ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

9.1. Метод прямокутників.

Квадратурні формули відповідно лівих та правих прямокутників мають вигляд:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = (b-a)\cdot f(a); \qquad \int_a^b f(x)\cdot dx = (b-a)\cdot f(b).$$

Площа одного сегменту на відрізку $[x_i , x_{i+1}]$ визначається:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx S_{ABCD} = h\cdot y_i\ , \tag{9.4}$$

де $y_i = f(x_i)$, i=1,...n,
$h = x_{i+1} - x_i$.

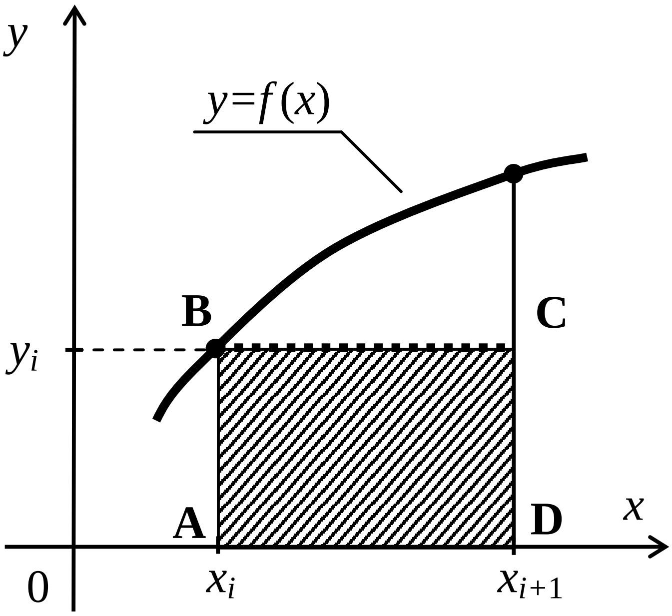

Рис.9.1. Графічна інтерпретація обчислення площі одного сегменту методом прямокутників

Алгоритм розв’язання. Метод правих прямокутників для визначеного на відрізку $[a,b]$ інтегралу $f(x)$ можна реалізувати так:

1. Виконати ввід інтервалу $[a,b]$ та кількість його розбиттів n;
2. Визначити приріст: $h = (b-a)/n$ і задати початкове значення $x_0 = a$;
3. Обчислити: $I = I + f(x_i)\cdot h$,
4. Взяти наступне значення x для обчислення: $x_{i+1} = x_i + h$;
5. Якщо $x_{i+1}>b$, то обчислення припиняють і приймають, що I – шуканий інтеграл, інакше повернутись до пункту 3.

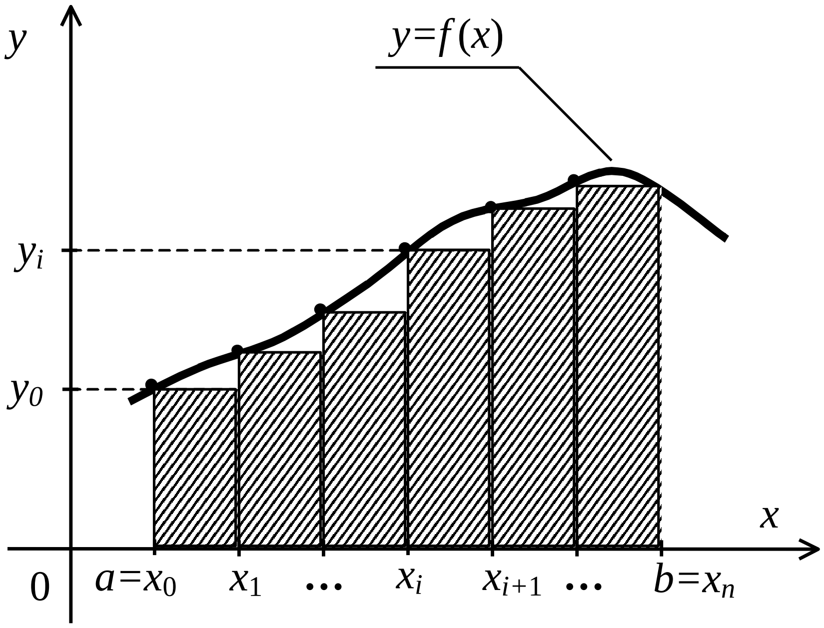

Рис.9.2. Графічна інтерпретація інтегрування методом прямокутників

Також, часто застосовують **метод середніх прямокутників**, квадратурна формула якого має вигляд:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

