第一章　微分同胚（曲线坐标系）

1.1　微分同胚

1.1.1　双射

设 f 是集合 A 到 B 的映照．如果 A 中不同的元素有不同的像，则称 f 为**单射**（也叫“一对一”）；如果 B 中每个元素都是 A 中元素的像，则称 f 为**满射**；如果 f 既是单射又是满射，则称 f 为**双射**（也叫“一一对应”）．三种情况的示意见图 1.1．

Images/Three_Mappings.PNG

图 1.1: 单射、满射与双射

设开集 $\mathfrak{D}_X, \mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$，它们之间存在双射，即一一对应关系：

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}):\ \mathfrak{D}_x \ni \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{D}_X. \tag{1.1}$$

由于该映照实现了 $\mathfrak{D}_x$ 到 $\mathfrak{D}_X$ 之间的双射，因此它存在逆映照：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}):\ \mathfrak{D}_X \ni \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{X}) \in \mathfrak{D}_x. \tag{1.2}$$

我们把 $\mathfrak{D}_X$ 称为**物理域**，它是实际物理事件发生的区域；$\mathfrak{D}_x$ 则称为**参数域**．由于物理域通常较为复杂，因此我们常把参数域取为规整的形状，以便之后的处理．

设物理量 $f(\boldsymbol{X})$ 定义在物理域 $\mathfrak{D}_X \subset \mathbb{R}^m$ 上[1]，则 f 就定义了一个**场**：

$$f : \mathfrak{D}_X \ni \boldsymbol{X} \mapsto f(\boldsymbol{X}). \tag{1.3}$$

所谓的“场”，就是自变量用位置刻画的映照．它可以是**标量场**，如温度、压强、密度等，此时 $f(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{R}$；也可以是**向量场**，如速度、加速度、力等，此时 $f(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{R}^m$；对于更深入的物理、力学研究，往往还需引入**张量场**，此时 $f(\boldsymbol{X}) \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$．

$\boldsymbol{X}$ 存在于物理域 $\mathfrak{D}_X$ 中，我们称它为**物理坐标**．由于上文已经定义了 $\mathfrak{D}_x$ 到 $\mathfrak{D}_X$ 之间的双射（不是 f！），因此 $\mathfrak{D}_x$ 中就有唯一的 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 相对应，它称为**参数坐标**（也叫**曲线坐标**）．又因为物理域 $\mathfrak{D}_X$ 上已经定义了场 $f(\boldsymbol{X})$，参数域中必然唯一存在场 $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ 与之对应：

$$\tilde{f} : \mathfrak{D}_x \ni \boldsymbol{x} \mapsto \tilde{f}(\boldsymbol{x}) = f \circ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = f\big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\big). \tag{1.4}$$

$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 是完全等价的，因而 $\tilde{f}$ 与 f 也是完全等价的，所以同样有

$$f(\boldsymbol{X}) = \tilde{f}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big). \tag{1.5}$$

物理域中的场要满足守恒定律，如质量守恒、动量守恒、能量守恒等．从数学上看，这些守恒定律就是 $f(\boldsymbol{X})$ 需要满足的一系列偏微分方程．将场变换到参数域后，它仍要满足这些方程．但我们已经设法将参数域取得较为规整，故在其上进行数值求解就会相当方便．

1.1.2 参数域方程

上文已经提到，物理域中的场 $f(\boldsymbol{X})$ 需满足守恒定律，这等价于一系列偏微分方程（PDE）．在物理学和力学中，用到的 PDE 通常是二阶的，它们可以写成

$$\forall\, \boldsymbol{X} \in \mathfrak{D}_X, \quad \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(\boldsymbol{X}) \frac{\partial f}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} B_{\alpha\beta}(\boldsymbol{X}) \frac{\partial^2 f}{\partial X^\beta \partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) = 0 \tag{1.6}$$

的形式．我们的目标是把该物理域方程转化为参数域方程，即关于 $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ 的 PDE．多元微积分中已经提供了解决方案：**链式求导法则**．

考虑到

$$f(\boldsymbol{X}) = \tilde{f}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) = \tilde{f}\big(x^1(\boldsymbol{X}), \cdots, x^m(\boldsymbol{X})\big), \tag{1.7}$$

于是有

$$\frac{\partial f}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \frac{\partial x^s}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}). \tag{1.8}$$

这里用到的链式法则，由复合映照可微性定理驱动，它要求 $\tilde{f}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 可微，同时 $\boldsymbol{x}$ 关于 $\boldsymbol{X}$ 可微．

对于更高阶的项，往往需要更强的条件．一般地，我们要求

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p\big(\mathfrak{D}_x; \mathbb{R}^m\big); & \text{(1.9-a)} \\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) \in \mathscr{C}^p\big(\mathfrak{D}_X; \mathbb{R}^m\big). & \text{(1.9-b)} \end{cases}$$

这里的 $\mathscr{C}^p$ 指直至 p 阶偏导数存在且连续的映照全体；$p = 1$ 时，它就等价于可微．至于 p 的具体取值，则由 PDE 的阶数所决定．

① 实际的物理事件当然只会发生在三维 Euclid 空间中（只就“空间”而言），但在数学上也可以推广到 m 维．

通常情况下，已知条件所给定的往往都是 $\mathfrak{D}_{x}$ 到 $\mathfrak{D}_{X}$ 的映照

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}):\ \mathfrak{D}_{x} \ni \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{D}_{X}, \tag{1.10}$$

用它不好直接得到式 (1.8) 中的 $\partial x^s/\partial X^\alpha$ 项，但获得它的“倒数” $\partial X^\alpha/\partial x^s$ 却很容易，只需利用 **Jacobi 矩阵**：

$$\mathsf{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{m\times m}, \tag{1.11}$$

它是一个方阵.

有了 Jacobi 矩阵，施加一些手法就可以得到所需要的 $\partial x^s/\partial X^\alpha$ 项. 考虑到

$$\forall\, \boldsymbol{X} \in \mathfrak{D}_{X}, \quad \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)=\boldsymbol{X}, \tag{1.12}$$

并且其中的 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$ 均可微，可以得到

$$\mathsf{D}\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\cdot \mathsf{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{I}_m, \tag{1.13}$$

其中的 $\boldsymbol{I}_m$ 是单位阵. 因此

$$\mathsf{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial X^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x^m}{\partial X^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^m}{\partial X^m} \end{bmatrix}(\boldsymbol{X})=(\mathsf{D}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{bmatrix}^{-1}(\boldsymbol{x}). \tag{1.14}$$

用代数的方法总可以求出

$$\varphi^s_\alpha := \frac{\partial x^s}{\partial X^\alpha}, \tag{1.15}$$

它是通过求逆运算确定的函数，即位于矩阵 $\mathsf{D}\boldsymbol{x}$ 第 s 行第 α 列的元素. 这样就有

$$\frac{\partial f}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X})=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\cdot \varphi^s_\alpha\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big). \tag{1.16}$$

