5. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТА ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Найпростіша задача наближеного визначення функції полягає в наступному: якщо відомо деякі значення функції f на відрізку $[A, B]$ в $(n+1)$ різних точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ $f_i = f(x_i)$, $i = 0,1, ..., n$

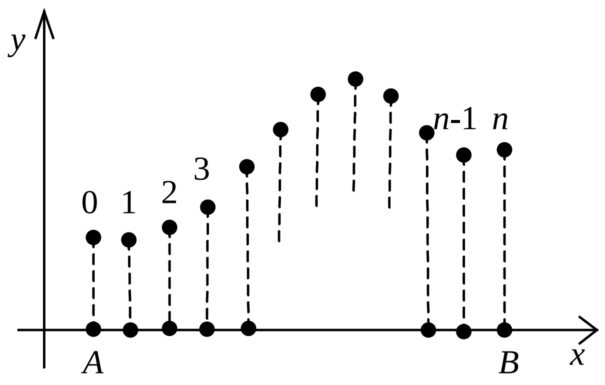

Рис.5.1. Відомі (задані) значення функції f для відрізку $[A, B]$

і необхідно відновити функцію f у довільній точці x, то будують многочлен $L_n(x)$ n-го степеня виду:

$$L_n(x_i) = f_i\,, \quad i = 0,1, ..., n$$

який у точках x_i приймає задані значення.

Наближене відновлення значень функції f в проміжках між вузлами x_i за формулою виду:

$$f(x) \approx L_n(x) \qquad (5.1)$$

називається інтерполяцією.

Для вирішення задачі лінійної інтерполяції необхідно задовольнити систему рівностей:

$$f(x_i) = f_i = \sum_{k=0}^{N} a_k \varphi_k(x_i)\,. \qquad (5.2)$$

5.1. Інтерполяція методом Лагранжа для рівномірно розташованих вузлів.

В формулах інтерполяції Лагранжа для рівномірно розташованих вузлів індексом *0* позначають центральний вузол. Для $n+1$ від 2 до 6 формули Лагранжа мають вигляд:

$$y(x)_2 = (1-p)y_0 + py_1 + 0{,}125h^2 y^{II}(\xi)\,,$$

$$y(x)_3 = \frac{p(p-1)}{2} y_{-1} + (1-p^2)y_0 + \frac{p(p+1)}{2} y_1 + 0{,}065h^3 y^{III}(\xi)\,,$$

$$y(x)_4 = -\frac{p(p-1)(p-2)}{6} y_{-1} + \frac{(p^2-1)(p-2)}{2} y_0 - \frac{p(p+1)(p-2)}{2} y_1 +$$

$$+ \frac{p(p^2-1)}{2} y_2 + R(p),$$

де $$R(p) = \begin{cases} 0{,}024h^4 y^{IV}(\xi) & \text{при} \quad 0 < p < 1, \\ 0{,}042h^4 y^{IV}(\xi) & \text{при} \quad -1 < p < 0, \ 1 < p < 2; \end{cases}$$

$$y(x)_5=\frac{(p^2+1)p(p-2)}{24}y_{-2}+\frac{(p-1)p(p^2-4)}{6}y_{-1}+\frac{(p^2-1)(p-4)}{4}y_0-$$
$$-\frac{(p+1)p(p^2-4)}{6}y_1+\frac{(p^2-1)p(p+2)}{24}y_2+R(p),$$

де $$R(p)=\begin{cases}0{,}012h^5y^V(\xi) & \text{при} \quad |p|<1,\\ 0{,}031h^5y^V(\xi) & \text{при} \quad 1<|p|<2;\end{cases}$$

$$y(x)_6=-\frac{p(p^2-1)(p-2)(p-3)}{120}y_{-2}+\frac{p(p-1)(p^2-4)(p-3)}{24}y_{-1}-$$
$$-\frac{(p^2-1)(p^2-4)(p-3)}{12}y_0+\frac{p(p+1)(p^2-4)(p-3)}{12}y_1-$$
$$-\frac{p(p^2-1)(p+2)(p-3)}{24}y_2+\frac{p(p^2-1)(p^2-4)}{120}y_3+R(p),$$

де $$R(p)=\begin{cases}0{,}0049h^6y^{VI}(\xi) & \text{при} \quad 0<p<1,\\ 0{,}0071h^6y^{VI}(\xi) & \text{при} \quad -1<p<0,\ 1<p<2,\\ 0{,}024h^6y^{VI}(\xi) & \text{при} \quad -2<p<-1,\ 2<p<3.\end{cases}$$

Для поданих виразів: $x=x_0+px$,

$$p=(x-x_0)/h,$$

де h – крок розташування вузлів, індекс біля $y(x)$, відповідає кількості вузлів $(n+1)$, y^{n+1};

ξ – максимальне значення похідної $y(x)$ для точки $x=\xi$, яка лежить в межах інтерполяції. Останній член формул зазвичай в програмах не обчислюється і характеризує похибку інтерполяції.