0,5h, де $h=(b-a)/n$, тобто площа одного сегменту, рис.9.3, наближено обчислюють як площу прямокутника ABCD:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx S_{ABCD} = f(\xi_i)\cdot h\,, \tag{9.6}$$

де $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2},\ h = x_i - x_{i-1},\ i = 1,...n.$

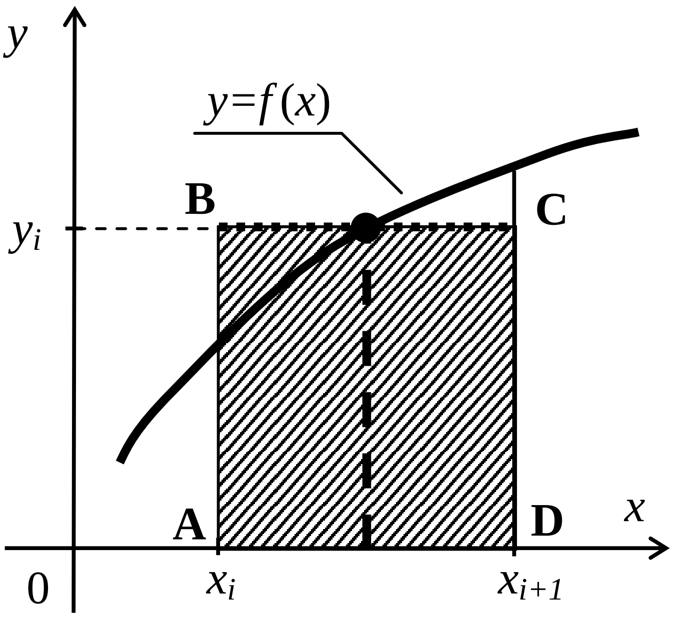

Рис.9.3. Графічна інтерпретація обчислення площі одного сегменту методом середніх прямокутників

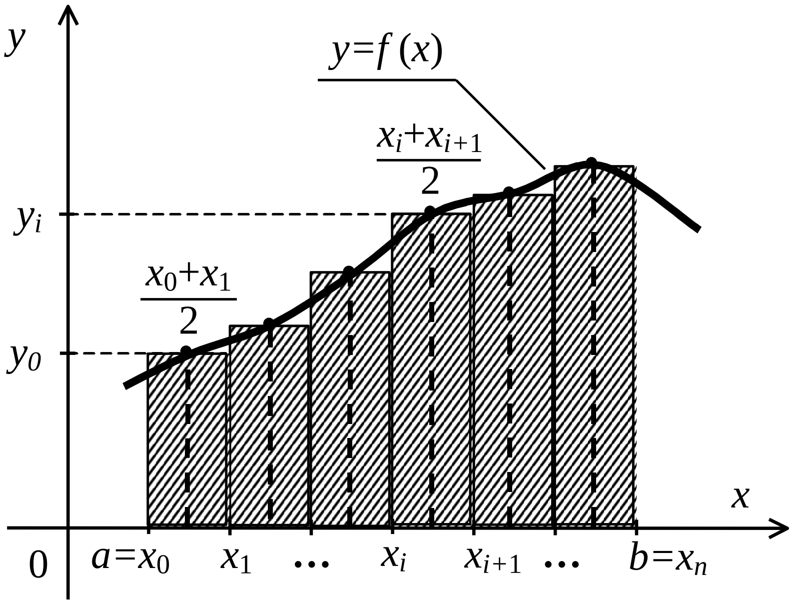

Рис.9.4. Графічна інтерпретація інтегрування методом середніх прямокутників

Блок-схему реалізації розглянутого методу подано на рис.9.5.

