РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

7.1. Метод простої ітерації.

$$X = \Phi(X) \tag{7.2}$$

або

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, ...x_n) = x_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, ...x_n) = x_2 \\ ... \\ \varphi_k(x_1, x_2, ...x_n) = x_n \end{cases}$$

Далі задають вектор деякого нульового наближення $X^0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, а наступні наближення знаходять за формулами:

$$x^{(s+1)} = \varphi(x^{(s)}) \text{ або } x_k^{(s+1)} = \varphi_k\left(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \ldots, x_n^{(s)}\right), \quad 1 \le k \le n \tag{7.3}$$

де s – номер ітерації

7.2. Метод Зейделя.

Ітераційна формула методу Зейделя:

$$A = D + L + U,$$

де D – діагональна матриця,
L – строго нижньотрикутна матриця,
U – строго верхньотрикутна матриця,
(тобто усі діагональні елементи матриць L та U рівні нулю).

В такому випадку послідовність проведення обчислень згідно методу записують у вигляді:

$$(D + L)X^{(s+1)} + UX^{(s)} + B = 0. \tag{7.5}$$

Отже, послідовність обчислень можна подати у вигляді ітераційної формули виду:

$$X^{(s+1)} = X^{(s)} - (D + L)^{-1} F\left(X^{(s)}\right). \tag{7.6}$$

Блок-схему алгоритму розв'язання систем нелінійних рівнянь методом Зейделя подано на рис.7.1.

