<u>**Похибки обчислень**</u>

1.1. Основні джерела виникнення похибок обчислювальних методів.

Обмеженість розрядної сітки ЕОМ і обмеженість її пам’яті є джерелом виникнення різного роду помилок (неточностей) при реалізації обчислювальних алгоритмів. Наприклад, проста функція $y = x$ на гіпотетичній ЕОМ з фіксованою однорозрядною арифметикою має вигляд, рис.1.1.

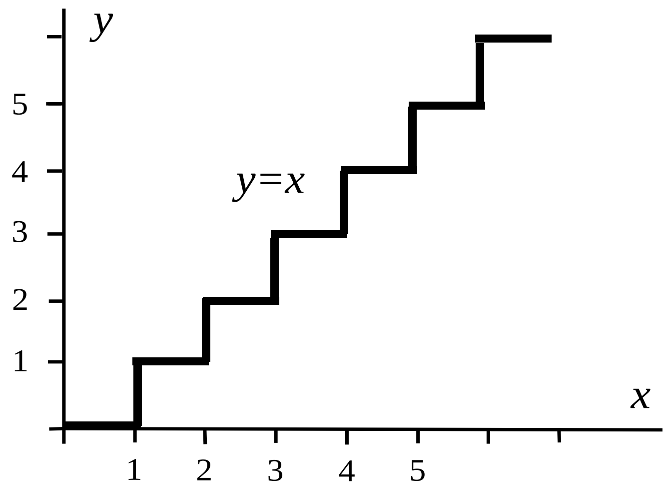

Рис.1.1. Реалізація функції присвоєння на ЕОМ з фіксованою однорозрядною арифметикою

Тобто, при спробі визначення одного з коренів рівняння

$$x^2 + 0{,}4002x + 0{,}00008 = 0$$

використовуючи обчислення з точністю до 4-ої цифри після коми, користуючись формулою:

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

отримуємо результат: $x = -0{,}0002$, замість точного розв’язку: $x = -0{,}00015$. Отже, похибка обчислення у цьому випадку дорівнює 25 %.

Можна виділити такі основні джерела похибок:

- похибки вихідної інформації.

- похибки обмеження.

- похибка округлення.

Значущими цифрами числа називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва. Зокрема:

x=4,870342 – всі цифри в запису цього числа значущі;
x=0,007624 – значущі цифри тільки 7, 6, 2, 4;
x=0,320400 – значущі цифри 3, 2, 0, 4, 0, 0 (останні нулі числа є значущі);

x=3780000 – всі цифри значущі;

x=3,78·10^{-6} – значущі цифри тільки 3, 7, 8.

Значуща цифра вважається вірною, якщо абсолютна похибка числа не перевищує ½ одиниці розряду, що відповідає цій цифрі.

1.2. Поширення похибок в ході обчислень

Похибкою Δx наближеного числа $\bar{x}$ традиційно називають різницю між істинним значенням x і її наближеним значенням:

$$\Delta x = x - \bar{x} .$$

де x – істинне значення величини,

$\bar{x}$ – його наближене (обчислене, виміряне, тощо) значення.

Якщо $x > \bar{x}$ то похибка додатна, якщо $x < \bar{x}$ то відповідно від'ємна. В багатьох випадках знак похибки невідомий, тоді доцільніше застосовувати абсолютну похибку.

Абсолютна похибка - модуль різниці між істинним значенням величини і її наближеним (обчисленим, виміряним, тощо) значенням:

$$e_x = \left| x - \bar{x} \right|, \tag{1.1}$$

Відносна похибка - відношення абсолютної похибки до модуля наближеного (обчисленого, виміряного, тощо) значення:

$$\delta = \left| \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}} \right| = \frac{e_x}{|\bar{x}|} \tag{1.2}$$

Доцільно зазначити, що істинне значення x, як правило, невідоме і немає можливості визначити абсолютну похибку e_x. В цьому випадку замість невідомої теоретичної абсолютної похибки e_x вводять її оцінку зверху, так звану граничну абсолютну похибку Δ_x, тоді отримуємо:

$$e_x = \left| x - \bar{x} \right| \le \Delta_x ,$$

отже істинне x знаходиться в межах: $\bar{x} - \Delta_x \le x \le \bar{x} + \Delta_x$, тобто $x = \bar{x} \pm \Delta_x$.

Застосовується також поняття граничної відносної похибки. Отже граничною відносною похибкою наближеного числа $\bar{x}$ називається будь-яке число, що не менше відносної похибки цього числа, тобто $\delta \le \delta_x$. В результаті за граничну відносну похибку деякого наближеного числа $\bar{x}$ можна прийняти:

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{\bar{x} - \Delta_x}$$

Враховуючи те, що $\Delta_x << \bar{x}$ і $\delta_x << 1$ то наближено можна прийняти, що:

$$\delta_x \approx \frac{\Delta_x}{\bar{x}} \tag{1.3}$$

При практичних розрахунках (обчисленні функцій $f(x)$) часто використовують оцінку граничної абсолютної похибки виду:

$$\Delta_y \le \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)}{\partial x_j} \right| \cdot \Delta_{x_j} \qquad (1.4)$$

яку називають лінійною оцінкою похибки.

