第一章　张量的定义及表示

1.1　对偶基，度量

1.1.1　对偶基

$\mathbb{R}^m$ 空间中的基可分为两类：指标写在下面的基

$$\left\{\boldsymbol{g}_i\right\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

称为**协变基**，指标写在上面的基

$$\left\{\boldsymbol{g}^i\right\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \tag{1.2}$$

称为**逆变基**．它们满足**对偶关系**：

$$\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j\,; \\ 0, & i \neq j\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

这里的 δ^i_j 是 **Kronecker δ 函数**．

1.1.2　度量

下面引入**度量**的概念．其定义为

$$\begin{cases} g_{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}, & \text{(1.4-a)} \\ g^{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m}. & \text{(1.4-b)} \end{cases}$$

下面证明

$$g_{ik}\, g^{kj} = \delta^j_i\,. \tag{1.5}$$

它也可以写成矩阵的形式：

$$\left[g_{ik}\right]\left[g^{kj}\right] = \left[\delta^j_i\right] = \boldsymbol{I}_m, \tag{1.6}$$

其中的 $\boldsymbol{I}_m$ 是 m 阶单位阵．

证明：

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, g^{kj}\boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \tag{1.7}$$

后文将说明 $g^{kj}\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{g}^j$，因此可得

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta^j_i\,. \tag{1.8}$$

要注意的是，这里的指标 k 是哑标．根据 **Einstein 求和约定**，重复指标并且一上一下时，就表示对它求和．后文除非特殊说明，也均是如此． □

现在澄清**基向量转换关系**．第 i 个协变基向量 $\boldsymbol{g}_i$ 既然是向量，就必然可以用协变基或逆变基来表示．根据对偶关系式 (1.3) 和度量的定义式 (1.4-a)、(1.4-b)，可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = g_{ik}\,\boldsymbol{g}^k, & (1.9\text{-a}) \\ \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = \delta_i^k\,\boldsymbol{g}_k & (1.9\text{-b}) \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = \delta^i_k\,\boldsymbol{g}^k, & (1.10\text{-a}) \\ \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = g^{ik}\,\boldsymbol{g}_k. & (1.10\text{-b}) \end{cases}$$

这四个式子中，式 (1.9-b) 和 (1.10-a) 是平凡的，而式 (1.9-a) 和 (1.10-b) 则通过度量建立起了协变基与逆变基之间的关系．这就称为基向量转换关系，也可以叫做“指标升降游戏”．

1.1.3 向量的分量

对于任意的向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$，它可以用协变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = \xi^k \boldsymbol{g}_k, \tag{1.11}$$

也可以用逆变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = \xi_k \boldsymbol{g}^k, \tag{1.12}$$

式中，ξ^k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个逆变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**逆变分量**；而 ξ_k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个协变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**协变分量**．

以后凡是指标在下的（下标），均称为协变某某；指标在上的（上标），称为逆变某某．

1.2 张量的表示

1.2.1 张量的表示与简单张量

所谓**张量**，即指**多重线性函数**．

以三阶张量为例．考虑任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，其中的 $\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$ 表示以 $\mathbb{R}^m$ 为底空间的三阶张量全体．所谓三阶（或三重）线性函数，指“吃掉”三个向量之后变成数，并且“吃法”具有线性性．

对于一般地张量空间 $\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$，我们引入了线性结构：

$$\begin{aligned} \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad & (\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) \\ & \triangleq \alpha\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) + \beta\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right), \end{aligned} \tag{1.13}$$

于是

$$\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m). \tag{1.14}$$

下面我们要获得 $\boldsymbol{\Phi}$ 的表示．根据之前任意向量用协变基或逆变基的表示，有

$$\begin{aligned}\forall\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^m,\quad &\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{w})\\ &=\boldsymbol{\Phi}\left(u^i\boldsymbol{g}_i,\,v_j\boldsymbol{g}^j,\,w^k\boldsymbol{g}_k\right)\end{aligned}$$

考虑到 $\boldsymbol{\Phi}$ 对第一变元的线性性，可得

$$=u^i\,,\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i,\,v_j\boldsymbol{g}^j,\,w^k\boldsymbol{g}_k\right)$$

同理，

$$=u^iv_jw^k\,,\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i,\,\boldsymbol{g}^j,\,\boldsymbol{g}_k\right). \tag{1.15}$$

