第一章　曲线上的标架及其运动方程

1.1　Frenet 标架

1.1.1　$\mathbb{R}^m$ 空间中曲线的表示

$\mathbb{R}^m$ 空间中的**曲线**，就是一个单参数的向量值映照：

$$\boldsymbol{X}(t):\ [\alpha,\,\beta]\ni t\mapsto \boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix}X^1(t)\\ \vdots\\ X^m(t)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

考虑该向量值映照关于参数 t 的变化率

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)\coloneqq\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{X}(t+\Delta t)-\boldsymbol{X}(t)}{\Delta t}\eqqcolon\begin{bmatrix}\dot{X}^1(t)\\ \vdots\\ \dot{X}^m(t)\end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

按照物理上的习惯，我们用点表示对 t 的导数．若该极限存在，则称 $\boldsymbol{X}(t)\in\mathbb{R}^m$ 在点 t 处**可微**．此时，$\dot{\boldsymbol{X}}(t)$ 称为曲线 $\boldsymbol{X}(t)$ 的**切向量**．上述极限可以等价地表述为

$$\boldsymbol{X}(t+\Delta t)=\boldsymbol{X}(t)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\Delta t+\boldsymbol{o}(\Delta t). \tag{1.3}$$

在 t_0 处，则可以写成

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}\left(t_0\right)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\left(t_0\right)\cdot\left(t-t_0\right)+\boldsymbol{o}\left(t-t_0\right). \tag{1.4}$$

该方程表示一条直线，称为曲线 $\boldsymbol{X}(t)$ 在 t_0 处的**切线**．

在物理域中，**弧长** s 可以表示为

$$s=\int_\alpha^\beta\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}t\,, \tag{1.5}$$

两边对 t 求导，可有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.6}$$

为了研究问题的方便，我们以后将用弧长作为曲线的参数，即

$$\boldsymbol{r}(s):\ [0,\,L]\ni s\mapsto \boldsymbol{r}(s)\in\mathbb{R}^m. \tag{1.7}$$

对应的切向量为

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s)\coloneqq\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)}{\Delta s}. \tag{1.8}$$

根据链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\div\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\div\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|_{\mathbb{R}^m},\tag{1.9}$$

因而 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 是一个单位向量，即

$$\|\dot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^m}=1.\tag{1.10}$$

接下来继续对 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 求导：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\coloneqq\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}(s).\tag{1.11}$$

由于 $\|\dot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^m}=1$，因此

$$1=\|\dot{\boldsymbol{r}}(s)\|^2_{\mathbb{R}^m}=\left\langle\dot{\boldsymbol{r}}(s),\,\dot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m},\tag{1.12}$$

两边求导，则有

$$0=\left\langle\ddot{\boldsymbol{r}}(s),\,\dot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}+\left\langle\dot{\boldsymbol{r}}(s),\,\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}=2\cdot\left\langle\ddot{\boldsymbol{r}}(s),\,\dot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}.\tag{1.13}$$

内积为零，就意味着正交：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\perp\dot{\boldsymbol{r}}(s).\tag{1.14}$$

现在我们把目光限定在 $\mathbb{R}^3$ 空间中．如前所述，$\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 已经是单位向量，我们将其记为 $\boldsymbol{T}(s)$；而 $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ 仍需作单位化处理，其结果记作 $\boldsymbol{N}(s)$，即

$$\boldsymbol{N}(s)\coloneqq\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^3}}=\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}/\mathrm{d}s}{\left\|\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}/\mathrm{d}s\right\|_{\mathbb{R}^3}}=\frac{\dot{\boldsymbol{T}}(s)}{\left\|\dot{\boldsymbol{T}}(s)\right\|_{\mathbb{R}^3}}.\tag{1.15}$$

最后，只要再令

$$\boldsymbol{B}(s)\coloneqq\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s),\tag{1.16}$$

我们便有了 $\mathbb{R}^3$ 空间中的一组单位正交基：

$$\left\{\boldsymbol{T}(s),\,\boldsymbol{N}(s),\,\boldsymbol{B}(s)\right\}\subset\mathbb{R}^3,\tag{1.17}$$

它们称为 **Frenet 标架**．其中，$\boldsymbol{T}(s)$、$\boldsymbol{N}(s)$、$\boldsymbol{B}(s)$，分别叫做 **单位切向量**、**主单位法向量**和**副单位法向量**．

1.1.2 标架运动方程

考虑 Frenet 标架关于弧长参数 s 的变化率，即标架运动方程：

$$\left\{\dot{\boldsymbol{T}}(s),\,\dot{\boldsymbol{N}}(s),\,\dot{\boldsymbol{B}}(s)\right\}\subset\mathbb{R}^3.\tag{1.18}$$

为此，我们需要先给出一个引理：设 $\left\{\boldsymbol{e}_i(t)\right\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一组活动单位正交基，它们满足

$$\left\langle\boldsymbol{e}_i(t),\,\boldsymbol{e}_j(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}=\delta_{ij}.\tag{1.19}$$

