

# 第一章 张量的定义及表示

## 1.1 对偶基，度量

### 1.1.1 对偶基

设  $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m$  是  $\mathbb{R}^m$  空间中的一组基，即极大线性无关向量组。此时， $\mathbb{R}^m$  中将唯一存在另一组基  $\{\mathbf{g}^i\}_{i=1}^m$ ，二者满足对偶关系：

$$\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & j = i; \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (1.1)$$

式中， $\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m}$  的  $\delta_i^j$  是 **Kronecker  $\delta$  函数**。

**证明：** 根据内积的定义，

$$\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m} = (\mathbf{g}^j)^\top \mathbf{g}_i = \delta_i^j, \quad (1.2)$$

其中的  $i, j$  可取  $1, 2, \dots, m$ 。写成矩阵形式，为<sup>①</sup>

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{g}^1)^\top \\ \vdots \\ (\mathbf{g}^m)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m \end{bmatrix} = \mathbf{I}_m. \quad (1.3)$$

左边的第一个矩阵拆分成了  $m$  行，每行是一个  $m$  维行向量；第二个矩阵则拆分成了  $m$  列，每行是一个  $m$  维列向量。根据分块矩阵的乘法，所得结果对角元为  $\delta_i^i$ ，非对角元则为  $\delta_j^i$ （其中  $i \neq j$ ），即单位阵。

把第一个矩阵的转置挪到外面，可有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^m \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m \end{bmatrix} = \mathbf{I}_m. \quad (1.4)$$

$\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m$  作为基，必然满足  $[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]$  非奇异。因此

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^m \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m \end{bmatrix}^{-1}, \quad (1.5)$$

即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m \end{bmatrix}^{-\top}. \quad (1.6)$$

逆矩阵（及其转置）是存在且唯一的，这就证明了对偶基的存在性和唯一性。  $\square$

① 除非特殊说明，本文中的所有向量均取列向量。

我们把指标写在下面的基  $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m$  称为**协变基**；指标写在上面的基  $\{\mathbf{g}^i\}_{i=1}^m$  称为**逆变基**。式 (1.6) 明确指出了逆变基与协变基的关系。

下面我们引入**单位正交基**（或**标准正交基**），它是指模长为1且两两正交的一组基。

如果矩阵  $\mathbf{A}$  满足

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}, \quad (1.7)$$

即

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \text{ 或 } \mathbf{A} = \mathbf{A}^{-T}, \quad (1.8)$$

则称  $\mathbf{A}$  为**正交矩阵**。正交矩阵的全体记作  $\text{Orth}$ 。由线性代数中的结论可知，正交矩阵  $\mathbf{A}$  的每一行和每一列均是单位正交基；反之，若矩阵  $\mathbf{A}$  的每一行和每一列均是单位正交基，则  $\mathbf{A}$  也是正交矩阵。

设  $\mathbb{R}^m$  空间中的协变基  $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m$  是一组单位正交基，则由它构成的矩阵

$$[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m] \in \text{Orth}, \quad (1.9)$$

因此

$$[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m] = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]^{-T}. \quad (1.10)$$

另一方面，根据对偶关系的矩阵表示 (1.6) 式，我们有

$$[\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^m] = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]^{-T}, \quad (1.11)$$

于是

$$[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m] = [\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^m], \quad (1.12)$$

即协变基与逆变基完全相同。反之，如果协变基与逆变基相同，那么有

$$[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]^T = [\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^m]^T = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]^{-1}, \quad (1.13)$$

因而

$$[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m] \in \text{Orth}. \quad (1.14)$$

这样，我们便获得了一个重要结论：当  $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m$  是单位正交基，即  $\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij}$  时，可有  $\mathbf{g}^i = \mathbf{g}_i$ 。反之亦然。

### 1.1.2 度量

下面引入**度量**的概念。其定义为

$$g_{ij} \triangleq \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}, \quad (1.15-a)$$

$$g^{ij} \triangleq \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.15-b)$$

这两种度量满足

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j. \quad (1.16)$$

也可以写成矩阵的形式：

$$[g_{ik}][g^{kj}] = [\delta_i^j] = \mathbf{I}_m, \quad (1.17)$$

其中的  $\mathbf{I}_m$  是  $m$  阶单位阵. 该式的证明将在稍后给出.

由于内积具有交换律, 因而度量的两个指标显然可以交换:

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji}. \quad (1.18)$$

利用度量, 可以获得**基向量转换关系**. 第  $i$  个协变基向量  $\mathbf{g}_i$  既然是向量, 就必然可以用协变基或逆变基来表示<sup>①</sup>. 根据对偶关系式 (1.1) 和度量的定义式 (1.15-a)、(1.15-b), 可知

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = g_{ik} \mathbf{g}^k, \\ \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = \delta_i^k \mathbf{g}_k \end{cases} \quad (1.19-a)$$

$$\quad (1.19-b)$$

以及

$$\begin{cases} \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = \delta_k^i \mathbf{g}^k, \\ \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = g^{ik} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad (1.20-a)$$

$$\quad (1.20-b)$$

这四个式子中, 式 (1.19-b) 和 (1.20-a) 是平凡的, 而式 (1.19-a) 和 (1.20-b) 则通过度量建立起了协变基与逆变基之间的关系. 这就称为**基向量转换关系**, 也可以叫做“指标升降游戏”.

需要说明的是, 根据 **Einstein 求和约定**, 重复指标 (即哑标, 这里是  $k$ ) 且一上一下时, 已经暗含了求和. 后文除非特殊说明, 也都是如此.

现在我们来证明式 (1.16):

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j. \quad (1.21)$$

证明:

$$g_{ik} g^{kj} = \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} g^{kj} = \langle \mathbf{g}_i, g^{kj} \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad (1.22)$$

根据式 (1.20-b), 有

$$g^{kj} \mathbf{g}_k = g^{jk} \mathbf{g}_k = \mathbf{g}^j \quad (1.23)$$

因此可得

$$g_{ik} g^{kj} = \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \quad (1.24)$$

□

### 1.1.3 向量的分量

对于任意的向量  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$ , 它可以用协变基表示:

$$\boldsymbol{\xi} = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{g}^k \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = \xi^k \mathbf{g}_k, \quad (1.25-a)$$

也可以用逆变基表示:

$$\boldsymbol{\xi} = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = \xi_k \mathbf{g}^k. \quad (1.25-b)$$

式中,  $\xi^k$  是  $\boldsymbol{\xi}$  与第  $k$  个逆变基做内积的结果, 称为  $\boldsymbol{\xi}$  的第  $k$  个**逆变分量**; 而  $\xi_k$  是  $\boldsymbol{\xi}$  与第  $k$  个协变基做内积的结果, 称为  $\boldsymbol{\xi}$  的第  $k$  个**协变分量**.

以后凡是指标在下的 (下标), 均称为协变某某; 指标在上的 (上标), 称为逆变某某.

<sup>①</sup> 所谓用某组基来“表示”一个向量, 就是把它朝各个基的方向做投影, 然后再求和.

## 1.2 张量的表示

### 1.2.1 张量的表示与简单张量

所谓张量，即多重线性函数。

首先用三阶张量举个例子。考虑任意的  $\Phi \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$ ，其中的  $\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$  表示以  $\mathbb{R}^m$  为底空间的三阶张量全体。所谓三阶（或三重）线性函数，指“吃掉”三个向量之后变成实数，并且“吃法”具有线性性。

一般地， $r$  阶张量的定义如下：

$$\Phi : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{r \text{ 个 } \mathbb{R}^m} \ni \{u_1, u_2, \dots, u_r\} \mapsto \Phi(u_1, u_2, \dots, u_r) \in \mathbb{R}, \quad (1.26)$$

式中的  $\Phi$  满足

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \Phi(u_1, \dots, \alpha \tilde{u}_i + \beta \hat{u}_i, \dots, u_r) \\ = \alpha \Phi(u_1, \dots, \tilde{u}_i, \dots, u_r) + \beta \Phi(u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_r), \end{aligned} \quad (1.27)$$

即所谓“对第  $i$  个变元的线性性”。这里的  $i$  可取  $1, 2, \dots, r$ 。

在张量空间  $\mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m)$  上，我们引入线性结构：

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ 和 } \Phi, \Psi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad (\alpha \Phi + \beta \Psi)(u_1, u_2, \dots, u_r) \\ \triangleq \alpha \Phi(u_1, u_2, \dots, u_r) + \beta \Psi(u_1, u_2, \dots, u_r), \end{aligned} \quad (1.28)$$

于是

$$\alpha \Phi + \beta \Psi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m). \quad (1.29)$$

下面我们要获得  $\Phi$  的表示。根据之前任意向量用协变基或逆变基的表示，有

$$\begin{aligned} \forall u, v, w \in \mathbb{R}^m, \quad \Phi(u, v, w) \\ = \Phi(u^i g_i, v_j g^j, w^k g_k) \end{aligned}$$

考虑到  $\Phi$  对第一变元的线性性，可得

$$= u^i \Phi(g_i, v_j g^j, w^k g_k)$$

同理，

$$= u^i v_j w^k \Phi(g_i, g^j, g_k). \quad (1.30)$$

注意这里自然需要满足 Einstein 求和约定。

上式中的  $\Phi(g_i, g^j, g_k)$  是一个数。它是张量  $\Phi$  “吃掉”三个基向量的结果。至于  $u^i v_j w^k$  部分，三项分别是  $u$  的第  $i$  个逆变分量、 $v$  的第  $j$  个协变分量和  $w$  的第  $k$  个逆变分量。根据向量分量的定义，可知

$$u^i v_j w^k = \langle u, g^i \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdot \langle v, g_j \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdot \langle w, g^k \rangle_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.31)$$

暂时中断一下思路，先给出简单张量的定义。

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^m, \quad \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, v, w) \triangleq \langle \xi, u \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdot \langle \eta, v \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdot \langle \zeta, w \rangle_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}, \quad (1.32)$$

式中的  $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^m$ 。“ $\otimes$ ”的定义将在 2.1 节中给出，现在可以暂时把  $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$  理解为一种记号。简单张量作为一个映照，组成它的三个向量分别与它们“吃掉”的第一、二、三个变元做内积并相乘，结果为一个实数。

考虑到内积的线性性，便有（以第二个变元为例）

$$\xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v}, w) \triangleq \langle \xi, u \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdot \langle \eta, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v} \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdot \langle \zeta, w \rangle_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}$$

注意到  $\langle \eta, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v} \rangle_{\mathbb{R}^m} = \alpha \langle \eta, \tilde{v} \rangle_{\mathbb{R}^m} + \beta \langle \eta, \hat{v} \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，同时再次利用简单张量的定义，可得

$$= \alpha \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \tilde{v}, w) + \beta \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \hat{v}, w). \quad (1.33)$$

类似地，对第一变元和第三变元，同样具有线性性。因此，可以知道

$$\xi \otimes \eta \otimes \zeta \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m). \quad (1.34)$$

可见，“简单张量”的名字是名副其实的，它的确是一个特殊的张量。

回过头来看 (1.31) 式。很明显，它可以用简单张量来表示。要注意，由于内积的对称性，可以有两种<sup>①</sup>表示方法：

$$g^i \otimes g_j \otimes g^k(u, v, w) \quad (1.35-a)$$

或者

$$u \otimes v \otimes w(g^i, g_j, g^k), \quad (1.35-b)$$

我们这里取上面一种。代入式 (1.30)，得

$$\Phi(u, v, w) = \Phi(g_i, g^j, g_k) \cdot g^i \otimes g_j \otimes g^k(u, v, w)$$

由于  $\Phi(g_i, g^j, g_k) \in \mathbb{R}^m$ ，因此

$$= [\Phi(g_i, g^j, g_k) g^i \otimes g_j \otimes g^k](u, v, w). \quad (1.36)$$

方括号里的部分，就是根据 Einstein 求和约定，用  $\Phi(g_i, g^j, g_k)$  对  $g^i \otimes g_j \otimes g^k$  进行线性组合。

由于  $u, v, w$  选取的任意性，可以引入如下记号：

$$\Phi = \Phi(g_i, g^j, g_k) g^i \otimes g_j \otimes g^k =: \Phi_{i \ k}^j g^i \otimes g_j \otimes g^k, \quad (1.37)$$

即

$$\Phi_{i \ k}^j := \Phi(g_i, g^j, g_k), \quad (1.38)$$

这称为张量的分量。它说明一个张量可以用张量分量和基向量组成的简单张量来表示。

指标  $i, j, k$  的上下是任意的。这里，它依赖于式 (1.30) 中基向量的选取。实际上，对于这里的三阶张量，指标的上下一共有 8 种可能。指标全部在下面的，称为协变分量：

$$\Phi_{ijk} := \Phi(g_i, g_j, g_k); \quad (1.39)$$

<sup>①</sup> 这里只考虑把  $u, v, w$  和  $g^i, g_j, g^k$  分别放在一起的情况。

指标全部在上面的，称为**逆变分量**：

$$\Phi^{ijk} := \Phi(g^i, g^j, g^k); \quad (1.40)$$

其余 6 种，称为**混合分量**。对于一个  $r$  阶张量，显然共有  $2^r$  种分量表示，其中协变分量与逆变分量各一种，混合分量  $2^r - 2$  种。

### 1.2.2 张量分量之间的关系

我们已经知道，对于任意一个向量  $\xi \in \mathbb{R}^m$ ，它可以用协变基或逆变基表示：

$$\xi = \begin{cases} \xi^i g_i, \\ \xi_i g^i. \end{cases} \quad (1.41)$$

式中，协变分量与逆变分量满足坐标转换关系：

$$\begin{cases} \xi^i = \langle \xi, g^i \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \xi, g^{ik} g_k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} \langle \xi, g_k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} \xi_k, \\ \xi_i = \langle \xi, g_i \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \xi, g_{ik} g^k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g_{ik} \langle \xi, g^k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g_{ik} \xi^k. \end{cases} \quad (1.42-a)$$

$$(1.42-b)$$

每一式的第二个等号都用到了基向量转换关系，见式 (1.19-a) 和 (1.20-b)。

现在再来考虑张量的分量。仍以上文中的张量  $\Phi_{i \ k}^j := \Phi(g_i, g^j, g_k)$  为例，我们想要知道它与张量  $\Phi^{p \ r}_q := \Phi(g^p, g_q, g^r)$  之间的关系。利用基向量转换关系，可有

$$\begin{aligned} \Phi_{i \ k}^j &:= \Phi(g_i, g^j, g_k) \\ &= \Phi(g_{ip} g^p, g^{jq} g_q, g_{kr} g^r) \end{aligned}$$

