第一章　微分同胚

1.1　微分同胚

1.1.1　双射

设 f 是集合 A 到 B 的映射．如果 A 中不同的元素有不同的像，则称 f 为**单射**（也叫“一对一”）；如果 B 中每个元素都是 A 中元素的像，则称 f 为**满射**；如果 f 既是单射又是满射，则称 f 为**双射**（也叫“一一对应”）．三种情况的示意见图 1.1．

Images/Three_Maps.PNG

图 1.1: 单射、满射与双射

设开集 $\mathfrak{D}_x, \mathfrak{D}_X \in \mathbb{R}^m$，它们之间存在双射，即一一对应关系：

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}): \mathfrak{D}_x \ni \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{D}_X. \tag{1.1}$$

由于该映照实现了 $\mathfrak{D}_x$ 到 $\mathfrak{D}_X$ 之间的双射，因此它存在逆映照：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}): \mathfrak{D}_X \ni \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{X}) \in \mathfrak{D}_x. \tag{1.2}$$

我们把 $\mathfrak{D}_x$ 称为**物理域**，它是实际物理事件发生的区域；$\mathfrak{D}_X$ 则称为**参数域**．由于物理域通常较为复杂，因此我们常把参数域取为规整的形状，以便之后的处理．

设物理量 $f(\boldsymbol{x})$ 定义在物理域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^m$ 上[①]，则 f 就定义了一个**场**：

$$f: \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \ni \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}). \tag{1.3}$$

所谓的“场”，就是自变量用位置刻画的映照．它可以是**标量场**，如温度、压强、密度等，此时 $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$；也可以是**向量场**，如速度、加速度、力等，此时 $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$；对于更深入的物理、力学研究，往往还需引入**张量场**，此时 $f(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$.

$\boldsymbol{x}$ 存在于物理域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 中，我们称它为**物理坐标**．由于上文已经定义了 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 到 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 之间的双射（不是 f！），因此 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 中就有唯一的 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 相对应，它称为**参数坐标**（也叫**曲线坐标**）．又因为物理域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 上已经定义了场 $f(\boldsymbol{x})$，参数域中必然唯一存在场 $\tilde{f}(\boldsymbol{X})$ 与之对应：

$$\tilde{f}: \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}} \ni \boldsymbol{X} \mapsto \tilde{f}(\boldsymbol{X}) = f \circ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = f\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big). \tag{1.4}$$

$\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 是完全等价的，因而 $\tilde{f}$ 与 f 也是完全等价的，所以同样有

$$f(\boldsymbol{x}) = \tilde{f}\big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\big). \tag{1.5}$$

物理域中的场要满足守恒定律，如质量守恒、动量守恒、能量守恒等．从数学上看，这些守恒定律就是 $f(\boldsymbol{x})$ 需要满足的一系列偏微分方程．将场变换到参数域后，它仍要满足这些方程．但我们已经设法将参数域取得较为规整，故在其上进行数值求解就会相当方便．

1.1.2 参数域方程

上文已经提到，物理域中的场 $f(\boldsymbol{x})$ 需满足守恒定律，这等价于一系列偏微分方程（PDE）．在物理学和力学中，用到的 PDE 通常是二阶的，它们可以写成

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}, \quad \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(\boldsymbol{x}) \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(\boldsymbol{x}) + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} B_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{1.6}$$

的形式．我们的目标是把该物理域方程转化为参数域方程，即关于 $\tilde{f}(\boldsymbol{X})$ 的 PDE．多元微积分中已经提供了解决方案：**链式求导法则**.

考虑到

$$f(\boldsymbol{x}) = \tilde{f}\big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\big) = \tilde{f}\big(X^1(\boldsymbol{x}), \cdots, X^m(\boldsymbol{x})\big), \tag{1.7}$$

于是有

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(\boldsymbol{x}) = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X^s}\big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\big) \cdot \frac{\partial X^s}{\partial x^\alpha}(\boldsymbol{x}). \tag{1.8}$$

这里用到的链式法则，由复合映照可微性定理驱动，它要求 $\tilde{f}$ 关于 $\boldsymbol{X}$ 可微，同时 $\boldsymbol{X}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 可微.

通常情况下，已知条件所给定的都是 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 到 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 的映射

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}): \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}} \ni \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{X}) \in \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}, \tag{1.9}$$

① 实际的物理事件当然只会发生在三维 Euclid 空间中（只就“空间”而言），但在数学上也可以推广到 m 维.

用它不好直接得到式 (1.8) 中的 $\partial X^s / \partial x^\alpha$ 项，但获得它的“倒数” $\partial x^\alpha / \partial X^s$ 却很容易，只需利用 **Jacobi 矩阵**：

$$D\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial X^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^m}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial X^m} \end{bmatrix}(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{R}^{m\times m}, \tag{1.10}$$

它是一个方阵.

有了 Jacobi 矩阵，施加一些手法就可以得到所需要的 $\partial X^s / \partial x^\alpha$ 项. 考虑到

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{x}, \tag{1.11}$$

并且其中的 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$ 和 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 均可微，可以得到

$$D\boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\big) \cdot D\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I}_{m\times m}, \tag{1.12}$$

其中的 $\boldsymbol{I}_{m\times m}$ 是单位阵. 因此

$$D\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) = (D\boldsymbol{x})^{-1}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial X^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^m}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial X^m} \end{bmatrix}^{-1}(\boldsymbol{X}). \tag{1.13}$$

用代数的方法总可以求出

$$\frac{\partial X^s}{\partial x^\alpha} = \varphi^s_\alpha(\boldsymbol{X}), \tag{1.14}$$

其中的 φ^s_α 是通过矩阵求逆确定的函数. 这样就有

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(\boldsymbol{x}) = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X^s}\big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\big) \cdot \varphi^s_\alpha(\boldsymbol{x}). \tag{1.15}$$