

# 第一章 张量的定义及表示

## 1.1 对偶基，度量

### 1.1.1 对偶基

$\mathbb{R}^m$  空间中的基可分为两类：指标写在下面的基

$$\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \quad (1.1)$$

称为协变基，指标写在上面的基

$$\{\mathbf{g}^i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \quad (1.2)$$

称为逆变基。它们满足对偶关系：

$$(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j)_{\mathbb{R}^m} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.3)$$

这里的  $\delta_j^i$  是 **Kronecker  $\delta$  函数**。

### 1.1.2 度量

下面引入度量的概念。其定义为

$$\begin{cases} g_{ij} \triangleq (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)_{\mathbb{R}^m}, & (1.4-a) \\ g^{ij} \triangleq (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j)_{\mathbb{R}^m}. & (1.4-b) \end{cases}$$

下面证明

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j. \quad (1.5)$$

它也可以写成矩阵的形式：

$$[g_{ik}][g^{kj}] = [\delta_i^j] = \mathbf{I}_m, \quad (1.6)$$

其中的  $\mathbf{I}_m$  是  $m$  阶单位阵。

证明：

$$g_{ik} g^{kj} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} g^{kj} = (\mathbf{g}_i, g^{kj} \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \quad (1.7)$$

后文将说明  $g^{kj} \mathbf{g}_k = \mathbf{g}^j$ ，因此可得

$$g_{ik} g^{kj} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j)_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \quad (1.8)$$

要注意的是，这里的指标  $k$  是哑标。根据 **Einstein 求和约定**，重复指标并且一上一下时，就表示对它求和。后文除非特殊说明，也均是如此。  $\square$

现在澄清**基向量转换关系**。第  $i$  个协变基向量  $\mathbf{g}_i$  既然是向量，就必然可以用协变基或逆变基来表示。根据对偶关系式 (1.3) 和度量的定义式 (1.4-a)、(1.4-b)，可知

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = g_{ik} \mathbf{g}^k, \\ \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = \delta_i^k \mathbf{g}_k \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.9-a) \\ (1.9-b) \end{matrix}$$

以及

$$\begin{cases} \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = \delta_k^i \mathbf{g}^k, \\ \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = g^{ik} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.10-a) \\ (1.10-b) \end{matrix}$$

这四个式子中，式 (1.9-b) 和 (1.10-a) 是平凡的，而式 (1.9-a) 和 (1.10-b) 则通过度量建立起了协变基与逆变基之间的关系。这就称为基向量转换关系，也可以叫做“指标升降游戏”。

### 1.1.3 向量的分量

对于任意的向量  $\xi \in \mathbb{R}^m$ ，它可以用协变基表示：

$$\xi = (\xi, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = \xi^k \mathbf{g}_k, \quad (1.11)$$

也可以用逆变基表示：

$$\xi = (\xi, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = \xi_k \mathbf{g}^k, \quad (1.12)$$

式中， $\xi^k$  是  $\xi$  与第  $k$  个逆变基做内积的结果，称为  $\xi$  的第  $k$  个**逆变分量**；而  $\xi_k$  是  $\xi$  与第  $k$  个协变基做内积的结果，称为  $\xi$  的第  $k$  个**协变分量**。

以后凡是指标在下的（下标），均称为协变某某；指标在上的（上标），称为逆变某某。

## 1.2 张量的表示

### 1.2.1 张量的表示与简单张量

所谓**张量**，即指**多重线性函数**。

以三阶张量为例。考虑任意的  $\Phi \in \mathcal{J}^3(\mathbb{R}^m)$ ，其中的  $\mathcal{J}^3(\mathbb{R}^m)$  表示以  $\mathbb{R}^m$  为底空间的三阶张量全体。所谓三阶（或三重）线性函数，指“吃掉”三个向量之后变成数，并且“吃法”具有线性性。

对于一般地张量空间  $\mathcal{J}^r(\mathbb{R}^m)$ ，我们引入了线性结构：

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \Phi, \Psi \in \mathcal{J}^r(\mathbb{R}^m), \quad (\alpha\Phi + \beta\Psi)(u_1, u_2, \dots, u_r) \triangleq \alpha\Phi(u_1, u_2, \dots, u_r) + \beta\Psi(u_1, u_2, \dots, u_r), \quad (1.13)$$

