

# 第一章 曲线上的标架及其运动方程

## 1.1 Frenet 标架 (弧长参数)

### 1.1.1 $\mathbb{R}^m$ 空间中曲线的表示

$\mathbb{R}^m$  空间中的曲线, 就是一个单参数的向量值映照:

$$\mathbf{X}(t) : [\alpha, \beta] \ni t \mapsto \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X^1(t) \\ \vdots \\ X^m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m. \quad (1.1)$$

考虑该向量值映照关于参数  $t$  的变化率

$$\dot{\mathbf{X}}(t) := \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(t + \Delta t) - \mathbf{X}(t)}{\Delta t} =: \begin{bmatrix} \dot{X}^1(t) \\ \vdots \\ \dot{X}^m(t) \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

按照物理上的习惯, 我们用点表示对  $t$  的导数. 若该极限存在, 则称  $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^m$  在点  $t$  处可微. 此时,  $\dot{\mathbf{X}}(t)$  称为曲线  $\mathbf{X}(t)$  的切向量. 上述极限可以等价地表述为

$$\mathbf{X}(t + \Delta t) = \mathbf{X}(t) + \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t). \quad (1.3)$$

在  $t_0$  处, 则可以写成

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t_0) + \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0) + o(t - t_0). \quad (1.4)$$

该方程表示一条直线, 称为曲线  $\mathbf{X}(t)$  在  $t_0$  处的切线.

在物理域中, 弧长  $s$  可以表示为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) \right|_{\mathbb{R}^m} dt, \quad (1.5)$$

两边对  $t$  求导, 可有

$$\frac{ds}{dt}(t) = \left| \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) \right|_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.6)$$

在本节中, 我们将采用弧长作为曲线的参数, 即

$$\mathbf{r}(s) : [0, L] \ni s \mapsto \mathbf{r}(s) \in \mathbb{R}^m. \quad (1.7)$$

对应的切向量为

$$\dot{\mathbf{r}}(s) := \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s}. \quad (1.8)$$

根据链式法则,

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \cdot \frac{dt}{ds}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) / \frac{ds}{dt}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) / \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right|_{\mathbb{R}^m}, \quad (1.9)$$

因而  $\dot{\mathbf{r}}(s)$  是一个单位向量, 即

$$|\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m} = 1. \quad (1.10)$$

接下来继续对  $\dot{\mathbf{r}}(s)$  求导:

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) := \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{ds}(s). \quad (1.11)$$

由于  $|\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m} = 1$ , 因此

$$1 = |\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m}^2 = \langle \dot{\mathbf{r}}(s), \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle_{\mathbb{R}^m}, \quad (1.12)$$

两边求导, 则有

$$0 = \langle \ddot{\mathbf{r}}(s), \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle_{\mathbb{R}^m} + \langle \dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s) \rangle_{\mathbb{R}^m} = 2 \cdot \langle \ddot{\mathbf{r}}(s), \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.13)$$

内积为零, 就意味着正交:

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) \perp \dot{\mathbf{r}}(s). \quad (1.14)$$

采用一般参数时, (1.10) 式和 (1.14) 未必成立. 解决方案见 1.2 节.

现在我们把目光限定在  $\mathbb{R}^3$  空间中. 如前所述,  $\dot{\mathbf{r}}(s)$  已经是单位向量, 我们将其记为  $\mathbf{T}(s)$ ; 而  $\ddot{\mathbf{r}}(s)$  仍需作单位化处理, 其结果记作  $\mathbf{N}(s)$ , 即

$$\mathbf{N}(s) := \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}/ds}{|d\dot{\mathbf{r}}/ds|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{\dot{\mathbf{T}}(s)}{|\dot{\mathbf{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (1.15)$$

最后, 只要再令

$$\mathbf{B}(s) := \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s), \quad (1.16)$$

我们便有了  $\mathbb{R}^3$  空间中的一组单位正交基:

$$\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\} \subset \mathbb{R}^3, \quad (1.17)$$

它们称为 **Frenet 标架**. 其中,  $\mathbf{T}(s)$ 、 $\mathbf{N}(s)$ 、 $\mathbf{B}(s)$ , 分别叫做单位切向量、主单位法向量和副单位法向量.

