6. РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

Суть розв'язку нелінійних (в тому числі трансцендентних) рівнянь виду:

$$F(x) = 0 \tag{6.1}$$

полягає в тому, щоб знайти один або всі корені на відрізку $[a,b]$ зміни x.

6.1. Метод половинного поділу (бісекції)

$x_0 = 0{,}5(a + b)$

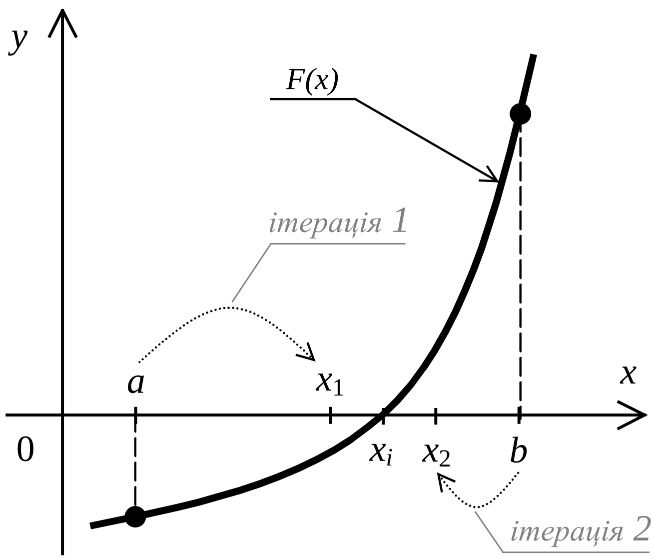

Рис.6.1. Графічна інтерпретація розв'язання рівняння методом дихотомії

Алгоритм розв'язку. Метод половинного поділу (бісекції) для випадку $F(a)>0$ можна реалізувати так:

1. Виконати ввід інтервалу $[a, b]$ та точність обчислення ε;
2. Визначити: $x=(a+b)/2$;
3. Обчислити $F(x)$;
4. Якщо $F(x)>0$, звужуємо інтервал зі сторони точки $a = x$, інакше з точки $b = x$;
5. Якщо $F(x) < \varepsilon$ або $(b - a) < 2\varepsilon$, то обчислення припиняють і вважають, що x – розв'язок отриманий із заданою точністю ε, інакше повернутись до пункту 2.

