

第一章 张量的定义及表示

1.1 对偶基，度量

1.1.1 对偶基

\mathbb{R}^m 空间中的基可分为两类：指标写在下面的基

$$\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \quad (1.1)$$

称为协变基，指标写在上面的基

$$\{\mathbf{g}^i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \quad (1.2)$$

称为逆变基。它们满足对偶关系：

$$(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j)_{\mathbb{R}^m} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.3)$$

这里的 δ_j^i 是 **Kronecker δ 函数**。

1.1.2 度量

下面引入度量的概念。其定义为

$$\begin{cases} g_{ij} \triangleq (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)_{\mathbb{R}^m}, & (1.4-a) \\ g^{ij} \triangleq (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j)_{\mathbb{R}^m}. & (1.4-b) \end{cases}$$

下面证明

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j. \quad (1.5)$$

它也可以写成矩阵的形式：

$$[g_{ik}][g^{kj}] = [\delta_i^j] = \mathbf{I}_m, \quad (1.6)$$

其中的 \mathbf{I}_m 是 m 阶单位阵。

证明：

$$g_{ik} g^{kj} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} g^{kj} = (\mathbf{g}_i, g^{kj} \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \quad (1.7)$$

后文将说明 $g^{kj} \mathbf{g}_k = \mathbf{g}^j$ ，因此可得

$$g_{ik} g^{kj} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j)_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \quad (1.8)$$

要注意的是，这里的指标 k 是哑标。根据 **Einstein 求和约定**，重复指标并且一上一下时，就表示对它求和。后文除非特殊说明，也均是如此。 \square

现在澄清**基向量转换关系**。第 i 个协变基向量 \mathbf{g}_i 既然是向量，就必然可以用协变基或逆变基来表示。根据对偶关系式 (1.3) 和度量的定义式 (1.4-a)、(1.4-b)，可知

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = g_{ik} \mathbf{g}^k, \\ \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = \delta_i^k \mathbf{g}_k \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.9-a) \\ (1.9-b) \end{matrix}$$

以及

$$\begin{cases} \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = \delta_k^i \mathbf{g}^k, \\ \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = g^{ik} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.10-a) \\ (1.10-b) \end{matrix}$$

这四个式子中，式 (1.9-b) 和 (1.10-a) 是平凡的，而式 (1.9-a) 和 (1.10-b) 则通过度量建立起了协变基与逆变基之间的关系。这就称为**基向量转换关系**，也可以叫做“指标升降游戏”。

1.1.3 向量的分量

对于任意的向量 $\xi \in \mathbb{R}^m$ ，它可以用协变基表示：

$$\xi = (\xi, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = \xi^k \mathbf{g}_k, \quad (1.11)$$

也可以用逆变基表示：

$$\xi = (\xi, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = \xi_k \mathbf{g}^k, \quad (1.12)$$

式中， ξ^k 是 ξ 与第 k 个逆变基做内积的结果，称为 ξ 的第 k 个**逆变分量**；而 ξ_k 是 ξ 与第 k 个协变基做内积的结果，称为 ξ 的第 k 个**协变分量**。

以后凡是指标在下的（下标），均称为协变某某；指标在上的（上标），称为逆变某某。

1.2 张量的表示

1.2.1 张量的表示与简单张量

所谓**张量**，即指**多重线性函数**。

以三阶张量为例。考虑任意的 $\Phi \in \mathcal{J}^3(\mathbb{R}^m)$ ，其中的 $\mathcal{J}^3(\mathbb{R}^m)$ 表示以 \mathbb{R}^m 为底空间的三阶张量全体。所谓三阶（或三重）线性函数，指“吃掉”三个向量之后变成数，并且“吃法”具有线性性。