### 1.1.2 标架运动方程

考虑 Frenet 标架关于弧长参数  $s$  的变化率, 即标架运动方程:

$$\{\dot{\mathbf{T}}(s), \dot{\mathbf{N}}(s), \dot{\mathbf{B}}(s)\} \subset \mathbb{R}^3. \quad (1.18)$$

为此, 我们需要先给出一个引理: 设  $\{\mathbf{e}_i(t)\}_{i=1}^m$  是  $\mathbb{R}^m$  空间中的一组活动单位正交基, 它们满足

$$\langle \mathbf{e}_i(t), \mathbf{e}_j(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij}. \quad (1.19)$$

这组基的导数仍位于  $\mathbb{R}^m$  空间, 用自身展开, 可有

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{e}}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_m(t) \end{bmatrix} \mathbf{P}(t). \quad (1.20)$$

此时, 我们有

$$\mathbf{P}(t) \in \text{Skw}, \quad (1.21)$$

即  $\mathbf{P}(t)$  是一个反对称矩阵.

证明：对式 (1.19) 两边求导，得

$$\langle \dot{e}_i(t), e_j(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} + \langle e_i(t), \dot{e}_j(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} = 0 \in \mathbb{R}, \quad (1.22)$$

写成矩阵形式，为

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1^\top(t) \\ \vdots \\ \dot{e}_m^\top(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t), \dots, e_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1^\top(t) \\ \vdots \\ e_m^\top(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_1(t), \dots, \dot{e}_m(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times m}. \quad (1.23)$$

引入矩阵  $E = [e_1(t), \dots, e_m(t)]$ ，则上式与 (1.20) 式可以分别表示成

$$\dot{E}^\top E + E^\top \dot{E} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (1.24)$$

和

$$\dot{E} = EP \in \mathbb{R}^{m \times m}. \quad (1.25)$$

两式联立，可有

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \dot{E}^\top E + E^\top \dot{E} \\ &= (EP)^\top E + E^\top (EP) \\ &= P^\top (E^\top E) + (E^\top E)P = P^\top + P, \end{aligned} \quad (1.26)$$

即  $P^\top = -P$ . 按照定义，便知  $P(t) \in \text{Skw}$ . □

根据这一引理，便可有

$$\begin{bmatrix} \dot{T}(s), \dot{N}(s), \dot{B}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s), N(s), B(s) \end{bmatrix} P(s), \quad (1.27)$$

其中的  $P(s)$  是一个三阶反对称矩阵. 显然，它的对角元均为零：

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

这里，我们用 “\*” 表示待定元素. 由 (1.15) 式，可知

$$\dot{T}(s) = \left| \dot{T}(s) \right|_{\mathbb{R}^3} N(s) =: \kappa(s) N(s). \quad (1.29)$$

式中的  $\kappa(s) := \left| \dot{T}(s) \right|_{\mathbb{R}^3}$ . 于是，矩阵  $P(s)$  的第一列就成为了  $[0, \kappa(s), 0]^\top$ . 利用反对称性，可有

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

我们“强行”引入了  $\tau(s)$ ，用来取代占位符 \*. 当然，它的具体形式仍然待定.

### 1.1.3 曲率和挠率

利用矩阵  $\mathbf{P}(s)$ ，可以看出

$$\dot{\mathbf{B}}(s) = -\tau(s) \mathbf{N}(s). \quad (1.31)$$

再与  $\mathbf{N}(s)$  做内积<sup>①</sup>，便有

$$\dot{\mathbf{B}}(s) \cdot \mathbf{N}(s) = -\tau(s). \quad (1.32)$$

根据定义 (1.16) 式，

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s), \quad (1.33)$$

于是

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}(s) &= \frac{d}{ds} [\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)] = \frac{d}{ds} \left[ \dot{\mathbf{r}}(s) \times \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \ddot{\mathbf{r}}(s) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(s)}{|\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} + \dot{\mathbf{r}}(s) \times \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} + \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s). \end{aligned} \quad (1.34)$$

显然，该式中的第一项为零。考虑  $\dot{\mathbf{B}}(s) \cdot \mathbf{N}(s)$ ，注意到  $\mathbf{N}(s)$  与  $\ddot{\mathbf{r}}(s)$  平行，因此与  $\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)$  垂直，所以第三项在点乘  $\mathbf{N}(s)$  后也为零。这样便有

$$\begin{aligned} \tau(s) &= -\dot{\mathbf{B}}(s) \cdot \mathbf{N}(s) \\ &= -\dot{\mathbf{r}}(s) \times \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \cdot \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \\ &= -\frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}^2} [\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(s)] \end{aligned}$$