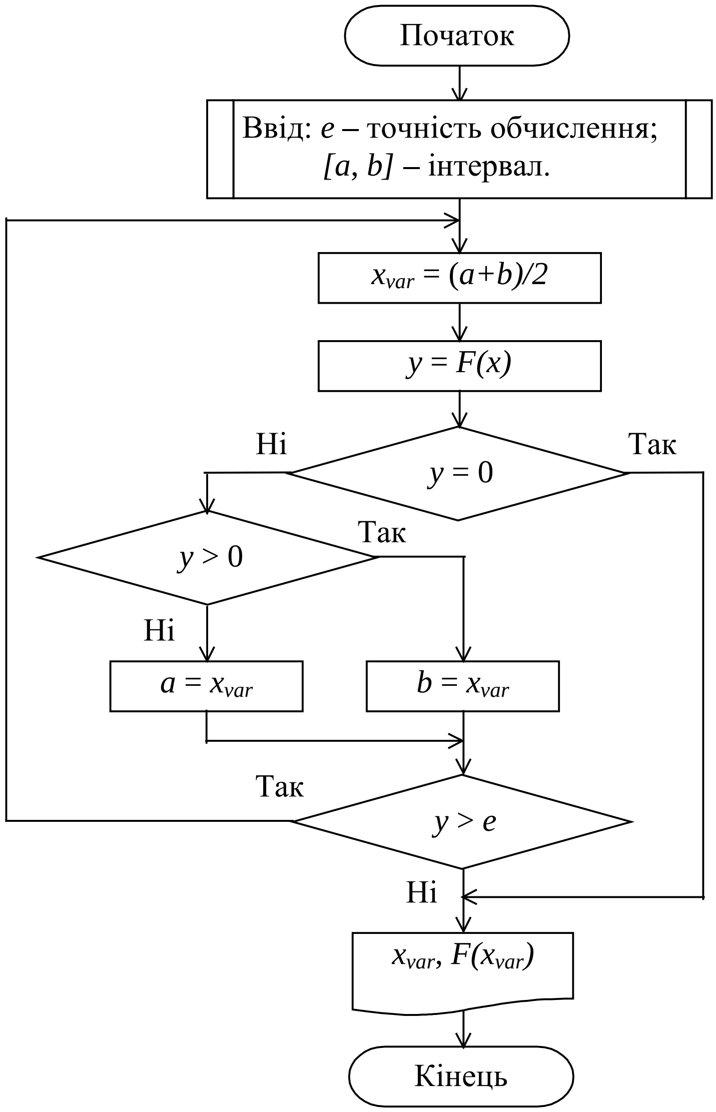

Рис.6.2. Блок-схема розв'язування нелінійних рівнянь методом половинного поділу

Число ітерацій при реалізації згаданого методу складає:

$$N = \left[\log_2\left(\left(b-a\right)/\varepsilon\right)\right] + 1, \qquad (6.3)$$

де $[x]$ - ціла частина дійсного числа x, тому збіжність методу невисока.

6.2. Метод простої ітерації

Метод простої ітерації передбачає заміну рівняння $F(x)=0$ рівносильним рівнянням:

$$x = \varphi(x), \qquad (6.4)$$

при цьому $\varphi(x)$ називають ітераційною функцією.

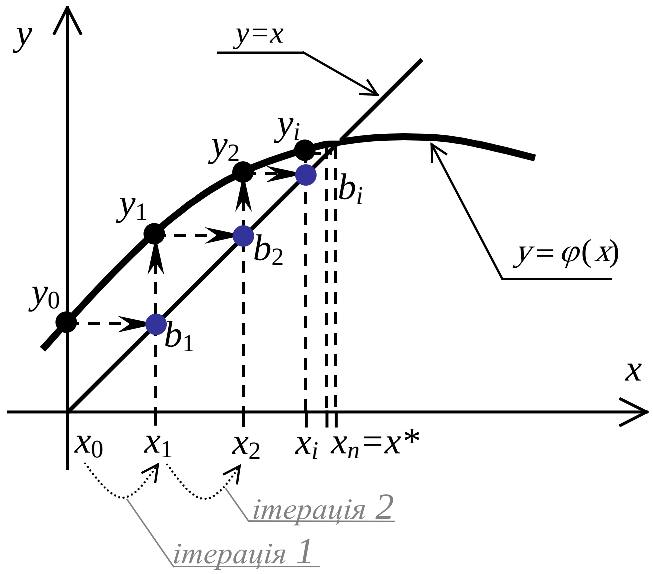

Рис.6.3. Графічна інтерпретація розв'язання рівняння методом простої ітерації

Алгоритм розв'язку. Метод простої ітерації з попередньо занесеним в програмний код рівнянням $\varphi(x)$ можна реалізувати так:

1. Виконати ввід інтервалу $[a, b]$ та точність обчислення ε;
2. Визначити: i=0; $x_i=(a+b)/2$;
3. Обчислити наступне значення: $x_{i+1}=\varphi(x_i)$;
4. Якщо $|x_{i+1}-x_i|<\varepsilon$, то обчислення припиняють і вважають, що x_{i+1} – розв'язок отриманий із заданою точністю ε, інакше $i=i+1$ і повернутись до пункту 3.