于是

$$\alpha\Phi + \beta\Psi \in \mathcal{J}^r(\mathbb{R}^m). \quad (1.14)$$

下面我们要获得  $\Phi$  的表示。根据之前任意向量用协变基或逆变基的表示，有

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m, \quad \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ = \Phi(u^i \mathbf{g}_i, v_j \mathbf{g}^j, w^k \mathbf{g}_k) \end{aligned}$$

考虑到  $\Phi$  对第一变元的线性性，可得

$$= u^i \Phi(g_i, v_j g^j, w^k g_k)$$

同理，

$$= u^i v_j w^k \Phi(g_i, g^j, g_k). \quad (1.15)$$

注意这里自然需要满足 Einstein 求和约定。

上式中的  $\Phi(g_i, g^j, g_k)$  是一个数。它是张量  $\Phi$  “吃掉”三个基向量的结果。至于  $u^i v_j w^k$  部分，三项分别是  $u$  的第  $i$  个逆变分量、 $v$  的第  $j$  个协变分量和  $w$  的第  $k$  个逆变分量。根据向量分量的定义，可知

$$u^i v_j w^k = (u, g^i)_{\mathbb{R}^m} \cdot (v, g_j)_{\mathbb{R}^m} \cdot (w, g^k)_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.16)$$

暂时中断一下思路，先给出简单张量的定义。

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^m, \quad \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, v, w) \triangleq (\xi, u)_{\mathbb{R}^m} \cdot (\eta, v)_{\mathbb{R}^m} \cdot (\zeta, w)_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}, \quad (1.17)$$

式中  $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^m$ ，而暂时把  $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$  理解为一种记号。简单张量作为一个映照，组成它的三个向量分别与它们“吃掉”的第一、二、三个变元做内积并相乘，结果为一个实数。

考虑到内积的线性性，便有（以第二个变元为例）

$$\xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v}, w) \triangleq (\xi, u)_{\mathbb{R}^m} \cdot (\eta, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\zeta, w)_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}$$

注意到  $(\eta, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v})_{\mathbb{R}^m} = \alpha(\eta, \tilde{v})_{\mathbb{R}^m} + \beta(\eta, \hat{v})_{\mathbb{R}^m}$ ，同时再次利用简单张量的定义，可得

$$= \alpha \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \tilde{v}, w) + \beta \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \hat{v}, w). \quad (1.18)$$

类似地，对第一变元和第三变元，同样具有线性性。因此，可以知道

$$\xi \otimes \eta \otimes \zeta \in \mathcal{F}^3(\mathbb{R}^m). \quad (1.19)$$

可见，“简单张量”的名字是名副其实的，它的确是一个特殊的张量。

回过头来看 (1.16) 式。很明显，它可以用简单张量来表示。要注意，由于内积的对称性，可以有两种<sup>①</sup>表示方法：

$$g^i \otimes g_j \otimes g^k(u, v, w) \quad (1.20)$$

或者

$$u \otimes v \otimes w(g^i, g_j, g^k), \quad (1.21)$$

我们这里取上面一种。代入式 (1.15)，得

$$\begin{aligned} & \Phi(u, v, w) \\ &= \Phi(g_i, g^j, g_k) \cdot g^i \otimes g_j \otimes g^k(u, v, w) \end{aligned}$$

<sup>①</sup> 这里只考虑把  $u, v, w$  和  $g^i, g_j, g^k$  分别放在一起的情况。

由于  $\Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k) \in \mathbb{R}^m$ , 因此

$$= [\Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k](\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (1.22)$$

方括号里的部分, 就是根据 Einstein 求和约定, 用  $\Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k)$  对  $\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k$  进行线性组合.

由于  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  选取的任意性, 可以引入如下记号:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k =: \Phi_{i \ k}^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k, \quad (1.23)$$

即

$$\Phi_{i \ k}^j := \Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k), \quad (1.24)$$

这称为张量的分量. 它说明一个张量可以用张量分量和基向量组成的简单张量来表示.

指标  $i, j, k$  的上下是任意的. 这里, 它依赖于式 (1.15) 中基向量的选取. 实际上, 对于这里的三阶张量, 指标的上一共有 8 种可能. 指标全部在下面的, 称为协变分量:

$$\Phi^{ijk} := \Phi(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k); \quad (1.25)$$

指标全部在上面的, 称为逆变分量:

$$\Phi_{ijk} := \Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k); \quad (1.26)$$

其余 6 种, 称为混合分量. 对于一个  $r$  阶张量, 显然共有  $2^r$  种分量表示, 其中协变分量与逆变分量各一种, 混合分量  $2^r - 2$  种.