利用向量三重积的性质，再把负号移进来，可得

$$= \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det [\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s)]. \quad (1.35)$$

至此，我们就得到了  $\mathbb{R}^3$  空间中以弧长为参数的 *Frenet* 标架：

$$\begin{cases} \mathbf{T}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s), \end{cases} \quad (1.36-a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{N}(s) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(s)}{|\dot{\mathbf{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}, \end{cases} \quad (1.36-b)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}. \end{cases} \quad (1.36-c)$$

以及对应的标架运动方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}}(s) = \kappa(s) \mathbf{N}(s), \end{cases} \quad (1.37-a)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{N}}(s) = -\kappa(s) \mathbf{T}(s) + \tau(s) \mathbf{B}(s), \end{cases} \quad (1.37-b)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{B}}(s) = -\tau(s) \mathbf{N}(s), \end{cases} \quad (1.37-c)$$

其中，

$$\kappa(s) \triangleq |\dot{\mathbf{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3} \quad (1.38)$$

<sup>①</sup> 为了表述的清晰，本小节中用 “ $\cdot$ ” 来表示内积。

称为曲率,

$$\tau(s) \triangleq \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \dddot{\mathbf{r}}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa^2(s)} \det \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \dddot{\mathbf{r}}(s) \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

称为挠率.

#### 1.1.4 Frenet 标架的几何意义

利用 Taylor 公式, 把  $\mathbf{r}(s_0 + \Delta s)$  展开至三阶, 可得

$$\mathbf{r}(s_0 + \Delta s) = \mathbf{r}(s_0) + \dot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot (\Delta s) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot (\Delta s)^2 + \frac{1}{6} \dddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot (\Delta s)^3 + \mathcal{O}((\Delta s)^3). \quad (1.40)$$

其中的一阶和二阶导数, 根据式 (1.36), 可以分别表示为

$$\dot{\mathbf{r}}(s_0) = \mathbf{T}(s_0) \quad (1.41)$$

和

$$\ddot{\mathbf{r}}(s_0) = \left| \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \right|_{\mathbb{R}^3} \mathbf{N}(s_0) = \kappa(s_0) \mathbf{N}(s_0). \quad (1.42)$$

至于三阶导数, 可用一组单位正交基 (此处当然要用 Frenet 标架) 展开:

$$\dddot{\mathbf{r}}(s_0) = [\ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{T}(s_0)] \mathbf{T}(s_0) + [\ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{N}(s_0)] \mathbf{N}(s_0) + [\ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{B}(s_0)] \mathbf{B}(s_0). \quad (1.43)$$

关于  $\mathbf{T}(s_0)$ 、 $\mathbf{N}(s_0)$ 、 $\mathbf{B}(s_0)$  合并同类项, 可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}(s_0 + \Delta s) \\ &= \mathbf{r}(s_0) + \left[ \Delta s + \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{T}(s_0) (\Delta s)^3 \right] \mathbf{T}(s_0) \\ & \quad + \left[ \frac{1}{2} \kappa(s_0) (\Delta s)^2 + \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{N}(s_0) (\Delta s)^3 \right] \mathbf{N}(s_0) \\ & \quad + \left[ \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{B}(s_0) (\Delta s)^3 \right] \mathbf{B}(s_0) + \mathcal{O}((\Delta s)^3) \\ &= \mathbf{r}(s_0) + [\mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s_0), \mathbf{B}(s_0)] \begin{bmatrix} \Delta s + \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{T}(s_0) (\Delta s)^3 + \mathcal{O}((\Delta s)^3) \\ \frac{1}{2} \kappa(s_0) (\Delta s)^2 + \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{N}(s_0) (\Delta s)^3 + \mathcal{O}((\Delta s)^3) \\ \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{B}(s_0) (\Delta s)^3 + \mathcal{O}((\Delta s)^3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.44-a)$$

若只精确到二阶无穷小量, 则为

$$= \mathbf{r}(s_0) + [\mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s_0), \mathbf{B}(s_0)] \begin{bmatrix} \Delta s + \mathcal{O}((\Delta s)^2) \\ \frac{1}{2} \kappa(s_0) (\Delta s)^2 + \mathcal{O}((\Delta s)^2) \\ \mathcal{O}((\Delta s)^3) \end{bmatrix}. \quad (1.44-b)$$