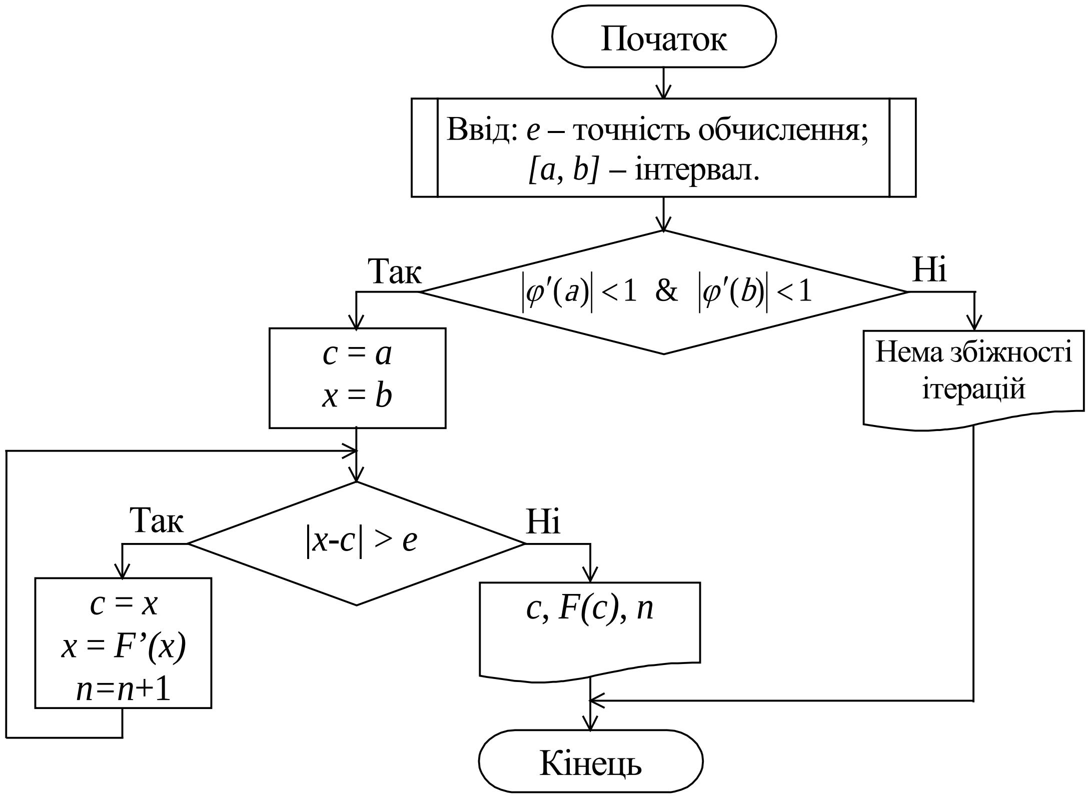

Рис.6.4. Блок-схема розв'язування нелінійних рівнянь методом простої ітерації

Число ітерацій при реалізації описаного методу складає:

$$N \approx \log_{q^{-1}} \frac{1}{\varepsilon}$$

де $\quad q = \max_{[a,b]} |\varphi'(x)|$.

6.3. Метод Ньютона (дотичних)

Рівняння дотичної:

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{6.6}$$

Прийнявши, що $y = 0$, знаходять точку перетину дотичної з віссю OX, абсциса якої буде першим наближенням кореня, ітерація 1, рис.6.4:

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}\,. \tag{6.7}$$

В точці x_1 знову проводять дотичну до кривої, що дозволяє отримати наступне наближення кореня, ітерація 2, рис.6.5.

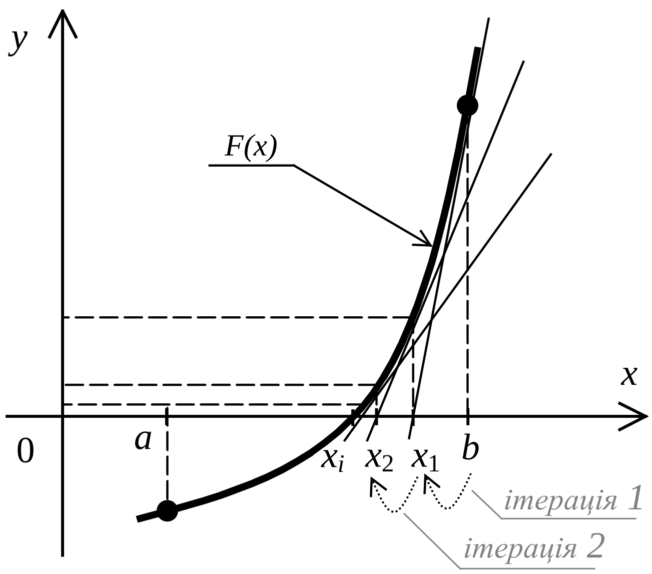

Рис.6.5. Графічна інтерпретація розв’язання рівняння методом Ньютона (дотичних)

Продовжуючи цей процес, можна отримати ітераційну формулу методу Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{6.8}$$

Відповідні аналітичні характеристики розміщення дуг кривої можна подати таким чином:

Тип 1	$F'(x) > 0$;	$F''(x) > 0$;	рис.6.5а
Тип 2	$F'(x) < 0$;	$F''(x) < 0$;	рис.6.5б
Тип 3	$F'(x) > 0$;	$F''(x) < 0$;	рис.6.5в