5.2. Інтерполяція методом Лагранжа для довільно розташованих вузлів.

Інтерполяція на відрізку $[x_0, x_n]$ при довільному розташуванні вузлів, в загальному випадку зводиться до обчислення $y(x)=L_n(x)$ на основі інтерполяційного поліному, що має такий вигляд:

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k, \tag{5.3}$$

який у $(n+1)$ вузлі x_i $(i=0,1,...,n)$ збігається зі значеннями апроксимуючої функції.

$$y_i=f(x_i)=a_0+a_1\cdot x_i+a_2\cdot x_i^2...+a_n\cdot x_i^n=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot x_i^k, \quad i=0,1,...,n. \tag{5.4}$$

Узагальнений многочлен Лагранжа степеня n:

$$\varphi(x)=L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\cdot l_i(x), \tag{5.5}$$

де $l_i(x)$ - многочлен Лагранжа, що визначається згідно таких формул:

$$
\begin{aligned}
&l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)},\\
&l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)},\\
&\vdots\\
&l_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})};
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

тобто

$$
L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\cdot\frac{\prod\limits_{j=0,i\neq j}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{j=0,i\neq j}^{n}(x_i-x_j)}.
$$

На основі (5.5) можна записати:

$$
l_i(x_k)=\begin{cases}1, & k=i,\\ 0, & k\neq i.\end{cases}
\tag{5.7}
$$

Блок-схему реалізації розглянутого методу подано на рис.5.2.