以上推导说明, 当误差限制在二阶无穷小量时,  $\mathbf{B}$  方向分量为零. 这样, 我们就可以认为曲线只在  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{N}$  张成的平面中运动, 此平面称为密切平面. 设其横纵坐标分别为  $\tilde{x}$ 、 $\tilde{y}$ , 则有

$$\begin{cases} \tilde{x} = \Delta s, \end{cases} \quad (1.45-a)$$

$$\begin{cases} \tilde{y} = \frac{1}{2} \kappa(s_0) (\Delta s)^2 = \frac{1}{2} \kappa(s_0) \tilde{x}^2. \end{cases} \quad (1.45-b)$$

如图所示. 该抛物线与圆心位于  $(0, \kappa^{-1}(s_0))$ , 半径等于  $\kappa^{-1}(s_0)$  的圆也是密切的.

密切圆, 图见“曲线上标架-Part 02” 20 min.

只有考虑三阶无穷小量时, 才可以看出曲线偏离密切平面. 显然, 这一偏离的“速率”将由挠率刻画.

### 1.1.5 应用：速度与加速度

三维空间中, 质点的运动轨迹可以用  $\mathbb{R}^3$  中的曲线  $\mathbf{r}(t)$  来表示, 其中的参数  $t$  为时间. 质点运动的速度  $\mathbf{v}(t)$ , 定义为

$$\mathbf{v}(t) \triangleq \dot{\mathbf{r}}(t) := \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = \dot{\mathbf{r}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t). \quad (1.46)$$

由式 (1.5), 弧长的定义为

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}(\xi)|_{\mathbb{R}^m} d\xi, \quad (1.47)$$

求导, 可得

$$\frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.48)$$

再代入 Frenet 标架的定义 (1.36-a) 式, 便有

$$\mathbf{v}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \mathbf{T}(s). \quad (1.49)$$

可见, 速度  $\mathbf{v}(t)$  的方向与  $\mathbf{T}(t)$  平行. 另外由于  $\mathbf{T}(t)$  是单位向量, 因此速度的大小

$$|\mathbf{v}(t)|_{\mathbb{R}^m} = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}, \quad (1.50)$$

我们称之为速率.

速度相对时间的变化率称为加速度:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) \triangleq \dot{\mathbf{v}}(t) &= \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \mathbf{T}(s) + |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt}(s) \\ &= \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \mathbf{T}(s) + |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \dot{\mathbf{T}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) \end{aligned}$$

代入标架运动方程 (1.37-a) 式以及弧长的导数 (1.48) 式, 可有

$$= \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \mathbf{T}(s) + |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \kappa(s) \mathbf{N}(s) \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}$$

换成速率, 则为

$$= \frac{d}{dt} |\mathbf{v}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \mathbf{T}(s) + |\mathbf{v}(t)|_{\mathbb{R}^m}^2 \kappa(s) \mathbf{N}(s). \quad (1.51)$$

由此可知, 加速度只有  $\mathbf{T}$  分量和  $\mathbf{N}$  分量; 当质点做匀变速运动时, 则只有  $\mathbf{N}$  分量.

## 1.2 Frenet 标架 (一般参数)

本节我们重回一般参数下的映照形式, 即

$$\mathbf{r}(t) : [\alpha, \beta] \ni t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3, \quad (1.52)$$

其中的参数  $t$  与弧长  $s$  的关系同式 (1.6):

$$\frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}. \quad (1.53)$$

后文的推导需要用到向量的内蕴正交分解:  $\forall \xi, \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  且满足  $|\mathbf{e}|_{\mathbb{R}^3} = 1$ , 有

$$\xi = (\xi \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} - (\xi \times \mathbf{e}) \times \mathbf{e}. \quad (1.54)$$

证明见 **内蕴正交分解**.