对于一般地张量空间 $\mathcal{J}^r(\mathbb{R}^m)$ ，我们引入了线性结构：

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \Phi, \Psi \in \mathcal{J}^r(\mathbb{R}^m), \quad (\alpha\Phi + \beta\Psi)(u_1, u_2, \dots, u_r) \triangleq \alpha\Phi(u_1, u_2, \dots, u_r) + \beta\Psi(u_1, u_2, \dots, u_r), \quad (1.13)$$

于是

$$\alpha\Phi + \beta\Psi \in \mathcal{J}^r(\mathbb{R}^m). \quad (1.14)$$

下面我们要获得 Φ 的表示。根据之前任意向量用协变基或逆变基的表示，有

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m, \quad \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ = \Phi(u^i \mathbf{g}_i, v^j \mathbf{g}_j, w^k \mathbf{g}_k) \end{aligned}$$

考虑到 Φ 对第一变元的线性性，可得

$$= u^i \Phi(g_i, v_j g^j, w^k g_k)$$

同理，

$$= u^i v_j w^k \Phi(g_i, g^j, g_k). \quad (1.15)$$

注意这里自然需要满足 Einstein 求和约定。

上式中的 $\Phi(g_i, g^j, g_k)$ 是一个数。它是张量 Φ “吃掉”三个基向量的结果。至于 $u^i v_j w^k$ 部分，三项分别是 u 的第 i 个逆变分量、 v 的第 j 个协变分量和 w 的第 k 个逆变分量。根据向量分量的定义，可知

$$u^i v_j w^k = (u, g^i)_{\mathbb{R}^m} \cdot (v, g_j)_{\mathbb{R}^m} \cdot (w, g^k)_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.16)$$

暂时中断一下思路，先给出简单张量的定义。

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^m, \quad \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, v, w) \triangleq (\xi, u)_{\mathbb{R}^m} \cdot (\eta, v)_{\mathbb{R}^m} \cdot (\zeta, w)_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}, \quad (1.17)$$

式中 $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^m$ ，而暂时把 $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$ 理解为一种记号。简单张量作为一个映照，组成它的三个向量分别与它们“吃掉”的第一、二、三个变元做内积并相乘，结果为一个实数。

考虑到内积的线性性，便有（以第二个变元为例）

$$\xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v}, w) \triangleq (\xi, u)_{\mathbb{R}^m} \cdot (\eta, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\zeta, w)_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}$$

注意到 $(\eta, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v})_{\mathbb{R}^m} = \alpha(\eta, \tilde{v})_{\mathbb{R}^m} + \beta(\eta, \hat{v})_{\mathbb{R}^m}$ ，同时再次利用简单张量的定义，可得

$$= \alpha \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \tilde{v}, w) + \beta \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \hat{v}, w). \quad (1.18)$$

类似地，对第一变元和第三变元，同样具有线性性。因此，可以知道

$$\xi \otimes \eta \otimes \zeta \in \mathcal{F}^3(\mathbb{R}^m). \quad (1.19)$$

可见，“简单张量”的名字是名副其实的，它的确是一个特殊的张量。

回过头来看 (1.16) 式。很明显，它可以用简单张量来表示。要注意，由于内积的对称性，可以有两种^①表示方法：

$$g^i \otimes g_j \otimes g^k(u, v, w) \quad (1.20)$$

或者

$$u \otimes v \otimes w(g^i, g_j, g^k), \quad (1.21)$$

我们这里取上面一种。代入式 (1.15)，得

$$\begin{aligned} & \Phi(u, v, w) \\ &= \Phi(g_i, g^j, g_k) \cdot g^i \otimes g_j \otimes g^k(u, v, w) \end{aligned}$$

^① 这里只考虑把 u, v, w 和 g^i, g_j, g^k 分别放在一起的情况。

由于 $\Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k) \in \mathbb{R}^m$, 因此

$$= [\Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k](\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (1.22)$$

方括号里的部分, 就是根据 Einstein 求和约定, 用 $\Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k)$ 对 $\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k$ 进行线性组合.

