

# 第一章 张量的定义及表示

## 1.1 对偶基，度量

### 1.1.1 对偶基

$\mathbb{R}^m$  空间中的基可分为两类：指标写在下面的基

$$\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m$$

称为协变基，指标写在上面的基

$$\{\mathbf{g}^i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m$$

称为逆变基。它们满足对偶关系：

$$(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j)_{\mathbb{R}^m} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.1)$$

这里的  $\delta_j^i$  是 **Kronecker  $\delta$  函数**。

### 1.1.2 度量

下面引入度量的概念。其定义为

$$\begin{cases} g_{ij} \triangleq (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)_{\mathbb{R}^m}, & (1.2-a) \\ g^{ij} \triangleq (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j)_{\mathbb{R}^m}. & (1.2-b) \end{cases}$$

下面证明

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j. \quad (1.3)$$

它也可以写成矩阵的形式：

$$[g_{ik}][g^{kj}] = [\delta_i^j] = \mathbf{I}_m, \quad (1.4)$$

其中的  $\mathbf{I}_m$  是  $m$  阶单位阵。

证明：

$$g_{ik} g^{kj} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} g^{kj} = (\mathbf{g}_i, g^{kj} \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \quad (1.5)$$

后文将说明  $g^{kj} \mathbf{g}_k = \mathbf{g}^j$ ，因此可得

$$g_{ik} g^{kj} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j)_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \quad (1.6)$$

要注意的是，这里的指标  $k$  是哑标。根据 **Einstein 求和约定**，重复指标并且一上一下时，就表示对它求和。后文除非特殊说明，也均是如此。  $\square$

现在澄清**基向量转换关系**。第  $i$  个协变基向量  $\mathbf{g}_i$  既然是向量，就必然可以用协变基或逆变基来表示。根据对偶关系式 (1.1) 和度量的定义式 (1.2-a)、(1.2-b)，可知

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = g_{ik} \mathbf{g}^k, \\ \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = \delta_i^k \mathbf{g}_k \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.7-a) \\ (1.7-b) \end{matrix}$$

以及

$$\begin{cases} \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = \delta_k^i \mathbf{g}^k, \\ \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = g^{ik} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.8-a) \\ (1.8-b) \end{matrix}$$

这四个式子中，式 (1.7-b) 和 (1.8-a) 是平凡的，而式 (1.7-a) 和 (1.8-b) 则通过度量建立起了协变基与逆变基之间的关系。这就称为基向量转换关系，也可以叫做“指标升降游戏”。

### 1.1.3 向量的分量

对于任意的向量  $\xi \in \mathbb{R}^m$ ，它可以用协变基表示：

$$\xi = (\xi, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = \xi^k \mathbf{g}_k, \quad (1.9)$$

也可以用逆变基表示：

$$\xi = (\xi, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = \xi_k \mathbf{g}^k, \quad (1.10)$$

式中， $\xi^k$  是  $\xi$  与第  $k$  个逆变基做内积的结果，称为  $\xi$  的第  $k$  个**逆变分量**；而  $\xi_k$  是  $\xi$  与第  $k$  个协变基做内积的结果，称为  $\xi$  的第  $k$  个**协变分量**。

以后凡是指标在下的（下标），均称为协变某某；指标在上的（上标），称为逆变某某。

## 1.2 张量的表示

### 1.2.1 张量的表示与简单张量

所谓**张量**，即指**多重线性函数**。

以三阶张量为例。考虑任意的  $\Phi \in \mathcal{J}^3(\mathbb{R}^m)$ ，其中的  $\mathcal{J}^3(\mathbb{R}^m)$  表示以  $\mathbb{R}^m$  为底空间的三阶张量全体。所谓三阶（或三重）线性函数，指“吃掉”三个向量之后变成数，并且“吃法”具有线性性。

对于一般地张量空间  $\mathcal{J}^r(\mathbb{R}^m)$ ，我们引入了线性结构：

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \Phi, \Psi \in \mathcal{J}^r(\mathbb{R}^m), \quad (\alpha \Phi + \beta \Psi)(u_1, u_2, \dots, u_r) \\ \triangleq \alpha \Phi(u_1, u_2, \dots, u_r) + \beta \Psi(u_1, u_2, \dots, u_r), \end{aligned} \quad (1.11)$$

