第一章　非完整基理论

1.1　完整基与非完整基的概念

在 **??** 节中，我们利用曲线坐标系 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 构造了 $\mathbb{R}^m$ 上的一组（局部协变）基

$$\left\{ \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}) \right\}_{i=1}^{m} \subset \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

它们称为**完整基**．与之对应，不是由曲线坐标系诱导的基，称为**非完整基**．

Images/Holonomic_Nonholonomic_Basis.PNG

图 1.1: 完整基与非完整基

如图 1.1，x^i-线的切向量构成一组局部协变基 $\left\{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^m$，它和它的对偶 $\left\{\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^m$ 都是完整基．除此以外，我们当然可以选取另外的基 $\left\{\boldsymbol{g}_{(i)}(\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^m$ 和 $\left\{\boldsymbol{g}^{(i)}(\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^m$，它们不是由曲线坐标系诱导，因而是非完整基．

1.2　非完整基下的张量梯度

下面我们来考察张量梯度在非完整基下的表达形式．在 **??** 节中，我们已经推导出了张量场的（右）梯度：

$$\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla}\right)(\boldsymbol{x}) \triangleq \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^\mu(\boldsymbol{x}) = \nabla_\mu \Phi^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^\mu(\boldsymbol{x}). \tag{1.2}$$

这是一个四阶张量，对应的张量分量可记作

$$\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla}\right)^{i}{}_{j}{}^{k}{}_{\mu}(\boldsymbol{x}) \coloneqq \nabla_\mu \Phi^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x}). \tag{1.3}$$

除此以外，其他的基当然也可以用来表示该张量，比如前文提到过的 $\left\{\boldsymbol{g}_{(i)}(\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^{m}$ 和 $\left\{\boldsymbol{g}^{(i)}(\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^{m}$，它们都是非完整基.

非完整基与完整基之间的关系，可以利用 **??** 小节中引入的坐标转换关系来获得：

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{g}_{(i)}(\boldsymbol{x}) = c_{(i)}^{k}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}_{k}(\boldsymbol{x}), & (1.4\text{-a})\\
\boldsymbol{g}^{(i)}(\boldsymbol{x}) = c_{k}^{(i)}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}^{k}(\boldsymbol{x}); & (1.4\text{-b})\\
\quad \boldsymbol{g}_{i}(\boldsymbol{x}) = c_{i}^{(k)}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}_{(k)}(\boldsymbol{x}), & (1.4\text{-c})\\
\quad \boldsymbol{g}^{i}(\boldsymbol{x}) = c_{(k)}^{i}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}^{(k)}(\boldsymbol{x}). & (1.4\text{-d})
\end{cases}
$$

2017-01-20　坐标转换关系 其中的基转换系数都是已知量，它们的定义如下：[①]

$$
\begin{cases}
c_{(i)}^{j}(\boldsymbol{x}) := \left\langle \boldsymbol{g}_{(i)}(\boldsymbol{x}),\, \boldsymbol{g}^{j}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_{\mathbb{R}^m}, & (1.5\text{-a})\\
c_{j}^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \left\langle \boldsymbol{g}^{(i)}(\boldsymbol{x}),\, \boldsymbol{g}_{j}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_{\mathbb{R}^m}. & (1.5\text{-b})
\end{cases}
$$

代入 (1.2) 式，可有[②]

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla} &= \nabla_{\mu} \Phi^{i\ \,k}_{\ j} \left(\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}^{\mu} \right) \\
&= \nabla_{\mu} \Phi^{i\ \,k}_{\ j}(\boldsymbol{x}) \left[\left(c_i^{(p)} \boldsymbol{g}_{(p)} \right) \otimes \left(c_{(q)}^{j} \boldsymbol{g}^{(q)} \right) \otimes \left(c_k^{(r)} \boldsymbol{g}_{(r)} \right) \otimes \left(c_{(\alpha)}^{\mu} \boldsymbol{g}^{(\alpha)} \right) \right]
\end{aligned}
$$

根据线性性，提出系数：

$$
= \left(c_i^{(p)} c_{(q)}^{j} c_k^{(r)} c_{(\alpha)}^{\mu} \nabla_{\mu} \Phi^{i\ \,k}_{\ j} \right) \left(\boldsymbol{g}_{(p)} \otimes \boldsymbol{g}^{(q)} \otimes \boldsymbol{g}_{(r)} \otimes \boldsymbol{g}^{(\alpha)} \right)
$$

写成张量分量与简单张量“乘积”的形式，即为

$$
=: \left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla} \right)^{(p)\quad (r)}_{\quad (q)\quad (\alpha)} \left(\boldsymbol{g}_{(p)} \otimes \boldsymbol{g}^{(q)} \otimes \boldsymbol{g}_{(r)} \otimes \boldsymbol{g}^{(\alpha)} \right). \tag{1.6}
$$

这样，我们就获得了非完整基下张量梯度的表示．再利用式 (1.3)，可知

$$
\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla} \right)^{(p)\quad (r)}_{\quad (q)\quad (\alpha)} = c_i^{(p)} c_{(q)}^{j} c_k^{(r)} c_{(\alpha)}^{\mu} \left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla} \right)^{i\ \,k}_{\ j\ \,\mu}. \tag{1.7}
$$

以上结果与 **??** 小节中的推导是完全一致的.

① 只有两个基转换系数的原因是内积具有交换律.

② 这里我们省略了“$(\boldsymbol{x})$”.