注意这里自然需要满足 Einstein 求和约定．

上式中的 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i,\,\boldsymbol{g}^j,\,\boldsymbol{g}_k\right)$ 是一个数．它是张量 $\boldsymbol{\Phi}$ “吃掉”三个基向量的结果．至于 $u^iv_jw^k$ 部分，三项分别是 $\boldsymbol{u}$ 的第 i 个逆变分量、$\boldsymbol{v}$ 的第 j 个协变分量和 $\boldsymbol{w}$ 的第 k 个逆变分量．根据向量分量的定义，可知

$$u^iv_jw^k=\left(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m}\cdot\left(\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}\cdot\left(\boldsymbol{w},\,\boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.16}$$

暂时中断一下思路，先给出**简单张量**的定义．

$$\forall\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^m,\quad \boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{w})\triangleq(\boldsymbol{\xi},\,\boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m}\cdot(\boldsymbol{\eta},\,\boldsymbol{v})_{\mathbb{R}^m}\cdot(\boldsymbol{\zeta},\,\boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m}\in\mathbb{R}, \tag{1.17}$$

式中 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}\in\mathbb{R}^m$，而暂时把 $\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}$ 理解为一种记号．简单张量作为一个映照，组成它的三个向量分别与它们“吃掉”的第一、二、三个变元做内积并相乘，结果为一个实数．

考虑到内积的线性性，便有（以第二个变元为例）

$$\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\,\alpha\tilde{\boldsymbol{v}}+\beta\hat{\boldsymbol{v}},\,\boldsymbol{w})\triangleq(\boldsymbol{\xi},\,\boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m}\cdot(\boldsymbol{\eta},\,\alpha\tilde{\boldsymbol{v}}+\beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m}\cdot(\boldsymbol{\zeta},\,\boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m}\in\mathbb{R}$$

注意到 $(\boldsymbol{\eta},\,\alpha\tilde{\boldsymbol{v}}+\beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m}=\alpha(\boldsymbol{\eta},\,\tilde{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m}+\beta(\boldsymbol{\eta},\,\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m}$，同时再次利用简单张量的定义，可得

$$=\alpha\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\,\tilde{\boldsymbol{v}},\,\boldsymbol{w})+\beta\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\,\hat{\boldsymbol{v}},\,\boldsymbol{w}). \tag{1.18}$$

类似地，对第一变元和第三变元，同样具有线性性．因此，可以知道

$$\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}\in\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{1.19}$$

可见，“简单张量”的名字是名副其实的，它的确是一个特殊的张量．

回过头来看 (1.16) 式．很明显，它可以用简单张量来表示．要注意，由于内积的对称性，可以有两种[①] 表示方法：

$$\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{w}) \tag{1.20}$$

或者

$$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{g}^i,\,\boldsymbol{g}_j,\,\boldsymbol{g}^k\right), \tag{1.21}$$

① 这里只考虑把 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{g}^i$、$\boldsymbol{g}_j$、$\boldsymbol{g}^k$ 分别放在一起的情况．

我们这里取上面一种．代入式 (1.15)，得

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\\
&= \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \cdot \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})
\end{aligned}
$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \in \mathbb{R}^m$，因此

$$
= \left[\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k\right](\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}). \tag{1.22}
$$

方括号里的部分，就是根据 Einstein 求和约定，用 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)$ 对 $\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k$ 进行线性组合．

由于 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 选取的任意性，可以引入如下记号：

$$
\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k =: \boldsymbol{\Phi}_i{}^j{}_k\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k, \tag{1.23}
$$

即

$$
\boldsymbol{\Phi}_i{}^j{}_k := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right), \tag{1.24}
$$

这称为张量的**分量**．它说明一个张量可以用张量分量和基向量组成的简单张量来表示．

指标 i、j、k 的上下是任意的．这里，它有赖于式 (1.15) 中基向量的选取．实际上，对于这里的三阶张量，指标的上下一共有 8 种可能．指标全部在下面的，称为**协变分量**：

$$
\boldsymbol{\Phi}^{ijk} := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k\right); \tag{1.25}
$$

指标全部在上面的，称为**逆变分量**：

$$
\boldsymbol{\Phi}_{ijk} := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k\right); \tag{1.26}
$$