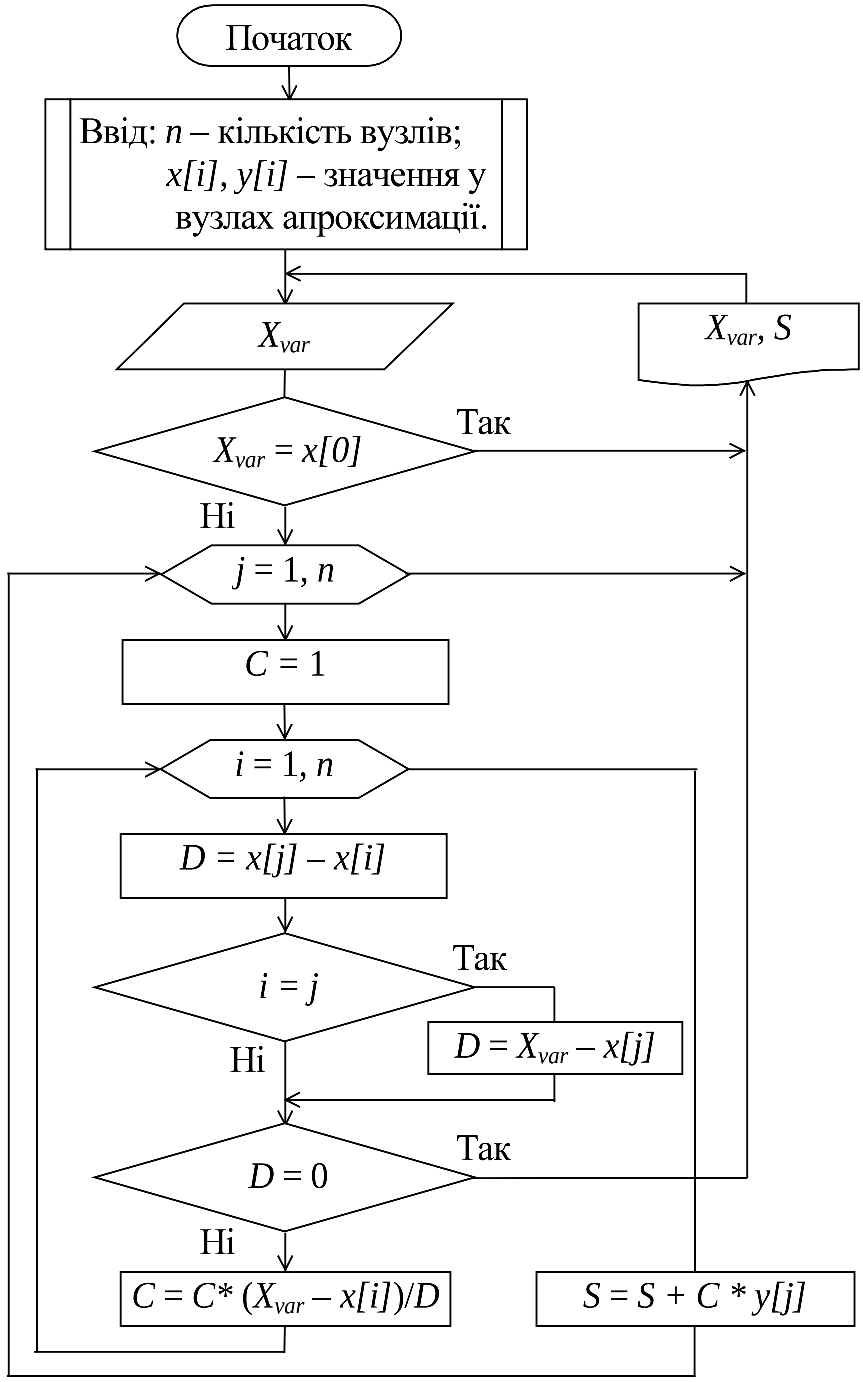

Рис.5.2. Блок-схема реалізації інтерполяції поліномом Лагранжа для довільно розташованих вузлів

5.3. Інтерполяція за схемою Ейткена.

Схема Ейткена дозволяє звести визначення коефіцієнтів a_i, $i=1,2,...n$, поліному

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} \tag{5.8}$$

з врахуванням

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{5.9}$$

(інтерполяційний поліном Лагранжа) до обчислення функціонального визначника другого порядку.

Введемо позначення

$$P_{i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{vmatrix} x - x_i & y_i = f(x_i) \\ x - x_{i+1} & y_{i+1} = f(x_{i+1}) \end{vmatrix}; \quad i = \overline{1, n-1} \qquad (5.10)$$

$$P_{i-1,i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_{i-1}} \begin{vmatrix} x - x_{i-1} & P_{i-1,i}(x) \\ x - x_{i+1} & P_{i,i+1}(x) \end{vmatrix}; \quad i = \overline{2, n-1} \qquad (5.11)$$

…

$$P_{1,2,\ldots,k}(x) = \frac{1}{x_k - x_1} \begin{vmatrix} x - x_1 & P_{1,2,\ldots,k-1}(x) \\ x - x_k & P_{2,3,\ldots,k}(x) \end{vmatrix}. \qquad (5.12)$$

Для обчислення визначника (5.13) маємо:

$$P_{i,i+1}(x) = a_{1,i} + a_{2,i} x; \quad i = \overline{1, n-1} \qquad (5.13)$$

$$r_i = 1/(x_{i+1} - x_i); \quad a_{1,i} = r_i (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}); \quad a_{2,i} = r_i (y_{i+1} - y_i)$$

Коефіцієнти $b_{k,i}$, $k = \overline{1,3}$ обчислюють за формулами:

$$r_i = 1/(x_{i+1} - x_{i-1}); b_{1,i} = r_i (a_{1,i} x_{i+1} - a_{1,i+1} x_i);$$

$$b_{2,i} = r_i (a_{2,i-1} x_{i+1} - a_{2,i} x_{i-1} + a_{2,i+1} - a_{1,i+1}); \quad b_{3,i} = r_i (a_{2,i} - a_{2,i-1}) \qquad (5.14)$$

$$P_{i-1,i,i+1}(x) = b_{1,i} + b_{2,i} x + b_{3,i} x^2; \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Переприсвоївши $a_{k,i} = b_{k,i}$, $k = \overline{1,3}$, можна за формулами виду (5.15) обчислити коефіцієнти поліному загального виду:

$$r_i = 1/(x_{i+k+1} - x_i); \quad b_{1,i} = r_i (a_{1,i} x_{i+k+1} - a_{1,i+1} x_i);$$

$$b_{j+1,i} = r_i (a_{i+1,i} x_{i+k+1} - a_{j+1,i+1} x_i + a_{2,i+1} - a_{j,i} + a_{j+1,i+1}) \qquad (5.15)$$

$$k = \overline{1, n-2}; \quad i = \overline{1, k+1}; \quad j = \overline{1, n-k-1}.$$

5.4. Інтерполяція за допомогою сплайнів.