于是

$$\alpha \Phi + \beta \Psi \in \mathcal{J}^r(\mathbb{R}^m). \quad (1.12)$$

下面我们要获得  $\Phi$  的表示。根据之前任意向量用协变基或逆变基的表示，有

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m, \quad \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$= \Phi(u^i g_i, v_j g^j, w^k g_k)$$

考虑到  $\Phi$  对第一变元的线性性，可得

$$= u^i, \Phi(g_i, v_j g^j, w^k g_k)$$

同理，

$$= u^i v_j w^k, \Phi(g_i, g^j, g_k). \quad (1.13)$$

注意这里自然需要满足 Einstein 求和约定.

上式中的  $\Phi(g_i, g^j, g_k)$  是一个数. 它是张量  $\Phi$  “吃掉”三个基向量的结果. 至于  $u^i v_j w^k$  部分, 三项分别是  $u$  的第  $i$  个逆变分量、 $v$  的第  $j$  个协变分量和  $w$  的第  $k$  个逆变分量. 根据向量分量的定义, 可知

$$u^i v_j w^k = (u, g^i)_{\mathbb{R}^m} \cdot (v, g_j)_{\mathbb{R}^m} \cdot (w, g^k)_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.14)$$

暂时中断一下思路, 先给出简单张量的定义.

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^m, \quad \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, v, w) \triangleq (\xi, u)_{\mathbb{R}^m} \cdot (\eta, v)_{\mathbb{R}^m} \cdot (\zeta, w)_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}, \quad (1.15)$$

式中  $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^m$ , 而暂时把  $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$  理解为一种记号. 简单张量作为一个映照, 组成它的三个向量分别与它们“吃掉”的第一、二、三个变元做内积并相乘, 结果为一个实数.

考虑到内积的线性性, 便有 (以第二个变元为例)

$$\xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v}, w) \triangleq (\xi, u)_{\mathbb{R}^m} \cdot (\eta, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\zeta, w)_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}$$

注意到  $(\eta, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v})_{\mathbb{R}^m} = \alpha(\eta, \tilde{v})_{\mathbb{R}^m} + \beta(\eta, \hat{v})_{\mathbb{R}^m}$ , 同时再次利用简单张量的定义, 可得

$$= \alpha \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \tilde{v}, w) + \beta \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \hat{v}, w). \quad (1.16)$$

类似地, 对第一变元和第三变元, 同样具有线性性. 因此, 可以知道

$$\xi \otimes \eta \otimes \zeta \in \mathcal{F}^3(\mathbb{R}^m). \quad (1.17)$$

可见, “简单张量”的名字是名副其实的, 它的确是一个特殊的张量.

回过头来看 (1.14) 式. 很明显, 它可以用简单张量来表示. 要注意, 由于内积的对称性, 可以有两种<sup>①</sup>表示方法:

$$g^i \otimes g_j \otimes g^k(u, v, w) \quad (1.18)$$

或者

$$u \otimes v \otimes w(g^i, g_j, g^k), \quad (1.19)$$

我们这里取上面一种. 代入式 (1.13), 得

$$\Phi(u, v, w)$$

<sup>①</sup> 这里只考虑把  $u, v, w$  和  $g^i, g_j, g^k$  分别放在一起的情况.

$$= \Phi(g_i, g^j, g_k) \cdot g^i \otimes g_j \otimes g^k(u, v, w)$$

由于  $\Phi(g_i, g^j, g_k) \in \mathbb{R}^m$ ，因此

$$= [\Phi(g_i, g^j, g_k) g^i \otimes g_j \otimes g^k](u, v, w). \quad (1.20)$$

方括号里的部分，就是根据 Einstein 求和约定，用  $\Phi(g_i, g^j, g_k)$  对  $g^i \otimes g_j \otimes g^k$  进行线性组合。

由于  $u, v, w$  选取的任意性，可以引入如下记号：

$$\Phi = \Phi(g_i, g^j, g_k) g^i \otimes g_j \otimes g^k =: \Phi_{i \ k}^j g^i \otimes g_j \otimes g^k, \quad (1.21)$$