### 1.2.2 张量分量之间的关系

我们已经知道, 对于任意一个向量  $\xi \in \mathbb{R}^m$ , 它可以用协变基或逆变基表示:

$$\xi = \begin{cases} \xi^i \mathbf{g}_i, \\ \xi_i \mathbf{g}^i. \end{cases} \quad (1.27)$$

式中, 协变分量与逆变分量满足坐标转换关系:

$$\begin{cases} \xi^i = (\xi, \mathbf{g}^i)_{\mathbb{R}^m} = (\xi, g^{ik} \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} (\xi, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} \xi_k, \\ \xi_i = (\xi, \mathbf{g}_i)_{\mathbb{R}^m} = (\xi, g_{ik} \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik} (\xi, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik} \xi^k. \end{cases} \quad (1.28-a)$$

$$(1.28-b)$$

每一式的第二个等号都用到了基向量转换关系, 见式 (1.9-a) 和 (1.10-b).

现在再来考虑张量的分量. 仍以上文中的张量  $\Phi_{i \ k}^j := \Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k)$  为例, 我们想要知道它与张量  $\Phi_q^{p \ r} := \Phi(\mathbf{g}^p, \mathbf{g}_q, \mathbf{g}^r)$  之间的关系. 利用基向量转换关系, 可有

$$\begin{aligned} \Phi_{i \ k}^j &:= \Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k) \\ &= \Phi(g_{ip} \mathbf{g}^p, g^{jq} \mathbf{g}_q, g_{kr} \mathbf{g}^r) \end{aligned}$$

又利用张量的线性性, 得

$$\begin{aligned} &= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \Phi(\mathbf{g}^p, \mathbf{g}_q, \mathbf{g}^r) \\ &= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \Phi_q^{p \ r}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

可见, 张量的分量与向量的分量类似, 其指标升降可通过度量来实现. 用同样的手法, 还可以得到诸如  $\Phi^{ijk} = g^{ip} \Phi_p^{j \ k}$ 、 $\Phi_j^{i \ k} = g_{jp} g^{kq} \Phi_k^{ip}$  这样的关系式.

### 1.2.3 相对不同基的张量分量之间的关系

$\mathbb{R}^m$  空间中, 除了  $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m$  和相应的对偶基  $\{\mathbf{g}^i\}_{i=1}^m$  之外, 当然还可以有其他的基, 比如带括号的  $\{\mathbf{g}_{(i)}\}_{i=1}^m$  以及对应的对偶基  $\{\mathbf{g}^{(i)}\}_{i=1}^m$ . 前者对应形如  $\Phi_j^{i\ k} := \Phi(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k)$  的张量, 后者则对应带括号的张量, 如  $\Phi_{(q)}^{(p)\ (r)} := \Phi(\mathbf{g}^{(p)}, \mathbf{g}_{(q)}, \mathbf{g}^{(r)})$ . 下面我们来探讨这两个张量的关系.

首先来建立基之间的关系. 带括号的第  $i$  个基向量  $\mathbf{g}_{(i)}$ , 作为  $\mathbb{R}^m$  空间中的一个向量, 自然可以用另一组基来表示:

$$\mathbf{g}_{(i)} = \begin{cases} (\mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k, \\ (\mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad (1.30)$$

同理, 自然还有它的对偶基:

$$\mathbf{g}^{(i)} = \begin{cases} (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k, \\ (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad (1.31)$$

引入记号  $c_{(i)}^k := (\mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m}$  和  $c_k^{(i)} := (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m}$ , 那么有

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{(i)} = c_{(i)}^k \mathbf{g}_k, \\ \mathbf{g}^{(i)} = c_k^{(i)} \mathbf{g}^k. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.32\text{-a}) \\ (1.32\text{-b}) \end{matrix}$$

容易看出, 这两个系数具有如下性质:

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = \delta_j^i. \quad (1.33)$$

写成矩阵形式<sup>①</sup>, 为

$$\begin{bmatrix} c_k^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{(j)}^k \end{bmatrix} = [\delta_j^i] = \mathbf{I}_m. \quad (1.34)$$

换句话说, 两个系数矩阵是互逆的.