Сплайн – це багаточлен *n*-ого ступеня:

$$P_{mn}(x) = a_{0n} + a_{1n}(x - x_k) + a_{2n}(x - x_k)^2 + \ldots + a_{nn}(x - x_k)^n \qquad (5.16)$$

де n – порядок многочлена, $x \in [x_m, x_{m+1}]$.

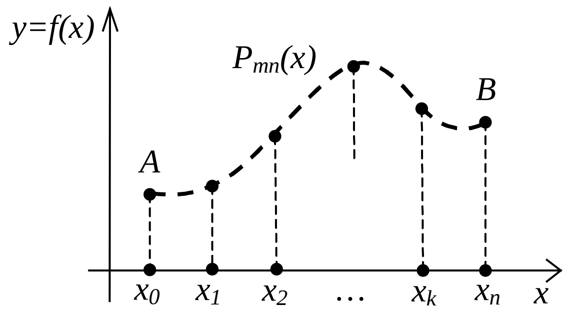

Рис.5.3. Інтерполяція за допомогою сплайнів

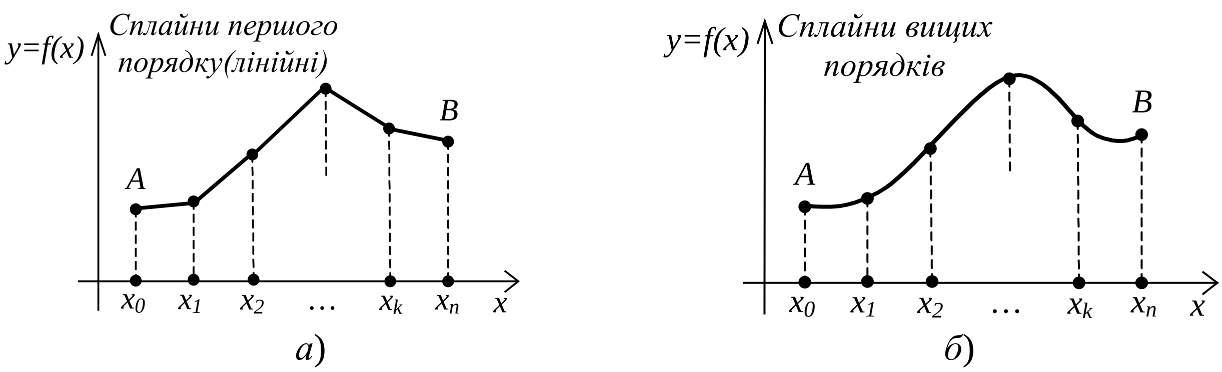

Рис.5.4. Сплайнова інтерполяція з різними степенями гладкості:
а) з розривами; б) без розривів.

Якщо n – порядок полінома, k – степінь гладкості, то дефектом сплайну є різниця

$$d = (n - k).$$

Лінійний сплайн. Означає заміну функції ламаною лінією.

$$\begin{aligned}
&P_{0,1}(x_0) = f(x_0);\; P_{0,1}(x_1) = f(x_1);\\
&P_{1,1}(x_1) = f(x_1);\; P_{1,1}(x_2) = f(x_2);\\
&\ldots\\
&P_{n-1,1}(x_{n-1}) = f(x_{n-1});\; P_{n-1,1}(x_n) = f(x_n);
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{P_{0,1}(x) - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)};\\
&\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{P_{1,1}(x) - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)};\\
&\ldots\\
&\frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{P_{n-1,1}(x) - f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Сплайни другого порядку. Для сплайну другого порядку кожні дві точки з'єднуються параболою.

$$\begin{aligned}
&P_{0,2}(x) = a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{20}(x - x_0)^2;\\
&P_{1,2}(x) = a_{01} + a_{11}(x - x_1) + a_{21}(x - x_1)^2;\\
&P_{2,2}(x) = a_{02} + a_{12}(x - x_2) + a_{22}(x - x_2)^2;\\
&\ldots\\
&P_{m-1,2}(x) = a_{0m-1} + a_{1m-1}(x - x_{m-1}) + a_{2m-1}(x - x_{m-1})^2.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Виходить m рівнянь, у кожне рівняння входить 3 коефіцієнти. Загальне число невідомих $3m$ (потрібно визначити коефіцієнти a_{ij})

$$\begin{aligned}
&P_{0,2}(x_0) = f(x_0);\; P_{0,2}(x_1) = f(x_1);\\
&P_{1,2}(x_1) = f(x_1);\; P_{1,2}(x_2) = f(x_2);\\
&\ldots\\
&P_{m-1,2}(x_{m-1}) = f(x_{m-1});\; P_{m-1,2}(x_m) = f(x_m).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Таких рівнянь буде $3m$, а число невідомих $3m$. Тобто потрібно додати похідні в проміжних вузлах.

$$m-1\begin{cases} P'_{0,2}(x_1)=P'_{1,2}(x_1) \\ P'_{1,2}(x_2)=P'_{2,2}(x_2) \\ P'_{2,2}(x_3)=P'_{3,2}(x_3) \\ \ldots \\ P'_{m-2,2}(x_{m-1})=P'_{m-1,2}(x_{m-1}) \end{cases} \tag{5.21}$$

$3m \neq 2m + m - 1 = 3m - 1$ (тобто не вистачає однієї додаткової умови).