即

$$\Phi_{i \ k}^j := \Phi(g_i, g^j, g_k), \quad (1.22)$$

这称为张量的分量。它说明一个张量可以用张量分量和基向量组成的简单张量来表示。

指标  $i, j, k$  的上下是任意的。这里，它依赖于式 (1.13) 中基向量的选取。实际上，对于这里的三阶张量，指标的上一共有 8 种可能。指标全部在下面的，称为协变分量：

$$\Phi^{ijk} := \Phi(g^i, g^j, g^k); \quad (1.23)$$

指标全部在上面的，称为逆变分量：

$$\Phi_{ijk} := \Phi(g_i, g_j, g_k); \quad (1.24)$$

其余 6 种，称为混合分量。对于一个  $r$  阶张量，显然共有  $2^r$  种分量表示，其中协变分量与逆变分量各一种，混合分量  $2^r - 2$  种。

### 1.2.2 张量分量之间的关系

我们已经知道，对于任意一个向量  $\xi \in \mathbb{R}^m$ ，它可以用协变基或逆变基表示：

$$\xi = \begin{cases} \xi^i g_i, \\ \xi_i g^i. \end{cases} \quad (1.25)$$

式中，协变分量与逆变分量满足坐标转换关系：

$$\begin{cases} \xi^i = (\xi, g^i)_{\mathbb{R}^m} = (\xi, g^{ik} g_k)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} (\xi, g_k)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} \xi_k, \\ \xi_i = (\xi, g_i)_{\mathbb{R}^m} = (\xi, g_{ik} g^k)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik} (\xi, g^k)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik} \xi^k. \end{cases} \quad (1.26-a)$$

$$\quad (1.26-b)$$

每一式的第二个等号都用到了基向量转换关系，见式 (1.7-a) 和 (1.8-b)。

现在再来考虑张量的分量。仍以上文中的张量  $\Phi_{i \ k}^j := \Phi(g_i, g^j, g_k)$  为例，我们想要知道它与张量  $\Phi_q^{p \ r} := \Phi(g^p, g_q, g^r)$  之间的关系。利用基向量转换关系，可有

$$\begin{aligned} \Phi_{i \ k}^j &:= \Phi(g_i, g^j, g_k) \\ &= \Phi(g_{ip} g^p, g^{jq} g_q, g_{kr} g^r) \end{aligned}$$

又利用张量的线性性，得

$$\begin{aligned} &= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \Phi(g^p, g_q, g^r) \\ &= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \Phi_q^{p \ r}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

可见，张量的分量与向量的分量类似，其指标升降可通过度量来实现。用同样的手法，还可以得到诸如  $\Phi^{ijk} = g^{ip} \Phi_p^{j \ k}$ 、 $\Phi_j^{i \ k} = g_{jp} g^{kq} \Phi_k^{ip}$  这样的关系式。

### 1.2.3 相对不同基的张量分量之间的关系

$\mathbb{R}^m$  空间中，除了  $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m$  和相应的对偶基  $\{\mathbf{g}^i\}_{i=1}^m$  之外，当然还可以有其他的基，比如带括号的  $\{\mathbf{g}_{(i)}\}_{i=1}^m$  以及对应的对偶基  $\{\mathbf{g}^{(i)}\}_{i=1}^m$ 。前者对应形如  $\Phi_{j^k}^i := \Phi(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k)$  的张量，后者则对应带括号的张量，如  $\Phi_{(q)}^{(p)(r)} := \Phi(\mathbf{g}^{(p)}, \mathbf{g}_{(q)}, \mathbf{g}^{(r)})$ 。下面我们来探讨这两个张量的关系。

首先来建立基之间的关系。带括号的第  $i$  个基向量  $\mathbf{g}_{(i)}$ ，作为  $\mathbb{R}^m$  空间中的一个向量，自然可以用另一组基来表示：

$$\mathbf{g}_{(i)} = \begin{cases} (\mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k, \\ (\mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad (1.28)$$

同理，自然还有它的对偶基：

$$\mathbf{g}^{(i)} = \begin{cases} (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k, \\ (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad (1.29)$$