接下来处理二阶偏导数. 由上式，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial X^\beta \partial X^\alpha}(\boldsymbol{X})=\sum_{s=1}^{m}\Bigg[&\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^k \partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\cdot\frac{\partial x^s}{\partial X^\beta}(\boldsymbol{X})\right)\cdot\varphi^s_\alpha\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\\ &+\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \varphi^s_\alpha}{\partial x^k}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\cdot\frac{\partial x^k}{\partial X^\beta}(\boldsymbol{X})\right)\Bigg]\end{aligned}$$

继续利用式 (1.15)，有

$$=\sum_{s=1}^{m}\Bigg[\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^k \partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\cdot\varphi^s_\beta\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\right)\cdot\varphi^s_\alpha\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)$$

$$+\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \varphi_\alpha^s}{\partial x^k}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\cdot\varphi_\beta^k\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\right)\Bigg]. \tag{1.17}$$

这样，就把一阶和二阶偏导数项全部用关于 $\boldsymbol{x}$ 的函数[①]表达了出来．换句话说，我们已经把物理域中 f 关于 $\boldsymbol{X}$ 的 PDE，转化成了参数域中 $\tilde{f}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 的 PDE．这就是上文要实现的目标．

1.1.3 微分同胚的定义

上文已经指出了 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 到 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 的映照 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 所需满足的一些条件．这里再次罗列如下:

1. $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}, \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \subset \mathbb{R}^m$ 均为**开集**[②]；
2. 存在 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 同 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 之间的**双射** $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$，即存在**一一对应**关系；
3. $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 和它的逆映照 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$ 满足一定的**正则性**要求．

对第 3 点要稍作说明．

如果满足这三点，则称 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 为 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 与 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 之间的 **$\mathscr{C}^p$-微分同胚**，记为 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p\big(\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}; \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}\big)$．把物理域中的一个部分对应到参数域上的一个部分，需要的仅仅是双射这一条件；而要使得物理域中所满足的 PDE 能够转换到参数域上，就需要“过去”和“回来”都满足 p 阶偏导数连续的条件（即正则性要求）.

有了微分同胚，物理域中的位置就可用参数域中的位置等价地进行刻画．因此我们也把微分同胚称为**曲线坐标系**.

1.2 向量值映照的可微性

1.2.1 可微性的定义

设 $\boldsymbol{x}_0$ 是参数域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 中的一个内点．在映照 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 的作用下，它对应到物理域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 中的点 $\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big)$．参数域是一个开集．根据开集的定义，必然存在一个实数 $\lambda > 0$，使得以 $\boldsymbol{x}_0$ 为球心、λ 为半径的球能够完全落在定义域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 内，即

$$\mathfrak{B}_\lambda\big(\boldsymbol{x}_0\big) \subset \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}, \tag{1.18}$$

其中的 $\mathfrak{B}_\lambda\big(\boldsymbol{x}_0\big)$ 表示 $\boldsymbol{x}_0$ 的 λ 邻域.

如果 $\exists\ \mathsf{D}\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$[③]，满足

$$\forall\, \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \in \mathfrak{B}_\lambda\big(\boldsymbol{x}_0\big), \quad \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\big) - \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big) = \mathsf{D}\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big)(\boldsymbol{h}) + o\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\right) \in \mathbb{R}^m, \tag{1.19}$$

则称向量值映照 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点**可微**．其中，$\mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ 表示从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的**线性变换**全体.

根据这个定义，所谓可微性，指由自变量变化所引起的因变量变化，可以用一个线性变换近似，而误差为一阶无穷小量．自变量可见到因变量空间最简单的映照形式就是线性映照（线性变换），因而具有可微性的向量值映照具有至关重要的作用.

① 当然它仍然是 $\boldsymbol{X}$ 的隐函数：$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$.

② 用形象化的语言来说，如果在区域中的任意一点都可以吹出一个球，并能使球上的每个点都落在区域内，那么这个区域就是**开集**．这是复合映照可微性定理的一个要求.

③ 正如之前已经定义的，$\mathsf{D}\boldsymbol{X}$ 已经用来表示 Jacobi 矩阵．这里还是请先暂时将它视为一种记号，其具体形式将在下一小节给出.

1.2.2 Jacobi 矩阵

下面我们研究 $\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ 的表达形式．由于 $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^m$，所以

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix} = h^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + h^i\boldsymbol{e}_i + \cdots + h^m\boldsymbol{e}_m. \tag{1.20}$$

另一方面，$\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ 具有线性性：

$$\forall\,\alpha,\,\beta \in \mathbb{R} \text{ 和 } \tilde{\boldsymbol{h}},\,\hat{\boldsymbol{h}} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\alpha\tilde{\boldsymbol{h}} + \beta\hat{\boldsymbol{h}}) = \alpha\,\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\tilde{h}) + \beta\,\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\hat{h}). \tag{1.21}$$

这样就有

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) &= \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(h^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + h^i\boldsymbol{e}_i + \cdots + h^m\boldsymbol{e}_m) \\ &= h^1\,\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + h^i\,\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_i) + \cdots + h^m\,\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_m) \end{aligned} \tag{1.22}$$

注意到 $h^i \in \mathbb{R}$ 以及 $\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_i) \in \mathbb{R}^m$，因而该式可以用矩阵形式表述：

$$= \left[\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_1),\,\cdots,\,\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_m)\right]\begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix}. \tag{1.23}$$

最后一步要用到分块矩阵的思想：左侧的矩阵为 1 “行” m 列，每一 “行” 是一个 m 维列向量；右侧的矩阵（向量）则为 m 行 1 列．两者相乘，得到 1 “行” 1 列的矩阵（当然实际为 m 行），即之前的 (1.22) 式．在线性代数中，$m \times m$ 的矩阵 $\left[\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_1) \quad \cdots \quad \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_m)\right]$ 通常称为**变换矩阵**（也叫**过渡矩阵**）.