又利用张量的线性性，得

$$\begin{aligned} &= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \Phi(g^p, g_q, g^r) \\ &= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \Phi^{p \ r}_q. \end{aligned} \quad (1.43)$$

可见，张量的分量与向量的分量类似，其指标升降可通过度量来实现。用同样的手法，还可以得到诸如  $\Phi^{ijk} = g^{jp} \Phi^{i \ k}_p$ 、 $\Phi^{i \ k}_j = g_{jp} g^{kq} \Phi^{ip}_q$  这样的关系式。

### 1.2.3 相对不同基的张量分量之间的关系

$\mathbb{R}^m$  空间中，除了  $\{g_i\}_{i=1}^m$  和相应的对偶基  $\{g^i\}_{i=1}^m$  之外，当然还可以有其他的基，比如带括号的  $\{g_{(i)}\}_{i=1}^m$  以及对应的对偶基  $\{g^{(i)}\}_{i=1}^m$ 。前者对应形如  $\Phi_{i \ k}^j := \Phi(g_i, g^j, g_k)$  的张量，后者则对应带括号的张量，如  $\Phi^{(p)}_{(q)}{}^{(r)} := \Phi(g^{(p)}, g_{(q)}, g^{(r)})$ 。下面我们来探讨这两个张量的关系。

首先来建立基之间的关系。带括号的第  $i$  个基向量  $g_{(i)}$ ，作为  $\mathbb{R}^m$  空间中的一个向量，自然可以用另一组基来表示：

$$g_{(i)} = \begin{cases} \langle g_{(i)}, g_k \rangle_{\mathbb{R}^m} g^k, \\ \langle g_{(i)}, g^k \rangle_{\mathbb{R}^m} g_k. \end{cases} \quad (1.44)$$

同理，自然还有它的对偶基：

$$\mathbf{g}^{(i)} = \begin{cases} \langle \mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k, \\ \langle \mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}^k \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad (1.45)$$

引入记号  $c_{(i)}^k := \langle \mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}^k \rangle_{\mathbb{R}^m}$  和  $c_k^{(i)} := \langle \mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，那么有

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{(i)} = c_{(i)}^k \mathbf{g}_k, \\ \mathbf{g}^{(i)} = c_k^{(i)} \mathbf{g}^k. \end{cases} \quad (1.46-a)$$

$$(1.46-b)$$

容易看出，这两个系数具有如下性质：

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = \delta_j^i. \quad (1.47)$$

写成矩阵形式<sup>①</sup>，为

$$\begin{bmatrix} c_k^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{(j)}^k \end{bmatrix} = [\delta_j^i] = \mathbf{I}_m. \quad (1.48)$$

换句话说，两个系数矩阵是互逆的。

证明：

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = \langle \mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} c_{(j)}^k$$

利用内积的线性性，有

$$= \langle \mathbf{g}^{(i)}, c_{(j)}^k \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

根据  $c_{(j)}^k$  的定义，得到

$$= \langle \mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_{(j)} \rangle_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.49)$$

带括号的基同样满足对偶关系 (1.1) 式，于是得证。□

上面我们用不带括号的基表示了带括号的基。反之也是可以的：

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i = \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}^{(k)} \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^{(k)} = c_i^{(k)} \mathbf{g}^{(k)}, \\ \mathbf{g}^i = \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}_{(k)} \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_{(k)} = c_{(k)}^i \mathbf{g}_{(k)}. \end{cases} \quad (1.50-a)$$

$$(1.50-b)$$

这样一来，就建立起了不同基之间的转换关系。

现在我们回到张量。根据张量分量的定义，

$$\Phi_j^{i \ k} := \Phi(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k)$$

利用之前推导的不同基向量之间的转换关系，得

$$= \Phi(c_{(p)}^i \mathbf{g}^{(p)}, c_j^{(q)} \mathbf{g}_{(q)}, c_{(r)}^k \mathbf{g}^{(r)})$$

① 通常我们约定上面的标号作为行号，下面的标号作为列号。

由张量的线性性，提出系数：

$$\begin{aligned}
 &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \Phi(\mathbf{g}^{(p)}, \mathbf{g}_{(q)}, \mathbf{g}^{(r)}) \\
 &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \Phi_{(q)}^{(p)}{}^{(r)} .
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

完全类似，还可以有

$$\Phi_{(j)}^{(i)}{}^{(k)} = c_p^{(i)} c_{(j)}^g c_r^{(k)} \Phi_q^{p \ r} . \tag{1.52}$$

总结一下这两小节得到的结果．对于同一组基下的张量分量，其指标升降通过度量来实现；对于不同基下的张量分量，其指标转换则通过不同基之间的转换系数来完成．



## 第二章 张量的运算性质

### 2.1 张量积

张量积也叫张量并，用符号“ $\otimes$ ”表示。在 1.2.1 小节给出简单张量的定义时，实际上就用到了张量积。张量积的定义为：

$$\begin{aligned} \forall \Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m), \Psi \in \mathcal{T}^q(\mathbb{R}^m), \quad \Phi \otimes \Psi &\in \mathcal{T}^{p+q}(\mathbb{R}^m) \\ &= \left( \Phi^{i_1 \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left( \Psi^{j_1 \dots j_q} g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q} \right) \\ &\triangleq \Phi^{i_1 \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_q} \left( g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left( g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

由该定义可以知道，关于简单张量  $\left( g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left( g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q} \right)$ ，相应的张量分量为

$$(\Phi \otimes \Psi)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}. \quad (2.2)$$

### 2.2 $e$ 点积

张量的  $e$  点积可以用符号“ $\binom{e}{\cdot}$ ”表示。从这个符号可以看出  $e$  点积的作用：前  $e$  个指标缩并，后面的点乘。

对于任意的  $\Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m), \Psi \in \mathcal{T}^q(\mathbb{R}^m), e \leq \min\{p, q\} \in \mathbb{N}^*$ ， $e$  点积是这样定义的：

$$\begin{aligned} &\Phi \binom{e}{\cdot} \Psi \\ &= \left( \Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}} \otimes g_{i_{p-e+1}} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \\ &\quad \binom{e}{\cdot} \left( \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} g_{j_1} \otimes \dots \otimes g_{j_e} \otimes g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q} \right) \end{aligned}$$

把高亮的部分做内积，得到度量：

$$\begin{aligned} &\triangleq \Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \\ &\quad \cdot g_{i_{p-e+1} j_1} \dots g_{i_p j_e} \left( g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}} \right) \otimes \left( g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q} \right) \end{aligned}$$

玩一下“指标升降游戏”（注意有两种结合方式：与  $\Phi$  或  $\Psi$ ），可得

$$= \left\{ \begin{array}{l} \Phi^{i_1 \dots i_{p-e}} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \\ \Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \end{array} \right\} \left( g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}} \right) \otimes \left( g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q} \right). \quad (2.3)$$

最后一步的花括号中，高亮的  $j_1 \cdots j_e$  和  $i_{p-e+1} \cdots i_p$  都是哑标，可以通过求和求掉。因此有

$$\Phi \binom{e}{\cdot} \Psi \in \mathcal{T}^{p+q-2e}(\mathbb{R}^m). \quad (2.4)$$

换句话说， $e$  点积的作用就是将指标哑标化。

作为一个特例，接下来我们介绍全点积，用符号 “ $\odot$ ” 表示。对于任意的  $\Phi, \Psi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)$ ，有

$$\begin{aligned} \Phi \odot \Psi &\triangleq \Phi \binom{p}{\cdot} \Psi \\ &= \left( \Phi^{i_1 \cdots i_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_p} \right) \binom{p}{\cdot} \left( \Psi^{j_1 \cdots j_p} g_{j_1} \otimes \cdots \otimes g_{j_p} \right) \\ &= \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_p j_p} \\ &= \begin{cases} \Phi_{j_1 \cdots j_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} \\ \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{i_1 \cdots i_p} \end{cases} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

可见，全点积将全部指标哑标化。

张量自身和自身的全点积，定义为它的范数：

$$\Phi \odot \Phi = \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p} =: \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2. \quad (2.6)$$

## 2.3 叉乘

张量的叉乘要求底空间为  $\mathbb{R}^3$ 。对于任意的  $\Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $\Psi \in \mathcal{T}^q(\mathbb{R}^3)$ ，叉乘的定义如下：

$$\begin{aligned} \Phi \times \Psi &= \left( \Phi^{i_1 \cdots i_{p-1} i_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_{p-1}} \otimes g_{i_p} \right) \times \left( \Psi^{j_1 j_2 \cdots j_q} g^{j_1} \otimes g^{j_2} \cdots \otimes g^{j_q} \right) \\ &\triangleq \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_{p-1}} \otimes \left( g_{i_p} \times g^{j_1} \right) \otimes g^{j_2} \cdots \otimes g^{j_q} \in \mathcal{T}^{p+q-1}(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (2.7)$$

注意到，此时简单张量的维数已经降了一阶。

利用 Levi-Civita 记号，可以进一步展开上式。

$$g_{i_p} \times g^{j_1} = \epsilon_{i_p}^{j_1 s} g^s, \quad (2.8)$$

式中的

$$\epsilon_{i_p}^{j_1 s} = \det \left[ g_{i_p}, g^{j_1}, g^s \right]. \quad (2.9)$$

于是

$$\Phi \times \Psi = \epsilon_{i_p}^{j_1 s} \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_{p-1}} \otimes g^s \otimes g^{j_2} \cdots \otimes g^{j_q}. \quad (2.10)$$

下面我们再来类比地定义一种混合积 “ $\binom{\times}{\cdot}$ ”。对于任意的  $\Phi, \Psi \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$ ，定义

$$\begin{aligned} \Phi \binom{\times}{\cdot} \Psi &= \left( \Phi^{ijk} g_i \otimes g_j \otimes g_k \right) \binom{\times}{\cdot} \left( \Psi_{pqr} g^p \otimes g^q \otimes g^r \right) \\ &\triangleq \Phi^{ijk} \Psi_{pqr} \delta_j^q g_i \otimes (g_k \times g^p) \otimes g^r \end{aligned}$$

缩并掉 Kronecker  $\delta$ ，同时利用 Levi-Civita 记号展开叉乘项，可有

$$= \epsilon_{k s}^p \Phi^{ijk} \Psi_{pjr} g_i \otimes g^s \otimes g^r, \quad (2.11)$$

式中的

$$\epsilon_{k s}^p = \det [g_k, g^p, g_s]. \quad (2.12)$$

对于这种混合积，并没有一般的约定。不同的研究者往往会采用不同的写法及表示。

## 2.4 置换（一）

本节主要介绍**置换运算**的定义及相关概念，这将使我们暂时离开张量运算的主线。

置换运算实际上是一种交换位置或者改变次序的运算。之后我们还将引入针对张量的置换算子，它是外积运算和外微分运算的基础。这些运算是现代张量分析与微分几何的支柱。

### 2.4.1 置换的定义

我们从一个例子开始。下面是一个  $2 \times 7$  的“矩阵”：

$$\sigma = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} \\ \textcircled{7} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{1} & \textcircled{6} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

矩阵里面的每一个数字表示一个位置。可以想象成 7 把椅子，先是按第一行的顺序依次排列，再按照第二行的顺序打乱，重新排列。于是这就成为一个 **7 阶置换**。这个定义等价于

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.14-a)$$

自然也等价于

$$\sigma = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}, \quad (2.14-b)$$

当然，换用任何元素也都是可以的。

通常我们用方括号表示置换的**序号定义**，即标号的排列轮换；用圆括号表示**元素定义**，即标号对应元素的轮换。

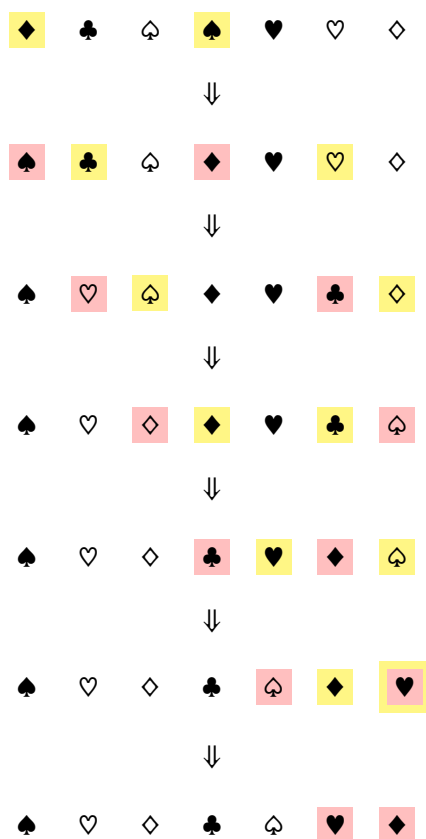
### 2.4.2 置换的符号

接着来定义置换的符号  $\text{sgn } \sigma$ 。这里我们把每次交换两个数字称为一次“操作”。如果经过偶数次“操作”，可以把经置换后的序列恢复为原来的顺序，那么该置换的符号  $\text{sgn } \sigma = 1$ ；而如果经过奇数次“操作”才可以复原，则  $\text{sgn } \sigma = -1$ 。若用一个式子表示，则为

$$\text{sgn } \sigma = (-1)^n, \quad (2.15)$$

其中的  $n$  是恢复原本顺序所需“操作”的次數。

下面我们以后式 (2.13) 所定义的  $\sigma$  为例，演示求置换符号的过程。这里的关键是通过两两交换，按如下步骤把式 (2.14-b) 的第二行变换成第一行：



一共进行了 6 次两两交换，因此  $\text{sgn } \sigma = 1$ 。

### 2.4.3 置换的复合

再定义一个置换

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

注意这里用了方括号，因此它是一个序号定义。方便起见，以后的序号我们都只用不带圈的普通数字表示。考虑之前定义的置换

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

则  $\tau$  与  $\sigma$  的复合

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \odot \end{matrix} \\ \begin{matrix} \odot & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \square & \odot & \square & \square & \square & \square & \square \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \sigma \\ \leftarrow \tau \end{matrix} \quad (2.18)$$

与函数、线性变换等的复合类似，这里也用小圆圈“ $\circ$ ”表示置换的复合。

假设经过置换  $\sigma$ 、 $\tau$  作用后得到的序列，分别需要  $p$  次和  $q$  次两两交换才能复原为原来的序列。那么很显然，经过复合置换  $\tau \circ \sigma$  作用后的序列，经过  $q + p$  次两两交换也一定可以复原。因此，复

合置换的符号

$$\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = (-1)^{q+p} = (-1)^q \cdot (-1)^p = \operatorname{sgn} \tau \cdot \operatorname{sgn} \sigma. \quad (2.19)$$

#### 2.4.4 逆置换

逆置换  $\sigma^{-1}$  的定义为

$$\sigma^{-1} \circ \sigma = \mathbf{Id}, \quad (2.20)$$

其中的“ $\mathbf{Id}$ ”是恒等映照.