引入记号  $c_{(i)}^k := (\mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m}$  和  $c_k^{(i)} := (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m}$ ，那么有

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{(i)} = c_{(i)}^k \mathbf{g}_k, \\ \mathbf{g}^{(i)} = c_k^{(i)} \mathbf{g}^k. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.30\text{-a}) \\ (1.30\text{-b}) \end{matrix}$$

容易看出，这两个系数具有如下性质：

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = \delta_j^i. \quad (1.31)$$

写成矩阵形式<sup>①</sup>，为

$$\begin{bmatrix} c_k^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{(j)}^k \end{bmatrix} = [\delta_j^i] = \mathbf{I}_m. \quad (1.32)$$

换句话说，两个系数矩阵是互逆的。

证明：

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} c_{(j)}^k$$

利用内积的线性性，有

$$= (\mathbf{g}^{(i)}, c_{(j)}^k \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m}$$

根据  $c_{(j)}^k$  的定义，得到

$$= (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_{(j)})_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.33)$$

带括号的基同样满足对偶关系 (1.1) 式，于是得证。□

上面我们用不带括号的基表示了带括号的基。反之也是可以的：

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^{(k)})_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_{(k)} = c_i^{(k)} \mathbf{g}_{(k)}, \\ \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_{(k)})_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^{(k)} = c_{(k)}^i \mathbf{g}^{(k)}. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.34\text{-a}) \\ (1.34\text{-b}) \end{matrix}$$

① 通常我们约定上面的标号作为行号，下面的标号作为列号。

这样一来，就建立起了不同基之间的转换关系.

现在我们回到张量. 根据张量分量的定义，

$$\Phi_j^{i \ k} := \Phi(g^i, g_j, g^k)$$

利用之前推导的不同基向量之间的转换关系，得

$$= \Phi\left(c_{(p)}^i g^{(p)}, c_j^{(q)} g_{(q)}, c_{(r)}^k g^{(r)}\right)$$

由张量的线性性，提出系数：

$$\begin{aligned} &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \Phi(g^{(p)}, g_{(q)}, g^{(r)}) \\ &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \Phi_{(q)}^{(p) \ (r)}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

完全类似，还可以有

$$\Phi_{(j)}^{(i) \ (k)} = c_p^{(i)} c_{(j)}^g c_r^{(k)} \Phi_q^{p \ r}. \quad (1.36)$$

总结一下这两小节得到的结果. 对于同一组基下的张量分量，其指标升降通过度量来实现；对于不同基下的张量分量，其指标转换则通过不同基之间的转换系数来完成.

## 第二章 张量的运算性质

### 2.1 张量积

张量积也叫张量并，用符号“ $\otimes$ ”表示。在 1.2.1 小节给出简单张量的定义时，实际上就用到了张量积。张量积的定义为：

$$\begin{aligned} \forall \Phi \in \mathcal{J}^p(\mathbb{R}^m), \Psi \in \mathcal{J}^q(\mathbb{R}^m), \quad \Phi \otimes \Psi &\in \mathcal{J}^{p+q}(\mathbb{R}^m) \\ &= (\Phi^{i_1 \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}) \otimes (\Psi^{j_1 \dots j_q} g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q}) \\ &\triangleq \Phi^{i_1 \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_q} (g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}) \otimes (g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

由该定义可以知道，关于简单张量  $(g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}) \otimes (g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q})$ ，相应的张量分量为

$$(\Phi \otimes \Psi)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}. \quad (2.2)$$

### 2.2 $e$ 点积

张量的  $e$  点积可以用符号“ $\binom{e}{\cdot}$ ”表示。从这个符号可以看出  $e$  点积的作用：前  $e$  个指标缩并，后面的点乘。

对于任意的  $\Phi \in \mathcal{J}^p(\mathbb{R}^m), \Psi \in \mathcal{J}^q(\mathbb{R}^m), e \leq \min\{p, q\} \in \mathbb{N}^*$ ， $e$  点积是这样定义的：

$$\begin{aligned} &\Phi \binom{e}{\cdot} \Psi \\ &= \left( \Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}} \otimes g_{i_{p-e+1}} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \\ &\quad \binom{e}{\cdot} \left( \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} g_{j_1} \otimes \dots \otimes g_{j_e} \otimes g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q} \right) \end{aligned}$$