接下来要搞清楚变换矩阵的具体形式．取

$$\boldsymbol{h} = \left[0,\,\cdots,\,\lambda,\,\cdots,\,0\right]^{\mathsf{T}} = \lambda\,\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^m, \tag{1.24}$$

即除了 $\boldsymbol{h}$ 的第 i 个元素为 λ 外，其余元素均为 0（$\lambda \neq 0$）．因而有 $\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m} = \lambda$．代入可微性的定义 (1.19) 式，可得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0 + \lambda\boldsymbol{e}_i) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0) \\ &= \left[\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_1),\,\cdots,\,\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_i),\,\cdots,\,\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_m)\right]\left[0,\,\cdots,\,\lambda,\,\cdots,\,0\right]^{\mathsf{T}} + o(\lambda) \\ &= \lambda \cdot \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_i) + o(\lambda). \end{aligned} \tag{1.25}$$

由于 λ 是非零实数，故可以在等式两边同时除以 λ 并取极限：

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0 + \lambda\boldsymbol{e}_i) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)}{\lambda} = \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_i), \tag{1.26}$$

这里的 $o(\lambda)$ 根据其定义自然趋于 0．该式左侧极限中的分子部分，是自变量 $\boldsymbol{x}$ 第 i 个分量的变化所引起因变量的变化；而分母，则是自变量第 i 个分量的变化大小．我们引入下面的记号：

$$\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0) \coloneqq \lim_{\lambda\to 0}\frac{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0 + \lambda\boldsymbol{e}_i) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)}{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \tag{1.27}$$

它表示因变量 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^m$ 作为一个整体，相对于自变量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ 第 i 个分量 $x^i \in \mathbb{R}$ 的"变化率"，即 $\boldsymbol{X}$ 关于 x^i（在 $\boldsymbol{x}_0$ 处）的**偏导数**．由于我们没有定义向量的除法，因此自变量作为整体所引起因变量的变化，是没有意义的．利用偏导数的定义，可有

$$\begin{aligned}&\left[\mathsf{D}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\boldsymbol{e}_1\right), \cdots, \mathsf{D}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\boldsymbol{e}_i\right), \cdots, \mathsf{D}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\boldsymbol{e}_m\right)\right]\\ =&\left[\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^1}\left(\boldsymbol{x}_0\right), \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{x}_0\right), \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^m}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\right] \in \mathbb{R}^{m\times m}.\end{aligned} \tag{1.28}$$

下面给出 $\partial\boldsymbol{X}/\partial x^i\ \left(\boldsymbol{x}_0\right)$ 的计算式．根据定义，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{x}_0\right) &:= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{e}_i\right)-\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)}{\lambda} \in \mathbb{R}^m\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\cdot\left(\begin{bmatrix}X^1\\ \vdots\\ X^m\end{bmatrix}\left(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{e}_i\right)-\begin{bmatrix}X^1\\ \vdots\\ X^m\end{bmatrix}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\right)\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\begin{bmatrix}\dfrac{X^1\left(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{e}_i\right)-X^1\left(\boldsymbol{x}_0\right)}{\lambda}\\ \vdots\\ \dfrac{X^m\left(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{e}_i\right)-X^m\left(\boldsymbol{x}_0\right)}{\lambda}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{1.29}$$

向量极限存在的充要条件是各分量极限均存在，即存在

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{x}_0\right) := \lim_{\lambda\to 0}\frac{X^\alpha\left(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{e}_i\right)-X^\alpha\left(\boldsymbol{x}_0\right)}{\lambda} \in \mathbb{R}, \tag{1.30}$$

其中的 $\alpha = 1, \cdots, m$．这其实就是我们熟知的多元函数偏导数的定义．用它来表示向量值映照的偏导数，可有

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{x}_0\right) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial X^1}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\end{bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\boldsymbol{e}_\alpha. \tag{1.31}$$

向量值映照 $\boldsymbol{X}$ 关于 x^i 的偏导数，从代数的角度来看，是 Jacobi 矩阵的第 i 列；从几何的角度来看，则是物理域中 x^i 线的切向量；从计算的角度来看，又是（该映照）每个分量偏导数的组合．

现在我们重新回到 Jacobi 矩阵．情况已经十分明了：只需把之前获得的各列并起来，就可以得到完整的 Jacobi 矩阵．于是

$$\begin{aligned}\mathsf{D}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)(\boldsymbol{h}) &= \left[\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^m}\right]\left(\boldsymbol{x}_0\right)(\boldsymbol{h})\\ &= \begin{bmatrix}\dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^1}{\partial x^m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^m}{\partial x^m}\end{bmatrix}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\cdot\begin{bmatrix}h^1\\ \vdots\\ h^m\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{1.32}$$

这与 1.1.2 小节中 (1.11) 式给出的定义是完全一致的．

1.2.3 偏导数的几何意义

这一小节中，我们要回过头来，澄清向量值映照偏导数的几何意义.

如图 1.2，$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 是定义域空间 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \subset \mathbb{R}^m$ 到值域空间 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}} \subset \mathbb{R}^m$ 的向量值映照. 在定义域空间 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 中，过点 $\boldsymbol{x}_0$ 作一条平行于 x^i 轴的直线，称为 x^i-线. x^i 轴定义了向量 $\boldsymbol{e}_i$，因而 x^i-线上的任意一点均可表示为 $\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_i$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$.

Images/Vector-Value_Mapping.PNG

图 1.2: 向量值映照偏导数的几何意义

在 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 的作用下，点 $\boldsymbol{x}_0$ 被映照到 $\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)$，而 $\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_i$ 则被映照到了 $\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_i\right)$. 这样一来，$x^i$-线也就被映照到了值域空间 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 中，成为一条曲线.

根据前面的定义，当 $\lambda \to 0$ 时，

$$\frac{\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_i\right) - \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)}{\lambda} \to \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{x}_0\right). \tag{1.33}$$

对应到图 1.2 中，就是 x^i-线（值域空间中）在 $\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)$ 处的**切向量**.

完全类似，在定义域空间 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 中，过点 $\boldsymbol{x}_0$ 作出 x^j-线（自然是平行于 x^j 轴），其上的点可以表示为 $\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_j$. 映射到值域空间 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 上，则成为 $\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_j\right)$. 很显然，

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^j}\left(\boldsymbol{x}_0\right) = \frac{\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_j\right) - \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)}{\lambda} \tag{1.34}$$

就是 x^j-线在 $\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)$ 处的切向量. 在定义域空间中，x^i-线作为直线共有 m 条，它们之间互相垂直. 作用到值域空间后，这样的 x^i-线尽管变为了曲线，但仍为 m 条. 相应的切向量，自然也有 m 个.

1.3 局部基

这里的讨论基于曲线坐标系（即微分同胚）$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p\left(\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}; \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}\right)$.