其余 6 种，称为**混合分量**．对于一个 r 阶张量，显然共有 2^r 种分量表示，其中协变分量与逆变分量各一种，混合分量 $2^r - 2$ 种．

1.2.2　张量分量之间的关系

我们已经知道，对于任意一个向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$，它可以用协变基或逆变基表示：

$$
\boldsymbol{\xi} = \begin{cases} \xi^i \boldsymbol{g}_i, \\ \xi_i \boldsymbol{g}^i. \end{cases} \tag{1.27}
$$

式中，协变分量与逆变分量满足坐标转换关系：

$$
\begin{cases}
\xi^i = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{\xi}, g^{ik}\boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}\left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}\xi_k, & \text{(1.28-a)}\\
\xi_i = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_i\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{\xi}, g_{ik}\boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik}\left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik}\xi^k. & \text{(1.28-b)}
\end{cases}
$$

每一式的第二个等号都用到了基向量转换关系，见式 (1.9-a) 和 (1.10-b)．

现在再来考虑张量的分量．仍以上文中的张量 $\boldsymbol{\Phi}_i{}^j{}_k := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)$ 为例，我们想要知道它与张量 $\boldsymbol{\Phi}^p{}_q{}^r := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r\right)$ 之间的关系．利用基向量转换关系，可有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}_i{}^j{}_k &:= \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)\\
&= \boldsymbol{\Phi}\left(g_{ip}\boldsymbol{g}^p, g^{jq}\boldsymbol{g}_q, g_{kr}\boldsymbol{g}^r\right)
\end{aligned}
$$

又利用张量的线性性，得

$$
\begin{aligned}
&= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r\right) \\
&= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \Phi^{p}{}_{q}{}^{r}.
\end{aligned} \tag{1.29}
$$

可见，张量的分量与向量的分量类似，其指标升降可通过度量来实现．用同样的手法，还可以得到诸如 $\Phi^{ijk} = g^{jp}\Phi^{i}{}_{p}{}^{k}$、$\Phi^{i}{}_{j}{}^{k} = g_{jp}g^{kq}\Phi^{ip}{}_{k}$ 这样的关系式．

1.2.3 相对不同基的张量分量之间的关系

$\mathbb{R}^m$ 空间中，除了 $\left\{\boldsymbol{g}_i\right\}_{i=1}^m$ 和相应的对偶基 $\left\{\boldsymbol{g}^i\right\}_{i=1}^m$ 之外，当然还可以有其他的基，比如带括号的 $\left\{\boldsymbol{g}_{(i)}\right\}_{i=1}^m$ 以及对应的对偶基 $\left\{\boldsymbol{g}^{(i)}\right\}_{i=1}^m$．前者对应形如 $\Phi^{i}{}_{j}{}^{k} \coloneqq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right)$ 的张量，后者则对应带括号的张量，如 $\Phi^{(p)}{}_{(q)}{}^{(r)} \coloneqq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{(p)}, \boldsymbol{g}_{(q)}, \boldsymbol{g}^{(r)}\right)$．下面我们来探讨这两个张量的关系．

首先来建立基之间的关系．带括号的第 i 个基向量 $\boldsymbol{g}_{(i)}$，作为 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一个向量，自然可以用另一组基来表示：

$$
\boldsymbol{g}_{(i)} = \begin{cases} \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k, \\ \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k. \end{cases} \tag{1.30}
$$

同理，自然还有它的对偶基：

$$
\boldsymbol{g}^{(i)} = \begin{cases} \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k, \\ \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k. \end{cases} \tag{1.31}
$$

引入记号 $c_{(i)}^{k} \coloneqq \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}$ 和 $c_k^{(i)} \coloneqq \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}$，那么有

$$
\begin{cases} \boldsymbol{g}_{(i)} = c_{(i)}^{k} \boldsymbol{g}_k, & (1.32\text{-a}) \\ \boldsymbol{g}^{(i)} = c_k^{(i)} \boldsymbol{g}^k. & (1.32\text{-b}) \end{cases}
$$

容易看出，这两个系数具有如下性质：

$$
c_k^{(i)} c_{(j)}^{k} = \delta_j^i. \tag{1.33}
$$

写成矩阵形式[①]，为

$$
\left[c_k^{(i)}\right]\left[c_{(j)}^{k}\right] = \left[\delta_i^j\right] = \boldsymbol{I}_m. \tag{1.34}
$$

