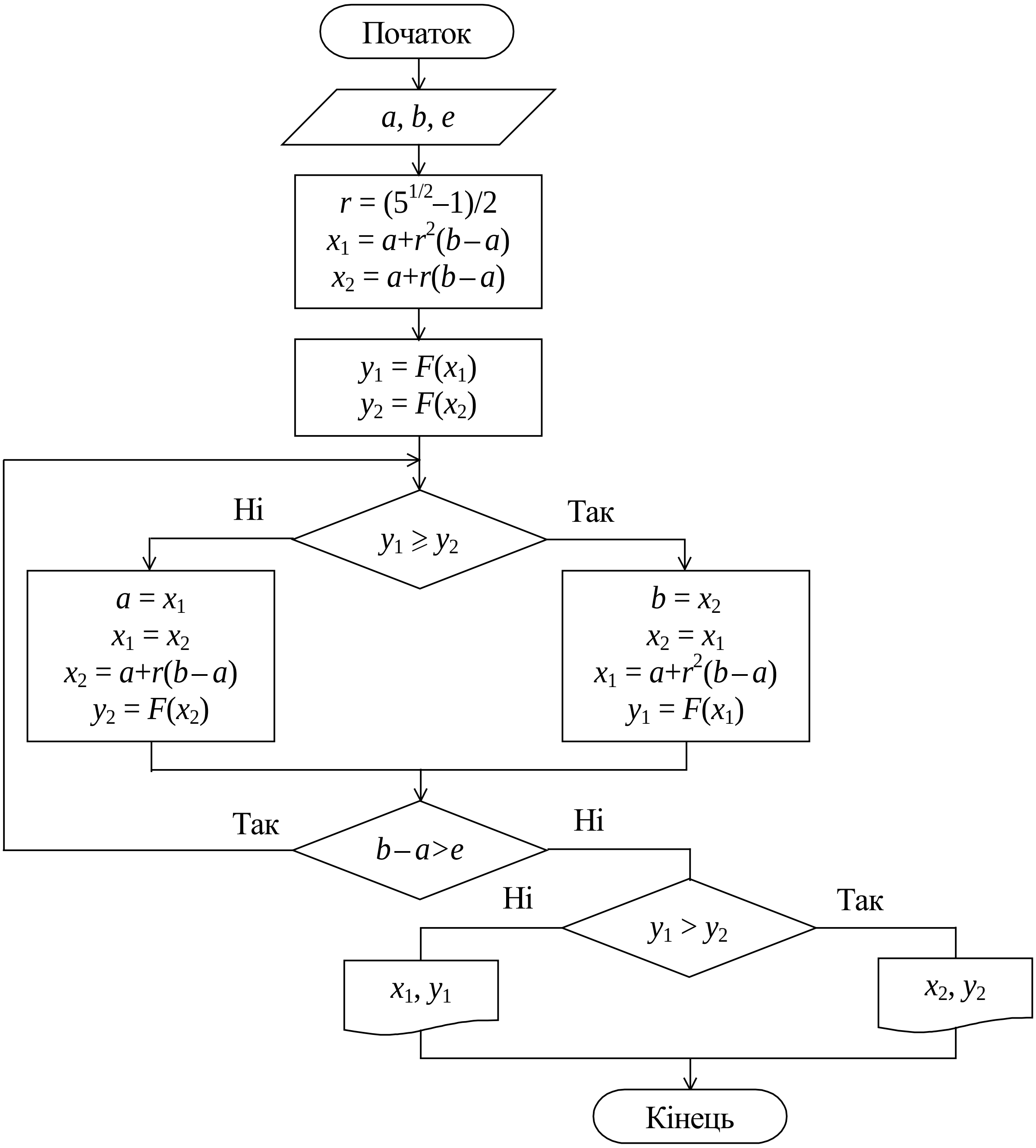

Рис.8.3. Блок-схема реалізації методу золотого перерізу

8.5. Метод дихотомії.