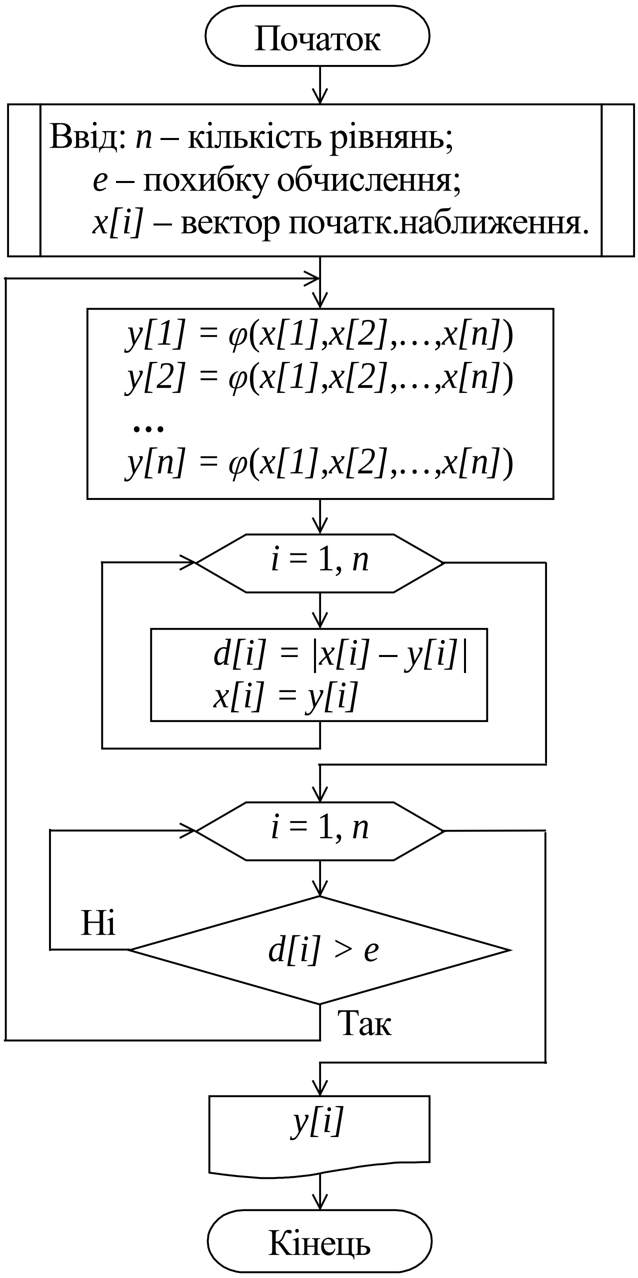

Рис.7.1. Блок-схема реалізації методу Зейделя

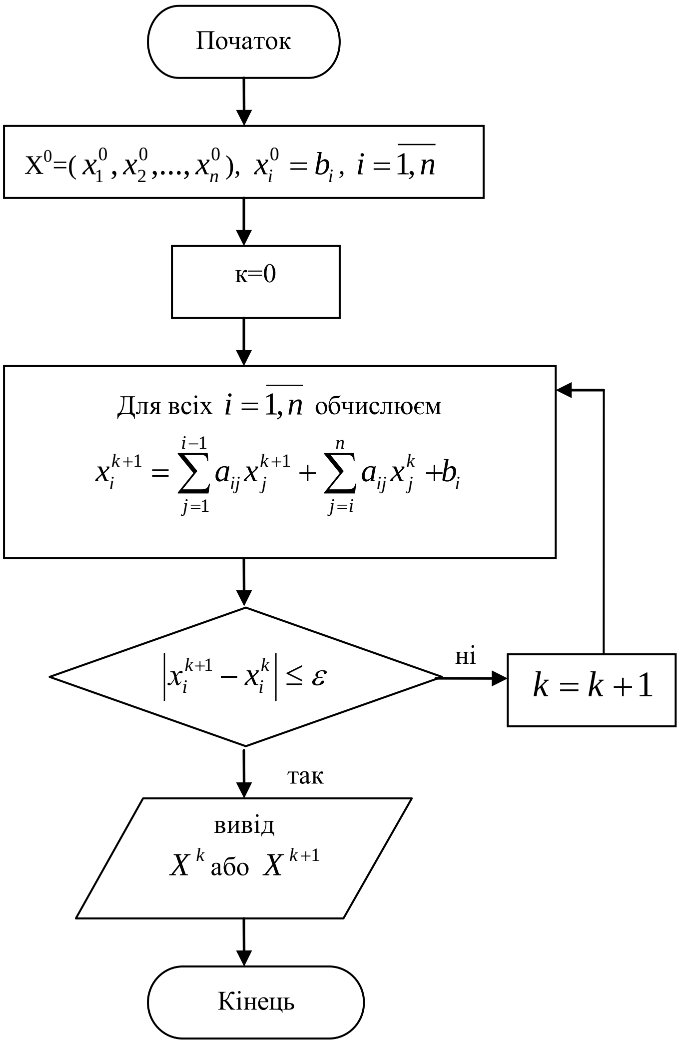

Рис. 7.1 б. Блок-схема реалізації методу Зейделя

Алгоритм

1. Вибираємо $X^0 = (x_1^0, x_2^0,..., x_n^0)$, наприклад, $x_i^0 = b_i,\ i = \overline{1,n}$
2. $k = 0$.
3. Для всіх $i = \overline{1,n}$ обчислимо $x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^k + b_i$.
4. Для всіх $i = \overline{1,n}$ перевіримо умову $\left| x_i^k - x_i^{k+1} \right| \le \varepsilon$.
5. Якщо всі умови пункту 4 виконані, то за наближений розв'язок системи беруть або $X^\kappa = (x_1^\kappa, x_2^\kappa,..., x_n^\kappa)$, або $X^{\kappa+1} = (x_1^{\kappa+1}, x_2^{\kappa+1},..., x_n^{\kappa+1})$ і закінчують обчислення. Якщо хоча б одна умова п.4 не виконана, переходять до п.6
6. $k = k+1$ і вернутися до п.3.

7.3. Метод Ньютона – Рафсона.

Метод Ньютона – Рафсона є найбільш розповсюдженим методом розв'язання систем рівнянь виду (7.1), який можна реалізувати за таким алгоритмом:

Алгоритм реалізації. Для розв'язання системи нелінійних рівнянь (7.1) зведеної до виду (7.2), методом Ньютона – Рафсона необхідно:

1. Задати точність обчислення ε, кількість рівнянь n, максимальне число ітерацій M та вектор початкових наближень $X^0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$.

2. Використовуючи розклад $F_i(X_i)$ в ряд Тейлора, формуємо матрицю Якобі $[\partial F_i / \partial X_i]$, необхідну для розрахунку приростів $F_i(X_i)$ при малій відмінності змінних. Матриця Якобі в розгорнутому виді записується так:

$$\begin{bmatrix} \partial F_1/\partial x_1 & \partial F_1/\partial x_2 & \dots & \partial F_1/\partial x_n \\ \partial F_2/\partial x_1 & \partial F_2/\partial x_2 & \dots & \partial F_2/\partial x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial F_n/\partial x_1 & \partial F_n/\partial x_2 & \dots & \partial F_n/\partial x_n \end{bmatrix}$$

Оскільки аналітичне диференціювання $F_i(X_i)$ в загальному випадку небажано, то необхідно замінити часткові похідні в матриці Якобі їх наближеними значеннями:

$$\frac{\partial F_i}{\partial X_i} \approx \frac{F_i(X_i + H_i) - F_i(X_i)}{H_i},$$

де H_i – малий приріст X_i, наприклад, $H_i = \varepsilon |X_i|$.

3. Скласти і розв'язати систему лінійних рівнянь для малих приростів X_i:

$$\begin{bmatrix} \partial F_1/\partial x_1 & \partial F_1/\partial x_2 & \dots & \partial F_1/\partial x_n \\ \partial F_2/\partial x_1 & \partial F_2/\partial x_2 & \dots & \partial F_2/\partial x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial F_n/\partial x_1 & \partial F_n/\partial x_2 & \dots & \partial F_n/\partial x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ \dots \\ -F_n \end{bmatrix}.$$

Розв'язок цієї системи дає Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n, тобто ΔX_i.

4. Обчислити уточнені значення:

$$x_1^{(s+1)} = x_1^{(s)} + \Delta x_1,$$
$$x_2^{(s+1)} = x_2^{(s)} + \Delta x_2,$$
$$\dots$$
$$x_n^{(s+1)} = x_n^{(s)} + \Delta x_n,$$

або в загальному випадку

$$X_n^{(s+1)} = X_i^{(s)} + \Delta X_i.$$

5. Для всіх ΔX_i перевірити одну з умов: $|\Delta X_i| > \varepsilon$, $|\Delta X_i / X_i| > \varepsilon$.

Якщо умова виконується то повернутись до п.2, тобто виконати нову ітерацію. Інакше приймають, що вектор $X_i^{(s+1)}$ є розв'язком заданої системи рівнянь.