Виходячи з вище поданої оцінки, нескладно знайти відносну похибку:

$$\delta_y \le \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)}{\partial x_j}}{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)} \right| \qquad (1.5)$$

Використовуючи формули (1.4), (1.5), можна визначити похибки результатів математичних операцій.

- **похибка суми.** якщо ж позначити Δ_{x+y} – граничною абсолютною похибкою суми, то відповідно отримаємо:

$$\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y; \qquad (1.6)$$

- **похибка різниці.** При виконанні операції віднімання аналогічно (до операції додавання) отримуємо:

$$\Delta_{x-y} = \Delta_x + \Delta_y \qquad (1.7)$$

- **похибка множення.** При виконанні операції множення граничну абсолютну похибку наближено можна визначити за формулою:

$$\Delta_{xy} \approx |\bar{x}| \cdot \Delta_y + |\bar{y}| \cdot \Delta_x \qquad (1.8)$$

- **похибка ділення.** У випадку виконання операції ділення граничну абсолютну похибку наближено можна визначити за формулою:

$$\Delta_{x/y} \approx \frac{|\bar{y}| \cdot \Delta_x + |\bar{x}| \cdot \Delta_y}{\bar{y}^2}. \qquad (1.9)$$

Аналогічно до виведення формул поширення граничних абсолютних похибок чотирьох основних арифметичних операцій, нескладно отримати відповідні формули і для граничних відносних похибок:

- **додавання:**

$$\frac{\Delta_{x+y}}{|\bar{x}+\bar{y}|} = \left| \frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}} \right| \left(\frac{\Delta_x}{|\bar{x}|} \right) + \left| \frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}} \right| \left(\frac{\Delta_y}{|\bar{y}|} \right),$$

звідки отримуємо:

$$\delta_{x+y} = \frac{|\bar{x}| \cdot \delta_x + |\bar{y}| \cdot \delta_y}{|\bar{x}+\bar{y}|}; \qquad (1.10)$$

- **віднімання:**

$$\frac{\Delta_{x-y}}{|\bar{x}-\bar{y}|} = \left| \frac{\bar{x}}{\bar{x}-\bar{y}} \right| \left(\frac{\Delta_x}{|\bar{x}|} \right) + \left| \frac{\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}} \right| \left(\frac{\Delta_y}{|\bar{y}|} \right),$$

звідки отримуємо:

$$\delta_{x-y} = \frac{|\bar{x}|\cdot\delta_x + |\bar{y}|\cdot\delta_y}{|\bar{x}-\bar{y}|}; \qquad (1.11)$$

- множення:

$$\frac{\Delta_{x\cdot y}}{|\bar{x}\cdot\bar{y}|} = \frac{\Delta_x}{|\bar{x}|} + \frac{\Delta_y}{|\bar{y}|},$$

звідки отримуємо:

$$\delta_{x\cdot y} = \delta_x + \delta_y; \qquad (1.12)$$

- ділення:

$$\frac{\Delta_{x/y}}{|\bar{x}/\bar{y}|} = \left|\frac{\bar{y}}{\bar{y}\cdot\bar{x}}\right|\cdot\Delta_x + \left|\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\bar{y}^2\cdot\bar{x}}\right|\cdot\Delta_y = \frac{\Delta_x}{|\bar{x}|} + \frac{\Delta_y}{|\bar{y}|},$$

звідки отримуємо:

$$\delta_{x/y} = \delta_x + \delta_y. \qquad (1.13)$$

Приклад 1:

Заокруглюючи числа 0,1545 та 1,343 до трьох значущих цифр, визначити абсолютну та відносну похибки отриманих наближених чисел:

Розв'язання.

x = 0,1545 заокруглення до трьох значущих цифр дає: $\bar{x}$ = 0,155.

Звідки:

- абсолютна похибка: $e_x = 0{,}0005 = 5\cdot 10^{-4}$,
- відносна похибка: $\delta_x = 5\cdot 10^{-4}/0{,}155 \approx 0{,}32\cdot 10^{-4}$.

x = 1,343 тоді $\bar{x}$ =1,34.

Звідки:

- абсолютна похибка: $e_x = |\,\bar{x} - x\,| = 0{,}003$,
- відносна похибка: $\delta_x = 3\cdot 10^{-3}/1{,}34 = 2{,}2\cdot 10^{-3}$.

Приклад 2:

Визначити кількість вірних цифр в числах -22,351 та 9,4698 якщо відомо, що їх відносні похибки складають відповідно 0,1 та $0{,}1\cdot 10^{-2}$.

Розв'язання.