证明:

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} c_{(j)}^k$$

利用内积的线性性, 有

$$= (\mathbf{g}^{(i)}, c_{(j)}^k \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m}$$

根据  $c_{(j)}^k$  的定义, 得到

$$= (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_{(j)})_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.35)$$

带括号的基同样满足对偶关系 (1.3) 式, 于是得证.  $\square$

上面我们用不带括号的基表示了带括号的基. 反之也是可以的:

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^{(k)})_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_{(k)} = c_i^{(k)} \mathbf{g}_{(k)}, \\ \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_{(k)})_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^{(k)} = c_{(k)}^i \mathbf{g}^{(k)}. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.36\text{-a}) \\ (1.36\text{-b}) \end{matrix}$$

<sup>①</sup> 通常我们约定上面的标号作为行号, 下面的标号作为列号.

这样一来，就建立起了不同基之间的转换关系.

现在我们回到张量. 根据张量分量的定义，

$$\Phi_j^{i \ k} := \Phi(g^i, g_j, g^k)$$

利用之前推导的不同基向量之间的转换关系，得

$$= \Phi\left(c_{(p)}^i g^{(p)}, c_j^{(q)} g_{(q)}, c_{(r)}^k g^{(r)}\right)$$

由张量的线性性，提出系数：

$$\begin{aligned} &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \Phi(g^{(p)}, g_{(q)}, g^{(r)}) \\ &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \Phi_{(q)}^{(p) \ (r)}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

完全类似，还可以有

$$\Phi_{(j)}^{(i) \ (k)} = c_p^{(i)} c_{(j)}^g c_r^{(k)} \Phi_q^{p \ r}. \quad (1.38)$$

总结一下这两小节得到的结果. 对于同一组基下的张量分量，其指标升降通过度量来实现；对于不同基下的张量分量，其指标转换则通过不同基之间的转换系数来完成.

## 第二章 张量的代数运算

### 2.1 张量积

张量积也叫张量并，用符号“ $\otimes$ ”表示。在 1.2.1 小节给出简单张量的定义时，实际上就用到了张量积。张量积的定义为：

$$\begin{aligned} \forall \Phi \in \mathcal{F}^p(\mathbb{R}^m), \Psi \in \mathcal{F}^q(\mathbb{R}^m), \quad \Phi \otimes \Psi &\in \mathcal{F}^{p+q}(\mathbb{R}^m) \\ &= \left( \Phi^{i_1 \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left( \Psi^{j_1 \dots j_q} g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q} \right) \\ &\triangleq \Phi^{i_1 \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_q} \left( g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left( g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

由该定义可以知道，关于简单张量  $\left( g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left( g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q} \right)$ ，相应的张量分量为

$$(\Phi \otimes \Psi)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}. \quad (2.2)$$

### 2.2 $e$ 点积

张量的  $e$  点积可以用符号“ $\binom{e}{\cdot}$ ”表示。从这个符号可以看出  $e$  点积的作用：前  $e$  个指标缩并，后面的点乘。

对于任意的  $\Phi \in \mathcal{F}^p(\mathbb{R}^m), \Psi \in \mathcal{F}^q(\mathbb{R}^m), e \leq \min\{p, q\} \in \mathbb{N}^*$ ， $e$  点积是这样定义的：

$$\begin{aligned} &\Phi \binom{e}{\cdot} \Psi \\ &= \left( \Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}} \otimes g_{i_{p-e+1}} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \\ &\quad \binom{e}{\cdot} \left( \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} g_{j_1} \otimes \dots \otimes g_{j_e} \otimes g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q} \right) \end{aligned}$$

把高亮的部分做内积，得到度量：

$$\begin{aligned} &\triangleq \Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \\ &\quad \cdot g_{i_{p-e+1} j_1} \dots g_{i_p j_e} \left( g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}} \right) \otimes \left( g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q} \right) \end{aligned}$$

玩一下“指标升降游戏”（注意有两种结合方式：与  $\Phi$  或  $\Psi$ ），可得

$$= \left\{ \begin{array}{l} \Phi^{i_1 \dots i_{p-e}} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \\ \Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_e} \end{array} \right\} \left( g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}} \right) \otimes \left( g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q} \right). \quad (2.3)$$

最后一式的大括号中，高亮的  $j_1 \cdots j_e$  和  $i_{p-e+1} \cdots i_p$  都是哑标，所以可以求和求掉。因此有

$$\Phi \binom{e}{\cdot} \Psi \in \mathcal{J}^{p+q-2e}(\mathbb{R}^m). \quad (2.4)$$