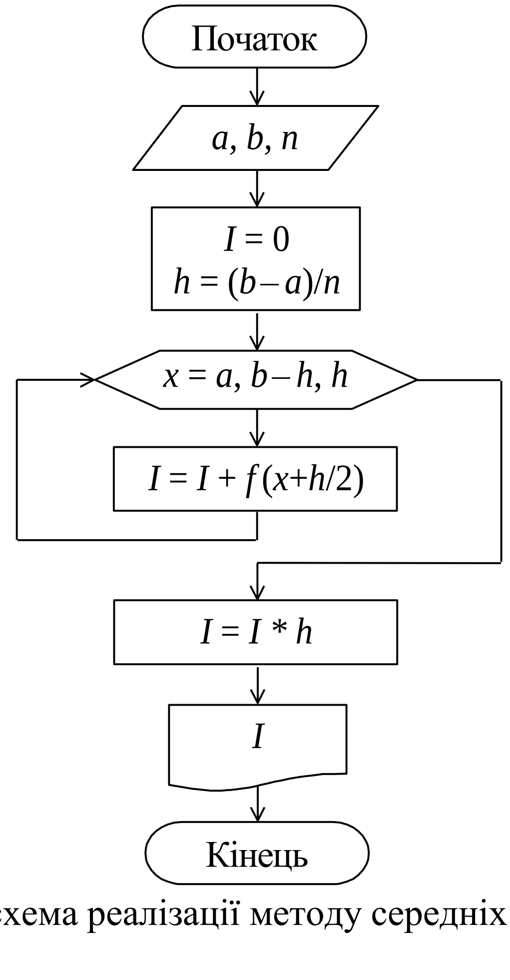

Рис.9.5. Блок-схема реалізації методу середніх прямокутників

Похибка формули (9.7), отримана за допомогою ряду Тейлора складає:

$$\left|R(x)\right| = \frac{h^2(b-a)}{24}\left|f^{(2)}_{\max}(\xi)\right|, \tag{9.8}$$

де $\left|f^{(2)}_{\max}(\xi)\right|$ – максимальне значення другої похідної на відрізку $[a,b]$, $\xi \in [a,b]$.

9.2. Метод трапецій.

В загальному випадку квадратурна формула трапецій має вигляд:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)).$$

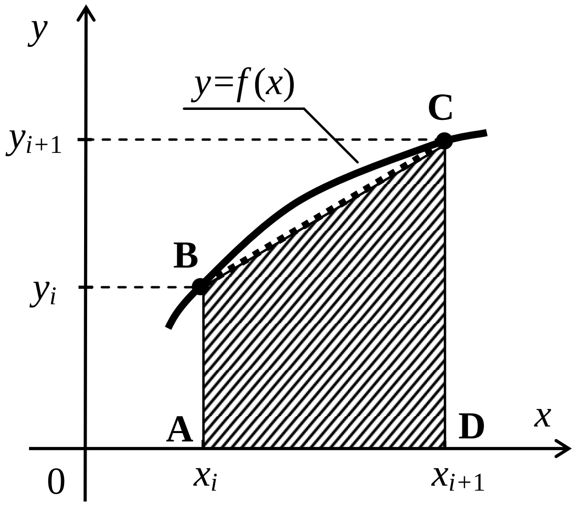

Рис.9.6. Графічна інтерпретація обчислення площі одного сегменту методом трапецій

Таким чином площа одного сегменту на відрізку [x_i , x_{i+1}] визначається:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx S_{ABCD} = \frac{1}{2}h(y_i + y_{i+1}), \qquad (9.9)$$

де $y_i = f(x_i)$, i=1,...n.

Тоді для усього інтервалу [a,b] можна записати:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{1}{2}f_0 + \sum_{i=2}^{n-1} f_i + \frac{1}{2}f_n\right] \qquad (9.10)$$

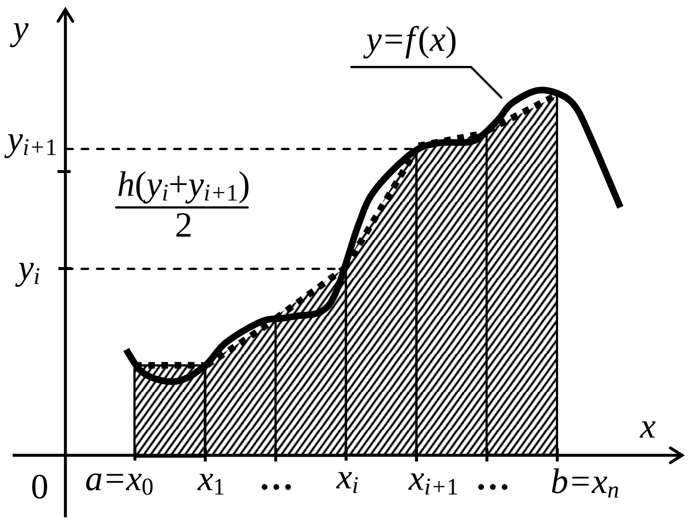

Рис.9.7. Графічна інтерпретація інтегрування методом трапецій

Блок-схему реалізації розглянутого методу подано на рис.9.8.

