第一章　微分同胚

1.1　$\mathscr{C}^p$ 微分同胚

1.1.1　双射

设 f 是集合 A 到 B 的映射．如果 A 中不同的元素有不同的像，则称 f 为**单射**（也叫“一对一”）；如果 B 中每个元素都是 A 中元素的像，则称 f 为**满射**；如果 f 既是单射又是满射，则称 f 为**双射**（也叫“一一对应”）．三种情况的示意见图 1.1．

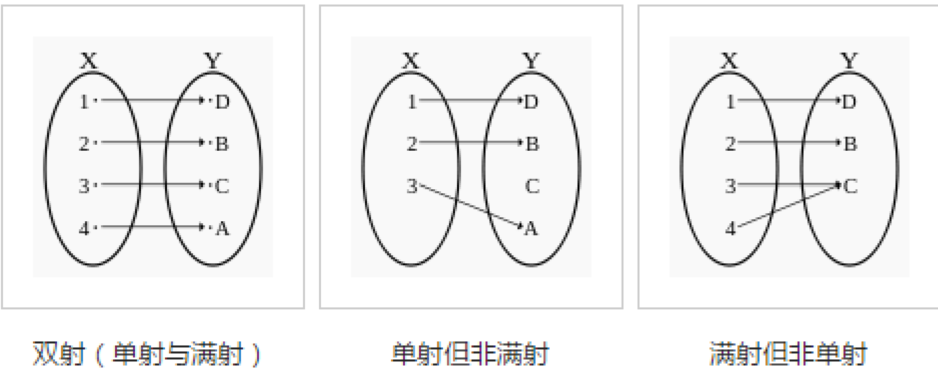

图 1.1: 单射、满射与双射

设开集 $\mathfrak{D}_X, \mathfrak{D}_x \in \mathbb{R}^m$，它们之间存在双射，即一一对应关系：

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) : \mathfrak{D}_x \ni \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{D}_X. \tag{1.1}$$

由于该映照实现了 $\mathfrak{D}_x$ 到 $\mathfrak{D}_X$ 之间的双射，因此它存在逆映照：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) : \mathfrak{D}_X \ni \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{X}) \in \mathfrak{D}_x. \tag{1.2}$$

我们把 $\mathfrak{D}_X$ 称为**物理域**，它是实际物理事件发生的区域；$\mathfrak{D}_x$ 则称为**参数域**．由于物理域通常较为复杂，因此我们常把参数域取为规整的形状，以便之后的处理．

设物理量 $f(\boldsymbol{X})$ 定义在物理域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{R}^3$ 上[①]，则 f 就定义了一个**场**：

$$f:\ \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}} \ni \boldsymbol{X} \mapsto f(\boldsymbol{X}). \tag{1.3}$$

所谓的“场”，就是自变量用位置刻画的映照．它可以是**标量场**，如温度、压强、密度等，此时 $f(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{R}$；也可以是**向量场**，如速度、加速度、力等，此时 $f(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{R}^3$；对于更深入的物理、力学研究，往往还需引入**张量场**，此时 $f(\boldsymbol{X}) \in \mathscr{T}^r\left(\mathbb{R}^3\right)$．

$\boldsymbol{X}$ 存在于物理域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 中，我们称它为**物理坐标**．由于上文已经定义了 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 到 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 之间的双射（不是 f！），因此 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 中就有唯一的 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 相对应，它称为**参数坐标**（也叫**曲线坐标**）．

这样一来，由于物理域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 上已经定义了场 $f(\boldsymbol{X})$，参数域中也必然存在唯一的一个场 $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ 与之对应：

$$\tilde{f}:\ \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \ni \boldsymbol{x} \mapsto \tilde{f}(\boldsymbol{x}) = f \circ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = f\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\right). \tag{1.4}$$

$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 是完全等价的，因而 $\tilde{f}$ 与 f 也是完全等价的．

物理域中的场要满足守恒定律，如质量守恒、动量守恒、能量守恒等．从数学上来看，这些守恒定律就是需要满足的一系列偏微分方程（组）．将场转化到参数域后，它仍要满足这些方程．但我们已经设法将参数域取得较为规整，故在其上进行数值求解就会相当方便．

开集：任意一点吹出一个球，这个球上的每个点都落在区域内

---

① 实际的物理事件当然发生在三维 Euclid 空间中（只谈“空间”），但在数学上也可以推广到 m 维．