У цьому випадку задають похідну або в точці x_0, або в точці x_m.

$$P'_{0,2}(x_0)=f'(x_0) \quad \text{чи} \quad P'_{m-1,2}(x_m)=f'(x_m). \tag{5.22}$$

Будемо вважати, що перша похідна задана в точці x_0.

1) $P'_{0,2}(x_0)=a_{12}+a_{22}(x-x_0)$;

$P'_{0,2}(x_0)=f'(x_0) \rightarrow a_{10}=f'(x_0)$;

2) $P_{i,2}(x)=a_{0i}+a_{1i}(x-x_i)+a_{2i}(x-x_i)^2$;

$P_{i,2}(x_i)=a_{0i} \Rightarrow a_{0i}=f(x_i)$ $(i=\overline{0,m-1})$;

$P_{i,2}(x_{i+1})=a_{0i}+a_{1i}(x_{i+1}-x_i)+a_{2i}(x_{i+1}-x_i)^2$;

$P_{i+1,2}(x_{i+1})=a_{0i+1}=f(x_{i+1})$;

$P_{i,2}=P_{i+1,2} \rightarrow a_{0i}+a_{1i}(x_{i+1}-x_i)+a_{2i}(x_{i+1}-x_i)^2=a_{0i+1}$.

Замість a_{0i} і a_{0i+1} підставляємо значення функцій

$$f(x_i)+a_{1i}(x_{i+1}-x_i)+a_{2i}(x_{i+1}-x_i)^2=f(x_{i+1}) \quad ; \tag{5.23}$$

$$a_{2i}=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)-a_{1i}(x_{i+1}-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)^2}.$$

3) Запишемо першу похідну в загальному виді

$$P'_{i,2}(x)=a_{1i}+2a_{2i}(x-x_i);$$
$$P'_{i+1,2}(x)=a_{1i+1}+2a_{2i}(x-x_{i+1});$$
$$P'_{i,2}(x_{i+1})=P'_{i+1,2}(x_{i+1});$$
$$\tag{5.24}$$
$$a_{1i}+2a_{2i}(x_{i+1}-x_i)=a_{1i+1};$$
$$a_{2i}=\frac{a_{1i+1}-a_{1i}}{2(x_{i+1}-x_i)}.$$

Підставимо цей вираз в (5.24). Після підстановки ми можемо виразити a_{1i+1}

$$a_{1i+1}=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{2(x_{i+1}-x_i)}-a_{1i}. \tag{5.25}$$

Послідовність обчислення коефіцієнтів така:

1) $P'_{0,2}(x_0)=f'(x_0)$;

$a_{10}=f'(x_0)$;

2) $a_{1i+1}=\dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{2(x_{i+1}-x_i)}-a_{1i}$, $(i=\overline{0,m-2})$;

3) $a_{2i} = \dfrac{a_{1i+1} - a_{1i}}{2(x_{i+1} - x_i)}$, $(i = \overline{0, m-2})$.

5.5. Похибка інтерполяції.

Похибка інтерполяції $R_n(x)$ залежить від кількості вузлів n і визначається за формулою:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x). \tag{5.26}$$

У вузлах інтерполяції величина похибки залежить від виду апроксимуючої функції і обчислюється наступним чином:

$$R_n(x) = \omega(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \tag{5.27}$$

де $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$,

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f(x)}{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x)(x_0 - x_1)...(x_0 - x_n)} + ...$$

$$... + \frac{f(x_n)}{(x_n - x)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})};$$

ξ - невузлова точка на відрізку $[x_0, x_n]$.

Коли вузли апроксимації розташовані рівномірно, тобто $x_i - x_{i-1} = h$, для всіх $i = 1, 2, ..., n$ (рівномірна сітка з кроком h), похибка визначається із співвідношення:

$$R_n(x) \le \frac{\left| f^{(n+1)}(\xi) \right|}{n+1} h^{n+1}. \tag{5.28}$$