1.3.1 局部协变基

我们已经知道，$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵可以表示为

$$\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})=\left[\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^i},\cdots,\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^m}\right](\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^{m\times m},\tag{1.35}$$

式中的

$$\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})=\lim_{\lambda\to0}\frac{\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_i\right)-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})}{\lambda}.\tag{1.36}$$

在参数域 $\mathfrak{D}_x$ 中作出 x^i-线．映照到物理域后，它变成一条曲线，我们仍称之为 x^i-线．1.2.3 小节已经说明，(1.36) 式表示物理域中 x^i-线的切向量．在张量分析中，我们通常把它记作 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$．

由于微分同胚要求是双射，因而 Jacobi 矩阵

$$\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})=\left[\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_i,\cdots,\boldsymbol{g}_m\right](\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^{m\times m}\tag{1.37}$$

必须是非奇异的．这等价于

$$\left\{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})=\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^m\subset\mathbb{R}^m\tag{1.38}$$

线性无关．由此，它们可以构成 $\mathbb{R}^m$ 上的一组基．

用任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathfrak{D}_x$ 均可构建一组基．但选取不同的 $\boldsymbol{x}$，将会使所得基的取向有所不同．因而这种基称为**局部协变基**．和之前一样，我们用“协变”表示指标在下方．

1.3.2 局部逆变基；对偶关系

有了局部协变基 $\{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1}^m$，根据 **??** 小节中的讨论，必然唯一存在与之对应的**局部逆变基** $\{\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})\}_{i=1}^m$，满足

$$\left[\boldsymbol{g}^1(\boldsymbol{x}),\cdots,\boldsymbol{g}^m(\boldsymbol{x})\right]^{\mathsf{T}}\left[\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{x})\right]=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{g}^1)^{\mathsf{T}}\\ \vdots\\ (\boldsymbol{g}^m)^{\mathsf{T}}\end{bmatrix}(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{I}_m.\tag{1.39}$$

下面我们来寻找逆变基 $\{\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})\}_{i=1}^m$ 的具体表示．考虑到[①]

$$\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\right)=\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^m,\tag{1.40}$$

并利用复合映照可微性定理，可知

$$\mathrm{D}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\right)\cdot\mathrm{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{I}_m,\tag{1.41}$$

即有

$$\mathrm{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})=(\mathrm{D}\boldsymbol{X})^{-1}\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\right).\tag{1.42}$$

于是

$$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{g}^1)^{\mathsf{T}}\\ \vdots\\ (\boldsymbol{g}^m)^{\mathsf{T}}\end{bmatrix}(\boldsymbol{x})=(\mathrm{D}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{x})=\mathrm{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial X^1}&\cdots&\dfrac{\partial x^1}{\partial X^m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \dfrac{\partial x^m}{\partial X^1}&\cdots&\dfrac{\partial x^m}{\partial X^m}\end{bmatrix}(\boldsymbol{X}).\tag{1.43}$$

① 这里的几步推导在 1.1.2 小节中也有所涉及．

这样我们就得到了局部逆变基的具体表示（注意转置）:

$$\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^i}{\partial X^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x^i}{\partial X^m} \end{bmatrix} (\boldsymbol{X}) = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial x^i}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X})\, \boldsymbol{e}_\alpha . \tag{1.44}$$

定义标量场 $f(\boldsymbol{x})$ 的**梯度**为

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) \triangleq \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{e}_\alpha , \tag{1.45}$$

则局部逆变基又可以表示成

$$\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) = \nabla x^i(\boldsymbol{X}). \tag{1.46}$$

此处的梯度实际上就是我们熟知的三维情况在 m 维下的推广.

在 1.2.3 小节中已经指出，局部协变基的几何意义是 x^i-线的切向量. 现在，我们来讨论局部逆变基的几何意义.

Images/Local_Basis.PNG

图 1.3: 局部逆变基的几何意义

如图 1.3 所示，在参数空间中，过点 $\boldsymbol{x}$ 作垂直于 x^i 轴的平面，记为 x^i-面. 在 x^i-面上，自然有 $x^i = \text{const}$. 映照到物理空间后，x^i-面变为一个曲面，其上仍有 $x^i(\boldsymbol{X}) = \text{const}.$，即它是一个等值面. 等值面的梯度方向显然与该曲面的法向相同. 因此，局部逆变基 $\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})$ 的几何意义就是 x^i-面的**法向量**.

现在来验证一下**对偶关系**.

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}), \nabla x^j(\boldsymbol{X})\right)_{\mathbb{R}^m} \\ &= \left(\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{e}_\alpha, \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}(\boldsymbol{X})\, \boldsymbol{e}_\beta\right)_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

利用内积的线性性，有

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}(\boldsymbol{X})\cdot\left(\boldsymbol{e}_\alpha,\boldsymbol{e}_\beta\right)_{\mathbb{R}^m}\\
&= \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}(\boldsymbol{X})\cdot\delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

合并掉指标 β，可得

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial x^j}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X})\\
&= \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial x^j}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X})\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}). \qquad (1.47)
\end{aligned}
$$

最后一步求和号中的第一项位于 Jacobi 矩阵 $\mathrm{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$ 的第 j 行第 α 列，而第二项位于 $\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 的第 α 行第 i 列，因此关于 α 的求和结果便是乘积矩阵的第 j 行第 i 列．根据式 (1.41)，这两个 Jacobi 矩阵的乘积为单位阵，所以有

$$
\left(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \qquad (1.48)
$$

总结一下我们得到的结果．对于体积形态的连续介质，存在着

$$
\begin{cases}
\text{局部协变基：} & \left\{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) \triangleq \dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^{m},\\
\text{局部逆变基：} & \left\{\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) \triangleq \nabla x^i(\boldsymbol{X})\right\}_{i=1}^{m},
\end{cases}
$$

它们满足对偶关系

$$
\left(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \qquad (1.50)
$$

这样，在研究连续介质中的一个点时，我们就有三种基可以使用：局部协变基、局部逆变基，当然还有典则基 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^m$．

1.4 标架运动方程

1.4.1 向量在局部基下的表示

对于 $\mathbb{R}^m$ 空间中的任意一个向量 $\boldsymbol{b}$，它可以用**典则基**表示：

$$
\boldsymbol{b} = \sum_{\alpha=1}^{m} b_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = b_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha. \qquad (1.51)
$$

第二步省略掉了求和号，这是根据 **Einstein 求和约定**：指标出现两次，则表示对它求和．[①] 根据之前一小节的结论，$\boldsymbol{b}$ 还可以用局部协变基和局部逆变基来表示：

$$
\boldsymbol{b} = b^i \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) = b_j \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}), \qquad (1.52)
$$

① 在 **??** 小节中，还要求重复指标一上一下．典则基不分协变、逆变，标号均在下方，可以视为一个特例．

式中，

$$b^i = \big(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})\big)_{\mathbb{R}^m} \tag{1.53-a}$$

和

$$b_j = \big(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x})\big)_{\mathbb{R}^m} \tag{1.53-b}$$

分别称为向量 b 的**逆变分量**和**协变分量**．注意，这里同样用到了 Einstein 求和约定．

将 $\boldsymbol{b} = b^i \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$ 的两边分别与 $\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})$ 作内积，可有

$$\big(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\big)_{\mathbb{R}^m} = \big(b^i \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\big)_{\mathbb{R}^m}$$

利用内积的线性性，提出系数：

$$= b^i \big(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\big)_{\mathbb{R}^m}$$