把高亮的部分做内积，得到度量：

$$\begin{aligned} &\triangleq \Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \\ &\quad g_{i_{p-e+1} j_1} \dots g_{i_p j_e} (g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}}) \otimes (g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q}) \end{aligned}$$

玩一下“指标升降游戏”（注意有两种结合方式：与  $\Phi$  或  $\Psi$ ），可得

$$= \left\{ \begin{array}{l} \Phi^{i_1 \dots i_{p-e}} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \\ \Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \end{array} \right\} (g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}}) \otimes (g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q}). \quad (2.3)$$

最后一步的大括号中，高亮的  $j_1 \cdots j_e$  和  $i_{p-e+1} \cdots i_p$  都是哑标，可以通过求和求掉。因此有

$$\Phi \binom{e}{\cdot} \Psi \in \mathcal{J}^{p+q-2e}(\mathbb{R}^m). \quad (2.4)$$

换句话说， $e$  点积的作用就是将指标哑标化。

作为一个特殊的应用，接下来我们介绍全点积，用符号 “ $\odot$ ” 表示。对于任意的  $\Phi, \Psi \in \mathcal{J}^p(\mathbb{R}^m)$ ，有

$$\begin{aligned} \Phi \odot \Psi &\triangleq \Phi \binom{p}{\cdot} \Psi \\ &= \left( \Phi^{i_1 \cdots i_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_p} \right) \binom{p}{\cdot} \left( \Psi^{j_1 \cdots j_p} g_{j_1} \otimes \cdots \otimes g_{j_p} \right) \\ &= \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_p j_p} \\ &= \begin{cases} \Phi_{j_1 \cdots j_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} \\ \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{i_1 \cdots i_p} \end{cases} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

可见，全点积将全部指标哑标化。

张量自身和自身的全点积，定义为它的范数：

$$\Phi \odot \Phi = \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p} =: |\Phi|_{\mathcal{J}^p(\mathbb{R}^m)}^2. \quad (2.6)$$

## 2.3 叉乘

张量的叉乘要求底空间为  $\mathbb{R}^3$ 。对于任意的  $\Phi \in \mathcal{J}^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $\Psi \in \mathcal{J}^q(\mathbb{R}^3)$ ，叉乘的定义如下：

$$\begin{aligned} \Phi \times \Psi &= \left( \Phi^{i_1 \cdots i_{p-1} i_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_{p-1}} \otimes g_{i_p} \right) \times \left( \Psi^{j_1 j_2 \cdots j_q} g^{j_1} \otimes g^{j_2} \cdots \otimes g^{j_q} \right) \\ &\triangleq \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_{p-1}} \otimes \left( g_{i_p} \times g^{j_1} \right) \otimes g^{j_2} \cdots \otimes g^{j_q} \in \mathcal{J}^{p+q-1}(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (2.7)$$

注意到，此时简单张量的维数已经降了一阶。

利用 Levi-Civita 记号，可以进一步展开上式。

$$g_{i_p} \times g^{j_1} = \epsilon_{i_p}^{j_1} g^s, \quad (2.8)$$

式中的

$$\epsilon_{i_p}^{j_1} = \det \left[ g_{i_p}, g^{j_1}, g_s \right]. \quad (2.9)$$

于是

$$\Phi \times \Psi = \epsilon_{i_p}^{j_1} \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_{p-1}} \otimes g^s \otimes g^{j_2} \cdots \otimes g^{j_q}. \quad (2.10)$$

下面我们再来类比地定义一种混合积 “ $\binom{\times}{\cdot}$ ”。对于任意的  $\Phi, \Psi \in \mathcal{J}^3(\mathbb{R}^m)$ ，定义

$$\begin{aligned} \Phi \binom{\times}{\cdot} \Psi &= \left( \Phi^{ijk} g_i \otimes g_j \otimes g_k \right) \binom{\times}{\cdot} \left( \Psi_{pqr} g^p \otimes g^q \otimes g^r \right) \\ &\triangleq \Phi^{ijk} \Psi_{pqr} \delta_j^q g_i \otimes (g_k \times g^p) \otimes g^r \end{aligned}$$