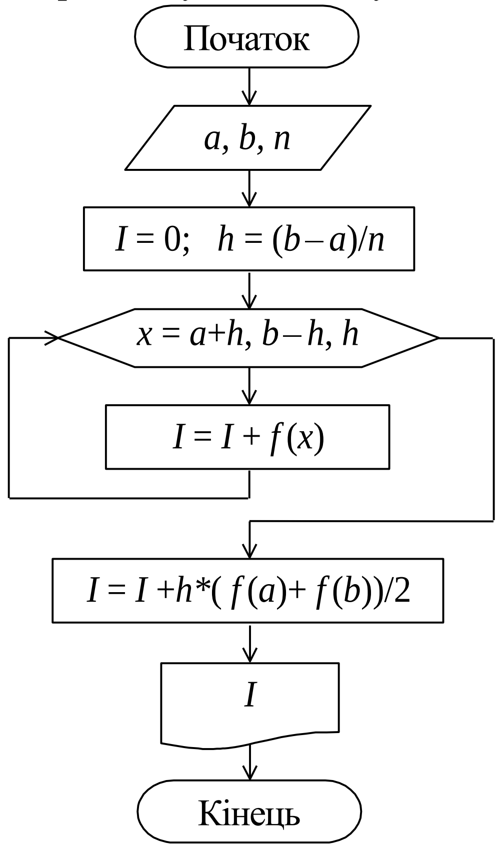

Рис.9.8. Блок-схема реалізації методу трапецій

Похибка формули (9.10), отримана за допомогою ряду Тейлора складає:

$$\left|R(x)\right| = \frac{h^2(b-a)}{12}\left|f_{\max}^{(2)}(\xi)\right|, \qquad (9.11)$$

де $\left|f_{\max}^{(2)}(\xi)\right|$ – максимальне значення другої похідної на $[a,b]$, $\xi \in [a,b]$.

9.3. Метод парабол (Сімпсона).

В загальному випадку квадратурна формула Сімпсона має вигляд:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

В результаті, площу одного сегменту на відрізку $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ можна визначити з наближеної рівності:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_{i+1}}^{x_{i-1}} \varphi(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}\right). \qquad (9.12)$$

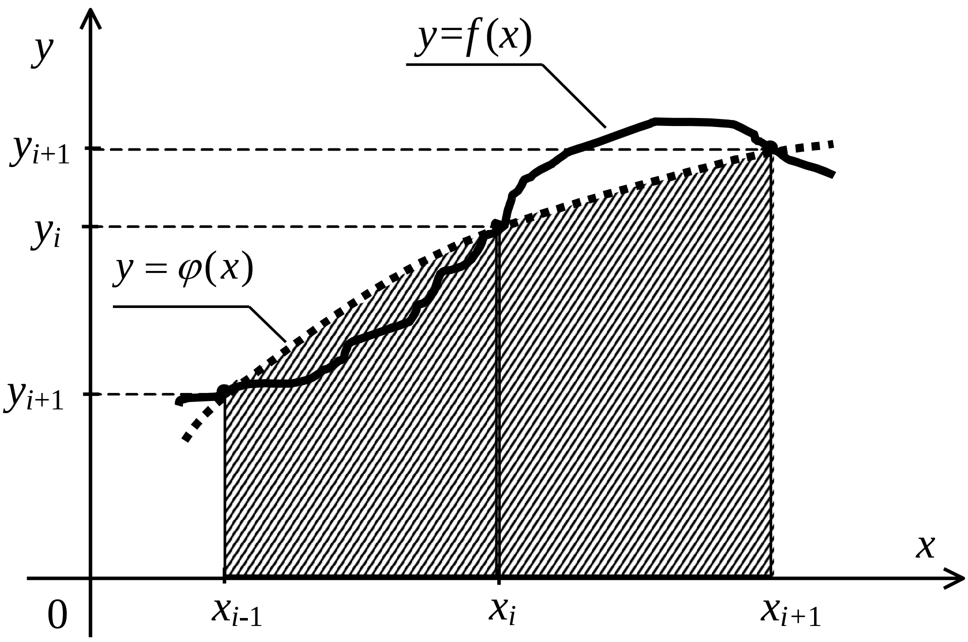

Рис.9.9. Графічна інтерпретація обчислення площі одного сегменту методом парабол (Сімпсона)

Тоді для усього інтервалу [*a*,*b*] можна записати:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n} y_i q_i \ , \qquad (9.13)$$

де $y_i = \varphi(x_i)$, $i=1,...n$;

$$q_i = \begin{cases} 1, \ i = 0, n \\ 4, \ i = 1,3,...,n-1 \\ 2, \ i = 2,4,...,n-2 \end{cases}$$