换句话说，两个系数矩阵是互逆的．

证明：

$$
c_k^{(i)} c_{(j)}^{k} = \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} c_{(j)}^{k}
$$

利用内积的线性性，有

$$
= \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, c_{(j)}^{k} \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}
$$

根据 $c_{(j)}^{k}$ 的定义，得到

$$
= \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_{(j)}\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.35}
$$

带括号的基同样满足对偶关系 (1.3) 式，于是得证． □

① 通常我们约定上面的标号作为行号，下面的标号作为列号．

上面我们用不带括号的基表示了带括号的基．反之也是可以的：

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^{(k)}\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_{(k)} = c_i^{(k)} \boldsymbol{g}_{(k)}, & \text{(1.36-a)} \\ \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_{(k)}\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^{(k)} = c^i_{(k)} \boldsymbol{g}^{(k)}. & \text{(1.36-b)} \end{cases}$$

这样一来，就建立起了不同基之间的转换关系．

现在我们回到张量．根据张量分量的定义，

$$\boldsymbol{\Phi}^{i\ \ k}_{\ j} \coloneqq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right)$$

利用之前推导的不同基向量之间的转换关系，得

$$= \boldsymbol{\Phi}\left(c^i_{(p)} \boldsymbol{g}^{(p)}, c_j^{(q)} \boldsymbol{g}_{(q)}, c^k_{(r)} \boldsymbol{g}^{(r)}\right)$$

由张量的线性性，提出系数：

$$\begin{aligned} &= c^i_{(p)} c_j^{(q)} c^k_{(r)} \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{(p)}, \boldsymbol{g}_{(q)}, \boldsymbol{g}^{(r)}\right) \\ &= c^i_{(p)} c_j^{(q)} c^k_{(r)} \boldsymbol{\Phi}^{(p)\ \ \ (r)}_{\ \ \ (q)}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

完全类似，还可以有

$$\boldsymbol{\Phi}^{(i)\ \ \ (k)}_{\ \ \ (j)} = c_p^{(i)} c^g_{(j)} c_r^{(k)} \boldsymbol{\Phi}^{p\ \ r}_{\ q}. \tag{1.38}$$

总结一下这两小节得到的结果．对于同一组基下的张量分量，其指标升降通过度量来实现；对于不同基下的张量分量，其指标转换则通过不同基之间的转换系数来完成．

第二章　张量的代数运算

2.1　张量积

张量积也叫**张量并**，用符号“$\otimes$”表示．在 1.2.1 小节给出简单张量的定义时，实际上就用到了张量积．张量积的定义为：

$$
\begin{aligned}
\forall \boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^{p}(\mathbb{R}^{m}), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^{q}(\mathbb{R}^{m}), \quad \boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi} &\in \mathscr{T}^{p+q}(\mathbb{R}^{m}) \\
&= \left(\Phi^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\Psi_{j_1 \cdots j_q} \boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right) \\
&\triangleq \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_q} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right).
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

由该定义可以知道，关于简单张量 $\left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right)$，相应的张量分量为

$$
\left(\Phi \otimes \Psi\right)^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q}. \tag{2.2}
$$

2.2　e 点积

张量的 e **点积**可以用符号“$\binom{e}{\cdot}$”表示．从这个符号可以看出 e 点积的作用：前 e 个指标缩并，后面的点乘．

对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^{p}(\mathbb{R}^{m}), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^{q}(\mathbb{R}^{m}), e \leqslant \min\{p, q\} \in \mathbb{N}^{*}$，$e$ 点积是这样定义的：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi} \binom{e}{\cdot} \boldsymbol{\Psi} \\
={}& \left(\Phi^{i_1 \cdots i_{p-e} i_{p-e+1} \cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}} \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \\
&\binom{e}{\cdot} \left(\Psi^{j_1 \cdots j_e j_{e+1} \cdots j_q} \boldsymbol{g}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_e} \otimes \boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right)
\end{aligned}
$$

把高亮的部分做内积，得到度量：

$$
\begin{aligned}
&\triangleq \Phi^{i_1 \cdots i_{p-e} i_{p-e+1} \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_e j_{e+1} \cdots j_q} \\
&\quad \cdot g_{i_{p-e+1} j_1} \cdots g_{i_p j_e} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right)
\end{aligned}
$$