由于 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 选取的任意性, 可以引入如下记号:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k =: \Phi_{i \ k}^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k, \quad (1.23)$$

即

$$\Phi_{i \ k}^j := \Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k), \quad (1.24)$$

这称为张量的分量. 它说明一个张量可以用张量分量和基向量组成的简单张量来表示.

指标 i, j, k 的上下是任意的. 这里, 它依赖于式 (1.15) 中基向量的选取. 实际上, 对于这里的三阶张量, 指标的上一共有 8 种可能. 指标全部在下面的, 称为协变分量:

$$\Phi^{ijk} := \Phi(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k); \quad (1.25)$$

指标全部在上面的, 称为逆变分量:

$$\Phi_{ijk} := \Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k); \quad (1.26)$$

其余 6 种, 称为混合分量. 对于一个 r 阶张量, 显然共有 2^r 种分量表示, 其中协变分量与逆变分量各一种, 混合分量 $2^r - 2$ 种.

1.2.2 张量分量之间的关系

我们已经知道, 对于任意一个向量 $\xi \in \mathbb{R}^m$, 它可以用协变基或逆变基表示:

$$\xi = \begin{cases} \xi^i \mathbf{g}_i, \\ \xi_i \mathbf{g}^i. \end{cases} \quad (1.27)$$

式中, 协变分量与逆变分量满足坐标转换关系:

$$\begin{cases} \xi^i = (\xi, \mathbf{g}^i)_{\mathbb{R}^m} = (\xi, g^{ik} \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} (\xi, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} \xi_k, \\ \xi_i = (\xi, \mathbf{g}_i)_{\mathbb{R}^m} = (\xi, g_{ik} \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik} (\xi, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik} \xi^k. \end{cases} \quad (1.28-a)$$

$$(1.28-b)$$

每一式的第二个等号都用到了基向量转换关系, 见式 (1.9-a) 和 (1.10-b).

现在再来考虑张量的分量. 仍以上文中的张量 $\Phi_{i \ k}^j := \Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k)$ 为例, 我们想要知道它与张量 $\Phi_q^{p \ r} := \Phi(\mathbf{g}^p, \mathbf{g}_q, \mathbf{g}^r)$ 之间的关系. 利用基向量转换关系, 可有

$$\begin{aligned} \Phi_{i \ k}^j &:= \Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k) \\ &= \Phi(g_{ip} \mathbf{g}^p, g^{jq} \mathbf{g}_q, g_{kr} \mathbf{g}^r) \end{aligned}$$

又利用张量的线性性, 得

$$\begin{aligned} &= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \Phi(\mathbf{g}^p, \mathbf{g}_q, \mathbf{g}^r) \\ &= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \Phi_q^{p \ r}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

可见, 张量的分量与向量的分量类似, 其指标升降可通过度量来实现. 用同样的手法, 还可以得到诸如 $\Phi^{ijk} = g^{ip} \Phi_p^{j \ k}$ 、 $\Phi_j^{i \ k} = g_{jp} g^{kq} \Phi_k^{ip}$ 这样的关系式.

1.2.3 相对不同基的张量分量之间的关系

\mathbb{R}^m 空间中, 除了 $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m$ 和相应的对偶基 $\{\mathbf{g}^i\}_{i=1}^m$ 之外, 当然还可以有其他的基, 比如带括号的 $\{\mathbf{g}_{(i)}\}_{i=1}^m$ 以及对应的对偶基 $\{\mathbf{g}^{(i)}\}_{i=1}^m$. 前者对应形如 $\Phi_j^{i\ k} := \Phi(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k)$ 的张量, 后者则对应带括号的张量, 如 $\Phi_{(q)}^{(p)\ (r)} := \Phi(\mathbf{g}^{(p)}, \mathbf{g}_{(q)}, \mathbf{g}^{(r)})$. 下面我们来探讨这两个张量的关系.