缩并掉 Kronecker  $\delta$ ，同时利用 Levi-Civita 记号展开叉乘项，可有

$$= \epsilon_{k\ s}^p \Phi^{ijk} \Psi_{pjr} g_i \otimes g^s \otimes g^r, \quad (2.11)$$

式中的

$$\epsilon_{k\ s}^p = \det[g_k, g^p, g_s]. \quad (2.12)$$

对于这种混合积，并没有一般的约定。不同的研究者往往会采用不同的写法及表示。

## 2.4 置换（一）

本节主要介绍**置换运算**的定义及相关概念，这将使我们暂时离开张量运算的主线。

置换运算实际上是一种交换位置或者改变次序的运算。之后我们还将引入针对张量的置换算子，它是外积运算和外微分运算的基础。这些运算是现代张量分析与微分几何的支柱。

### 2.4.1 置换的定义

我们从一个例子开始。下面是一个  $2 \times 7$  的“矩阵”：

$$\sigma = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} \\ \textcircled{7} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{1} & \textcircled{6} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

矩阵里面的每一个数字表示一个位置。可以想象成 7 把椅子，先是按第一行的顺序依次排列，再按照第二行的顺序打乱，重新排列。于是这就成为一个 **7 阶置换**。这个定义等价于

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.14-a)$$

自然也等价于

$$\sigma = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}, \quad (2.14-b)$$

当然，换用任何元素也都是可以的。

通常我们用方括号表示置换的**序号定义**，即标号的排列轮换；用圆括号表示**元素定义**，即标号对应元素的轮换。

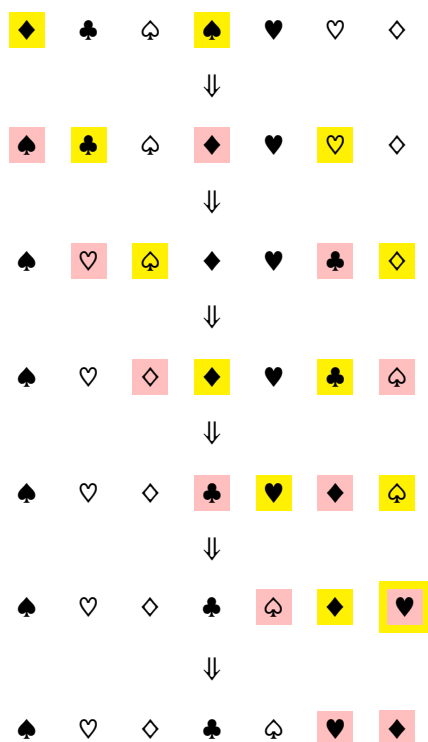
### 2.4.2 置换的符号

接着来定义置换的符号  $\text{sgn } \sigma$ 。这里我们把每次交换两个数字称为一次“操作”。如果经过偶数次“操作”，可以把经置换后的序列恢复为原来的顺序，那么该置换的符号  $\text{sgn } \sigma = 1$ ；而如果经过奇数次“操作”才可以复原，则  $\text{sgn } \sigma = -1$ 。若用一个式子表示，则为

$$\text{sgn } \sigma = (-1)^n, \quad (2.15)$$

其中的  $n$  是恢复原本顺序所需“操作”的次數。

下面我们以后式 (2.13) 所定义的  $\sigma$  为例，演示求置换符号的过程。这里的关键是通过两两交换，按如下步骤把式 (2.14-b) 的第二行变换成第一行：



一共进行了 6 次两两交换，因此  $\text{sgn } \sigma = 1$ 。

### 2.4.3 置换的复合

再定义一个置换

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

注意这里用了方括号，因此它是一个序号定义。方便起见，以后的序号我们都只用不带圈的普通数字表示。考虑之前定义的置换

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

则  $\tau$  与  $\sigma$  的复合

$$\tau \circ \sigma = \left( \begin{array}{ccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \odot \\ \odot & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \odot & \square & \square & \square & \square & \square \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \sigma \\ \leftarrow \tau \end{array} \quad (2.18)$$

