第一章　曲线上的标架及其运动方程

1.1　Frenet 标架

1.1.1　$\mathbb{R}^m$ 空间中曲线的表示

$\mathbb{R}^m$ 空间中的**曲线**，就是一个单参数的向量值映照：

$$\boldsymbol{X}(t):\ [\alpha,\beta] \ni t \mapsto \boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} X^1(t) \\ \vdots \\ X^m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

考虑该向量值映照关于参数 t 的变化率

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) \coloneqq \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{X}(t+\Delta t) - \boldsymbol{X}(t)}{\Delta t} \eqqcolon \begin{bmatrix} \dot{X}^1(t) \\ \vdots \\ \dot{X}^m(t) \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

按照物理上的习惯，我们用点表示对 t 的导数．若该极限存在，则称 $\boldsymbol{X}(t) \in \mathbb{R}^m$ 在点 t 处**可微**．此时，$\dot{\boldsymbol{X}}(t)$ 称为曲线 $\boldsymbol{X}(t)$ 的**切向量**．上述极限可以等价地表述为

$$\boldsymbol{X}(t+\Delta t) = \boldsymbol{X}(t) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t). \tag{1.3}$$

在 t_0 处，则可以写成

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}\left(t_0\right) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\left(t_0\right) \cdot \left(t - t_0\right) + o\left(t - t_0\right). \tag{1.4}$$

该方程表示一条直线，称为曲线 $\boldsymbol{X}(t)$ 在 t_0 处的**切线**.

在物理域中，**弧长** s 可以表示为

$$s = \int_\alpha^\beta \left\| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t) \right\|_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}t\,, \tag{1.5}$$

两边对 t 求导，可有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \left\| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t) \right\|_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.6}$$

为了研究问题的方便，我们以后将用弧长作为曲线的参数，即

$$\boldsymbol{r}(s):\ [0, L] \ni s \mapsto \boldsymbol{r}(s) \in \mathbb{R}^m. \tag{1.7}$$

对应的切向量为

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s) \coloneqq \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(s+\Delta s) - \boldsymbol{r}(s)}{\Delta s}. \tag{1.8}$$

根据链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\Big/\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|_{\mathbb{R}^m}, \tag{1.9}$$

因而 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 是一个单位向量，即

$$\|\dot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^m}=1. \tag{1.10}$$

接下来继续对 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 求导：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\coloneqq\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}(s). \tag{1.11}$$

由于 $\|\dot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^m}=1$，因此

$$1=\|\dot{\boldsymbol{r}}(s)\|^2_{\mathbb{R}^m}=\left\langle\dot{\boldsymbol{r}}(s),\,\dot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}, \tag{1.12}$$

两边求导，则有

$$0=\left\langle\ddot{\boldsymbol{r}}(s),\,\dot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}+\left\langle\dot{\boldsymbol{r}}(s),\,\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}=2\cdot\left\langle\ddot{\boldsymbol{r}}(s),\,\dot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.13}$$

内积为零，就意味着正交：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\perp\dot{\boldsymbol{r}}(s). \tag{1.14}$$

现在我们把目光限定在 $\mathbb{R}^3$ 空间中．将 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 和 $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ 分别记为 $\boldsymbol{\tau}(s)$ 和 $\boldsymbol{k}(s)$．如前所述，$\boldsymbol{\tau}(s)$ 已经是单位向量；而 $\boldsymbol{k}(s)$ 仍需作单位化处理，其结果记作 $\boldsymbol{n}(s)$，即

$$\boldsymbol{n}(s)\coloneqq\frac{\boldsymbol{k}(s)}{\|\boldsymbol{k}(s)\|_{\mathbb{R}^3}}=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^3}}. \tag{1.15}$$

最后，只要再令

$$\boldsymbol{b}(s)\coloneqq\boldsymbol{\tau}(s)\times\boldsymbol{n}(s), \tag{1.16}$$

我们便有了 $\mathbb{R}^3$ 空间中的一组单位正交基：

$$\left\{\boldsymbol{\tau}(s),\,\boldsymbol{n}(s),\,\boldsymbol{b}(s)\right\}\subset\mathbb{R}^3, \tag{1.17}$$

它们称作 **Frenet 标架**.

1.1.2 标架运动方程

考虑 Frenet 标架关于弧长参数 s 的变化率，即标架运动方程：

$$\left\{\dot{\boldsymbol{\tau}}(s),\,\dot{\boldsymbol{n}}(s),\,\dot{\boldsymbol{b}}(s)\right\}\subset\mathbb{R}^3. \tag{1.18}$$

为此，我们需要先给出一个引理：设 $\left\{\boldsymbol{e}_i(t)\right\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一组活动单位正交基，它们满足

$$\left\langle\boldsymbol{e}_i(t),\,\boldsymbol{e}_j(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}=\delta_{ij}. \tag{1.19}$$

这组基的导数仍位于 $\mathbb{R}^m$ 空间，用自身展开，可有

$$\left[\dot{\boldsymbol{e}}_1(t),\,\cdots,\,\dot{\boldsymbol{e}}_m(t)\right]=\left[\boldsymbol{e}_1(t),\,\cdots,\,\boldsymbol{e}_m(t)\right]\boldsymbol{P}(t). \tag{1.20}$$

此时，我们有

$$\boldsymbol{P}(t)\in\mathsf{Skw}, \tag{1.21}$$

即 $\boldsymbol{P}(t)$ 是一个反对称矩阵.

证明： 对式 (1.19) 两边求导，得

$$\left\langle \dot{\boldsymbol{e}}_i(t), \boldsymbol{e}_j(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} + \left\langle \boldsymbol{e}_i(t), \dot{\boldsymbol{e}}_j(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = 0 \in \mathbb{R}, \tag{1.22}$$

写成矩阵形式，为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{e}}_1^{\mathsf{T}}(t) \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{e}}_m^{\mathsf{T}}(t) \end{bmatrix} \left[\boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_m(t) \right] + \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathsf{T}}(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_m^{\mathsf{T}}(t) \end{bmatrix} \left[\dot{\boldsymbol{e}}_1(t), \cdots, \dot{\boldsymbol{e}}_m(t) \right] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times m}. \tag{1.23}$$

引入矩阵 $\boldsymbol{E} = \left[\boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_m(t) \right]$，则上式与 (1.20) 式可以分别表示成

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \dot{\boldsymbol{E}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times m} \tag{1.24}$$

和

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E} \boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}. \tag{1.25}$$

两式联立，可有

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \dot{\boldsymbol{E}} & \\ & = \left(\boldsymbol{E} \boldsymbol{P} \right)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \left(\boldsymbol{E} \boldsymbol{P} \right) \\ & = \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} \left(\boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} \right) + \left(\boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} \right) \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{P}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

即 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{P}$. 按照定义，便知 $\boldsymbol{P}(t) \in \mathsf{Skw}$. □