仍然使用式 (2.14-b):

$$\sigma = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

那么自然有

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

显然, 我们有  $\sigma^{-1} \circ \sigma = \mathbf{Id}$ .

回忆一下逆矩阵的定义. 矩阵  $A$  的逆  $A^{-1}$  既要满足  $A^{-1}A = I$ , 又要满足  $AA^{-1} = I$ . 对于置换也是如此, 因此我们需要检查  $\sigma \circ \sigma^{-1}$ : <sup>①</sup>

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \spadesuit_1 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3 & \clubsuit_4 & \spadesuit_5 & \heartsuit_6 & \diamondsuit_7 \\ \diamondsuit_7 & \clubsuit_4 & \spadesuit_5 & \spadesuit_1 & \heartsuit_6 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \sigma^{-1} \\ \\ \leftarrow \sigma \end{matrix} \quad (2.23)$$

可见的确有  $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathbf{Id}$ .

另外, 由于恒等映照  $\mathbf{Id}$  作用后序列不发生变化, 复原所需的交换次数为 0, 因此

$$\operatorname{sgn} \mathbf{Id} = (-1)^0 = 1. \quad (2.24)$$

而根据定义,

$$\mathbf{Id} = \sigma^{-1} \circ \sigma, \quad (2.25)$$

故有

$$\operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \sigma^{-1} = 1. \quad (2.26)$$

由此, 可以推知

$$\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \sigma^{-1}, \quad (2.27)$$

即置换与它的逆具有相同的符号.

## 2.5 置换 (二)

本节将介绍置换运算的基本性质.

<sup>①</sup> 该式中的数字角标用来澄清原始序号.

### 2.5.1 置换的穷尽

先要做一点铺垫. 设有序数组

$$\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$$

经置换  $\sigma$  作用后成为

$$\{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)\},$$

则根据之前的元素定义 (圆括号), 可以把  $\sigma$  记为

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_r) \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

每次置换都将得到一个有序数组. 把它们组合到一起, 就可以得到集合

$$\left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \forall \sigma \in \mathcal{P}_r \right\}. \quad (2.29)$$

其中的  $\mathcal{P}_r$  表示  $r$  阶置换的全体. 根据排列组合原理,  $r$  阶置换的总数等于  $r$  个元素的全排列数. 即该集合共有  $r!$  个元素.

下面我们要证明

$$\begin{aligned} & \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \forall \sigma \in \mathcal{P}_r \right\} \\ &= \left\{ (\tau \circ \sigma(i_1), \tau \circ \sigma(i_2), \dots, \tau \circ \sigma(i_r)) \mid \forall \sigma, \tau \in \mathcal{P}_r \right\} \end{aligned} \quad (2.30-a)$$

$$= \left\{ (\sigma \circ \tau(i_1), \sigma \circ \tau(i_2), \dots, \sigma \circ \tau(i_r)) \mid \forall \sigma, \tau \in \mathcal{P}_r \right\} \quad (2.30-b)$$

$$= \left\{ (\sigma^{-1}(i_1), \sigma^{-1}(i_2), \dots, \sigma^{-1}(i_r)) \mid \forall \sigma \in \mathcal{P}_r \right\}. \quad (2.30-c)$$

所谓“穷尽”, 就是将  $\mathcal{P}_r$  中的所有置换  $\sigma$  全部枚举出来. 关于  $\sigma$  的求和就是一个例子. 以上这条性质说明, 置换  $\sigma$  如果作为一个广义上的“哑标”, 那么穷尽的结果与用  $\tau \circ \sigma$ 、 $\sigma \circ \tau$  或  $\sigma^{-1}$  代替该“哑标”的结果是一样的.

这说明置换构成了置换群.?

**证明:** 证明的思路是说明集合互相包含.

对于式 (2.30-a), 右边的  $\tau \circ \sigma$  也是一个  $r$  阶置换, 自然符合左边集合的定义, 因此右边  $\subset$  左边. 由于这一步是相当显然的, 以下的几个证明我们将略去该步. 另一方面, 左边的  $\sigma$  可以表示成

$$\sigma = \text{Id} \circ \sigma = (\tau \circ \tau^{-1}) \circ \sigma = \tau \circ (\tau^{-1} \circ \sigma), \quad (2.31)$$

这就是右边集合的定义, 因此 左边  $\subset$  右边. 故可得等式成立.

对于式 (2.30-b), 我们有

$$\sigma = \sigma \circ \text{Id} = \sigma \circ (\tau^{-1} \circ \tau) = (\sigma \circ \tau^{-1}) \circ \tau, \quad (2.32)$$

它符合了右边集合的定义, 因此 左边  $\subset$  右边. 于是等式成立.

对于式 (2.30-c), 我们有

$$\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}, \quad (2.33)$$

它符合了右边集合的定义, 因此 左边  $\subset$  右边. 于是等式成立.  $\square$

### 2.5.2 数组元素的乘积

设有序数组  $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ 、 $\{j_1, j_2, \dots, j_r\}$  和  $\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$  经  $r$  阶置换  $\sigma$  作用后分别成为  $\{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)\}$ 、 $\{\sigma(j_1), \sigma(j_2), \dots, \sigma(j_r)\}$  和  $\{\sigma(k_1), \sigma(k_2), \dots, \sigma(k_r)\}$ ，也就是说

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_r \\ \sigma(j_1) & \sigma(j_2) & \dots & \sigma(j_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_r \\ \sigma(k_1) & \sigma(k_2) & \dots & \sigma(k_r) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

我们有如下结论：

$$\forall \sigma \in \mathcal{P}_r, \quad A_{i_1 j_1 k_1} A_{i_2 j_2 k_2} \dots A_{i_r j_r k_r} = A_{\sigma(i_1) \sigma(j_1) \sigma(k_1)} A_{\sigma(i_2) \sigma(j_2) \sigma(k_2)} \dots A_{\sigma(i_r) \sigma(j_r) \sigma(k_r)}, \quad (2.35)$$

式中的  $A_{ijk}$  表示三维数组  $\mathbf{A}$  的一个元素，其指标为  $ijk$ 。

下面通过一个例子来说明这一条性质。还是用式 (2.14-a) 和 (2.14-b) 所定义的置换  $\sigma$ ：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamond & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamond \\ \diamond & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamond \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

随意写出一个数组元素乘积：

$$A_{379} A_{264} A_{157} A_{483} A_{698} A_{\diamond \spadesuit \heartsuit} A_{\heartsuit \spadesuit \heartsuit}. \quad (2.37)$$

三组下标分别为

$$\begin{cases} 3, 2, 1, 4, 6, \diamond, \heartsuit; \\ 7, 6, 5, 8, 9, \clubsuit, \spadesuit; \\ 9, 4, 7, 3, 8, \heartsuit, \heartsuit. \end{cases} \quad (2.38)$$

考虑  $\sigma$  的序号定义式 (2.13)：

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

所谓序号只是位置的抽象表示，而不代表任何真实的元素。请记住：置换始终是位置的变换，而非元素的变换，不要被式 (2.36) 给迷惑了。把  $\sigma$  作用在这三组下标上，可得

$$\begin{cases} \heartsuit, 4, 6, 3, \diamond, 2, 1; \\ \spadesuit, 8, 9, 7, \clubsuit, 6, 5; \\ \heartsuit, 3, 8, 9, \heartsuit, 4, 7. \end{cases} \quad (2.40)$$

于是之前的数组元素乘积就变成了

$$A_{\heartsuit \spadesuit \heartsuit} A_{483} A_{698} A_{379} A_{\diamond \spadesuit \heartsuit} A_{264} A_{157}. \quad (2.41)$$

比对一下各元素，可见与式 (2.37) 的确是完全一样的。

### 2.5.3 哑标的穷尽

考虑如下集合：

$$\left\{ (i_1, i_2, \dots, i_r) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (2.42)$$

每个  $i_k$  都有  $m$  种取法，而  $i_k$  又有  $r$  个，因此该集合一共有  $m^r$  元素。我们有

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathcal{P}_r, \quad & \left\{ (i_1, i_2, \dots, i_r) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\} \\ &= \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\} \end{aligned} \quad (2.43-a)$$

$$= \left\{ (\sigma^{-1}(i_1), \sigma^{-1}(i_2), \dots, \sigma^{-1}(i_r)) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (2.43-b)$$

这里， $i_k$  起的就是哑标的作用。

**证明：** 无论怎样置换， $\sigma(i_k)$  都是  $1, 2, \dots, m$  中的数。因此，对于  $\forall \sigma \in \mathcal{P}_r$ ,

$$(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \in \left\{ (i_1, i_2, \dots, i_r) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}, \quad (2.44)$$

即

$$\begin{aligned} & \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\} \\ & \subset \left\{ (i_1, i_2, \dots, i_r) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

另一方面，由于  $\mathbf{Id} = \sigma^{-1} \circ \sigma$ ，即

$$(i_1, i_2, \dots, i_r) = (\sigma^{-1} \circ \sigma(i_1), \sigma^{-1} \circ \sigma(i_2), \dots, \sigma^{-1} \circ \sigma(i_r)), \quad (2.46)$$

而进行一次逆置换仍然使得元素不离开原有的范围，也就是说

$$(i_1, i_2, \dots, i_r) \in \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}, \quad (2.47)$$

即

$$\begin{aligned} & \left\{ (i_1, i_2, \dots, i_r) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\} \\ & \subset \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

两个集合互相包含，也就证得了式 (2.43-a)。

用相同的方法也可证得关于逆置换的 (2.43-b) 式，此处从略。  $\square$

## 2.6 置换 (三)

本节将给出置换运算在线性代数中的一些应用。



## 2.6.1 行列式

## 2.7 置换 (四)

本节将重回张量运算的主线，引入置换算子。

### 2.7.1 置换算子；对称张量与反对称张量

对于任意的置换  $\sigma \in \mathcal{P}_r$ ，定义置换算子

$$\mathbf{I}_\sigma : \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m) \ni \Phi \mapsto \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad (2.49)$$

式中

$$\mathbf{I}_\sigma(\Phi)(u_1, u_2, \dots, u_r) \triangleq \Phi(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(r)}) \in \mathbb{R}. \quad (2.50)$$

这里的“ $\dots \in \mathbb{R}$ ”是根据张量的定义：多重线性函数。

如果我们的置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_r) \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

那么对应的置换算子将满足

$$\mathbf{I}_\sigma(\Phi)(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}) \triangleq \Phi(u_{\sigma(i_1)}, u_{\sigma(i_2)}, \dots, u_{\sigma(i_r)}). \quad (2.52)$$

根据张量的线性性，容易知道置换算子也具有线性性：

$$\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m) \text{ 以及 } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{I}_\sigma(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\mathbf{I}_\sigma(\Phi) + \beta\mathbf{I}_\sigma(\Psi). \quad (2.53)$$

证明：

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\sigma(\alpha\Phi + \beta\Psi)(u_1, \dots, u_r) &= (\alpha\Phi + \beta\Psi)(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r)}) \\ &= \alpha\Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r)}) + \beta\Psi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r)}) \\ &= \alpha\mathbf{I}_\sigma(\Phi)(u_1, \dots, u_r) + \beta\mathbf{I}_\sigma(\Psi)(u_1, \dots, u_r) \\ &= [\alpha\mathbf{I}_\sigma(\Phi) + \beta\mathbf{I}_\sigma(\Psi)](u_1, \dots, u_r). \end{aligned} \quad (2.54)$$

□

两个置换算子复合的结果也是很显然的：

$$\forall \sigma, \tau \in \mathcal{P}_r, \quad \mathbf{I}_\sigma \circ \mathbf{I}_\tau = \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau}. \quad (2.55)$$

证明：

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\sigma \circ \mathbf{I}_\tau(\Phi)(u_{i_1}, \dots, u_{i_r}) &= \mathbf{I}_\sigma(\Phi)(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(r)}) \\ &= \Phi(u_{\sigma \circ \tau(1)}, \dots, u_{\sigma \circ \tau(r)}) \\ &= \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau}(\Phi)(u_{i_1}, \dots, u_{i_r}). \end{aligned} \quad (2.56)$$

□

有了置换算子，我们就可以来定义**对称张量**和**反对称张量**。对称张量的全体记为  $\text{Sym}$ ，反对称张量的全体记为  $\text{Skw}$ 。如果以  $\mathbb{R}^m$  为底空间，又分别可以记为  $\mathcal{S}^r(\mathbb{R}^m)$  和  $\mathcal{A}^r(\mathbb{R}^m)$ 。

对于任意的  $\Phi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m)$ ，如果

$$\mathbf{I}_\sigma(\Phi) = \Phi, \quad (2.57)$$

则称  $\Phi$  为对称张量，即  $\Phi \in \text{Sym}$  或  $\mathcal{S}^r(\mathbb{R}^m)$ ；如果

$$\mathbf{I}_\sigma(\Phi) = \text{sgn } \sigma \cdot \Phi, \quad (2.58)$$

则称  $\Phi$  为反对称张量，即  $\Phi \in \text{Skw}$  或  $\mathcal{A}^r(\mathbb{R}^m)$ 。

有些书中采用分量形式来定义（反）对称张量。这与此处的定义是等价的：

$$\mathbf{I}_\sigma(\Phi) = \Phi \iff \Phi_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_p)} = \Phi_{i_1\dots i_p}, \quad (2.59-a)$$

$$\mathbf{I}_\sigma(\Phi) = \text{sgn } \sigma \cdot \Phi \iff \Phi_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_p)} = \text{sgn } \sigma \cdot \Phi_{i_1\dots i_p}. \quad (2.59-b)$$

反对称张量与我们熟知的行列式有些类似：交换两列（对于张量就是两个分量），符号相反。全部分量两两交换一遍，前面的系数自然是置换的符号。而如果无论怎么交换分量（当然需要全部两两交换一遍），符号都不变，那这样的张量就是对称张量。

一个二阶张量的协变（或逆变）分量，可以用一个矩阵表示。如果这个张量是一个反对称张量，交换任意两个分量要添加负号；对于矩阵而言，这就意味着交换两行（或两列）……

## 2.7.2 置换算子的表示

根据上文给出的定义，我们有

$$\mathbf{I}_\sigma(\Phi)(u_{i_1}, \dots, u_{i_r}) \triangleq \Phi(u_{\sigma(i_1)}, \dots, u_{\sigma(i_r)}). \quad (2.60)$$