与函数、线性变换等的复合类似，这里也用小圆圈“ $\circ$ ”表示置换的复合。

假设经过置换  $\sigma$ 、 $\tau$  作用后得到的序列，分别需要  $p$  次和  $q$  次两两交换才能复原为原来的序列。那么很显然，经过复合置换  $\tau \circ \sigma$  作用后的序列，经过  $q + p$  次两两交换也一定可以复原。因此，复合置换的符号

$$\text{sgn } (\tau \circ \sigma) = (-1)^{q+p} = (-1)^q \cdot (-1)^p = \text{sgn } \tau \cdot \text{sgn } \sigma. \quad (2.19)$$

## 2.4.4 逆置换

逆置换  $\sigma^{-1}$  的定义为

$$\sigma^{-1} \circ \sigma = \text{Id}, \quad (2.20)$$

其中的“**Id**”是恒等映照.

仍然使用式 (2.14-b):

$$\sigma = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \clubsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

那么自然有

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \clubsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

显然, 我们有  $\sigma^{-1} \circ \sigma = \text{Id}$ .

回忆一下逆矩阵的定义. 矩阵  $A$  的逆  $A^{-1}$  既要满足  $A^{-1}A = I$ , 又要满足  $AA^{-1} = I$ . 对于置换也是如此, 因此我们需要检查  $\sigma \circ \sigma^{-1}$ : <sup>①</sup>

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \clubsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \spadesuit_1 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3 & \clubsuit_4 & \spadesuit_5 & \heartsuit_6 & \diamondsuit_7 \\ \diamondsuit_7 & \clubsuit_4 & \spadesuit_5 & \spadesuit_1 & \heartsuit_6 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \sigma^{-1} \\ \\ \leftarrow \sigma \end{matrix} \quad (2.23)$$

可见的确有  $\sigma \circ \sigma^{-1} = \text{Id}$ .

另外, 由于恒等映照 **Id** 作用后序列不发生变化, 复原所需的交换次数为 0, 因此

$$\text{sgn } \text{Id} = (-1)^0 = 1. \quad (2.24)$$

而根据定义,

$$\text{Id} = \sigma^{-1} \circ \sigma, \quad (2.25)$$

故有

$$\text{sgn } \sigma \cdot \text{sgn } \sigma^{-1} = 1. \quad (2.26)$$

由此, 可以推知

$$\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \sigma^{-1}, \quad (2.27)$$

即置换与它的逆具有相同的符号.

## 2.5 置换 (二)

本节将介绍置换运算的基本性质.

<sup>①</sup> 该式中的数字角标用来澄清原始序号.

### 2.5.1 置换的穷尽

先要做一点铺垫. 设有序数组

$$\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$$

经置换  $\sigma$  作用后成为

$$\{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)\},$$

则根据之前的元素定义 (圆括号), 可以把  $\sigma$  记为

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_r) \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

每次置换都将得到一个有序数组. 把它们组合到一起, 就可以得到集合

$$\left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \forall \sigma \in P_r \right\}. \quad (2.29)$$

其中的  $P_r$  表示  $r$  阶置换的全体. 根据排列组合原理,  $r$  阶置换的总数等于  $r$  个元素的全排列数. 即该集合共有  $r!$  个元素.

下面我们要证明

$$\begin{aligned} & \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \forall \sigma \in P_r \right\} \\ &= \left\{ (\tau \circ \sigma(i_1), \tau \circ \sigma(i_2), \dots, \tau \circ \sigma(i_r)) \mid \forall \sigma, \tau \in P_r \right\} \end{aligned} \quad (2.30-a)$$

$$= \left\{ (\sigma \circ \tau(i_1), \sigma \circ \tau(i_2), \dots, \sigma \circ \tau(i_r)) \mid \forall \sigma, \tau \in P_r \right\} \quad (2.30-b)$$

$$= \left\{ (\sigma^{-1}(i_1), \sigma^{-1}(i_2), \dots, \sigma^{-1}(i_r)) \mid \forall \sigma \in P_r \right\}. \quad (2.30-c)$$

这说明置换构成了置换群.?

