第一章　曲线上的标架及其运动方程

1.1　Frenet 标架

$\mathbb{R}^m$ 空间中的**曲线**，就是一个单参数的向量值映照：

$$\boldsymbol{X}(\lambda):\ [\alpha,\beta] \ni \lambda \mapsto \boldsymbol{X}(\lambda) = \begin{bmatrix} X^1(\lambda) \\ \vdots \\ X^m(\lambda) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

下面我们来研究

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{\boldsymbol{X}(\lambda+\Delta\lambda)-\boldsymbol{X}(\lambda)}{\Delta\lambda} =: \begin{bmatrix} \dot{X}^1(\lambda) \\ \vdots \\ \dot{X}^m(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

若该极限存在，则称 $\boldsymbol{X}(\lambda) \in \mathbb{R}^m$ 在点 λ 处**可微**．此时，$\mathrm{d}\boldsymbol{X}\big/\mathrm{d}\lambda$ 称为曲线 $\boldsymbol{X}(\lambda)$ 的**切向量**.

上述极限可以等价地表述为

$$\boldsymbol{X}(\lambda+\Delta\lambda) = \boldsymbol{X}(\lambda) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)\cdot\Delta\lambda + \boldsymbol{o}(\Delta\lambda). \tag{1.3}$$

在 λ_0 处，则可以写成

$$\boldsymbol{X}(\lambda) = \boldsymbol{X}\left(\lambda_0\right) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\lambda_0\right)\cdot\left(\lambda-\lambda_0\right) + \boldsymbol{o}\left(\lambda-\lambda_0\right). \tag{1.4}$$

该方程表示一条直线，称为曲线 $\boldsymbol{X}(\lambda)$ 在 λ_0 处的**切线**.