首先回忆一下 1.2.1 小节中张量的表示：选一组基（协变、逆变均可），然后把张量用这组基表示。于是

$$\mathbf{I}_\sigma(\Phi)(u_{i_1}, \dots, u_{i_r}) = \Phi(u_{\sigma(i_1)}, \dots, u_{\sigma(i_r)})$$

把向量用协变基表示：

$$= \Phi(u_{\sigma(i_1)}^{i_1} g_{i_1}, \dots, u_{\sigma(i_r)}^{i_r} g_{i_r})$$

根据张量的线性性，提出系数：

$$= \Phi(g_{i_1}, \dots, g_{i_r}) \cdot (u_{\sigma(i_1)}^{i_1} \dots u_{\sigma(i_r)}^{i_r})$$

前半部分可以用张量分量表示；而后半部分是一组逆变分量，可以写成内积的形式

$$= \Phi_{i_1\dots i_p} \left[ \langle u_{\sigma(i_1)}, g^{i_1} \rangle_{\mathbb{R}^m} \dots \langle u_{\sigma(i_r)}, g^{i_r} \rangle_{\mathbb{R}^m} \right] \quad (2.61^*)$$

注意到方括号中的其实是简单张量的定义，这就有

$$= \Phi_{i_1\dots i_p} g^{i_1} \otimes \dots \otimes g^{i_r} (u_{\sigma(i_1)}, \dots, u_{\sigma(i_r)}). \quad (2.61)$$

最后一步仍然没能回到  $(u_{i_1}, \dots, u_{i_r})$ ，因此以上推导只是简单地展开了  $\Phi$ ，并没有获得实质性的结果。

然而，只要稍作改动，情况就会大不相同。考虑一下 2.5.2 小节中置换运算有关数组元素乘积的性质：

$$\forall \tau \in \mathcal{P}_r, \quad A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_r j_r} = A_{\tau(i_1) \tau(j_1)} \cdots A_{\tau(i_r) \tau(j_r)}, \quad (2.62)$$

式中

$$\tau = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ \tau(i_1) & \cdots & \tau(i_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_r \\ \tau(j_1) & \cdots & \tau(j_r) \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

由此可以看出，式 (2.61\*) 方括号中的部分其实是由  $\sigma(i_k)$  和  $i_k$  两套指标确定的一组数：

$$A_{\sigma(i_k) i_k} = \langle u_{\sigma(i_k)}, g^{i_k} \rangle_{\mathbb{R}^m}; \quad (2.64)$$

另一方面，显然有  $\sigma^{-1} \in \mathcal{P}_r$ 。于是

$$\begin{aligned} & I_\sigma(\Phi)(u_{i_1}, \dots, u_{i_r}) \\ &= \Phi_{i_1 \dots i_r} \left[ \langle u_{\sigma(i_1)}, g^{i_1} \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdots \langle u_{\sigma(i_r)}, g^{i_r} \rangle_{\mathbb{R}^m} \right] \end{aligned}$$

应用置换的性质 (2.62) 式：

$$\begin{aligned} &= \Phi_{i_1 \dots i_r} \left[ \langle u_{\sigma^{-1} \circ \sigma(i_1)}, g^{\sigma^{-1}(i_1)} \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdots \langle u_{\sigma^{-1} \circ \sigma(i_r)}, g^{\sigma^{-1}(i_r)} \rangle_{\mathbb{R}^m} \right] \\ &= \Phi_{i_1 \dots i_r} \left[ \langle u_{i_1}, g^{\sigma^{-1}(i_1)} \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdots \langle u_{i_r}, g^{\sigma^{-1}(i_r)} \rangle_{\mathbb{R}^m} \right] \end{aligned}$$

同样，用简单张量表示，可得

$$= \Phi_{i_1 \dots i_r} g^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes g^{\sigma^{-1}(i_r)}(u_{i_1}, \dots, u_{i_r}). \quad (2.65)$$

这样，我们就得到了置换算子的一种表示：

$$\begin{aligned} I_\sigma(\Phi) &= I_\sigma(\Phi_{i_1 \dots i_r} g^{i_1} \otimes \cdots \otimes g^{i_r}) \\ &= \Phi_{i_1 \dots i_r} g^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes g^{\sigma^{-1}(i_r)}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

在式 (2.66) 中， $i_1, \dots, i_r$  都是哑标，要被求和求掉。张量  $\Phi$  的底空间是  $\mathbb{R}^m$ ，所以每个  $i_k$  都有  $m$  个取值。考虑一下 2.5.3 小节中置换运算有关哑标穷尽的性质，有

$$\begin{aligned} & \forall \sigma \in \mathcal{P}_r, \quad \left\{ (i_1, i_2, \dots, i_r) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\} \\ &= \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

因此，我们可以把式 (2.66) 中的指标  $i_k$  换成  $\sigma(i_k)$ ：

$$\begin{aligned} I_\sigma(\Phi) &= \Phi_{i_1 \dots i_r} g^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes g^{\sigma^{-1}(i_r)} \\ &= \Phi_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)} g^{\sigma^{-1} \circ \sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes g^{\sigma^{-1} \circ \sigma(i_r)} \\ &= \Phi_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)} g^{i_1} \otimes \cdots \otimes g^{i_r}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

这是置换算子的另一种表示.

综上, 要获得置换算子的表示, 若是对张量分量进行操作, 就直接使用对分量指标使用置换; 若是对简单张量进行操作, 则要对其指标使用逆置换:<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\sigma(\Phi) &= \mathbf{I}_\sigma(\Phi^{i_1 \cdots i_r} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_r}) \\ &= \Phi^{\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r)} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_r} \end{aligned} \quad (2.69-a)$$

$$= \Phi^{i_1 \cdots i_r} g_{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes g_{\sigma^{-1}(i_r)}. \quad (2.69-b)$$

## 2.8 对称化算子与反对称化算子

### 2.8.1 定义

对称化算子  $\mathcal{S}$  和反对称化算子  $\mathcal{A}$  的定义分别为

$$\mathcal{S}(\Phi) \triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \quad (2.70)$$

和

$$\mathcal{A}(\Phi) \triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\sigma(\Phi), \quad (2.71)$$

式中,  $\Phi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m)$ . 根据置换算子的线性性, 很容易知道对称化算子与反对称化算子也具有线性性.

对于任意的  $\Phi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m)$ , 我们有

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\Phi) \in \text{Sym}, \\ \mathcal{A}(\Phi) \in \text{Skw}. \end{cases} \quad \begin{aligned} (2.72-a) \\ (2.72-b) \end{aligned}$$

这说明任意一个张量, 对它作用对称化算子之后, 将变为对称张量; 反之, 作用反对称算子之后, 将变为反对称张量.<sup>②</sup>

**证明:** 要判断  $\mathcal{S}(\Phi)$  是不是对称张量, 首先需要在其上作用一个置换算子  $\mathbf{I}_\tau$ :

$$\mathbf{I}_\tau[\mathcal{S}(\Phi)] = \mathbf{I}_\tau \left[ \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \right]$$

根据置换算子的线性性 (2.53) 式, 可有

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \mathbf{I}_\tau \circ \mathbf{I}_\sigma(\Phi)$$

再用一下 (2.55) 式, 得到

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \mathbf{I}_{\tau \circ \sigma}(\Phi)$$

① 这里稍有改动, 用了张量的逆变分量, 不过实质都是一样的. 使用协变分量还是逆变分量, 这个嘛, 悉听尊便.

② 换一个角度, (反)对称张量实际上可以用(反)对称化算子来定义.

这里求和的作用就是把置换  $\sigma$  穷尽了. 根据 2.5.1 小节中的内容, 再在  $\sigma$  上复合一个置换  $\tau$ , 结果将保持不变:

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} I_{\sigma}(\Phi) = \mathcal{S}(\Phi). \quad (2.73)$$

对照一下对称张量的定义 (2.57) 式, 可见的确有  $\mathcal{S}(\Phi) \in \text{Sym}$ .

类似地,

$$\begin{aligned} I_{\tau}[\mathcal{A}(\Phi)] &= I_{\tau} \left[ \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot I_{\sigma}(\Phi) \right] \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot [I_{\tau} \circ I_{\sigma}(\Phi)] \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot I_{\tau \circ \sigma}(\Phi) \end{aligned}$$

根据式 (2.19),  $\text{sgn } \tau \cdot \text{sgn } \sigma = \text{sgn}(\tau \circ \sigma)$ , 于是

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \frac{\text{sgn}(\tau \circ \sigma)}{\text{sgn } \tau} \cdot I_{\tau \circ \sigma}(\Phi)$$

注意到始终成立  $\text{sgn } \tau \cdot \text{sgn } \tau = 1$  (因为  $\text{sgn } \tau = \pm 1$ ), 又有

$$= \frac{\text{sgn } \tau}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn}(\tau \circ \sigma) \cdot I_{\tau \circ \sigma}(\Phi)$$

利用置换的穷尽,  $\tau \circ \sigma$  与  $\sigma$  相比, 结果将保持不变:

$$= \text{sgn } \tau \cdot \left[ \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot I_{\sigma}(\Phi) \right] = \text{sgn } \tau \cdot \mathcal{A}(\Phi). \quad (2.74)$$

与反对称张量的定义 (2.58) 式相比, 可见的确有  $\mathcal{S}(\Phi) \in \text{Skw}$ .

这里的操作直接对张量本身进行, 没有采用涉及到张量“自变量”(向量)的繁琐计算, 因而显得更加干净利落.  $\square$

## 2.8.2 反对称化算子的性质

上文已经定义了反对称化算子  $\mathcal{A}$ :

$$\forall \Phi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad \mathcal{A}(\Phi) \triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot I_{\sigma}(\Phi) \in \text{Skw 或 } \Lambda^r(\mathbb{R}^m). \quad (2.75)$$

即任意一个  $r$  阶张量, 作用反对称化算子后就变成了  $r$  阶反对称张量.  $r$  阶反对称张量也称为  **$r$ -form** ( **$r$ -形式**).

下面列出反对称化算子的几条性质.

1. 反对称化算子若重复作用, 仅相当于一次作用:

$$\mathcal{A}^2 := \mathcal{A} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}. \quad (2.76)$$

根据数学归纳法, 显然有

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{A}^p := \underbrace{\mathcal{A} \circ \dots \circ \mathcal{A}}_{p \text{ 个 } \mathcal{A}} = \mathcal{A}. \quad (2.77)$$

证明：

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &= \mathcal{A}[\mathcal{A}(\Phi)] \\
&\triangleq \mathcal{A} \left[ \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \right] \\
&\triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \tau \cdot \mathbf{I}_\tau \left[ \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \right]
\end{aligned}$$

根据线性性，可有

$$= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_r} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \tau \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\tau \circ \mathbf{I}_\sigma(\Phi)$$

根据式 (2.19) 和式 (2.55)，有

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_r} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } (\tau \circ \sigma) \cdot \mathbf{I}_{\tau \circ \sigma}(\Phi) \\
&= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_r} \left[ \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } (\tau \circ \sigma) \cdot \mathbf{I}_{\tau \circ \sigma}(\Phi) \right]
\end{aligned}$$

注意到方括号中的部分穷尽了置换  $\sigma$ ，因此可以用  $\sigma$  取代“指标”  $\tau \circ \sigma$ ：

$$= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_r} \left[ \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \right]$$

回到定义，有

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_r} \mathcal{A}(\Phi) = \frac{1}{r!} \cdot r! \mathcal{A}(\Phi) = \mathcal{A}(\Phi). \quad (2.78)$$

□

2. 对任意两个张量  $\Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)$  和  $\Psi \in \mathcal{T}^q(\mathbb{R}^m)$  的并施加反对称化算子，可以得到如下结果：

$$\mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi) = \mathcal{A}[\mathcal{A}(\Phi) \otimes \Psi] \quad (2.79\text{-a})$$

$$= \mathcal{A}[\Phi \otimes \mathcal{A}(\Psi)] \quad (2.79\text{-b})$$

$$= \mathcal{A}[\mathcal{A}(\Phi) \otimes \mathcal{A}(\Psi)]. \quad (2.79\text{-c})$$

证明： 这里只给出式 (2.79-b) 的证明。另外两式的证明是类似的。

$$\mathcal{A}[\Phi \otimes \mathcal{A}(\Psi)] = \mathcal{A} \left[ \Phi \otimes \left( \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \tau \cdot \mathbf{I}_\tau(\Psi) \right) \right]$$

根据张量积的线性性提出系数：

$$= \mathcal{A} \left[ \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \tau \cdot \Phi \otimes \mathbf{I}_\tau(\Psi) \right]$$

利用置换的穷尽，可以把  $\tau$  换作  $\tau^{-1}$ ：

$$= \mathcal{A} \left[ \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \tau^{-1} \cdot \Phi \otimes \mathbf{I}_{\tau^{-1}}(\Psi) \right]$$

注意到  $\text{sgn } \tau = \text{sgn } \tau^{-1}$ ，于是

$$= \mathcal{A} \left[ \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \tau \cdot \Phi \otimes \mathbf{I}_{\tau^{-1}}(\Psi) \right], \quad (2.80)$$

式中，

$$\mathbf{I}_{\tau^{-1}}(\Psi) = \Psi^{j_1 \cdots j_q} g_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes g_{\tau(j_q)}. \quad (2.81)$$

于是有

$$\Phi \otimes \mathbf{I}_{\tau^{-1}}(\Psi) = \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_q} \left( g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left( g_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes g_{\tau(j_q)} \right). \quad (2.82)$$

置换  $\tau \in \mathcal{P}_q$  的元素定义为

$$\tau = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_q \\ \tau(j_1) & \cdots & \tau(j_q) \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

引入它的“延拓”（或曰“增广”）置换  $\hat{\tau} \in \mathcal{P}_{p+q}$ ，其定义为

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ i_1 & \cdots & i_p & \tau(j_1) & \cdots & \tau(j_q) \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

这样一来，就有

$$\begin{aligned} \Phi \otimes \mathbf{I}_{\tau^{-1}}(\Psi) &= \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_q} \left( g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left( g_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes g_{\tau(j_q)} \right) \\ &= \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_q} \left( g_{\hat{\tau}(i_1)} \otimes \cdots \otimes g_{\hat{\tau}(i_p)} \right) \otimes \left( g_{\hat{\tau}(j_1)} \otimes \cdots \otimes g_{\hat{\tau}(j_q)} \right) \\ &= \mathbf{I}_{\hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi). \end{aligned} \quad (2.85)$$