利用对偶关系 (1.50) 式，可有

$$= b^i \delta_i^j = b^j, \tag{1.54}$$

这就得到了逆变分量的表示式 (1.53-a)．同理，将 $\boldsymbol{b} = b_j \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})$ 的两边分别与 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$ 作内积，就有

$$\big(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\big)_{\mathbb{R}^m} = \big(b_j \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\big)_{\mathbb{R}^m} = b_j \big(\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\big)_{\mathbb{R}^m} = b_j \delta_i^j = b_i, \tag{1.55}$$

这便是协变分量的表示 (1.53-b) 式．

1.4.2 局部基的偏导数

所谓局部基（或曰“活动标架”），顾名思义，它在不同的点上往往是不同的．根据之前的定义，我们有

$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}):\ \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial x^i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^i} \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m, \tag{1.56-a}$$

$$\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}):\ \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^i}{\partial X^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x^i}{\partial X^m} \end{bmatrix}\big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\big) \in \mathbb{R}^m. \tag{1.56-b}$$

从映照的角度来看，局部基定义了新的向量值映照，其定义域仍为参数域，而值域则为 $\mathbb{R}^m$ 空间．这样一来，我们在 1.2 节中所引入的操作均可完全类似地应用在局部基上．例如，我们可以来求局部基的 Jacobi 矩阵：

$$\left\{\begin{aligned} \mathsf{D}\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) &= \left[\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^m}\right](\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{m\times m}, && (1.57\text{-a}) \\ \mathsf{D}\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) &= \left[\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^m}\right](\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{m\times m}. && (1.57\text{-b}) \end{aligned}\right.$$

Jacobi 矩阵中的每一列都是局部基作为整体相对自变量第 j 个分量的变化率，即偏导数：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) \triangleq \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{\boldsymbol{g}_i\big(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_j\big)-\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})}{\lambda} \in \mathbb{R}^m, & \text{(1.58-a)} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) \triangleq \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{\boldsymbol{g}^i\big(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_j\big)-\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})}{\lambda} \in \mathbb{R}^m. & \text{(1.58-b)} \end{cases}$$

下面澄清局部基偏导数的几何意义．如图 1.4 所示，在参数空间中，过点 $\boldsymbol{x}$ 作出 x^j-线，并在其上取点 $\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_j$．分别过点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_j$ 作出 x^i-线，于是 $\partial\boldsymbol{g}_i\big/\partial x^j\,(\boldsymbol{x})$ 就表示 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$（即 x^i-线的切向量）沿 x^j-线的变化率．同理，过点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_j$ 作出 x^i-面，则 $\partial\boldsymbol{g}^i\big/\partial x^j\,(\boldsymbol{x})$ 就表示 $\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})$（即 x^i-面的法向量）沿 x^j-线的变化率．

Images/Local_Basis_PDV_1.PNG

Images/Local_Basis_PDV_2.PNG

图 1.4: 局部基偏导数的几何意义

1.4.3 Christoffel 符号

考察 $\partial\boldsymbol{g}_i\big/\partial x^j\,(\boldsymbol{x})$，即协变基的偏导数①．它是 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一个向量，因而可以用协变基或逆变基来表示：

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k, & \text{(1.59-a)} \\ \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k. & \text{(1.59-b)} \end{cases}$$

引入**第一类 Christoffel 符号**

$$\varGamma_{ji,\,k} \triangleq \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \tag{1.60}$$

和**第二类 Christoffel 符号**

$$\varGamma^k_{\ ji} \triangleq \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}, \tag{1.61}$$

① 以下在不引起歧义之处，将省略局部协变基、局部逆变基的“局部”二字．为了方便，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})$ 中的“$(\boldsymbol{x})$”有时也会省略．

则式 (1.59) 可以写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \Gamma^k{}_{ji}\, \boldsymbol{g}_k\,, & (1.62\text{-a}) \\ \Gamma_{ji,\,k}\, \boldsymbol{g}^k\,. & (1.62\text{-b}) \end{cases}$$

下面我们来探讨 Christoffel 符号的基本性质——指标 i、j 可以交换：

$$\begin{cases} \Gamma^k{}_{ji} = \Gamma^k{}_{ij}\,, & (1.63\text{-a}) \\ \Gamma_{ji,\,k} = \Gamma_{ij,\,k}\,. & (1.63\text{-b}) \end{cases}$$

证明： 根据定义 (1.60) 和 (1.61) 式，指标 i、j 来源于协变基的偏导数 $\partial \boldsymbol{g}_i / \partial x^j\,(\boldsymbol{x})$. 只要偏导数中的 i、j 可以交换，Christoffel 符号中的指标 i、j 自然也可以．回顾协变基的定义(1.56-a) 式：

$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial x^i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^i} \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}). \tag{1.64}$$

其偏导数为

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 X^1}{\partial x^j \partial x^i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^2 X^m}{\partial x^j \partial x^i} \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 X^1}{\partial x^i \partial x^j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j} \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}). \tag{1.65}$$

注意第二个等号处交换了偏导数的次序，其条件是二阶偏导数均存在且连续．只要微分同胚达到了 $\mathscr{C}^2$，就可以满足该要求，在一般的物理情境这都是成立的．于是我们便完成了证明． □

现在再来看逆变基的偏导数 $\partial \boldsymbol{g}^i / \partial x^j\,(\boldsymbol{x})$. 它也是 $\mathbb{R}^m$ 空间中的向量，因此

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k\,, & (1.66\text{-a}) \\ \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k\,. & (1.66\text{-b}) \end{cases}$$

利用 Christoffel 符号，可以表示出 $\left(\partial \boldsymbol{g}^i / \partial x^j\,, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}$. 根据对偶关系，

$$\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}) = \delta^i_k. \tag{1.67}$$

两边对 x^j 求偏导，用一下内积的求导公式，同时注意到 δ^i_k 是与 $\boldsymbol{x}$ 无关的常数，因而

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} + \left(\boldsymbol{g}^i, \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^j}\right)_{\mathbb{R}^m} = \frac{\partial \delta^i_k}{\partial x^j} = 0. \tag{1.68}$$

所以

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = -\left(\boldsymbol{g}^i, \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^j}\right)_{\mathbb{R}^m} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m} = -\Gamma^i{}_{jk}\,. \tag{1.69}$$

至于 $\left(\partial \boldsymbol{g}^i / \partial x^j\,, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}$，将在以后讨论． 你想在什么时候?