Тип 4 $F'(x) < 0$; $F''(x) > 0$; рис.6.5г

Як можна побачити з рис.6.5. для типів розміщення дуг кривої 1 та 2 виконується умова:

$$F'(x) \cdot F''(x) > 0$$

а для типів 3 та 4 відповідно умова:

$$F'(x) \cdot F''(x) < 0 \qquad (6.9)$$

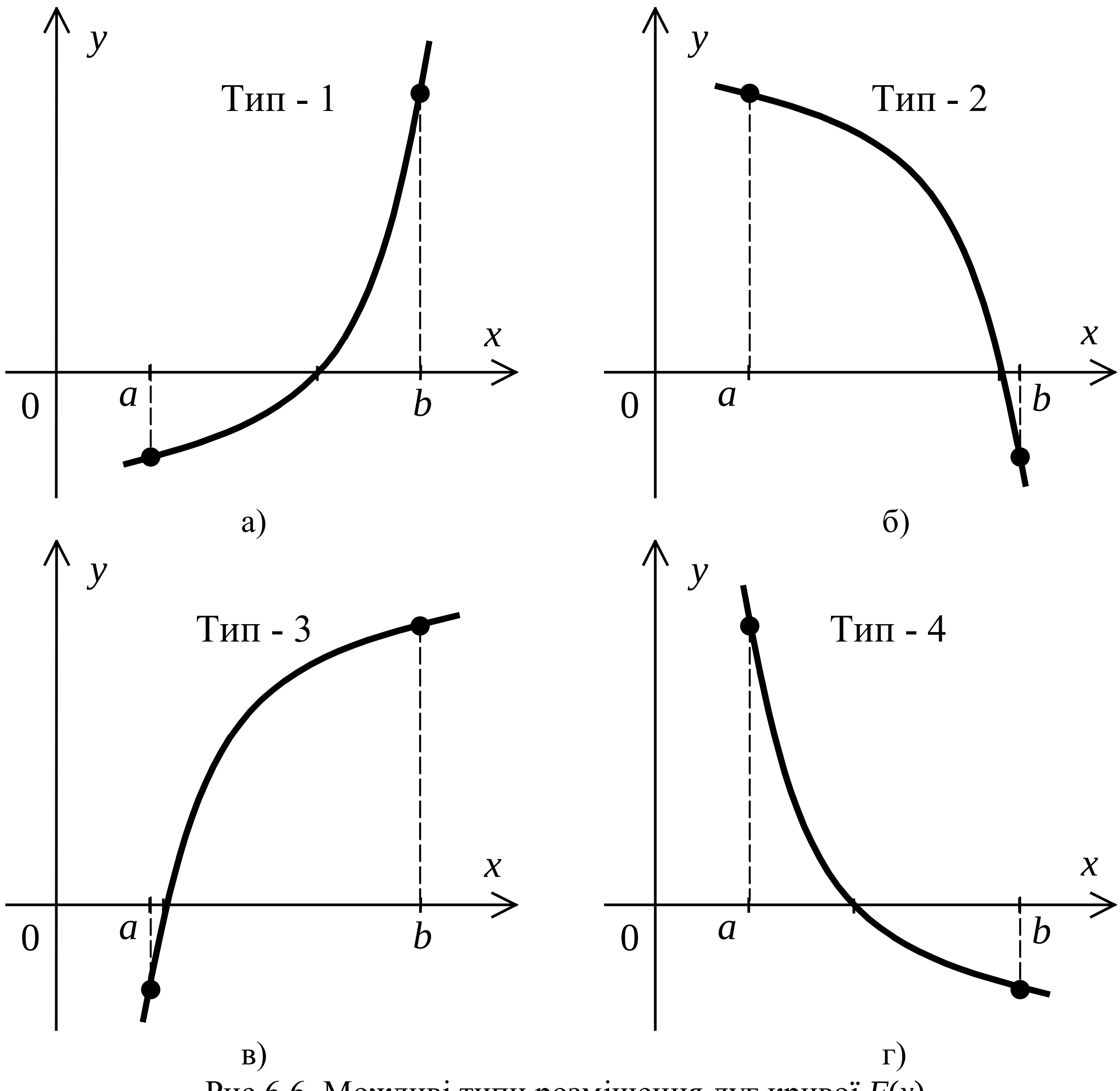

Рис.6.6. Можливі типи розміщення дуг кривої $F(x)$

Ітераційна формула так званого **модифікованого методу Ньютона** матиме вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_0)}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Ітераційна формула матиме вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n) \cdot \Delta x}{\Delta F(x_n)} \qquad (6.10)$$

На практиці початкове наближення x вибирають так, щоб знак функції $F(x)$ співпадав зі знаком кривизни, який визначається другою похідною $F''(x)$:

$$F(x) \cdot F''(x) > 0$$

Блок-схему реалізації методу розв'язання нелінійних рівнянь методом дотичних подано на рис.6.7.