### 1.2.1 标架的形式

首先来处理单位切向量: <sup>①</sup>

$$\mathbf{T}(s) \triangleq \dot{\mathbf{r}}(s) = \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{dt}{ds}(s) = \dot{\mathbf{r}}(t) / \frac{ds}{dt}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (1.55)$$

接下来计算它的导数  $\dot{\mathbf{T}}(s)$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}(s) &= \frac{d}{ds} \left[ \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \cdot \frac{dt}{ds}(s) \end{aligned}$$

代入 (1.53) 式, 得

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \left[ \ddot{\mathbf{r}}(t) - \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \cdot \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \right]. \end{aligned} \quad (1.56)$$

此处涉及到了模的导数. 考虑

$$\frac{d}{dt} \left[ |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2 \right] = 2 |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}; \quad (1.57)$$

另一方面,

$$\frac{d}{dt} \left[ |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2 \right] = \frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)] = 2 \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t). \quad (1.58)$$

联立两式, 便有

$$\frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (1.59)$$

代回 (1.56) 式, 继续推导:

$$\dot{\mathbf{T}}(s) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \left[ \ddot{\mathbf{r}}(t) - \left( \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

式中的  $\dot{\mathbf{r}}(t)/|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}$  是一个单位向量, 它相当于式 (1.54) 中的  $\mathbf{e}$ , 而  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$  则相当于  $\xi$ . 因此, 利用向量的内蕴正交分解, 有

$$= -\frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \left[ \left( \ddot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

<sup>①</sup> 此时我们把  $s$  作为参数, 只不过  $s = s(t)$ . 所以  $\mathbf{T}(s)$  实际上和  $\mathbf{T}(t)$  相等.

$$= -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}. \quad (1.60)$$

根据曲率的定义 (1.38) 式,

$$\kappa(s) \triangleq |\dot{\mathbf{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3} = \frac{|(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}. \quad (1.61)$$

注意到  $(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \perp \dot{\mathbf{r}}(t)$ , 所以

$$|(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}. \quad (1.62)$$

这样, 曲率就能够写成

$$\kappa(s) = \frac{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3}. \quad (1.63)$$

利用定义 (1.36-b) 式,  $\mathbf{N}(s)$  也便可以易如反掌地写出来了:

$$\mathbf{N}(s) \triangleq \frac{\dot{\mathbf{T}}(s)}{|\dot{\mathbf{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{\dot{\mathbf{T}}(s)}{\kappa(s)} = -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (1.64)$$

最后轮到  $\mathbf{B}(s)$  了:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(s) &= \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \times \left[ -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \times \left[ -\left( \ddot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \end{aligned}$$

这样处理是为了倒过来应用内蕴正交分解:

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \times \left[ \ddot{\mathbf{r}}(t) - \left( \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

由于  $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ , 因而方括号中的第二项可以略去, 使得结果大为简化:

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (1.65)$$

### 1.2.2 曲率和挠率

曲率在计算  $\mathbf{N}$  的时候已经顺带求过了, 我们现在来求挠率. 根据式 (1.39), 有

$$\tau(s) = \frac{1}{\kappa^2(s)} \det[\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \dddot{\mathbf{r}}(s)]. \quad (1.66)$$

因此首先需要知道  $\mathbf{r}$  关于  $s$  的一至三阶导数. 由 (1.55) 式, 可知

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{T}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}; \quad (1.67)$$

二阶导数则要利用式 (1.60):

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) = \dot{\mathbf{T}}(s) = -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}; \quad (1.68)$$



进而又可得到三阶导数：

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{ds}(s) = -\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}(s) \cdot \frac{dt}{ds} = -\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}(s) \Big/ \frac{ds}{dt}(t) = -\frac{d}{dt} \left[ \frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4} \right] \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (1.69)$$

最后一步仍然利用了 (1.53) 式。我们知道，

$$\det \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \dddot{\mathbf{r}}(s) \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot \dddot{\mathbf{r}}(s).$$

首先考察叉乘项：

$$\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \times \left[ -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4} \right]$$

注意到该式的结构与 (1.65) 式的第二步非常相似，因此我们采用同样的办法处理，即先调整系数，再反向运用内蕴正交分解：

$$\begin{aligned} &= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3} \times \left[ -\left( \ddot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3} \times \left[ \ddot{\mathbf{r}}(t) - \left( \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \end{aligned}$$

同样，因为  $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ ，所以又只剩下了第一项，即

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3}. \quad (1.70)$$

再来看  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ 。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) &= -\frac{d}{dt} \left[ \frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4} \right] \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \\ &= -\frac{\frac{d}{dt} \left[ (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) \right] \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4 + \left[ (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) \right] \cdot \frac{d}{dt} \left[ |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4 \right]}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^8} \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \\ &= -\frac{\frac{d}{dt} \left[ (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}(t) \right]}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5} - \frac{\frac{d}{dt} \left[ |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4 \right]}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^9} \cdot \left[ (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) \right] \\ &= -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + \ddot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5} - \frac{\frac{d}{dt} \left[ |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4 \right]}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^9} \cdot \left[ (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) \right] \end{aligned}$$