另一方面，参与轮换的元素只有后面的  $q$  个，因此  $\hat{\tau}$  起到的作用实际上等同于  $\tau$ （当然两者作用范围不同）。所以可知

$$\text{sgn } \hat{\tau} = \text{sgn } \tau. \quad (2.86)$$

把以上这两点代入式 (2.80) 的推导，有

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\Phi \otimes \mathcal{A}(\Psi)] &= \mathcal{A} \left[ \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \tau \cdot \Phi \otimes \mathbf{I}_{\tau^{-1}}(\Psi) \right] \\ &= \mathcal{A} \left[ \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \hat{\tau} \cdot \mathbf{I}_{\hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \right] \end{aligned}$$

再用一次线性性，可得

$$= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \hat{\tau} \cdot \mathcal{A} \left[ \mathbf{I}_{\hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \right]. \quad (2.87)$$

$\Phi \otimes \Psi$  是一个  $p+q$  阶张量，它作用置换算子后阶数当然保持不变。根据反对称化算子的定义，可有

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\mathbf{I}_{\hat{\sigma}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi)] &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } \hat{\sigma} \cdot \left[ \mathbf{I}_{\hat{\sigma}} \circ \mathbf{I}_{\hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \right] \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } \hat{\sigma} \cdot \left[ \mathbf{I}_{\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \right], \end{aligned} \quad (2.88)$$

式中的  $\hat{\sigma}$  和之前定义的  $\hat{\tau}$  含义相同，只是为了确保哑标不重复，我们采用了不同的字母来表示。该式 (2.88) 中的  $\text{sgn } \hat{\sigma}$  可以写成

$$\text{sgn } \hat{\sigma} = \frac{\text{sgn } (\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1})}{\text{sgn } \hat{\tau}^{-1}} = \frac{\text{sgn } (\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1})}{\text{sgn } \hat{\tau}}. \quad (2.89)$$

第二个等号是根据式 (2.27)。

注意到 (2.87) 式中也有一个  $\text{sgn } \hat{\tau}$ ，因此

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\Phi \otimes \mathcal{A}(\Psi)] &= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \hat{\tau} \cdot \mathcal{A}[\mathbf{I}_{\hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi)] \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \hat{\tau} \cdot \left[ \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } \hat{\sigma} \cdot \left( \mathbf{I}_{\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \right) \right] \end{aligned}$$

用式 (2.89) 合并掉  $\text{sgn } \hat{\tau}$  和  $\text{sgn } \hat{\sigma}$ ：

$$= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } (\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1}) \cdot \left[ \mathbf{I}_{\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \right]$$

再次利用置换穷尽的性质改变“哑标”置换：

$$= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } \hat{\sigma} \cdot \left[ \mathbf{I}_{\hat{\sigma}}(\Phi \otimes \Psi) \right]$$

终于拨开云雾见青天，看到了似曾相识的定义：

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi) \\ &= \frac{1}{q!} \cdot q! \mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi) = \mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi). \end{aligned} \quad (2.90)$$

□

3. 反对称化算子具有所谓反导性：

$$\forall \Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m), \Psi \in \mathcal{T}^q(\mathbb{R}^m), \quad \mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi) = (-1)^{pq} \cdot \mathcal{A}(\Psi \otimes \Phi). \quad (2.91)$$

证明：首先单独把反对称算子展开。它所作用的张量为  $p+q$  阶，因而相应的置换  $\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}$ ：

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_{\sigma} \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } (\sigma \circ \tau^{-1}) \cdot \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}}. \end{aligned} \quad (2.92)$$



第二的等号与之前一样，利用了置换的穷尽。这里的  $\tau$  是  $\mathcal{P}_{p+q}$  中一个任意的置换。利用置换符号的性质，有

$$\text{sgn}(\sigma \circ \tau^{-1}) = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \tau^{-1} = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \tau. \quad (2.93)$$

因此

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi) &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn}(\sigma \circ \tau^{-1}) \cdot \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \\ &= \frac{\text{sgn} \tau}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn} \sigma \cdot \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}}(\Phi \otimes \Psi). \end{aligned} \quad (2.94)$$

把张量展开成分量形式，可以有

$$\mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) = \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}} \left[ \Phi^{i_1 \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_q} (g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}) \otimes (g_{j_1} \otimes \dots \otimes g_{j_q}) \right]$$

根据式 (2.55)，可得

$$= \mathbf{I}_{\sigma} \circ \mathbf{I}_{\tau^{-1}} \left[ \Phi^{i_1 \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_q} (g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}) \otimes (g_{j_1} \otimes \dots \otimes g_{j_q}) \right]$$

利用置换算子的表示 (2.69-b) 一式，对简单张量进行操作：

$$= \mathbf{I}_{\sigma} \left[ \Phi^{i_1 \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_q} (g_{\tau(i_1)} \otimes \dots \otimes g_{\tau(i_p)}) \otimes (g_{\tau(j_1)} \otimes \dots \otimes g_{\tau(j_q)}) \right]. \quad (2.95)$$

根据  $\tau$  的任意性，不妨取<sup>①</sup>

$$\tau = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p & j_1 & \dots & j_q \\ j_1 & \dots & j_q & i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

这种取法恰好可以使指标为  $i$  和  $j$  的向量交换一下位置。于是

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) &= \mathbf{I}_{\sigma} \left[ \Phi^{i_1 \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_q} (g_{\tau(i_1)} \otimes \dots \otimes g_{\tau(i_p)}) \otimes (g_{\tau(j_1)} \otimes \dots \otimes g_{\tau(j_q)}) \right] \\ &= \mathbf{I}_{\sigma} \left[ \Phi^{i_1 \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_q} (g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}) \otimes (g_{j_1} \otimes \dots \otimes g_{j_q}) \right] \end{aligned}$$

张量分量作为数，交换律自然无需多言：

$$\begin{aligned} &= \mathbf{I}_{\sigma} \left[ \Psi^{j_1 \dots j_q} \Phi^{i_1 \dots i_p} (g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}) \otimes (g_{j_1} \otimes \dots \otimes g_{j_q}) \right] \\ &= \mathbf{I}_{\sigma}(\Psi \otimes \Phi). \end{aligned} \quad (2.97)$$

下面再考虑一下  $\tau$  的符号： $j_1$  先和  $i_p$  交换，再和  $i_{p-1}$  交换，以此类推，直到移动至  $i_1$  的位置，一共交换了  $p$  次。而  $j_2, \dots, j_q$  也是同理，各需进行  $p$  次交换。所以总共是  $p \cdot q$  次两两交换。因此，

$$\text{sgn} \tau = (-1)^{pq}. \quad (2.98)$$

回到式 (2.94) 的推导，有

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi) &= \frac{\text{sgn} \tau}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn} \sigma \cdot \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \\ &= \frac{(-1)^{pq}}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn} \sigma \cdot \mathbf{I}_{\sigma}(\Psi \otimes \Phi) \\ &= (-1)^{pq} \cdot \mathcal{A}(\Psi \otimes \Phi). \end{aligned} \quad (2.99)$$

□

① 矩阵中的  $i_p$  和  $j_q$  等未必是对齐的，这里的写法只是为了表示方便。

## 第三章 微分同胚（曲线坐标系）

### 3.1 微分同胚

#### 3.1.1 双射

设  $f$  是集合  $A$  到  $B$  的映照. 如果  $A$  中不同的元素有不同的像, 则称  $f$  为**单射** (也叫 “一对一”); 如果  $B$  中每个元素都是  $A$  中元素的像, 则称  $f$  为**满射**; 如果  $f$  既是单射又是满射, 则称  $f$  为**双射** (也叫 “一一对应”). 三种情况的示意图见 [图 3.1](#).

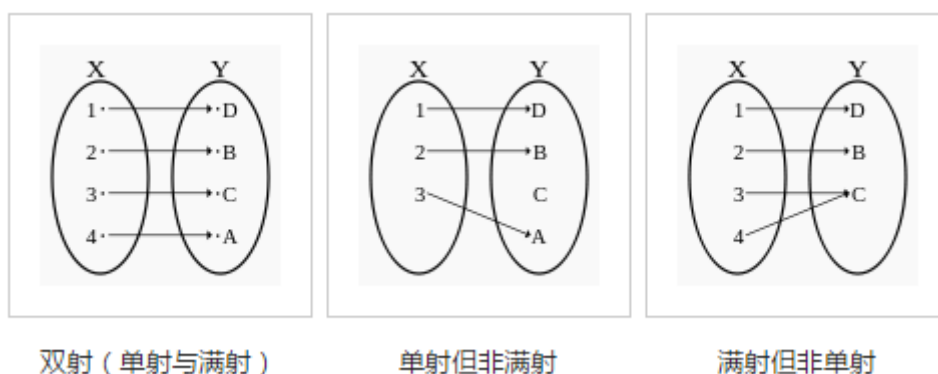


图 3.1: 单射、满射与双射

设开集  $\mathfrak{D}_X, \mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$ , 它们之间存在双射, 即一一对应关系:

$$X(x) : \mathfrak{D}_x \ni x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \mapsto X(x) = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} (x) \in \mathfrak{D}_X. \quad (3.1)$$

由于该映照实现了  $\mathfrak{D}_x$  到  $\mathfrak{D}_X$  之间的双射, 因此它存在逆映照:

$$x(X) : \mathfrak{D}_X \ni X = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} \mapsto x(X) = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} (X) \in \mathfrak{D}_x. \quad (3.2)$$

我们把  $\mathfrak{D}_X$  称为**物理域**, 它是实际物理事件发生的区域;  $\mathfrak{D}_x$  则称为**参数域**. 由于物理域通常较为复杂, 因此我们常把参数域取为规整的形状, 以便之后的处理.

设物理量  $f(\mathbf{X})$  定义在物理域  $\mathfrak{D}_X \subset \mathbb{R}^m$  上<sup>①</sup>，则  $f$  就定义了一个场：

$$f : \mathfrak{D}_X \ni \mathbf{X} \mapsto f(\mathbf{X}). \quad (3.3)$$

所谓的“场”，就是自变量用位置刻画的映照。它可以是**标量场**，如温度、压强、密度等，此时  $f(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}$ ；也可以是**向量场**，如速度、加速度、力等，此时  $f(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^m$ ；对于更深入的物理、力学研究，往往还需引入**张量场**，此时  $f(\mathbf{X}) \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m)$ 。

$\mathbf{X}$  存在于物理域  $\mathfrak{D}_X$  中，我们称它为**物理坐标**。由于上文已经定义了  $\mathfrak{D}_x$  到  $\mathfrak{D}_X$  之间的双射（不是  $f$ ！），因此  $\mathfrak{D}_x$  中就有唯一的  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{X}$  相对应，它称为**参数坐标**（也叫**曲线坐标**）。又因为物理域  $\mathfrak{D}_X$  上已经定义了场  $f(\mathbf{X})$ ，参数域中必然唯一存在场  $\tilde{f}(\mathbf{x})$  与之对应：

$$\tilde{f} : \mathfrak{D}_x \ni \mathbf{x} \mapsto \tilde{f}(\mathbf{x}) = f \circ \mathbf{X}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{X}(\mathbf{x})). \quad (3.4)$$

$\mathbf{x}$  与  $\mathbf{X}$  是完全等价的，因而  $\tilde{f}$  与  $f$  也是完全等价的，所以同样有

$$f(\mathbf{X}) = \tilde{f}(\mathbf{x}(\mathbf{X})). \quad (3.5)$$

物理域中的场要满足守恒定律，如质量守恒、动量守恒、能量守恒等。从数学上看，这些守恒定律就是  $f(\mathbf{X})$  需要满足的一系列偏微分方程。将场变换到参数域后，它仍要满足这些方程。但我们已经设法将参数域取得较为规整，故在其上进行数值求解就会相当方便。

### 3.1.2 参数域方程

上文已经提到，物理域中的场  $f(\mathbf{X})$  需满足守恒定律，这等价于一系列偏微分方程（PDE）。在物理学和力学中，用到的 PDE 通常是二阶的，它们可以写成

$$\forall \mathbf{X} \in \mathfrak{D}_X, \quad \sum_{\alpha=1}^m A_{\alpha}(\mathbf{X}) \frac{\partial f}{\partial X^{\alpha}}(\mathbf{X}) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m B_{\alpha\beta}(\mathbf{X}) \frac{\partial^2 f}{\partial X^{\beta} \partial X^{\alpha}}(\mathbf{X}) = 0 \quad (3.6)$$

的形式。我们的目标是把该物理域方程转化为参数域方程，即关于  $\tilde{f}(\mathbf{x})$  的 PDE。多元微积分中已经提供了解决方案：**链式求导法则**。

考虑到

$$f(\mathbf{X}) = \tilde{f}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) = \tilde{f}(x^1(\mathbf{X}), \dots, x^m(\mathbf{X})), \quad (3.7)$$

于是有

$$\frac{\partial f}{\partial X^{\alpha}}(\mathbf{X}) = \sum_{s=1}^m \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \cdot \frac{\partial x^s}{\partial X^{\alpha}}(\mathbf{X}). \quad (3.8)$$

这里用到的链式法则，由复合映照可微性定理驱动，它要求  $\tilde{f}$  关于  $\mathbf{x}$  可微，同时  $\mathbf{x}$  关于  $\mathbf{X}$  可微。

对于更高阶的项，往往需要更强的条件。一般地，我们要求

$$\begin{cases} \mathbf{X}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_x; \mathbb{R}^m); \\ \mathbf{x}(\mathbf{X}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_X; \mathbb{R}^m). \end{cases} \quad (3.9-a)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_X; \mathbb{R}^m). \quad (3.9-b)$$

这里的  $\mathcal{C}^p$  指直至  $p$  阶偏导数存在且连续的映照全体； $p=1$  时，它就等价于可微。至于  $p$  的具体取值，则由 PDE 的阶数所决定。

<sup>①</sup> 实际的物理事件当然只会发生在三维 Euclid 空间中（只就“空间”而言），但在数学上也可以推广到  $m$  维。

通常情况下，已知条件所给定的往往都是  $\mathfrak{D}_x$  到  $\mathfrak{D}_X$  的映照

$$X(\mathbf{x}) : \mathfrak{D}_x \ni \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \mapsto X(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} (\mathbf{x}) \in \mathfrak{D}_X, \quad (3.10)$$