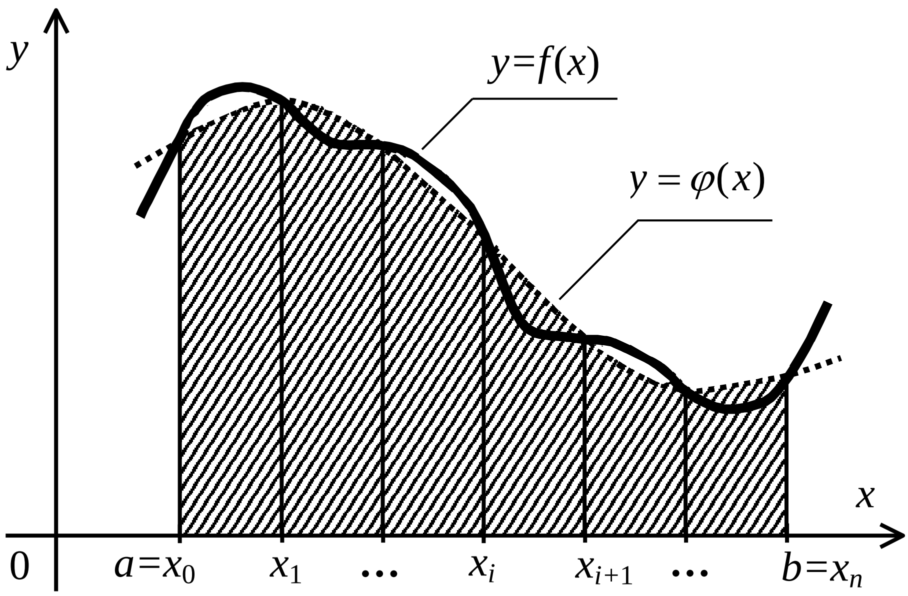

Рис.9.10. Графічна інтерпретація інтегрування методом парабол (Сімпсона)

Блок-схему реалізації розглянутого методу подано на рис.9.11.

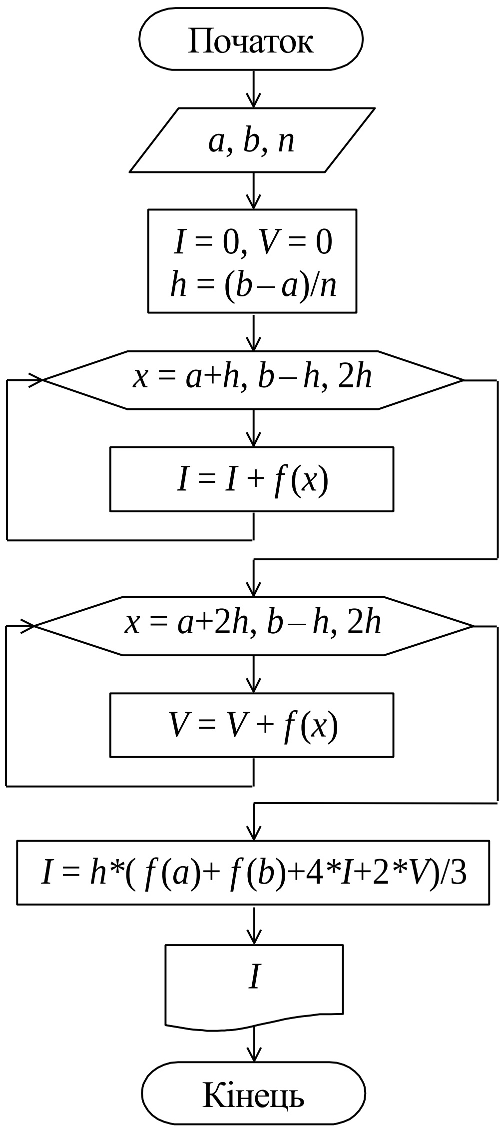

Рис.9.11. Блок-схема реалізації методу парабол (Сімпсона)

Похибка формули (9.13) складає:

$$\left|R(x)\right| = \frac{h^4(b-a)}{90}\left|f^{(4)}_{\max}(\xi)\right|, \tag{9.14}$$

де $\left|f^{(4)}_{\max}(\xi)\right|$ – максимальне значення четвертої похідної на інтервалі [a,b], $\xi \in [a,b]$.

9.4. Оцінка похибки обчислення площі.