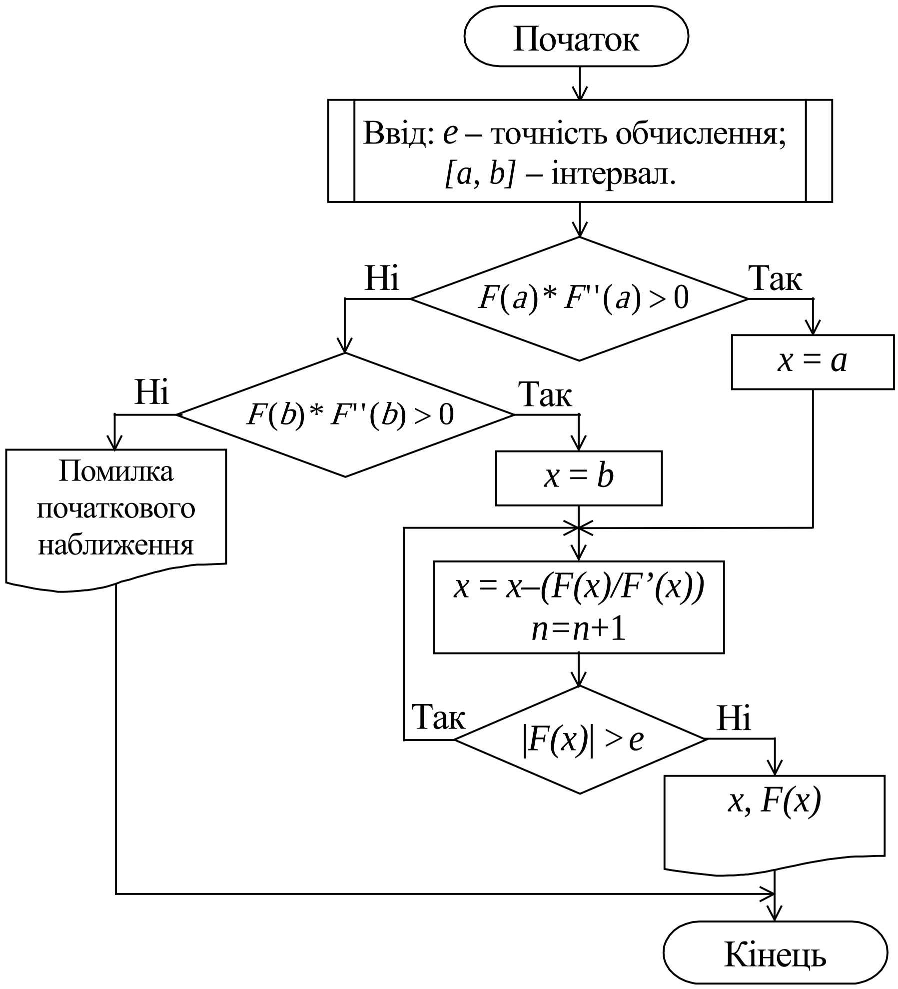

Рис.6.7. Блок-схема розв'язування нелінійних рівнянь методом Ньютона (дотичних)

Число ітерацій при реалізації згаданого методу складає:

$$N = \left[\log_2 \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1.$$

6.4. Метод хорд (січних)

При відомому наближенні до кореня x рівняння (6.1), тобто корінь визначений на відрізку $[a,b]$, для уточнення значення кореня може бути застосований метод хорд, рис.6.8. При цьому кожне значення x_{n+1} знаходиться як точка перетину осі абсцис з хордою, проведеною через точки $F(a)$ і $F(b)$, причому одна з даних точок фіксується – та, для якої знаки $F(x)$ і $F''(x)$ однакові. Якщо нерухомий кінець хорди $x = a$, то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(x_n) - F(a)}(x_n - a), \qquad (6.11)$$

а якщо нерухомий кінець хорди $x = b$, то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(b) - F(x_n)}(b - x_n). \qquad (6.12)$$

Якщо $|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon$, то в першому випадку приймаємо $b = x_{n+1}$, в другому $a = x_{n+1}$ і повторюємо обрахунки. При використанні методу хорд необхідно, щоб корінь $\overline{x}$ знаходився на відрізку [a,b].