**证明:** 证明的思路是说明集合互相包含.

对于式 (2.30-a), 右边的  $\tau \circ \sigma$  也是一个  $r$  阶置换, 自然符合左边集合的定义, 因此 右边  $\subset$  左边. 由于这一步是相当显然的, 以下的几个证明我们将略去该步. 另一方面, 左边的  $\sigma$  可以表示成

$$\sigma = \mathbf{Id} \circ \sigma = (\tau \circ \tau^{-1}) \circ \sigma = \tau \circ (\tau^{-1} \circ \sigma), \quad (2.31)$$

这就是右边集合的定义, 因此 左边  $\subset$  右边. 故可证得等式成立.

对于式 (2.30-b), 我们有

$$\sigma = \sigma \circ \mathbf{Id} = \sigma \circ (\tau^{-1} \circ \tau) = (\sigma \circ \tau^{-1}) \circ \tau, \quad (2.32)$$

它符合了右边集合的定义, 因此 左边  $\subset$  右边. 于是等式成立.

对于式 (2.30-c), 我们有

$$\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}, \quad (2.33)$$

它符合了右边集合的定义, 因此 左边  $\subset$  右边. 于是等式成立.  $\square$

### 2.5.2 数组元素的乘积

设有序数组  $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ 、 $\{j_1, j_2, \dots, j_r\}$  和  $\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$  经  $r$  阶置换  $\sigma$  作用后分别成为  $\{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)\}$ 、 $\{\sigma(j_1), \sigma(j_2), \dots, \sigma(j_r)\}$  和  $\{\sigma(k_1), \sigma(k_2), \dots, \sigma(k_r)\}$ ，也就是说

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_r \\ \sigma(j_1) & \sigma(j_2) & \dots & \sigma(j_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_r \\ \sigma(k_1) & \sigma(k_2) & \dots & \sigma(k_r) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

于是我们可以得到

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in P_r, \quad & A_{i_1 j_1 k_1} A_{i_2 j_2 k_2} \dots A_{i_r j_r k_r} \\ &= A_{\sigma(i_1) \sigma(j_1) \sigma(k_1)} A_{\sigma(i_2) \sigma(j_2) \sigma(k_2)} \dots A_{\sigma(i_r) \sigma(j_r) \sigma(k_r)}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

式中的  $A_{ijk}$  表示三维数组  $A$  的一个元素，其指标为  $ijk$ 。

我们通过一个例子来说明这一条性质。还是用式 (2.14-a) 和 (2.14-b) 所定义的置换  $\sigma$ ：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamond & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamond \\ \diamond & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamond \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

随意写出一个数组元素乘积：

$$A_{379} A_{264} A_{157} A_{483} A_{698} A_{\diamond\clubsuit\heartsuit} A_{\heartsuit\heartsuit\heartsuit}. \quad (2.37)$$

三组下标分别为

$$\begin{cases} 3, 2, 1, 4, 6, \diamond, \heartsuit; \\ 7, 6, 5, 8, 9, \clubsuit, \spadesuit; \\ 9, 4, 7, 3, 8, \heartsuit, \heartsuit. \end{cases} \quad (2.38)$$

考虑  $\sigma$  的序号定义式 (2.13)：

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

所谓序号只是位置的抽象表示，而不代表任何真实的元素。请记住：置换始终是位置的变换，而非元素的变换，不要被式 (2.36) 给迷惑了。把  $\sigma$  作用在这三组下标上，可得

$$\begin{cases} \heartsuit, 4, 6, 3, \diamond, 2, 1; \\ \spadesuit, 8, 9, 7, \clubsuit, 6, 5; \\ \heartsuit, 3, 8, 9, \heartsuit, 4, 7. \end{cases} \quad (2.40)$$

于是之前的数组元素乘积就变成了

$$A_{\heartsuit\spadesuit\heartsuit} A_{483} A_{698} A_{379} A_{\diamond\clubsuit\heartsuit} A_{264} A_{157}. \quad (2.41)$$

比对一下各元素，可见与式 (2.37) 的确是完全一样的。

### 2.5.3 哑标的穷尽

## 2.6 置换 (三)

本节将介绍针对张量的置换算子。