Алгоритм розв’язання. Метод дихотомії для пошуку екстремумів на відрізку $[a,b]$ функції $F(x)$ можна реалізувати так:

1. Виконати ввід інтервалу $[a,b]$, крок зміщення Δ та точність обчислення ε;
2. Прийняти $i = 0$;
3. Обчислити: $v_a = \left(\dfrac{a_i + b_i - \Delta}{2}\right)$, $v_b = \left(\dfrac{a_i + b_i + \Delta}{2}\right)$;
4. Обчислити: $y_a = F(v_a)$, $y_b = F(v_b)$;
5. Перевірити виконання умов:
   - якщо $y_a \le y_b$, то $a_{i+1} = a_i$; $b_{i+1} = v_b$ і перейти на наступний крок;
   - якщо $y_a > y_b$, то $a_{i+1} = v_a$; $b_{i+1} = b_i$ і перейти на наступний крок;

6. Обчислити: $L = \left| b_{i+1} - a_{i+1} \right|$;

7. Перевірити виконання умов:

- якщо $L > \varepsilon$, то $i = i + 1$, перейти до п.3;
- якщо $L \le \varepsilon$, то процес пошуку завершено, за шуканий екстремум приймають середину інтервалу $x^* \approx \left(\frac{a_{i+1} + b_{i+1}}{2} \right)$;

Блок-схему реалізації розглянутого методу подано на рис.8.4.

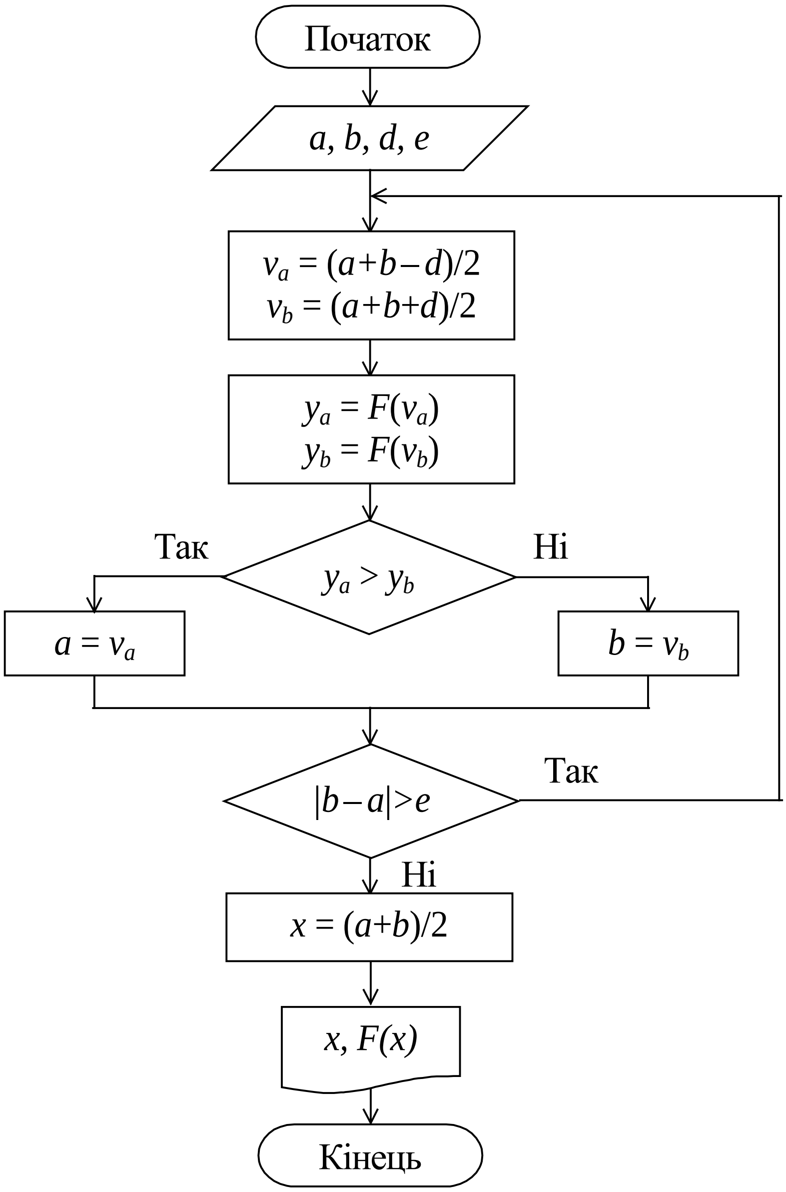

Рис.8.4. Блок-схема реалізації методу дихотомії

8.6. Метод половинного поділу (бісекції).

Алгоритм розв'язання. Метод половинного поділу (бісекції) для пошуку екстремуму функції $F(x)$ на відрізку $[a,b]$ можна реалізувати так:

1. Виконати ввід інтервалу $[a,b]$ та точність обчислення ε;
2. Обчислити: $h = (b - a)$;

3. Обчислити початкове наближення: $x_i = a + h/2$;

4. Визначити знак похідної *dF/dx* в точці x_i: $s = sign(F'(x_i))$;

де $$sign(F'(x)) = \begin{cases} 1, & F'(x) > 0, \\ 0, & F'(x) = 0, \\ -1, & F'(x) < 0. \end{cases}$$

5. Якщо $s < 0$ то звузити інтервал: $b=x_i$, змінити крок: $h=x_i-a$ і якщо $h < \varepsilon$ завершити обчислення, інакше повернутись до п.3;

6. Якщо $s > 0$ то звузити інтервал: $a=x_i$ і змінити крок: $h=b-x_i$ і якщо $h < \varepsilon$ завершити обчислення, інакше повернутись до п.3;

7. Якщо $s = 0$ то обчислення припинити оскільки x_i в цьому випадку є точкою екстремуму x^*.