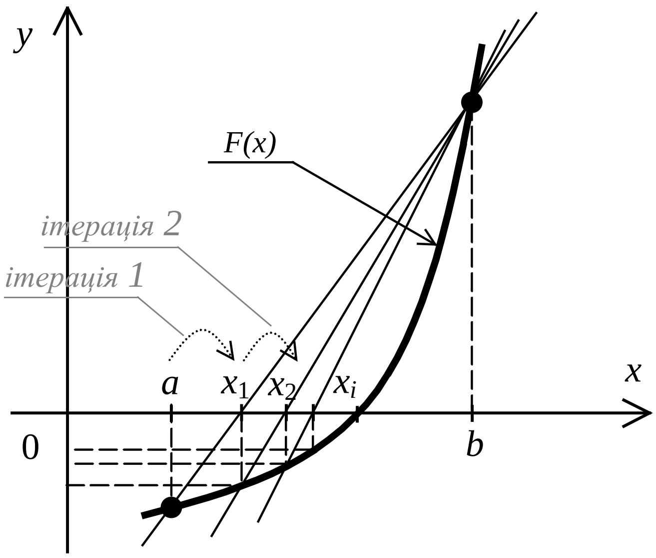

Рис.6.8. Графічна інтерпретація розв’язування рівняння методом хорд (січних)

В методі хорд використовують умову близькості двох послідовних наближень $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

Як і в попередньому способі точки початкового наближення обирають з використанням умови:

$$F(x) \cdot F''(x) > 0$$

Блок-схему реалізації розв’язання нелінійних рівнянь методом хорд подано на рис.6.9.