第一项中， $\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = 0$ 。所以

$$= -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5} - \frac{\frac{d}{dt} \left[ |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4 \right]}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^9} \cdot \left[ (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) \right]. \quad (1.71)$$

式中的高亮部分与另一个向量做叉乘后，垂直于  $\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)$ ；而另一方面， $\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)$  又平行于  $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)$ 。因此二者做点乘后即为零。这样，我们就有

$$\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3} \cdot \left[ -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5} \right]$$

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \cdot \left[ - \left( \ddot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

照例，使用内蕴正交分解：

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \cdot \left[ \ddot{\mathbf{r}}(t) - \left( \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

第二项点乘后为零：

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6}. \quad (1.72)$$

此即

$$\det \left[ \dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s) \right] = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \det \left[ \dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right]. \quad (1.73)$$

再代入一般参数下曲率的表达式 (1.63)，就可得到挠率：

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \frac{1}{\kappa^2(s)} \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \det \left[ \dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right] \\ &= \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \det \left[ \dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right] \\ &= \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det \left[ \dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right]. \end{aligned} \quad (1.74)$$

现在来总结一下一般参数下的 Frenet 标架：

$$\begin{cases} \mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}, \end{cases} \quad (1.75-a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{N}(t) = - \frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}, \end{cases} \quad (1.75-b)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \end{cases} \quad (1.75-c)$$

曲率和挠率分别为

$$\kappa(t) = \frac{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3} \quad (1.76)$$

和

$$\tau(t) = \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det \left[ \dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right]. \quad (1.77)$$

注意我们把参数全部换成了  $t$ . <sup>①</sup>

至于标架运动方程，则可直接利用 (1.37) 式：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}}(t) = \dot{\mathbf{T}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot [\kappa(t) \mathbf{N}(t)], \end{cases} \quad (1.78-a)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{N}}(t) = \dot{\mathbf{N}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot [-\kappa(t) \mathbf{T}(t) + \tau(t) \mathbf{B}(t)], \end{cases} \quad (1.78-b)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{B}}(t) = \dot{\mathbf{B}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot [-\tau(t) \mathbf{N}(t)]. \end{cases} \quad (1.78-c)$$

<sup>①</sup> 根据第 7 页的脚注 <sup>①</sup>， $\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}(t)$ 。类似地，还有  $\kappa(s) = \kappa(t)$  等。实际上，它们是同一个量在不同参数下的表示。但  $\dot{\mathbf{T}}(s) \neq \dot{\mathbf{T}}(t)$ 。这是因为前者是对  $s$  求导，而后者则是对  $t$  求导。不要被符号迷惑。

若  $t$  取为  $s$ , 有

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3} = 1. \quad (1.79)$$

根据式 (1.14),  $\ddot{\mathbf{r}}(s) \perp \dot{\mathbf{r}}(s)$ , 因此

$$|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(s) \times \dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}. \quad (1.80)$$

利用内蕴正交分解, 稍做计算, 还可知

$$(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = -\ddot{\mathbf{r}}(t) + (\ddot{\mathbf{r}}(t) \bullet \dot{\mathbf{r}}(t)) \dot{\mathbf{r}}(t) = -\ddot{\mathbf{r}}(t). \quad (1.81)$$

此时, 把 (1.75) ~ (1.78) 式与 (1.36) ~ (1.39) 式进行比较, 可以发现它们是完全一样的.

# 索引

## B

标架运动方程, 2, 4

## D

单位切向量, 2

## F

Frenet 标架, 2, 4

一般参数下的  $\sim$ , 10

副单位法向量, 2

## H

弧长, 1

## J

加速度, 6

## K

可微, 1

## M

密切平面, 5

## N

挠率

弧长参数下的  $\sim$ , 5

一般参数下的  $\sim$ , 10

推导过程, 8–10

内蕴正交分解, 7

## Q

切线, 1

切向量, 1

曲率

弧长参数下的  $\sim$ , 5

一般参数下的  $\sim$ , 10

推导过程, 8

曲线, 1

## S

速度, 6

速率, 6

## Z

质点的运动, 6

主单位法向量, 2