玩一下“指标升降游戏”(注意有两种结合方式：与 $\boldsymbol{\Phi}$ 或 $\boldsymbol{\Psi}$)，可得

$$
= \left\{
\begin{matrix}
\Phi^{i_1 \cdots i_{p-e}}{}_{j_1 \cdots j_e} \Psi^{j_1 \cdots j_e\, j_{e+1} \cdots j_q} \\
\Phi^{i_1 \cdots i_{p-e}\, i_{p-e+1} \cdots i_p} \Psi_{i_{p-e+1} \cdots i_p}{}^{j_{e+1} \cdots j_q}
\end{matrix}
\right\} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right). \tag{2.3}
$$

最后一步的大括号中，高亮的 $j_1 \cdots j_e$ 和 $i_{p-e+1} \cdots i_p$ 都是哑标，可以通过求和求掉．因此有

$$\boldsymbol{\Phi} \binom{e}{\cdot} \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^{p+q-2e}(\mathbb{R}^m). \tag{2.4}$$

换句话说，e 点积的作用就是将指标哑标化．

作为一个特殊的应用，接下来我们介绍**全点积**，用符号 “$\odot$” 表示．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)$，有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi} \odot \boldsymbol{\Psi} \triangleq \boldsymbol{\Phi} \binom{p}{\cdot} \boldsymbol{\Psi} \\
&= \left(\Phi^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \binom{p}{\cdot} \left(\Psi^{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{g}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_p}\right) \\
&= \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_p j_p} \\
&= \begin{cases} \Phi_{j_1 \cdots j_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} \\ \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{i_1 \cdots i_p} \end{cases} \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

可见，全点积将全部指标哑标化．

张量自身和自身的全点积，定义为它的**范数**：

$$\boldsymbol{\Phi} \odot \boldsymbol{\Phi} = \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p} =: |\boldsymbol{\Phi}|^2_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}. \tag{2.6}$$

2.3 叉乘

张量的**叉乘**要求底空间为 $\mathbb{R}^3$．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p\left(\mathbb{R}^3\right), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^q\left(\mathbb{R}^3\right)$，叉乘的定义如下：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Psi} \\
&= \left(\Phi^{i_1 \cdots i_{p-1} i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-1}} \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \times \left(\Psi_{j_1 j_2 \cdots j_q} \boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right) \\
&\triangleq \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-1}} \otimes \left(\boldsymbol{g}_{i_p} \times \boldsymbol{g}^{j_1}\right) \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q} \in \mathscr{T}^{p+q-1}\left(\mathbb{R}^3\right).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

注意到，此时简单张量的维数已经降了一阶．

利用 **Levi-Civita 记号**，可以进一步展开上式．

$$\boldsymbol{g}_{i_p} \times \boldsymbol{g}^{j_1} = \epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s \boldsymbol{g}^s, \tag{2.8}$$

式中的

$$\epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s = \det\left[\boldsymbol{g}_{i_p}, \boldsymbol{g}^{j_1}, \boldsymbol{g}_s\right]. \tag{2.9}$$

于是

$$\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Psi} = \epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-1}} \otimes \boldsymbol{g}^s \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}. \tag{2.10}$$

下面我们再来类比地定义一种混合积 “$\binom{\times}{\cdot}$”．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，定义

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi} \binom{\times}{\cdot} \boldsymbol{\Psi} &= \left(\Phi^{ijk} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}_k\right) \binom{\times}{\cdot} \left(\Psi_{pqr} \boldsymbol{g}^p \otimes \boldsymbol{g}^q \otimes \boldsymbol{g}^r\right) \\
&\triangleq \Phi^{ijk} \Psi_{pqr} \delta^q_j \boldsymbol{g}_i \otimes \left(\boldsymbol{g}_k \times \boldsymbol{g}^p\right) \otimes \boldsymbol{g}^r
\end{aligned}$$

缩并掉 Kronecker δ，同时利用 Levi-Civita 记号展开叉乘项，可有

$$= \epsilon_{k\ s}^{\ p} \boldsymbol{\Phi}^{ijk} \boldsymbol{\Psi}_{pjr} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^s \otimes \boldsymbol{g}^r, \tag{2.11}$$

式中的

$$\epsilon_{k\ s}^{\ p} = \det\left[\boldsymbol{g}_k, \boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_s\right]. \tag{2.12}$$

对于这种混合积，并没有一般的约定．不同的研究者往往会采用不同的写法及表示．