首先来建立基之间的关系. 带括号的第 i 个基向量 $\mathbf{g}_{(i)}$, 作为 \mathbb{R}^m 空间中的一个向量, 自然可以用另一组基来表示:

$$\mathbf{g}_{(i)} = \begin{cases} (\mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k, \\ (\mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad (1.30)$$

同理, 自然还有它的对偶基:

$$\mathbf{g}^{(i)} = \begin{cases} (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k, \\ (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad (1.31)$$

引入记号 $c_{(i)}^k := (\mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m}$ 和 $c_k^{(i)} := (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m}$, 那么有

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{(i)} = c_{(i)}^k \mathbf{g}_k, \\ \mathbf{g}^{(i)} = c_k^{(i)} \mathbf{g}^k. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.32\text{-a}) \\ (1.32\text{-b}) \end{matrix}$$

容易看出, 这两个系数具有如下性质:

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = \delta_j^i. \quad (1.33)$$

写成矩阵形式^①, 为

$$\begin{bmatrix} c_k^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{(j)}^k \end{bmatrix} = [\delta_j^i] = \mathbf{I}_m. \quad (1.34)$$

换句话说, 两个系数矩阵是互逆的.

证明:

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} c_{(j)}^k$$

利用内积的线性性, 有

$$= (\mathbf{g}^{(i)}, c_{(j)}^k \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m}$$

根据 $c_{(j)}^k$ 的定义, 得到

$$= (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_{(j)})_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.35)$$

带括号的基同样满足对偶关系 (1.3) 式, 于是得证. \square

上面我们用不带括号的基表示了带括号的基. 反之也是可以的:

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^{(k)})_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_{(k)} = c_i^{(k)} \mathbf{g}_{(k)}, \\ \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_{(k)})_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^{(k)} = c_{(k)}^i \mathbf{g}^{(k)}. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.36\text{-a}) \\ (1.36\text{-b}) \end{matrix}$$

^① 通常我们约定上面的标号作为行号, 下面的标号作为列号.

这样一来，就建立起了不同基之间的转换关系.

现在我们回到张量. 根据张量分量的定义，

$$\Phi_j^{i \ k} := \Phi(g^i, g_j, g^k)$$

利用之前推导的不同基向量之间的转换关系，得

$$= \Phi\left(c_{(p)}^i g^{(p)}, c_j^{(q)} g_{(q)}, c_{(r)}^k g^{(r)}\right)$$

由张量的线性性，提出系数：

$$\begin{aligned} &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \Phi(g^{(p)}, g_{(q)}, g^{(r)}) \\ &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \Phi_{(q)}^{(p) \ (r)}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

完全类似，还可以有

$$\Phi_{(j)}^{(i) \ (k)} = c_p^{(i)} c_{(j)}^g c_r^{(k)} \Phi_q^{p \ r}. \tag{1.38}$$

总结一下这两小节得到的结果. 对于同一组基下的张量分量，其指标升降通过度量来实现；对于不同基下的张量分量，其指标转换则通过不同基之间的转换系数来完成.

第二章 张量的代数运算

2.1 张量积

张量积也叫张量并，用符号“ \otimes ”表示. 在 1.2.1 小节给出简单张量的定义时，实际上就用到了张量积. 张量积的定义为：

$$\begin{aligned} \forall \Phi \in \mathcal{J}^p(\mathbb{R}^m), \Psi \in \mathcal{J}^q(\mathbb{R}^m), \quad \Phi \otimes \Psi &\in \mathcal{J}^{p+q}(\mathbb{R}^m) \\ &= \left(\Phi^{i_1 \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left(\Psi^{j_1 \dots j_q} g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q} \right) \\ &\triangleq \Phi^{i_1 \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_q} \left(g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left(g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

由该定义可以知道，关于简单张量 $\left(g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left(g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q} \right)$ ，相应的张量分量为

$$(\Phi \otimes \Psi)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}. \quad (2.2)$$

2.2 e 点积