$\bar{x}$ = -22,351; δ_x = 0,1 обчислюємо абсолютну похибку: $\Delta_x = |\bar{x}|\cdot\delta_x$ = 2,2351.

Отже в числі $\bar{x}$ = -22,351 вірною є тільки одна (перша) цифра 2.

22,351
 2,2351

$\bar{x}$ = 9,4698; $\delta_x = 0{,}1\cdot 10^{-2}$ обчислюємо: $\Delta_x = 9{,}4698\cdot 0{,}1\cdot 10^{-2} = 0{,}0094698$.

Отже в числі $\bar{x}$ = 9,4698 будуть вірними дві перші цифри 9 та 4.

9,4698
0,0094698

Приклад 3:

Здійснити оцінку похибки обчислення значення заданої функції, якщо початкові дані:

$$f(x,y,z)=\frac{x^2 z}{y^3};\quad x = 0{,}15\pm0{,}005;\quad y = 2{,}13\pm0{,}01;\quad z = 1{,}14\pm0{,}007.$$

Розв'язання.

Згідно з формулою (1.4), для обчислення абсолютної похибки результату отримаємо:

$$\Delta_f=\left|\frac{2\cdot\bar{x}\cdot\bar{z}}{\bar{y}^3}\right|\cdot\Delta_x+\left|\frac{3\cdot\bar{x}^2 z}{\bar{y}^4}\right|\cdot\Delta_y+\left|\frac{\bar{x}^2}{\bar{y}^3}\right|\cdot\Delta_z=$$

$$=\frac{2\cdot0{,}15\cdot1{,}14}{(2{,}13)^3}\cdot0{,}005+\frac{3\cdot(0{,}15)^2\cdot1{,}14}{(2{,}13)^4}\cdot0{,}01+\frac{(0{,}15)^2}{(2{,}13)^3}\cdot0{,}007=$$

$$=0{,}00017695+0{,}00003738+0{,}000016298\approx0{,}00023=2{,}3\cdot10^{-4}.$$

Знаходимо: $$f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\frac{(0{,}15)^2\cdot1{,}14}{(2{,}13)^3}=0{,}0022265429.$$

Обчислюємо: $$\delta(\bar{f})=\frac{2{,}3\cdot10^{-4}}{0{,}00265429}=0{,}08665.$$

Завдання до розділу 1.

За припущенням, що аргумент функції *f(x)* і її коефіцієнти задані неточно здійснити оцінку абсолютної та відносної похибок виконання математичних операцій враховуючи, що відносні похибки представлення чисел і виконання арифметичних операцій рівні $0{,}5\cdot10^{-t}$, де t =15 – кількість значущих цифр в розрядної сітки ЕОМ, а також обчислити функцію з 5-ма значущими цифрами для заданого *x* згідно варіанту.

Провести порівняння між результатом отриманим з ЕОМ та обчисленням функції із заданою кількістю вірних значущих цифр.

Варіант	Рівняння	*x*	Варіант	Рівняння	*x*
1	$f(x)=7^x-3x+1.23$	4,00	16	$f(x)=x^3-10.3x^2$	2,31
2	$f(x)=x^5-0.3x$	0,88	17	$f(x)=x^2-\dfrac{3}{x}-1.27$	0,37
3	$f(x)=(x+3.33)\sqrt[3]{x}$	3,14	18	$f(x)=x^4-\dfrac{4.44}{x}$	1,21
4	$f(x)=(x-\dfrac{1}{3.11})^2$	2,55	19	$f(x)=x^3-10x+5.11$	0,73
5	$f(x)=\dfrac{x^3}{2}-3x+1.1$	0,17	20	$f(x)=x^5-3x-1.47$	1,11
6	$f(x)=1-\dfrac{x^4}{2.33}$	0,13	21	$f(x)=7^x-3\cdot2^x+0.1$	1,27
7	$f(x)=x^4-13x+3.63$	3,47	22	$f(x)=x^5-4x+0.2$	-0,71
8	$f(x)=x^3-2x-2.11$	1,99	23	$f(x)=x^3-3x+0.3$	-3,33
9	$f(x)=\dfrac{x}{2-x^2}$	0,11	24	$f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$	0,27
10	$f(x)=(x-1)^3+2x$	0,78	25	$f(x)=x^2-2.44\cdot x-0.51$	1,5
11	$f(x)=1.333-x^4$	0,12	26	$f(x)=5+\dfrac{x^2}{0.18}$	0,05

12	$f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x$	1,15	27	$f(x)=2^x+2.32x-0.12$	2,23
13	$f(x)=x^4-1.12x+\frac{1}{3}$	0,33	28	$f(x)=(x-0.11)^2-0.11x$	1,11
14	$f(x)=x^3-1.33x+0.17$	0,11	29	$f(x)=x^3+\frac{5.25}{x}$	1,34
15	$f(x)=\frac{x^2}{1.38-x}$	2,77	30	$f(x)=5.325-x^3+2x$	1,27