用它不好直接得到式 (3.8) 中的  $\partial x^s / \partial X^\alpha$  项，但获得它的“倒数”  $\partial X^\alpha / \partial x^s$  却很容易，只需利用 **Jacobi 矩阵**：

$$\mathbf{D}X(\mathbf{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{bmatrix} (\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (3.11)$$

它是一个方阵。

有了 Jacobi 矩阵，施加一些手法就可以得到所需要的  $\partial x^s / \partial X^\alpha$  项。考虑到

$$\forall X \in \mathfrak{D}_X, \quad X(\mathbf{x}(X)) = X, \quad (3.12)$$

并且其中的  $X(\mathbf{x})$  和  $\mathbf{x}(X)$  均可微，可以得到

$$\mathbf{D}X(\mathbf{x}(X)) \cdot \mathbf{D}\mathbf{x}(X) = \mathbf{I}_m, \quad (3.13)$$

其中的  $\mathbf{I}_m$  是单位阵。因此

$$\mathbf{D}\mathbf{x}(X) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial X^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^m}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial X^m} \end{bmatrix} (X) = (\mathbf{D}X)^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{bmatrix}^{-1} (\mathbf{x}). \quad (3.14)$$

用代数的方法总可以求出

$$\varphi_\alpha^s := \frac{\partial x^s}{\partial X^\alpha}, \quad (3.15)$$

它是通过求逆运算确定的函数，即位于矩阵  $\mathbf{D}\mathbf{x}$  第  $s$  行第  $\alpha$  列的元素。这样就有

$$\frac{\partial f}{\partial X^\alpha}(X) = \sum_{s=1}^m \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}(\mathbf{x}(X)) \cdot \varphi_\alpha^s(\mathbf{x}(X)). \quad (3.16)$$

接下来处理二阶偏导数。由上式，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial X^\beta \partial X^\alpha}(X) &= \sum_{s=1}^m \left[ \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^k \partial x^s}(\mathbf{x}(X)) \cdot \frac{\partial x^s}{\partial X^\beta}(X) \right) \cdot \varphi_\alpha^s(\mathbf{x}(X)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}(\mathbf{x}(X)) \cdot \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_\alpha^s}{\partial x^k}(\mathbf{x}(X)) \cdot \frac{\partial x^k}{\partial X^\beta}(X) \right) \right] \end{aligned}$$

继续利用式 (3.15)，有

$$\begin{aligned} &= \sum_{s=1}^m \left[ \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^k \partial x^s}(\mathbf{x}(X)) \cdot \varphi_\beta^s(\mathbf{x}(X)) \right) \cdot \varphi_\alpha^s(\mathbf{x}(X)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}(\mathbf{x}(X)) \cdot \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_\alpha^s}{\partial x^k}(\mathbf{x}(X)) \cdot \varphi_\beta^k(\mathbf{x}(X)) \right) \right]. \quad (3.17) \end{aligned}$$

这样，就把一阶和二阶偏导数项全部用关于  $\mathbf{x}$  的函数<sup>①</sup>表达了出来。换句话说，我们已经把物理域中  $f$  关于  $\mathbf{X}$  的 PDE，转化成了参数域中  $\tilde{f}$  关于  $\mathbf{x}$  的 PDE。这就是上文要实现的目标。

### 3.1.3 微分同胚的定义

上文已经指出了  $\mathfrak{D}_x$  到  $\mathfrak{D}_X$  的映照  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  所需满足的一些条件。这里再次罗列如下：

1.  $\mathfrak{D}_X, \mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$  均为开集<sup>②</sup>；
2. 存在  $\mathfrak{D}_x$  同  $\mathfrak{D}_X$  之间的双射  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ ，即存在一一对应关系；
3.  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  和它的逆映照  $\mathbf{x}(\mathbf{X})$  满足一定的正则性要求。

对第 3 点要稍作说明。

如果满足这三点，则称  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  为  $\mathfrak{D}_x$  与  $\mathfrak{D}_X$  之间的  $\mathcal{C}^p$ -微分同胚，记为  $\mathbf{X}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_x; \mathfrak{D}_X)$ 。把物理域中的一个部分对应到参数域上的一个部分，需要的仅仅是双射这一条件；而要使得物理域中所满足的 PDE 能够转换到参数域上，就需要“过去”和“回来”都满足  $p$  阶偏导数连续的条件（即正则性要求）。

有了微分同胚，物理域中的位置就可用参数域中的位置等价地进行刻画。因此我们也把微分同胚称为曲线坐标系。

## 3.2 向量值映照的可微性

### 3.2.1 可微性的定义

设  $\mathbf{x}_0$  是参数域  $\mathfrak{D}_x$  中的一个内点。在映照  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  的作用下，它对应到物理域  $\mathfrak{D}_X$  中的点  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)$ 。参数域是一个开集。根据开集的定义，必然存在一个实数  $\lambda > 0$ ，使得以  $\mathbf{x}_0$  为球心、 $\lambda$  为半径的球能够完全落在定义域  $\mathfrak{D}_x$  内，即

$$\mathfrak{B}_\lambda(\mathbf{x}_0) \subset \mathfrak{D}_x, \quad (3.18)$$

其中的  $\mathfrak{B}_\lambda(\mathbf{x}_0)$  表示  $\mathbf{x}_0$  的  $\lambda$  邻域。

如果  $\exists \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ <sup>③</sup>，满足

$$\forall \mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in \mathfrak{B}_\lambda(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^m, \quad (3.19)$$

则称向量值映照  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}_0$  点可微。其中， $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  表示从  $\mathbb{R}^m$  到  $\mathbb{R}^m$  的线性变换全体。

根据这个定义，所谓可微性，指由自变量变化所引起的因变量变化，可以用一个线性变换近似，而误差为一阶无穷小量。自变量可见到因变量空间最简单的映照形式就是线性映照（线性变换），因而具有可微性的向量值映照具有至关重要的作用。

① 当然它仍然是  $\mathbf{X}$  的隐函数： $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$ 。

② 用形象化的语言来说，如果在区域中的任意一点都可以吹出一个球，并能使球上的每个点都落在区域内，那么这个区域就是开集。这是复合映照可微性定理的一个要求。

③ 正如之前已经定义的， $\mathbf{DX}$  已经用来表示 Jacobi 矩阵。这里还是请先暂时将它视为一种记号，其具体形式将在下一小节给出。

### 3.2.2 Jacobi 矩阵

下面我们研究  $\mathbf{DX}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  的表达形式. 由于  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ , 所以

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix} = h^1 \mathbf{e}_1 + \cdots + h^i \mathbf{e}_i + \cdots + h^m \mathbf{e}_m. \quad (3.20)$$

另一方面,  $\mathbf{DX}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  具有线性性:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ 和 } \tilde{\mathbf{h}}, \hat{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\alpha \tilde{\mathbf{h}} + \beta \hat{\mathbf{h}}) = \alpha \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\tilde{\mathbf{h}}) + \beta \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{h}}). \quad (3.21)$$

这样就有

$$\begin{aligned} \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) &= \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(h^1 \mathbf{e}_1 + \cdots + h^i \mathbf{e}_i + \cdots + h^m \mathbf{e}_m) \\ &= h^1 \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_1) + \cdots + h^i \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i) + \cdots + h^m \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_m) \end{aligned} \quad (3.22)$$

注意到  $h^i \in \mathbb{R}$  以及  $\mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i) \in \mathbb{R}^m$ , 因而该式可以用矩阵形式表述:

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_1), \cdots, \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

最后一步要用到分块矩阵的思想: 左侧的矩阵为 1 “行”  $m$  列, 每一 “行” 是一个  $m$  维列向量; 右侧的矩阵 (向量) 则为  $m$  行 1 列. 两者相乘, 得到 1 “行” 1 列的矩阵 (当然实际为  $m$  行), 即之前的 (3.22) 式. 在线性代数中,  $m \times m$  的矩阵  $\begin{bmatrix} \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_1) & \cdots & \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_m) \end{bmatrix}$  通常称为变换矩阵 (也叫过渡矩阵).

接下来要搞清楚变换矩阵的具体形式. 取

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0, \cdots, \lambda, \cdots, 0 \end{bmatrix}^T = \lambda \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^m, \quad (3.24)$$

即除了  $\mathbf{h}$  的第  $i$  个元素为  $\lambda$  外, 其余元素均为 0 ( $\lambda \neq 0$ ). 因而有  $\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m} = \lambda$ . 代入可微性的定义 (3.19) 式, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_1), \cdots, \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i), \cdots, \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, \cdots, \lambda, \cdots, 0 \end{bmatrix}^T + o(\lambda) \\ &= \lambda \cdot \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i) + o(\lambda). \end{aligned} \quad (3.25)$$

由于  $\lambda$  是非零实数, 故可以在等式两边同时除以  $\lambda$  并取极限:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i), \quad (3.26)$$

这里的  $o(\lambda)$  根据其定义自然趋于 0. 该式左侧极限中的分子部分, 是自变量  $\mathbf{x}$  第  $i$  个分量的变化所引起因变量的变化; 而分母, 则是自变量第  $i$  个分量的变化大小. 我们引入下面的记号:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \quad (3.27)$$

它表示因变量  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$  作为一个整体, 相对于自变量  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  第  $i$  个分量  $x^i \in \mathbb{R}$  的“变化率”, 即  $\mathbf{X}$  关于  $x^i$  (在  $\mathbf{x}_0$  处) 的偏导数. 由于我们没有定义向量的除法, 因此自变量作为整体所引起因变量的变化, 是没有意义的. 利用偏导数的定义, 可有

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_1), \dots, \mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i), \dots, \mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_m) \right] \\ &= \left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^m}(\mathbf{x}_0) \right] \in \mathbb{R}^{m \times m}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

下面给出  $\partial \mathbf{X} / \partial x^i (\mathbf{x}_0)$  的计算式. 根据定义, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) &:= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \in \mathbb{R}^m \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \cdot \left( \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix}(\mathbf{x}_0) \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \frac{X^1(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - X^1(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{X^m(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - X^m(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

向量极限存在的充要条件是各分量极限均存在, 即存在

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{X^\alpha(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - X^\alpha(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \in \mathbb{R}, \quad (3.30)$$

其中的  $\alpha = 1, \dots, m$ . 这其实就是我们熟知的多元函数偏导数的定义. 用它来表示向量值映照的偏导数, 可有

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial X^m}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) \mathbf{e}_\alpha. \quad (3.31)$$

向量值映照  $\mathbf{X}$  关于  $x^i$  的偏导数, 从代数的角度来看, 是 Jacobi 矩阵的第  $i$  列; 从几何的角度来看, 则是物理域中  $x^i$  线的切向量; 从计算的角度来看, 又是 (该映照) 每个分量偏导数的组合.

现在我们重新回到 Jacobi 矩阵. 情况已经十分明了: 只需把之前获得的各列并起来, 就可以得到完整的 Jacobi 矩阵. 于是

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) &= \left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^m} \right](\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial X^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{bmatrix}(\mathbf{x}_0) \cdot \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

这与 3.1.2 小节中 (3.11) 式给出的定义是完全一致的.

### 3.2.3 偏导数的几何意义

这一小节中，我们要回过头来，澄清向量值映照偏导数的几何意义。

如图 3.2,  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  是定义域空间  $\mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$  到值域空间  $\mathfrak{D}_X \subset \mathbb{R}^n$  的向量值映照. 在定义域空间  $\mathfrak{D}_x$  中, 过点  $\mathbf{x}_0$  作一条平行于  $x^i$  轴的直线, 称为  $x^i$ -线.  $x^i$  轴定义了向量  $\mathbf{e}_i$ , 因而  $x^i$ -线上的任意一点均可表示为  $\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i$ , 其中  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

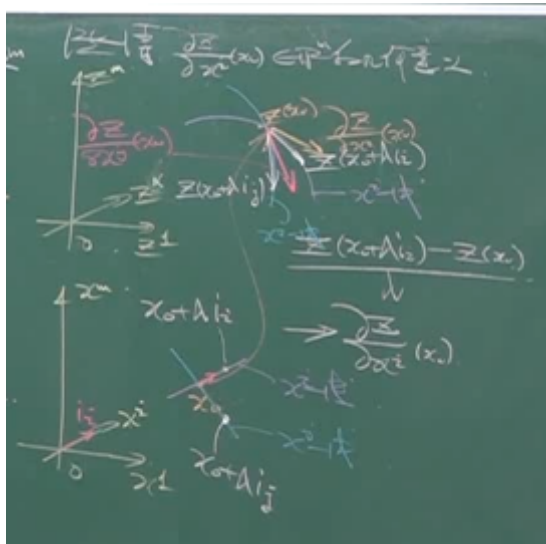


图 3.2: 向量值映照偏导数的几何意义

在  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  的作用下, 点  $\mathbf{x}_0$  被映照到  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)$ , 而  $\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i$  则被映照到了  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i)$ . 这样一来,  $x^i$ -线也就被映照到了值域空间  $\mathfrak{D}_X$  中, 成为一条曲线.

根据前面的定义, 当  $\lambda \rightarrow 0$  时,

$$\frac{\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0). \quad (3.33)$$

对应到图 3.2 中, 就是  $x^i$ -线 (值域空间中) 在  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)$  处的切向量.

完全类似, 在定义域空间  $\mathfrak{D}_x$  中, 过点  $\mathbf{x}_0$  作出  $x^j$ -线 (自然是平行于  $x^j$  轴), 其上的点可以表示为  $\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_j$ . 映射到值域空间  $\mathfrak{D}_X$  上, 则成为  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_j)$ . 很显然,

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_j) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \quad (3.34)$$

就是  $x^j$ -线在  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)$  处的切向量. 在定义域空间中,  $x^i$ -线作为直线共有  $m$  条, 它们之间互相垂直. 作用到值域空间后, 这样的  $x^i$ -线尽管变为了曲线, 但仍为  $m$  条. 相应的切向量, 自然也有  $m$  个.

## 3.3 局部基

这里的讨论基于曲线坐标系 (即微分同胚)  $\mathbf{X}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_x; \mathfrak{D}_X)$ .



### 3.3.1 局部协变基

我们已经知道， $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  的 Jacobi 矩阵可以表示为

$$\mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}, \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^m} \right](\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (3.35)$$

式中的

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_i) - \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\lambda}. \quad (3.36)$$

在参数域  $\mathfrak{D}_x$  中作出  $x^i$ -线. 映照到物理域后, 它变成一条曲线, 我们仍称之为  $x^i$ -线. 3.2.3 小节已经说明, (3.36) 式表示物理域中  $x^i$ -线的切向量. 在张量分析中, 我们通常把它记作  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ .

由于微分同胚要求是双射, 因而 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \left[ \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_i, \dots, \mathbf{g}_m \right](\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (3.37)$$

必须是非奇异的. 这等价于

$$\left\{ \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \right\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \quad (3.38)$$

线性无关. 由此, 它们可以构成  $\mathbb{R}^m$  上的一组基.

用任意的  $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}_x$  均可构建一组基. 但选取不同的  $\mathbf{x}$ , 将会使所得基的取向有所不同. 因而这种基称为局部协变基. 和之前一样, 我们用“协变”表示指标在下方.

### 3.3.2 局部逆变基; 对偶关系

有了局部协变基  $\{\mathbf{g}_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^m$ , 根据 1.1.1 小节中的讨论, 必然唯一存在与之对应的局部逆变基  $\{\mathbf{g}^i(\mathbf{x})\}_{i=1}^m$ , 满足

$$\left[ \mathbf{g}^1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}^m(\mathbf{x}) \right]^\top \left[ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \right] = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^1)^\top \\ \vdots \\ (\mathbf{g}^m)^\top \end{bmatrix}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_m. \quad (3.39)$$

下面我们来寻找逆变基  $\{\mathbf{g}^i(\mathbf{x})\}_{i=1}^m$  的具体表示. 考虑到<sup>①</sup>

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) = \mathbf{X} \in \mathbb{R}^m, \quad (3.40)$$

并利用复合映照可微性定理, 可知

$$\mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \cdot \mathbf{D}\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}_m, \quad (3.41)$$

即有

$$\mathbf{D}\mathbf{x}(\mathbf{X}) = (\mathbf{D}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{x}(\mathbf{X})). \quad (3.42)$$

于是

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{g}^1)^\top \\ \vdots \\ (\mathbf{g}^m)^\top \end{bmatrix}(\mathbf{x}) = (\mathbf{D}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial X^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^m}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial X^m} \end{bmatrix}(\mathbf{X}). \quad (3.43)$$

<sup>①</sup> 这里的几步推导在 3.1.2 小节中也有所涉及.

这样我们就得到了局部逆变基的具体表示（注意转置）：

$$\mathbf{g}^i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial X^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^i}{\partial X^m} \end{bmatrix}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial x^i}{\partial X^\alpha}(\mathbf{X}) \mathbf{e}_\alpha. \quad (3.44)$$

定义标量场  $f(\mathbf{x})$  的梯度为

$$\nabla f(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\alpha, \quad (3.45)$$

则局部逆变基又可以表示成

$$\mathbf{g}^i(\mathbf{x}) = \nabla x^i(\mathbf{X}). \quad (3.46)$$

此处的梯度实际上就是我们熟知的三维情况在  $m$  维下的推广。

在 3.2.3 小节中已经指出，局部协变基的几何意义是  $x^i$ -线的切向量。现在，我们来讨论局部逆变基的几何意义。

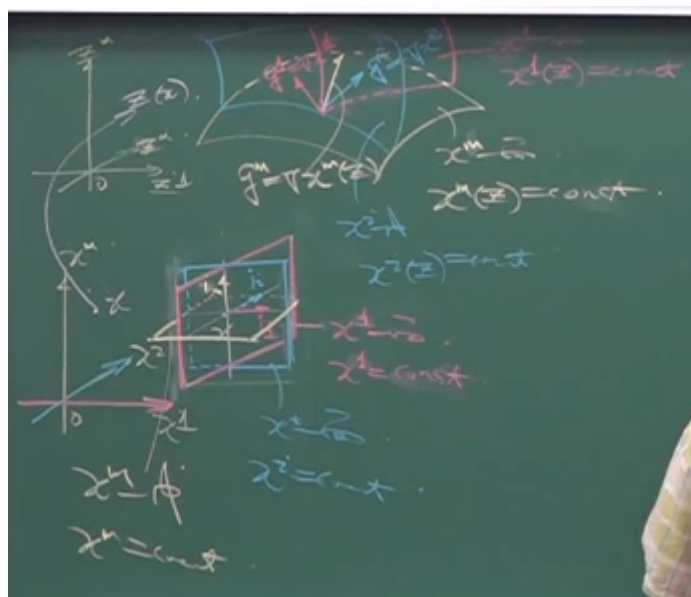


图 3.3: 局部逆变基的几何意义

如图 3.3 所示，在参数空间中，过点  $\mathbf{x}$  作垂直于  $x^i$  轴的平面，记为  $x^i$ -面。在  $x^i$ -面上，自然有  $x^i = \text{const}$ 。映照到物理空间后， $x^i$ -面变为一个曲面，其上仍有  $x^i(\mathbf{X}) = \text{const}$ ，即它是一个等值面。等值面的梯度方向显然与该曲面的法向相同。因此，局部逆变基  $\mathbf{g}^i(\mathbf{x})$  的几何意义就是  $x^i$ -面的法向量。

现在来验证一下对偶关系。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}), \nabla x^j(\mathbf{X}) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\alpha, \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}(\mathbf{X}) \mathbf{e}_\beta \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

利用内积的线性性，有

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}(\mathbf{X}) \cdot \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle_{\mathbb{R}^m} \\
 &= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}(\mathbf{X}) \cdot \delta_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

合并掉指标  $\beta$ ，可得

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \frac{\partial x^j}{\partial X^\alpha}(\mathbf{X}) \\
 &= \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial x^j}{\partial X^\alpha}(\mathbf{X}) \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

最后一步求和号中的第一项位于 Jacobi 矩阵  $\mathbf{D}\mathbf{x}(\mathbf{X})$  的第  $j$  行第  $\alpha$  列，而第二项位于  $\mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x})$  的第  $\alpha$  行第  $i$  列，因此关于  $\alpha$  的求和结果便是乘积矩阵的第  $j$  行第  $i$  列。根据式 (3.41)，这两个 Jacobi 矩阵的乘积为单位阵，所以有

$$\langle \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \tag{3.48}$$

总结一下我们得到的结果。对于体积形态的连续介质，存在着

$$\begin{cases} \text{局部协变基:} & \left\{ \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \triangleq \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \right\}_{i=1}^m, \\ \text{局部逆变基:} & \left\{ \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) \triangleq \nabla x^i(\mathbf{X}) \right\}_{i=1}^m, \end{cases}$$

它们满足对偶关系

$$\langle \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \tag{3.50}$$

这样，在研究连续介质中的一个点时，我们就有三种基可以使用：局部协变基、局部逆变基，当然还有典则基  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^m$ 。

## 3.4 标架运动方程

### 3.4.1 向量在局部基下的表示

对于  $\mathbb{R}^m$  空间中的任意一个向量  $\mathbf{b}$ ，它可以用典则基表示：

$$\mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^m b_\alpha \mathbf{e}_\alpha = b_\alpha \mathbf{e}_\alpha. \tag{3.51}$$

第二步省略掉了求和号，这是根据 **Einstein 求和约定**：指标出现两次，则表示对它求和。<sup>①</sup> 根据之前一小节的结论， $\mathbf{b}$  还可以用局部协变基和局部逆变基来表示：

$$\mathbf{b} = b^i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = b_j \mathbf{g}^j(\mathbf{x}), \tag{3.52}$$

<sup>①</sup> 在 1.1.2 小节中，还要求重复指标一上一下。典则基不分协变、逆变，标号均在下方，可以视为一个特例。

式中,

$$b^i = \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad (3.53-a)$$

和

$$b_j = \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad (3.53-b)$$

分别称为向量  $\mathbf{b}$  的**逆变分量**和**协变分量**. 注意, 这里同样用到了 Einstein 求和约定.

将  $\mathbf{b} = b^i \mathbf{g}_i(\mathbf{x})$  的两边分别与  $\mathbf{g}^j(\mathbf{x})$  作内积, 可有

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle b^i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

利用内积的线性性, 提出系数:

$$= b^i \langle \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

利用对偶关系 (3.50) 式, 可有

$$= b^i \delta_i^j = b^j, \quad (3.54)$$

这就得到了逆变分量的表示式 (3.53-a). 同理, 将  $\mathbf{b} = b_j \mathbf{g}^j(\mathbf{x})$  的两边分别与  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$  作内积, 就有

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle b_j \mathbf{g}^j(\mathbf{x}), \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} = b_j \langle \mathbf{g}^j(\mathbf{x}), \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} = b_j \delta_i^j = b_i, \quad (3.55)$$

这便是协变分量的表示 (3.53-b) 式.

### 3.4.2 局部基的偏导数

所谓局部基 (或曰“活动标架”), 顾名思义, 它在不同的点上往往是不同的. 根据之前的定义, 我们有

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) : \mathfrak{D}_x \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial X^m}{\partial x^i} \end{bmatrix} (\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m, \quad (3.56-a)$$

$$\mathbf{g}^i(\mathbf{x}) : \mathfrak{D}_x \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial X^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^i}{\partial X^m} \end{bmatrix} (\mathbf{X}(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^m. \quad (3.56-b)$$

从映照的角度来看, 局部基定义了新的向量值映照, 其定义域仍为参数域, 而值域则为  $\mathbb{R}^m$  空间. 这样一来, 我们在 3.2 节中所引入的操作均可完全类似地应用在局部基上. 例如, 我们可以来求局部基的 Jacobi 矩阵:

$$\begin{cases} D\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^m} \right] (\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \end{cases} \quad (3.57-a)$$

$$\begin{cases} D\mathbf{g}^i(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^m} \right] (\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}. \end{cases} \quad (3.57-b)$$

Jacobi 矩阵中的每一列都是局部基作为整体相对自变量第  $j$  个分量的变化率，即偏导数：

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) \triangleq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{g}_i(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_j) - \mathbf{g}_i(\mathbf{x})}{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \right. \quad (3.58-a)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) \triangleq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{g}^i(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_j) - \mathbf{g}^i(\mathbf{x})}{\lambda} \in \mathbb{R}^m. \right. \quad (3.58-b)$$

下面澄清局部基偏导数的几何意义. 如图 3.4 所示, 在参数空间中, 过点  $\mathbf{x}$  作出  $x^j$ -线, 并在其上取点  $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_j$ . 分别过点  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_j$  作出  $x^i$ -线, 于是  $\partial \mathbf{g}_i / \partial x^j(\mathbf{x})$  就表示  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$  (即  $x^i$ -线的切向量) 沿  $x^j$ -线的变化率. 同理, 过点  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_j$  作出  $x^i$ -面, 则  $\partial \mathbf{g}^i / \partial x^j(\mathbf{x})$  就表示  $\mathbf{g}^i(\mathbf{x})$  (即  $x^i$ -面的法向量) 沿  $x^j$ -线的变化率.

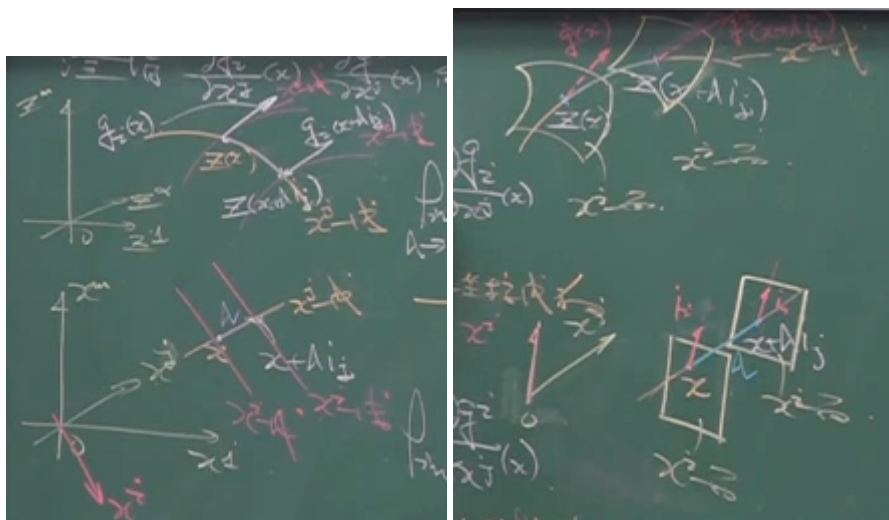


图 3.4: 局部基偏导数的几何意义

### 3.4.3 Christoffel 符号

考察  $\partial \mathbf{g}_i / \partial x^j(\mathbf{x})$ , 即协变基的偏导数<sup>①</sup>. 它是  $\mathbb{R}^m$  空间中的一个向量, 因而可以用协变基或逆变基来表示:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = \left\{ \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}, \mathbf{g}^k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k, \right. \quad (3.59-a)$$

$$\left. \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}, \mathbf{g}_k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k. \right. \quad (3.59-b)$$

引入第一类 Christoffel 符号

$$\Gamma_{ji,k} \triangleq \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}, \mathbf{g}_k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \quad (3.60)$$

和第二类 Christoffel 符号

$$\Gamma^k_{ji} \triangleq \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}, \mathbf{g}^k \right\rangle_{\mathbb{R}^m}, \quad (3.61)$$

① 以下在不引起歧义之处, 将省略局部协变基、局部逆变基的“局部”二字. 为了方便,  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$  和  $\mathbf{g}^i(\mathbf{x})$  中的“(x)”有时也会省略.