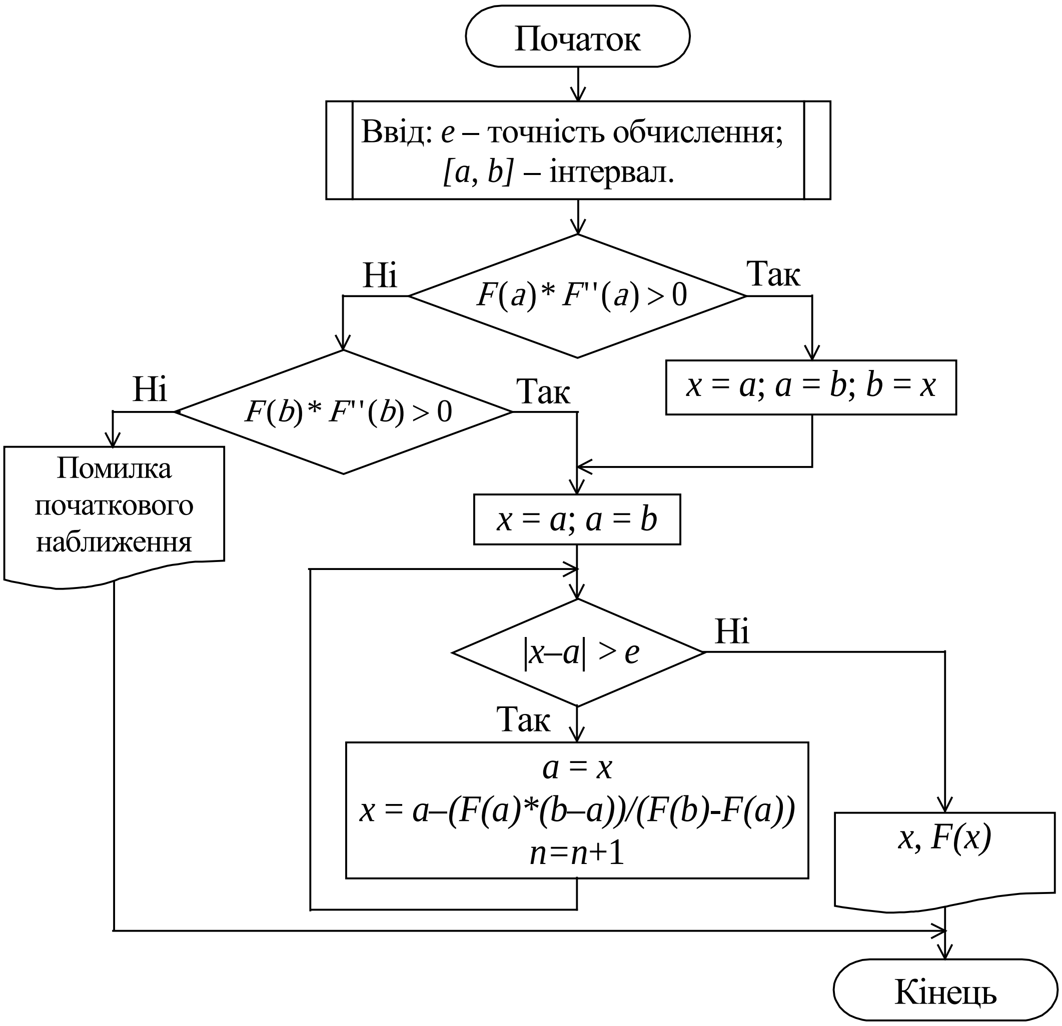

Рис.6.9. Блок-схема розв'язування нелінійних рівнянь методом хорд

6.5. Комбінований метод (хорд і дотичних)

Даний метод можна застосовувати коли $F''(x)$ на [a,b] зберігає знак, тобто при виконанні умови

$$F'(a)\cdot F''(b)>0\,.$$

Розрахунки починають за формулою (6.10) і знаходять x_1. Якщо припустити, що $F'(a)\cdot F''(b)>0$, тоді $x_0 = b$;

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} = b - \frac{F(b)}{F'(b)}\,.$$

За методом хорд знаходимо x_2: $a_0 = a$; $b = x_1$

$$x_2 = a_1 = a_0 - \frac{(a_0 - b_1)F(a_0)}{F(a_0) - F(b_1)}\,.$$

Для n–го наближення отримаємо формули:

$$b_{n+1} = b_n - \frac{F(b_n)}{F'(b_n)} \quad \text{і} \quad a_{n+1} = a_n - \frac{(a_n - b_{n+1})F(a_n)}{F(a_n) - F(b_{n+1})}, \qquad (6.13)$$

або

$$a_{n+1} = a_n - \frac{F(a_n)}{F'(a_n)} \quad \text{і} \quad b_{n+1} = b_n - \frac{(b_n - a_{n+1})F(b_n)}{F(b_n) - F(a_{n+1})}. \qquad (6.14)$$

В результаті чого отримуємо вкладені відрізки $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \ldots \subset [a, b]$. Оцінку похибки обчислення кореня можна провести за формулою:

$$|b_n - a_n| \le 2\varepsilon,$$

тоді

$$x_n \approx (a_n + b_n)/2,$$

де ε – необхідна точність обчислень.

Графічну інтерпретацію комбінованого методу (хорд і дотичних) подано на рис.6.10.

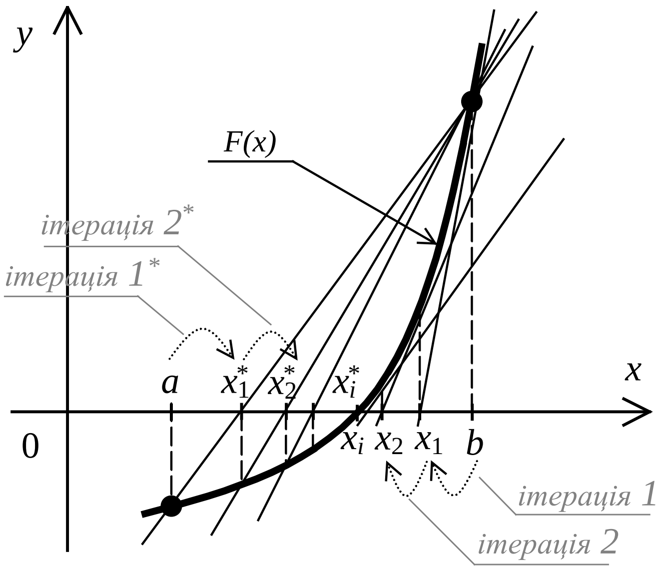

Рис.6.10. Графічна інтерпретація розв'язування рівняння комбінованим методом (хорд і дотичних)

Алгоритм розв'язування. Комбінований метод (хорд і дотичних) можна реалізувати так:

1. Перевірити умови допустимості застосування методу:

$$F(a)F(b) < 0; \quad F'(a)F'(b) > 0.$$

2. Перевірити умову чи друга похідна зберігає знак: $F'(a)F''(b) > 0$.
3. Якщо умова п.2 виконується, то перевіряємо умови: $F(x) \cdot F''(x) < 0$; тоді $x = a$ інакше $x = b$,

   для вибору формул методу (відповідно 6.13, або 6.14).
4. Обчислити наступне наближення за формулами (6.13) або (6.14).
5. Якщо: $|b_n - a_n| \le 2\varepsilon$ то обчислення припиняють, $x_n \approx (a_n + b_n)/2$ – це розв'язок отриманий із заданою точністю ε, інакше повернутись до пункту 4.

Блок-схему реалізації комбінованого методу (хорд і дотичних) подано на рис.6.11.

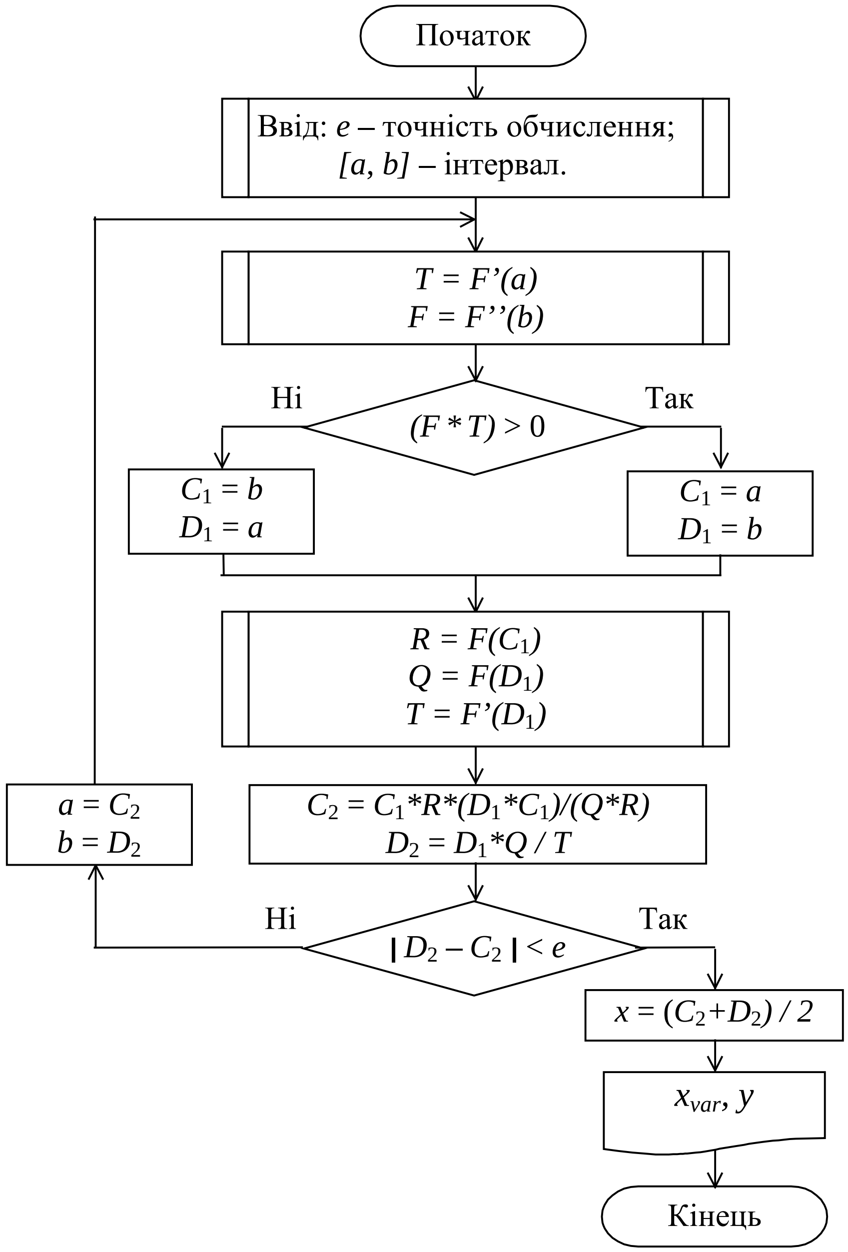

Рис.6.11. Блок-схема розв'язування нелінійних рівнянь комбінованим методом