第一章　张量的定义及表示

1.1　对偶基，度量

$\mathbb{R}^m$ 空间中的基可分为两类：指标在下面的基

$$\left\{\boldsymbol{g}_i\right\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

称为**协变基**，指标在上面的基

$$\left\{\boldsymbol{g}^i\right\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \tag{1.2}$$

称为**逆变基**．它们满足**对偶关系**：

$$\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.3}$$

这里的 δ_j^i 是 **Kronecker δ 函数**．

下面引入**度量**的概念．其定义为

$$\begin{cases} g_{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}, & \text{(1.4-a)} \\ g^{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m}. & \text{(1.4-b)} \end{cases}$$

下面证明

$$g_{ik}\, g^{kj} = \delta_i^j. \tag{1.5}$$

它也可以写成矩阵的形式：

$$\left[g_{ik}\right]\left[g^{kj}\right] = \left[\delta_i^j\right] = \boldsymbol{I}_m, \tag{1.6}$$

其中的 $\boldsymbol{I}_m$ 是 m 阶单位阵．

证明：

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, g^{kj}\boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \tag{1.7}$$

后文将说明 $g^{kj}\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{g}^j$，因此可得

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \tag{1.8}$$

要注意的是，这里的指标 k 是哑标．根据 **Einstein 求和约定**，重复指标并且一上一下时，就表示对它求和．后文除非特殊说明，也均是如此．　□

现在澄清**基向量转换关系**．第 i 个协变基向量 $\boldsymbol{g}_i$ 既然是向量，就必然可以用协变基或逆变基来表示．根据对偶关系式 (1.3) 和度量的定义式 (1.4-a)、(1.4-b)，可知

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = g_{ik}\, \boldsymbol{g}^k , & \text{(1.9-a)} \\
\boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = \delta_i^k \boldsymbol{g}_k & \text{(1.9-b)}
\end{cases}
$$

以及

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = \delta_k^i \boldsymbol{g}^k , & \text{(1.10-a)} \\
\boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = g^{ik} \boldsymbol{g}_k . & \text{(1.10-b)}
\end{cases}
$$

这四个式子中，式 (1.9-b) 和 (1.10-a) 是平凡的，而式 (1.9-a) 和 (1.10-b) 则通过度量建立起了协变基与逆变基之间的关系．这就称为基向量转换关系．

对于任意的向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$，它可以用协变基表示：

$$
\boldsymbol{\xi} = \left(\xi, \boldsymbol{g}^k\right) \boldsymbol{g}_k = \xi^k \boldsymbol{g}_k , \tag{1.11}
$$

也可以用逆变基表示：

$$
\boldsymbol{\xi} = \left(\xi, \boldsymbol{g}_k\right) \boldsymbol{g}^k = \xi_k \boldsymbol{g}^k , \tag{1.12}
$$

式中，ξ^k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个逆变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**逆变分量**；而 ξ_k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个协变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**协变分量**．

以后凡是指标在下的（下标），均称为协变某某；指标在上的（上标），称为逆变某某．

1.2　张量的表示

所谓**张量**，即指**多重线性函数**．

以三阶张量为例．考虑任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，其中的 $\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$ 表示以 $\mathbb{R}^m$ 为底空间的三阶张量全体．所谓三阶（或三重）线性函数，指“吃掉”三个向量之后变成数，并且“吃法”具有线性性．

对于一般地张量空间 $\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$，我们引入了线性结构：

$$
\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad (\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) \triangleq \alpha\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) + \beta\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right), \tag{1.13}
$$

于是

$$
\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m). \tag{1.14}
$$

下面我们要获得 $\boldsymbol{\Phi}$ 的表示．根据之前任意向量用协变基或逆变基的表示，有

$$
\begin{aligned}
\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m, \quad & \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\
&= \boldsymbol{\Phi}\left(u^i \boldsymbol{g}_i, v_j \boldsymbol{g}^j, w^k \boldsymbol{g}_k\right)
\end{aligned}
$$

考虑到 $\boldsymbol{\Phi}$ 对第一变元的线性性，可得

$$
= u^i \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, v_j \boldsymbol{g}^j, w^k \boldsymbol{g}_k\right)
$$

同理，

$$
= u^i v_j w^k \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right). \tag{1.15}
$$

注意这里自然需要满足 Einstein 求和约定.

上式中的 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)$ 是一个数. 它是张量 $\boldsymbol{\Phi}$ "吃掉"三个基向量的结果. 至于 $u^i v_j w^k$ 部分, 三项分别是 $\boldsymbol{u}$ 的第 i 个逆变分量、$\boldsymbol{v}$ 的第 j 个协变分量和 $\boldsymbol{w}$ 的第 k 个逆变分量. 根据向量分量的定义, 可知

$$u^i v_j w^k = \left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m} \cdot \left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} \cdot \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.16}$$

暂时中断一下思路, 先给出**简单张量**的定义.

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \triangleq (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}, \tag{1.17}$$

式中 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^m$, 而暂时把 $\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}$ 理解为一种记号. 简单张量作为一个映照, 组成它的三个向量分别与它们"吃掉"的第一、二、三个变元做内积并相乘, 结果为一个实数.

考虑到内积的线性性, 便有 (以第二个变元为例)

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{w}) \triangleq (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\eta}, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}$$

注意到 $(\boldsymbol{\eta}, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} = \alpha(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} + \beta(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m}$, 同时再次利用简单张量的定义, 可得

$$= \alpha\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{w}) + \beta\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{w}). \tag{1.18}$$

类似地, 对第一变元和第三变元, 同样具有线性性. 因此, 可以知道

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{1.19}$$

可见, "简单张量"的名字是名副其实的, 它的确是一个特殊的张量.

回过头来看(1.16) 式. 很明显, 它可以用简单张量来表示. 要注意, 由于内积的对称性, 可以有两种[①] 表示方法:

$$\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \tag{1.20}$$

或者

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right), \tag{1.21}$$

我们这里取上面一种. 代入式 (1.15), 得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ &= \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \cdot \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \in \mathbb{R}^m$, 因此

$$= \left[\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k\right](\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}). \tag{1.22}$$

方括号里的部分, 就是根据 Einstein 求和约定, 用 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)$ 对 $\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k$ 进行线性组合.

由于 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 选取的任意性, 可以引入如下记号:

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k =: \boldsymbol{\Phi}_i{}^j{}_k \, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k, \tag{1.23}$$

即

$$\boldsymbol{\Phi}_i{}^j{}_k := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right), \tag{1.24}$$

这称为张量的**分量**. 它说明一个张量可以用张量分量和基向量组成的简单张量来表示.

① 这里只考虑把 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{g}^i$、$\boldsymbol{g}_j$、$\boldsymbol{g}^k$ 分别放在一起的情况.