这组基的导数仍位于 $\mathbb{R}^m$ 空间，用自身展开，可有

$$\left[\dot{\boldsymbol{e}}_1(t),\,\cdots,\,\dot{\boldsymbol{e}}_m(t)\right]=\left[\boldsymbol{e}_1(t),\,\cdots,\,\boldsymbol{e}_m(t)\right]\boldsymbol{P}(t).\tag{1.20}$$

此时，我们有

$$\boldsymbol{P}(t)\in\mathsf{Skw},\tag{1.21}$$

即 $\boldsymbol{P}(t)$ 是一个反对称矩阵．

证明： 对式 (1.19) 两边求导，得

$$\left\langle \dot{\boldsymbol{e}}_i(t), \boldsymbol{e}_j(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} + \left\langle \boldsymbol{e}_i(t), \dot{\boldsymbol{e}}_j(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = 0 \in \mathbb{R}, \tag{1.22}$$

写成矩阵形式，为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{e}}_1^{\mathsf{T}}(t) \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{e}}_m^{\mathsf{T}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathsf{T}}(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_m^{\mathsf{T}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{e}}_1(t), \cdots, \dot{\boldsymbol{e}}_m(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{1.23}$$

引入矩阵 $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_m(t) \end{bmatrix}$，则上式与 (1.20) 式可以分别表示成

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^{m\times m} \tag{1.24}$$

和

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{1.25}$$

两式联立，可有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} = \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \dot{\boldsymbol{E}} & \\ &= \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}\right)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}\right) \\ &= \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} \left(\boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}\right) + \left(\boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}\right) \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{P}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

即 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{P}$. 按照定义，便知 $\boldsymbol{P}(t) \in \mathsf{Skw}$. □

根据这一引理，便可有

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{T}}(s), \dot{\boldsymbol{N}}(s), \dot{\boldsymbol{B}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s) \end{bmatrix} \boldsymbol{P}(s), \tag{1.27}$$

其中的 $\boldsymbol{P}(s)$ 是一个三阶反对称矩阵．显然，它的对角元均为零：

$$\boldsymbol{P}(s) = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.28}$$

这里，我们用 “$*$” 表示待定元素．由 (1.15) 式，可知

$$\dot{\boldsymbol{T}}(s) = \left\|\dot{\boldsymbol{T}}(s)\right\|_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{N}(s) =: \kappa(s)\, \boldsymbol{N}(s). \tag{1.29}$$

式中的 $\kappa(s) := \left\|\dot{\boldsymbol{T}}(s)\right\|_{\mathbb{R}^3}$．于是，矩阵 $\boldsymbol{P}(s)$ 的第一列就成为了 $[0, \kappa(s), 0]^{\mathsf{T}}$．利用反对称性，可有

$$\boldsymbol{P}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.30}$$

我们 “强行” 引入了 $\tau(s)$，用来取代占位符 $*$．当然，它的具体形式仍然待定．

1.1.3 曲率和挠率

利用矩阵 $\boldsymbol{P}(s)$，可以看出

$$\dot{\boldsymbol{B}}(s) = -\tau(s)\,\boldsymbol{N}(s). \tag{1.31}$$

再与 $\boldsymbol{N}(s)$ 做内积[①]，便有

$$\dot{\boldsymbol{B}}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s) = -\tau(s). \tag{1.32}$$

根据定义 (1.16) 式，

$$\boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s), \tag{1.33}$$

于是

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{B}}(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big[\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)\Big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^3}}\right]\\ &= \ddot{\boldsymbol{r}}(s)\times\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^3}} + \dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\frac{\dddot{\boldsymbol{r}}(s)}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^3}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^3}}\right)\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(s).\end{aligned} \tag{1.34}$$

显然，该式中的第一项为零．考虑 $\dot{\boldsymbol{B}}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)$，注意到 $\boldsymbol{N}(s)$ 与 $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ 平行，因此与 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ 垂直，所以第三项在点乘 $\boldsymbol{N}(s)$ 后也为零．这样便有

$$\begin{aligned}\tau(s) &= -\dot{\boldsymbol{B}}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)\\ &= -\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\frac{\dddot{\boldsymbol{r}}(s)}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^3}}\cdot\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^3}}\\ &= -\frac{1}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|^2_{\mathbb{R}^3}}\Big[\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\dddot{\boldsymbol{r}}(s)\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\Big]\end{aligned}$$

利用向量三重积的性质，再把负号移进来，可得

$$= \frac{1}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|^2_{\mathbb{R}^3}}\det\Big[\dot{\boldsymbol{r}}(s),\ \times\ddot{\boldsymbol{r}}(s),\ \dddot{\boldsymbol{r}}(s)\Big]. \tag{1.35}$$

① 为了表述的清晰，本小节中用“·”来表示内积．