Прийнявши, що I_h – значення інтеграла, обчислене з кроком h, а $I_{h/2}$ – значення того ж інтеграла, обчислене для кроку $h/2$, для обчислення точного значення площі можемо записати:

$$
\begin{aligned}
I &= I_h + c \cdot h^k + \mathrm{o}(h^{k+1}), \\
I &= I_{h/2} + c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^k + \mathrm{o}(h^{k+1}),
\end{aligned}
\tag{9.15}
$$

де I – точне значення інтеграла,

$c \cdot h^k$ – головна частина похибки квадратурної формули з порядком точності k за кроком h.

Віднімаючи від першого рівняння (9.15) друге отримаємо співвідношення, що з точністю порядку $\mathrm{o}(h^{k+1})$ дозволяє обчислити значення головної частини похибки квадратурної формули:

$$
c \cdot h^k = \frac{I_{h/2} - I_h}{1-(1/2)^k} + \mathrm{o}(h^{k+1}) \,. \tag{9.16}
$$

Отримана формула називається практичною оцінкою похибки за правилом Рунге.

Підставивши (9.16) у першу формулу (9.15) отримаємо формулу для уточнення значення інтеграла за Річардсоном:

$$
I = I_n + \frac{I_{h/2} - I_h}{1-(1/2)^k} + \mathrm{o}(h^{k+1}) = \frac{2^k I_{h/2} - I_h}{2^k - 1} + \mathrm{o}(h^{k+1}) \tag{9.17}
$$

Для формул прямокутників, трапецій k=2, для формул Сімпсона k=4.

Таким чином для оцінки точності обчислення необхідно визначити площу інтеграла $f(x)$ для кількості розбиттів n та $2n$, що відповідає величні кроку h та $h/2$. Спрощені формули для методів:

$|R(x)| = |I_{h/2} - I_h| / 3$ – прямокутників і трапецій;

$|R(x)| = |I_{h/2} - I_h| / 15$ – парабол (Сімпсона).

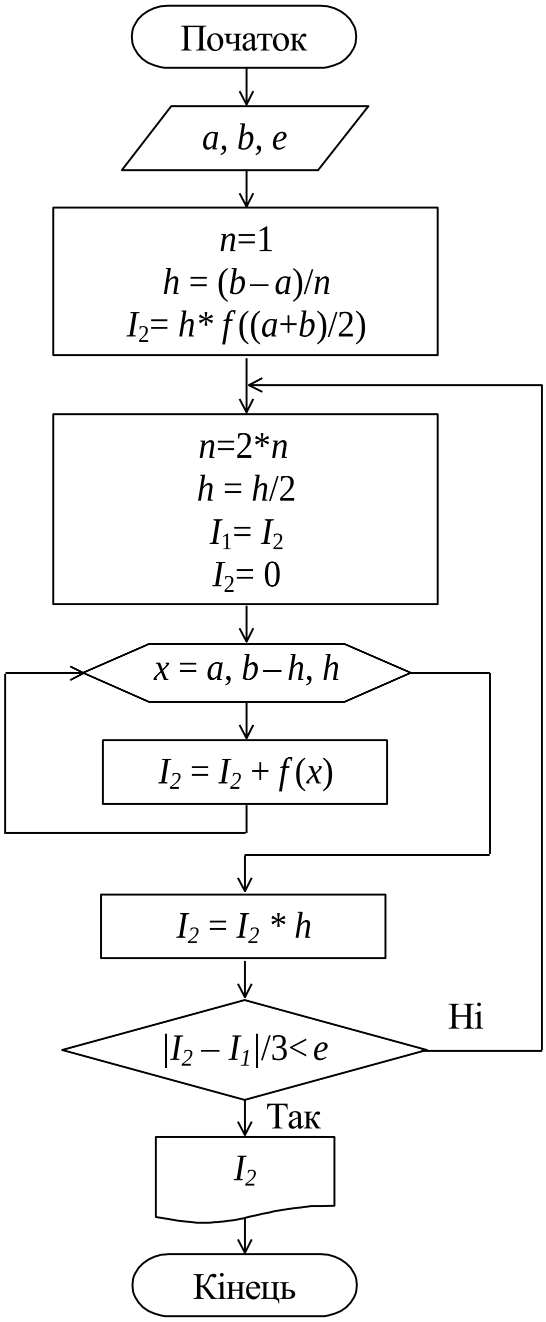

Рис.9.12. Блок-схема реалізації методу прямокутників з оцінкою точності