1.4.4 指标升降

首先引入**度量**：

$$\begin{cases} g_{ij}(\boldsymbol{x}) \triangleq \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}), & \text{(1.70-a)} \\ g^{ij}(\boldsymbol{x}) \triangleq \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}). & \text{(1.70-b)} \end{cases}$$

由此可以获得基向量的指标升降

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) = g_{ij}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}), & \text{(1.71-a)} \\ \boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) = g^{ij}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}). & \text{(1.71-b)} \end{cases}$$

如前所述，对于任意的 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，它可以表示成

$$\boldsymbol{b} = b^i\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) = b_j\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}). \tag{1.72}$$

利用度量，同样可以获得向量分量的指标升降

$$\begin{cases} b^i = \left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{b}, g^{ik}\boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}\left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}b_k, & \text{(1.73-a)} \\ b_j = \left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{b}, g_{jk}\boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} = g_{jk}\left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} = g_{jk}b^k. & \text{(1.73-b)} \end{cases}$$

关于度量，再多说一句．由于内积的交换律，显然有

$$g_{ij}(\boldsymbol{x}) = g_{ji}(\boldsymbol{x}), \quad g^{ij} = g^{ji}. \tag{1.74}$$

1.4.5 度量的性质；Christoffel 符号的计算

首先，我们来澄清度量的两条性质．

1. 矩阵 $\left[g_{ik}\right]$ 与 $\left[g^{kj}\right]$ 互逆，即

$$g_{ik}\,g^{kj} = \delta_i^j. \tag{1.75}$$

证明见 **??** 小节（尽管省略了“$(\boldsymbol{x})$”，但请不要忘记这里的基是*局部基*）．

2. 第一类 Christoffel 符号满足

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)(\boldsymbol{x}). \tag{1.76}$$

证明： 根据式 (1.60)，第一类 Christoffel 符号的定义为

$$\Gamma_{ij,k} \triangleq \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.77}$$

考虑度量的定义

$$g_{ij}(\boldsymbol{x}) \triangleq \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}). \tag{1.78}$$

两边对 x^k 求偏导，可得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^k}, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}) + \left(\boldsymbol{g}_i, \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^k}\right)_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x})$$

利用上面 Christoffel 符号的定义，有

$$= \Gamma_{ki,\,j} + \Gamma_{kj,\,i}. \tag{1.79}$$

这样就获得了度量偏导数用 Christoffel 符号的表示．但我们需要的却是 Christoffel 符号用度量偏导数的表示．下面的工作就是完成这一“调转”．

利用指标轮换

$$i \to j, \quad j \to k, \quad k \to i,$$

可有

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}) = \Gamma_{ij,\,k} + \Gamma_{ik,\,j}. \tag{1.80}$$

再进行一次指标轮换：

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) = \Gamma_{jk,\,i} + \Gamma_{ji,\,k}. \tag{1.81}$$

以上三式联立，就有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)(\boldsymbol{x})\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\Gamma_{ij,\,k} + \Gamma_{ik,\,j}\right) + \left(\Gamma_{jk,\,i} + \Gamma_{ji,\,k}\right) - \left(\Gamma_{ki,\,j} + \Gamma_{kj,\,i}\right)\right]\end{aligned}$$

利用 (1.63-b) 式所指出的 Christoffel 符号的指标交换性：

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\Gamma_{ij,\,k} + \Gamma_{ki,\,j}\right) + \left(\Gamma_{jk,\,i} + \Gamma_{ij,\,k}\right) - \left(\Gamma_{ki,\,j} + \Gamma_{jk,\,i}\right)\right]$$

高亮部分相互抵消，于是可得

$$= \Gamma_{ij,\,k}. \tag{1.82}$$

□

有了这两条性质，我们就能够很容易地获取 Christoffel 符号的计算方法．

第一步从度量开始．根据 1.3.1 小节，在曲线坐标系（即微分同胚）$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p\left(\mathfrak{D}_x; \mathfrak{D}_X\right)$ 中，Jacobi 矩阵可以用协变基表示为

$$\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \left[\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_i, \cdots, \boldsymbol{g}_m\right](\boldsymbol{x}). \tag{1.83}$$

因此协变形式的度量（矩阵形式）就可以写成

$$\left[g_{ij}\right] \triangleq \left[\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}\right] = \mathrm{D}\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}). \tag{1.84}$$

两种形式的度量是互逆的，于是 g^{ij} 实际上也已经算出来了．

第二步，将求得的度量代入式 (1.76)

$$\Gamma_{ij,\,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)(\boldsymbol{x}), \tag{1.85}$$

就得到了第一类 Christoffel 符号．至于第二类 Christoffel 符号，它可以表示成

$$\Gamma^k_{\cdot ij} \triangleq \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}, g^{kl}\boldsymbol{g}_l\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{kl}\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}, \boldsymbol{g}_l\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{kl}\,\Gamma_{ij,\,l}. \tag{1.86}$$

这样一来，它的表示也就明确了．

1.5 度量张量与 Eddington 张量

1.5.1 度量张量的定义

在曲线坐标系（即微分同胚）$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p\left(\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}; \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}\right)$ 中，可以引入**度量张量**

$$\boldsymbol{I} = g_{ij}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j \in \mathscr{T}^2(\mathbb{R}^m). \tag{1.87}$$

这是用协变形式表达的．当然也可以切换成其他形式：

$$\boldsymbol{I} = g_{ij}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j$$

利用指标升降，有

$$= g_{ij}\left(g^{ik}\, \boldsymbol{g}_k\right) \otimes \boldsymbol{g}^j$$

再根据线性性提出系数：

$$\begin{aligned} &= g_{ij}\, g^{ik}\, \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}^j \\ &= \delta_j^k\, \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}^j . \end{aligned} \tag{1.88}$$

类似地，还可以得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} &= \delta_j^k\, \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}^j \\ &= \delta_j^k\, \boldsymbol{g}_k \otimes \left(g^{jl}\, \boldsymbol{g}_l\right) \\ &= \delta_j^k\, g^{jl}\, \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}_l \\ &= g^{kl}\, \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}_l . \end{aligned} \tag{1.89}$$

综上，度量张量有三种表示：

$$\boldsymbol{I} = \begin{cases} g_{ij}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j, & \text{(1.90-a)} \\ g^{ij}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j, & \text{(1.90-b)} \\ \delta_j^i\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j, & \text{(1.90-c)} \end{cases}$$

式中，协变分量 $g_{ij} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}$，逆变分量 $g^{ij} = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m}$，混合分量 $\delta_j^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}$.