Блок-схему розглянутого методу подано на рис.8.5.

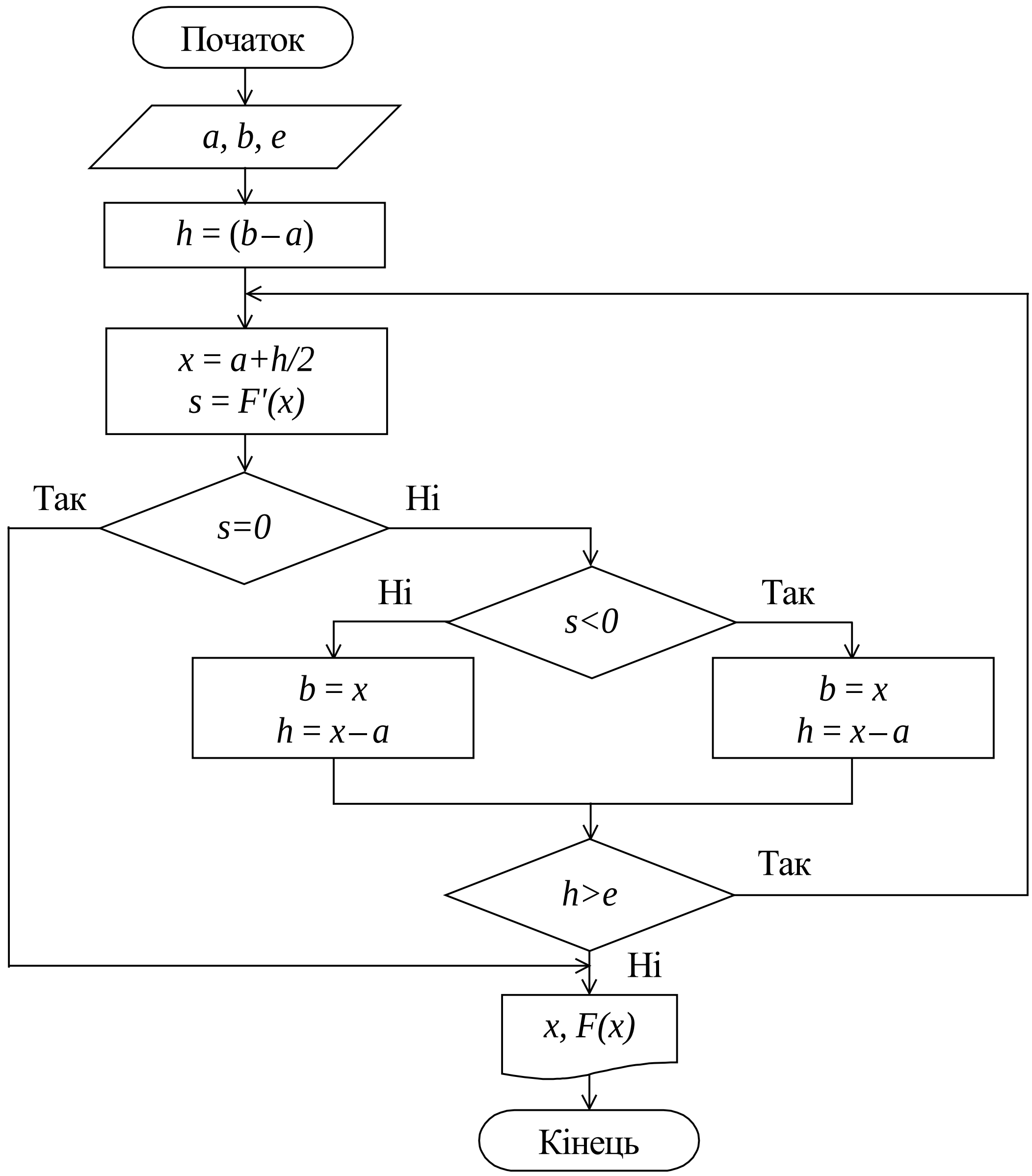

Рис.8.5. Блок-схема реалізації методу половинного поділу