则式 (3.59) 可以写成

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \Gamma_{ji}^k \mathbf{g}_k, \\ \Gamma_{ji,k} \mathbf{g}^k. \end{cases} \quad (3.62-a)$$

$$(3.62-b)$$

下面我们来探讨 Christoffel 符号的基本性质——指标  $i$ 、 $j$  可以交换：

$$\begin{cases} \Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k, \\ \Gamma_{ji,k} = \Gamma_{ij,k}. \end{cases} \quad (3.63-a)$$

$$(3.63-b)$$

**证明：** 根据定义 (3.60) 和 (3.61) 式，指标  $i$ 、 $j$  来源于协变基的偏导数  $\partial \mathbf{g}_i / \partial x^j(\mathbf{x})$ 。只要偏导数中的  $i$ 、 $j$  可以交换，Christoffel 符号中的指标  $i$ 、 $j$  自然也可以。回顾协变基的定义 (3.56-a) 式：

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial X^m}{\partial x^i} \end{bmatrix}(\mathbf{x}). \quad (3.64)$$

其偏导数为

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X^1}{\partial x^j \partial x^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 X^m}{\partial x^j \partial x^i} \end{bmatrix}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X^1}{\partial x^i \partial x^j} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j} \end{bmatrix}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}(\mathbf{x}). \quad (3.65)$$

注意第二个等号处交换了偏导数的次序，其条件是二阶偏导数均存在且连续。只要微分同胚达到了  $\mathcal{C}^2$ ，就可以满足该要求，在一般的物理情境这都是成立的。于是我们便完成了证明。  $\square$

现在再来看逆变基的偏导数  $\partial \mathbf{g}^i / \partial x^j(\mathbf{x})$ 。它也是  $\mathbb{R}^m$  空间中的向量，因此

$$\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}, \mathbf{g}^k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k, \\ \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}, \mathbf{g}_k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k. \end{cases} \quad (3.66-a)$$

$$(3.66-b)$$

利用 Christoffel 符号，可以表示出  $\langle \partial \mathbf{g}^i / \partial x^j, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m}$ 。根据对偶关系，

$$\langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}) = \delta_k^i. \quad (3.67)$$

两边对  $x^j$  求偏导，用一下内积的求导公式，同时注意到  $\delta_k^i$  是与  $\mathbf{x}$  无关的常数，因而

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}, \mathbf{g}_k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} + \left\langle \mathbf{g}^i, \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^j} \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = \frac{\partial \delta_k^i}{\partial x^j} = 0. \quad (3.68)$$

所以

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}, \mathbf{g}_k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = - \left\langle \mathbf{g}^i, \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^j} \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = - \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^j}, \mathbf{g}^i \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = -\Gamma_{jk}^i. \quad (3.69)$$

至于  $\langle \partial \mathbf{g}^i / \partial x^j, \mathbf{g}^k \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，将在以后讨论。你想在什么时候？

### 3.4.4 指标升降

首先引入度量：

$$\begin{cases} g_{ij}(\mathbf{x}) \triangleq \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}), \\ g^{ij}(\mathbf{x}) \triangleq \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.70\text{-a}) \\ (3.70\text{-b}) \end{matrix}$$

由此可以获得基向量的指标升降

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = g_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{g}^j(\mathbf{x}), \\ \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) = g^{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_j(\mathbf{x}). \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.71\text{-a}) \\ (3.71\text{-b}) \end{matrix}$$

如前所述，对于任意的  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ，它可以表示成

$$\mathbf{b} = b^i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = b_j \mathbf{g}^j(\mathbf{x}). \quad (3.72)$$

利用度量，同样可以获得向量分量的指标升降

$$\begin{cases} b^i = \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}^i \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \mathbf{b}, g^{ik} \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} b_k, \\ b_j = \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \mathbf{b}, g_{jk} \mathbf{g}^k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g_{jk} \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}^k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g_{jk} b^k. \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.73\text{-a}) \\ (3.73\text{-b}) \end{matrix}$$

关于度量，再多说一句。由于内积的交换律，显然有

$$g_{ij}(\mathbf{x}) = g_{ji}(\mathbf{x}), \quad g^{ij} = g^{ji}. \quad (3.74)$$

### 3.4.5 度量的性质；Christoffel 符号的计算

首先，我们来澄清度量的两条性质。

1. 矩阵  $[g_{ik}]$  与  $[g^{kj}]$  互逆，即

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j. \quad (3.75)$$

证明见 1.1.2 小节（尽管省略了“(x)”，但请不要忘记这里的基是局部基）。

2. 第一类 Christoffel 符号满足

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) (\mathbf{x}). \quad (3.76)$$

证明：根据式 (3.60)，第一类 Christoffel 符号的定义为

$$\Gamma_{ij,k} \triangleq \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}, \mathbf{g}_k \right\rangle_{\mathbb{R}^m}. \quad (3.77)$$

考虑度量的定义

$$g_{ij}(\mathbf{x}) \triangleq \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}). \quad (3.78)$$

两边对  $x^k$  求偏导，可得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^k}, \mathbf{g}_j \right\rangle_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}) + \left\langle \mathbf{g}_i, \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^k} \right\rangle_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x})$$

利用上面 Christoffel 符号的定义，有

$$= \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}. \quad (3.79)$$

这样就获得了度量偏导数用 Christoffel 符号的表示。但我们需要的却是 Christoffel 符号用度量偏导数的表示。下面的工作就是完成这一“调转”。

利用指标轮换

$$i \rightarrow j, \quad j \rightarrow k, \quad k \rightarrow i,$$

可有

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j}. \quad (3.80)$$

再进行一次指标轮换：

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = \Gamma_{jk,i} + \Gamma_{ji,k}. \quad (3.81)$$

以上三式联立，就有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j}) + (\Gamma_{jk,i} + \Gamma_{ji,k}) - (\Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}) \right] \end{aligned}$$

利用 (3.63-b) 式所指出的 Christoffel 符号的指标交换性：

$$= \frac{1}{2} \left[ (\Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ki,j}) + (\Gamma_{jk,i} + \Gamma_{ij,k}) - (\Gamma_{ki,j} + \Gamma_{jk,i}) \right]$$

高亮部分相互抵消，于是可得

$$= \Gamma_{ij,k}. \quad (3.82)$$

□

有了这两条性质，我们就能够很容易地获取 Christoffel 符号的计算方法。

第一步从度量开始。根据 3.3.1 小节，在曲线坐标系（即微分同胚） $\mathbf{X}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_{\mathbf{x}}; \mathfrak{D}_{\mathbf{X}})$  中，Jacobi 矩阵可以用协变基表示为

$$\mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_i, \dots, \mathbf{g}_m](\mathbf{x}). \quad (3.83)$$

因此协变形式的度量（矩阵形式）就可以写成

$$[g_{ij}] \triangleq [\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}] = \mathbf{D}\mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}). \quad (3.84)$$

两种形式的度量是互逆的，于是  $g^{ij}$  实际上也已经算出来了。

第二步，将求得的度量代入式 (3.76)

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)(\mathbf{x}), \quad (3.85)$$

就得到了第一类 Christoffel 符号。至于第二类 Christoffel 符号，它可以表示成

$$\Gamma^k_{ij} \triangleq \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}, \mathbf{g}^k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}, g^{kl} \mathbf{g}_l \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = g^{kl} \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}, \mathbf{g}_l \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = g^{kl} \Gamma_{ij,l}. \quad (3.86)$$

这样一来，它的表示也就明确了。



## 3.5 度量张量与 Eddington 张量

### 3.5.1 度量张量的定义

在曲线坐标系（即微分同胚） $X(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_x; \mathfrak{D}_X)$  中，可以引入度量张量

$$\mathbf{I} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^m). \quad (3.87)$$

这是用协变形式表达的。当然也可以切换成其他形式：

$$\mathbf{I} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$$

利用指标升降，有

$$= g_{ij} (g^{ik} \mathbf{g}_k) \otimes \mathbf{g}^j$$

再根据线性性提出系数：

$$\begin{aligned} &= g_{ij} g^{ik} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^j \\ &= \delta_j^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^j. \end{aligned} \quad (3.88)$$

类似地，还可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \delta_j^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^j \\ &= \delta_j^k \mathbf{g}_k \otimes (g^{jl} \mathbf{g}_l) \\ &= \delta_j^k g^{jl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \\ &= g^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l. \end{aligned} \quad (3.89)$$

综上，度量张量有三种表示：

$$\mathbf{I} = \begin{cases} g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j, & (3.90\text{-a}) \\ g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, & (3.90\text{-b}) \\ \delta_j^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, & (3.90\text{-c}) \end{cases}$$

式中，协变分量  $g_{ij} = \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，逆变分量  $g^{ij} = \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，混合分量  $\delta_j^i = \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}$ 。

### 3.5.2 Eddington 张量的定义

接下来引入 **Eddington 张量**

$$\epsilon = \epsilon_{ijk} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m), \quad (3.91)$$

式中的  $\epsilon_{ijk} = \det[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k]$ 。和之前一样，仍是利用指标升降来获得等价定义：

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_{ijk} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k \\ &= \epsilon_{ijk} \mathbf{g}^i \otimes (g^{jl} \mathbf{g}_l) \otimes \mathbf{g}^k \end{aligned}$$

$$= \epsilon_{ijk} g^{jl} g^i \otimes g_l \otimes g^k$$

根据张量分量之间的关系（回顾 1.2.2 小节），我们有

$$= \epsilon_{i\ k}^l g^i \otimes g_l \otimes g^k. \quad (3.92)$$

当然，这里的  $\epsilon_{i\ k}^l$  只是一个形式。要将其显式地表达出来，需要利用行列式的线性性：

$$\begin{aligned} \forall \xi, \hat{\eta}, \tilde{\eta}, \zeta \in \mathbb{R}^3 \text{ 以及 } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \det[\xi, \alpha \hat{\eta} + \beta \tilde{\eta}, \zeta] \\ = \alpha \det[\xi, \hat{\eta}, \zeta] + \beta \det[\xi, \tilde{\eta}, \zeta]. \end{aligned} \quad (3.93)$$

由此可知

$$\begin{aligned} \epsilon_{i\ k}^l &= \epsilon_{ijk} g^{jl} \\ &= g^{jl} \det[g_i, g_j, g_k] \\ &= \det[g_i, g^{jl} g_j, g_k] \\ &= \det[g_i, g^l, g_k]. \end{aligned} \quad (3.94)$$

一般来说，张量在定义时，只需给出其分量的一种形式。而其他的形式，则都可以通过度量来获得。说得直白一些，这其实就是一套“指标升降游戏”。

顺带一说，在 Descartes 坐标系下， $\mathbb{R}^3$  空间中的叉乘可以用 Eddington 张量表示为

$$g_i \times g^j = \begin{cases} \epsilon_i^{jk} g_k, & (3.95\text{-a}) \\ \epsilon_{i\ k}^j g^k. & (3.95\text{-b}) \end{cases}$$

**证明：** 利用对偶关系可以很容易地获得这一结果。 $g_i \times g^j$  仍然得到一个  $\mathbb{R}^3$  空间中的向量，它自然可以用协变基来表示：

$$g_i \times g^j = \langle g_i \times g^j, g^k \rangle_{\mathbb{R}^m} g_k$$

这里的内积也就是点积。根据向量三重积的知识，可以把  $A \times B \cdot C$  表示成行列式：

$$= \det[g_i, g^j, g^k] g_k$$

根据 Eddington 张量的定义即得到

$$= \epsilon_i^{jk} g_k. \quad (3.96)$$

同理，若用逆变基表示，则为

$$\begin{aligned} g_i \times g^j &= \langle g_i \times g^j, g_k \rangle_{\mathbb{R}^m} g^k \\ &= \det[g_i, g^j, g_k] g^k \\ &= \epsilon_{i\ k}^j g^k. \end{aligned} \quad (3.97)$$

□

### 3.5.3 两种度量的关系

两个 Eddington 张量的分量之积可以用一个由度量张量分量所组成的行列式来表示：

$$\epsilon_j^i \epsilon_{pq}^r = \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_q^i & g^{ir} \\ g_{jp} & g_{jq} & \delta_j^r \\ \delta_p^k & \delta_q^k & g^{kr} \end{vmatrix}. \quad (3.98)$$

类似矩阵乘法，行列式中第  $m$  行  $n$  列的元素，由第一个 Eddington 张量的第  $m$  个指标与第二个 Eddington 张量的第  $n$  个指标组合而成。两个指标均在上面，则获得度量张量的逆变分量；两个指标均在下面，则获得协变分量；若是一上一下，则将得到混合分量（即 Kronecker  $\delta$ ）。

这里的  $i, j, k$  和  $p, q, r$  都不是哑标，无需考虑求和的限制，可以任意选取。至于它们的上下位置，同样是由实际问题来确定的。

**证明：** 证明思路就是化为矩阵乘法。根据定义，

$$\epsilon_j^i \epsilon_{pq}^r = \det \left[ \mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k \right] \det \left[ \mathbf{g}_p, \mathbf{g}_q, \mathbf{g}^r \right]$$

考虑行列式的性质  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$  和  $\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A})$ ，则有

$$= \det \left( \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^i)^\top \\ (\mathbf{g}_j)^\top \\ (\mathbf{g}^k)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_p, \mathbf{g}_q, \mathbf{g}^r \end{bmatrix} \right). \quad (3.99)$$

这个矩阵可以直接算出。 □

如果 Eddington 张量中存在哑标，情况就会有所不同：

$$\epsilon_j^i \epsilon_{qs}^p = \sum_{s=1}^3 \begin{vmatrix} g^{ip} & \delta_q^i & \delta_s^i \\ \delta_j^p & g_{jq} & g_{js} \\ g^{sp} & \delta_q^s & \delta_s^s \end{vmatrix}. \quad (3.100)$$

由于式中的  $k$  是哑标，因此需要对它求和。行列式按第一行展开，可得（下面仍将根据 Einstein 约定省略求和号）

$$\begin{aligned} \epsilon_j^i \epsilon_{qs}^p &= g^{ip} (g_{jq} \delta_s^s - g_{js} \delta_q^s) - \delta_q^i (\delta_j^p \delta_s^s - g_{js} g^{sp}) + \delta_s^i (\delta_j^p \delta_q^s - g_{jq} g^{sp}) \\ &= g^{ip} (3g_{jq} - g_{jq}) - \delta_q^i (3\delta_j^p - \delta_j^p) + (\delta_j^p \delta_q^i - g_{jq} g^{ip}) \\ &= g^{ip} g_{jq} - \delta_j^p \delta_q^i. \end{aligned} \quad (3.101)$$

这一串稍显复杂的表达式，可以用口诀“前前后后，内内外外”来记忆。具体操作如图 3.5 所示。

下面再举两个例子来说明：

$$\epsilon^{ij}_s \epsilon_{pq}^s = \delta_p^i \delta_q^j - \delta_p^j \delta_q^i; \quad (3.102)$$

$$\epsilon^{ij}_s \epsilon_q^{ps} = g^{ip} \delta_q^j - g^{jp} \delta_q^i. \quad (3.103)$$

以后将会看到，这是一个相当重要的基本结构。

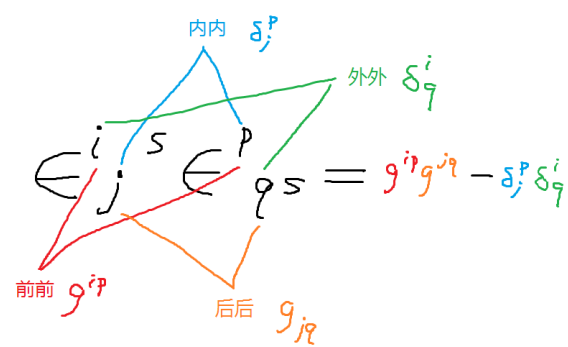


图 3.5: Eddington 张量乘积口诀“前前后后，内内外外”的示意图