1.5.2 Eddington 张量的定义

接下来引入 **Eddington 张量**

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{ijk}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}^k \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m), \tag{1.91}$$

式中的 $\epsilon_{ijk} = \det\left[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k\right]$．和之前一样，仍是利用指标升降来获得等价定义：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \epsilon_{ijk}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}^k \\ &= \epsilon_{ijk}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \left(g^{jl}\, \boldsymbol{g}_l\right) \otimes \boldsymbol{g}^k \end{aligned}$$

$$= \epsilon_{ijk}\, g^{jl}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{g}^k$$

根据张量分量之间的关系（回顾 **??** 小节），我们有

$$= \epsilon_{i\ k}^{\ l}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{g}^k. \tag{1.92}$$

当然，这里的 $\epsilon_{i\ k}^{\ l}$ 只是一个形式．要将它显式地表达出来，需要利用行列式的线性性：

$$\begin{aligned} \forall\, \boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^3 \text{ 以及 } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad & \det\left[\boldsymbol{\xi}, \alpha\,\hat{\boldsymbol{\eta}} + \beta\,\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\zeta}\right] \\ &= \alpha \det\left[\boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\zeta}\right] + \beta \det\left[\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\zeta}\right]. \end{aligned} \tag{1.93}$$

由此可知

$$\begin{aligned} \epsilon_{i\ k}^{\ l} &= \epsilon_{ijk}\, g^{jl} \\ &= g^{jl} \det\left[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k\right] \\ &= \det\left[\boldsymbol{g}_i, g^{jl}\,\boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k\right] \\ &= \det\left[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^l, \boldsymbol{g}_k\right]. \end{aligned} \tag{1.94}$$

一般来说，张量在定义时，只需给出其分量的一种形式．而其他的形式，则都可以通过度量来获得．说得直白一些，这其实就是一套“指标升降游戏”．

顺带一说，在 Descartes 坐标系下，$\mathbb{R}^3$ 空间中的叉乘可以用 Eddington 张量表示为

$$\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}^j = \begin{cases} \epsilon_i^{\ jk}\, \boldsymbol{g}_k\,, & \text{(1.95-a)} \\ \epsilon_{i\ k}^{\ j}\, \boldsymbol{g}^k. & \text{(1.95-b)} \end{cases}$$

证明： 利用对偶关系可以很容易地获得这一结果．$\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}^j$ 仍然得到一个 $\mathbb{R}^3$ 空间中的向量，它自然可以用协变基来表示：

$$\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}^j = \left(\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k$$

这里的内积也就是点积．根据向量三重积的知识，可以把 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$ 表示成行列式：

$$= \det\left[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k\right] \boldsymbol{g}_k$$

根据 Eddington 张量的定义即得到

$$= \epsilon_i^{\ jk}\, \boldsymbol{g}_k. \tag{1.96}$$

同理，若用逆变基表示，则为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}^j &= \left(\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k \\ &= \det\left[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right] \boldsymbol{g}^k \\ &= \epsilon_{i\ k}^{\ j}\, \boldsymbol{g}^k. \end{aligned} \tag{1.97}$$

□

1.5.3 两种度量的关系

两个 Eddington 张量的分量之积可以用一个由度量张量分量所组成的行列式来表示：

$$\epsilon^{i\ k}_{\ j}\,\epsilon_{pq}^{\ \ \ r} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & g^{ir} \\ g_{jp} & g_{jq} & \delta^r_j \\ \delta^k_p & \delta^k_q & g^{kr} \end{vmatrix}. \tag{1.98}$$

类似矩阵乘法，行列式中第 m 行 n 列的元素，由第一个 Eddington 张量的第 m 个指标与第二个 Eddington 张量的第 n 个指标组合而成．两个指标均在上面，则获得度量张量的逆变分量；两个指标均在下面，则获得协变分量；若是一上一下，则将得到混合分量（即 Kronecker δ）.

这里的 i、j、k 和 p、q、r 都不是哑标，无需考虑求和的限制，可以任意选取．至于它们的上下位置，同样是由实际问题来确定的.

证明： 证明思路就是化为矩阵乘法．根据定义，

$$\epsilon^{i\ k}_{\ j}\,\epsilon_{pq}^{\ \ \ r} = \det\left[\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right]\,\det\left[\boldsymbol{g}_p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r\right]$$

考虑行列式的性质 $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$ 和 $\det\left(\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\right) = \det(\boldsymbol{A})$，则有

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{g}^i\right)^\mathsf{T} \\ \left(\boldsymbol{g}_j\right)^\mathsf{T} \\ \left(\boldsymbol{g}^k\right)^\mathsf{T} \end{bmatrix}\left[\boldsymbol{g}_p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r\right]\right). \tag{1.99}$$

这个矩阵可以直接算出. □

如果 Eddington 张量中存在哑标，情况就会有所不同：

$$\epsilon^{i\ s}_{\ j}\,\epsilon^{p}_{\ qs} = \sum_{s=1}^{3}\begin{vmatrix} g^{ip} & \delta^i_q & \delta^i_s \\ \delta^p_j & g_{jq} & g_{js} \\ g^{sp} & \delta^s_q & \delta^s_s \end{vmatrix}. \tag{1.100}$$

由于式中的 k 是哑标，因此需要对它求和．行列式按第一行展开，可得（下面仍将根据 Einstein 约定省略求和号）

$$\begin{aligned} \epsilon^{i\ s}_{\ j}\,\epsilon^{p}_{\ qs} &= g^{ip}\left(g_{jq}\delta^s_s - g_{js}\delta^s_q\right) - \delta^i_q\left(\delta^p_j\delta^s_s - g_{js}g^{sp}\right) + \delta^i_s\left(\delta^p_j\delta^s_q - g_{jq}g^{sp}\right) \\ &= g^{ip}\left(3g_{jq} - g_{jq}\right) - \delta^i_q\left(3\delta^p_j - \delta^p_j\right) + \left(\delta^p_j\delta^i_q - g_{jq}g^{ip}\right) \\ &= g^{ip}g_{jq} - \delta^p_j\delta^i_q. \end{aligned} \tag{1.101}$$

这一串稍显复杂的表达式，可以用口诀“前前后后，内内外外”来记忆．具体操作如图 1.5 所示.

下面再举两个例子来说明：

$$\epsilon^{ij}_{\ \ s}\,\epsilon_{pq}^{\ \ \ s} = \delta^i_p\delta^j_q - \delta^j_p\delta^i_q; \tag{1.102}$$

$$\epsilon^{ij}_{\ \ s}\,\epsilon^{p\ s}_{\ q} = g^{ip}\delta^j_q - g^{jp}\delta^i_q. \tag{1.103}$$

以后将会看到，这是一个相当重要的基本结构.

Images/Eddington_Tensors_Product.PNG

图 1.5: Eddington 张量乘积口诀“前前后后，内内外外”的示意图

1.6 张量的范数

1.6.1 赋范线性空间

对于一个**线性空间** $\mathscr{V}$，它总是定义了**线性结构**：

$$\forall\, \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V} \text{ 和 } \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha\, \boldsymbol{x} + \beta\, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}. \tag{1.104}$$

为了进一步研究的需要，我们还要引入**范数**的概念．所谓“范数”，就是对线性空间中任意元素大小的一种刻画．举个我们熟悉的例子，m 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 中某个向量的范数，就定义为该向量在 Descartes 坐标下各分量的平方和的平方根．

一般而言，线性空间 $\mathscr{V}$ 中的范数 $\|\cdot\|_{\mathscr{V}}$ 是从 $\mathscr{V}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映照，并且需要满足以下三个条件：

1. **非负性**

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathscr{V}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_{\mathscr{V}} \geqslant 0 \tag{1.105}$$

以及**非退化性**

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathscr{V}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_{\mathscr{V}} = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in \mathscr{V}, \tag{1.106}$$

这里的 $\boldsymbol{0}$ 是线性空间 $\mathscr{V}$ 中的**零元素**，它是唯一存在的．

2. 由于零元是唯一的，因此线性空间中的元素 $\boldsymbol{x}$ 就与从 $\boldsymbol{0}$ 指向它的向量一一对应．因此，线性空间中的元素也常被称为“向量”．

考虑线性空间中的数乘运算．从几何上看，$\boldsymbol{x}$ 乘上 λ，就是将 $\boldsymbol{x}$ 沿着原来的指向进行伸缩．显然有

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathscr{V} \text{ 和 } \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda\, \boldsymbol{x}\|_{\mathscr{V}} = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{x}\|_{\mathscr{V}}, \tag{1.107}$$

这称为**正齐次性**．

想要图吗?

3. 线性空间中的加法满足平行四边形法则．直观地看，就有

$$\forall\, \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}, \quad \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_{\mathscr{V}} \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_{\mathscr{V}} + \|\boldsymbol{y}\|_{\mathscr{V}}, \tag{1.108}$$

这称为**三角不等式**．

定义了范数的线性空间称为**赋范线性空间**．

1.6.2 张量范数的定义

考虑 p 阶张量 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)$，它可以用逆变分量或协变分量来表示：

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{cases} \Phi^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}, & \text{(1.109-a)} \\ \Phi_{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{i_p}, & \text{(1.109-b)} \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \Phi^{i_1 \cdots i_p} = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{i_1}, \cdots, \boldsymbol{g}^{i_p}\right). & \text{(1.110-a)} \\ \Phi_{i_1 \cdots i_p} = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{g}_{i_p}\right), & \text{(1.110-b)} \end{cases}$$

张量的**范数**定义为

$$\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)} \triangleq \sqrt{\Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p}} \in \mathbb{R}. \tag{1.111}$$

$i_1 \cdots i_p$ 可独立取值，每个又有 m 种取法，所以根号下共有 m^p 项．注意 $\Phi^{i_1 \cdots i_p}$ 与 $\Phi_{i_1 \cdots i_p}$ 未必相等，因而根号下的部分未必是平方和，这与 Euclid 空间中向量的模是不同的．

复习一下 **??** 小节，我们可以用另一组（带括号的）基表示张量 $\boldsymbol{\Phi}$：

$$\begin{cases} \Phi^{i_1 \cdots i_p} = c^{i_1}_{(\xi_1)} \cdots c^{i_p}_{(\xi_p)} \Phi^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)}, & \text{(1.112-a)} \\ \Phi_{i_1 \cdots i_p} = c^{(\eta_1)}_{i_1} \cdots c^{(\eta_p)}_{i_p} \Phi_{(\eta_1) \cdots (\eta_p)}, & \text{(1.112-b)} \end{cases}$$

其中的 $c^i_{(\xi)} = \left(\boldsymbol{g}_{(\xi)}, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m}$，$c^{(\eta)}_i = \left(\boldsymbol{g}^{(\eta)}, \boldsymbol{g}_i\right)_{\mathbb{R}^m}$，它们满足

$$c^i_{(\xi)} c^{(\eta)}_i = \delta^{(\eta)}_{(\xi)}. \tag{1.113}$$

于是

$$\begin{aligned} & \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p} \\ = & \left(c^{i_1}_{(\xi_1)} \cdots c^{i_p}_{(\xi_p)} \Phi^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)}\right)\left(c^{(\eta_1)}_{i_1} \cdots c^{(\eta_p)}_{i_p} \Phi_{(\eta_1) \cdots (\eta_p)}\right) \\ = & \left(c^{i_1}_{(\xi_1)} c^{(\eta_1)}_{i_1}\right) \cdots \left(c^{i_p}_{(\xi_p)} c^{(\eta_p)}_{i_p}\right) \Phi^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)} \Phi_{(\eta_1) \cdots (\eta_p)} \\ = & \delta^{(\eta_1)}_{(\xi_1)} \cdots \delta^{(\eta_p)}_{(\xi_p)} \Phi^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)} \Phi_{(\eta_1) \cdots (\eta_p)} \\ = & \Phi^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)} \Phi_{(\xi_1) \cdots (\xi_p)}. \end{aligned} \tag{1.114}$$

它是 $\boldsymbol{\Phi}$ 在另一组基下的逆变分量与协变分量乘积之和．

以上结果说明，张量的范数不依赖于基的选取，这就好比用不同的秤来称同一个人的体重，都将获得相同的结果．既然如此，不妨采用单位正交基来表示张量的范数：

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)} & \triangleq \sqrt{\Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p}} \\ & = \sqrt{\Phi^{\langle i_1 \rangle \cdots \langle i_p \rangle} \Phi_{\langle i_1 \rangle \cdots \langle i_p \rangle}} \\ & =: \sqrt{\sum_{i_1, \cdots, i_p = 1}^m \left(\Phi_{\langle i_1, \cdots, i_p \rangle}\right)^2}. \end{aligned} \tag{1.115}$$

这里的 $\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}$ 表示张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 在单位正交基下的分量，它的指标不区分上下.

有了这样的表示，很容易就可以验证张量范数符合之前的三个要求. 一组数的平方和开根号，必然是非负的. 至于非退化性，若范数为零，则所有分量均为零，自然成为零张量；反之，对于零张量，所有分量为零，范数也为零. 将 $\boldsymbol{\Phi}$ 乘上 λ，则有

$$\begin{aligned}
\|\lambda\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)} &= \sqrt{\sum\nolimits_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\left(\lambda\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2} \\
&= \sqrt{\lambda^2\sum\nolimits_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2} \\
&= |\lambda|\sqrt{\sum\nolimits_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2} \\
&= |\lambda|\cdot\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)},
\end{aligned}\tag{1.116}$$

于是正齐次性也得以验证. 最后，利用 Cauchy–Schwarz 不等式，可有

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Psi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\
={}& \sum\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}+\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2 \\
={}& \sum\left[\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2+2\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}+\left(\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2\right] \\
={}& \sum\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2+2\sum\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}+\sum\left(\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2 \\
\leqslant{}& \|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2+2\sqrt{\sum\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2}\sqrt{\sum\left(\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2}+\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\
={}& \|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2+2\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}\cdot\|\boldsymbol{\Psi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}+\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\
={}& \left(\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}+\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}\right)^2.
\end{aligned}\tag{1.117}$$

两边开方，即为三角不等式.