第一章 张量场可微性

1.1 张量的范数

1.1.1 赋范线性空间

对于一个**线性空间** $\mathscr{V}$，它总是定义了**线性结构**：

$$\forall\, x,\, y \in \mathscr{V} \text{ 和 } \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha\, x + \beta\, y \in \mathscr{V}. \tag{1.1}$$

为了进一步研究的需要，我们还要引入**范数**的概念．所谓"范数"，就是对线性空间中任意元素大小的一种刻画．举个我们熟悉的例子，m 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 中某个向量的范数，就定义为该向量在 Descartes 坐标下各分量的平方和的平方根．

一般而言，线性空间 $\mathscr{V}$ 中的范数 $\|\cdot\|_{\mathscr{V}}$ 是从 $\mathscr{V}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映照，并且需要满足以下三个条件：

1. 非负性

$$\forall\, x \in \mathscr{V}, \quad \|x\|_{\mathscr{V}} \geqslant 0 \tag{1.2}$$

以及**非退化性**

$$\forall\, x \in \mathscr{V}, \quad \|x\|_{\mathscr{V}} = 0 \iff x = 0 \in \mathscr{V}, \tag{1.3}$$

这里的 0 是线性空间 $\mathscr{V}$ 中的**零元素**，它是唯一存在的．

2. 零元是唯一的，线性空间中的元素 x 与从 0 指向它的向量一一对应．因此，线性空间中的元素也常被称为"向量"．

考虑线性空间中的数乘运算．从几何上看，x 乘上 λ，就是将 x 沿着原来的指向进行伸缩．显然有

$$\forall\, x \in \mathscr{V} \text{ 和 } \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda\, x\|_{\mathscr{V}} = |\lambda| \cdot \|x\|_{\mathscr{V}}, \tag{1.4}$$

这称为**正齐次性**．

想要图吗？

3. 线性空间中的加法满足平行四边形法则．直观地看，就有

$$\forall\, x,\, y \in \mathscr{V}, \quad \|x + y\|_{\mathscr{V}} \leqslant \|x\|_{\mathscr{V}} + \|y\|_{\mathscr{V}}, \tag{1.5}$$

这称为**三角不等式**．

定义了范数的线性空间称为**赋范线性空间**．

1.1.2　张量范数的定义

考虑 p 阶张量 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)$，它可以用逆变分量或协变分量来表示：

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{cases} \boldsymbol{\Phi}^{i_1 \cdots i_p} \, \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}, & \text{(1.6-a)} \\[2mm] \boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_p} \, \boldsymbol{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{i_p}, & \text{(1.6-b)} \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}^{i_1 \cdots i_p} = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{i_1}, \cdots, \boldsymbol{g}^{i_p}\right). & \text{(1.7-a)} \\[2mm] \boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_p} = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{g}_{i_p}\right), & \text{(1.7-b)} \end{cases}$$

张量的**范数**定义为

$$\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)} \triangleq \sqrt{\boldsymbol{\Phi}^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_p}} \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

$i_1 \cdots i_p$ 可独立取值，每个又有 m 种取法，所以根号下共有 m^p 项. 注意 $\boldsymbol{\Phi}^{i_1 \cdots i_p}$ 与 $\boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_p}$ 未必相等，因而根号下的部分未必是平方和，这与 Euclid 空间中向量的模是不同的.

复习一下 **??** 小节，我们可以用另一组（带括号的）基表示张量 $\boldsymbol{\Phi}$：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}^{i_1 \cdots i_p} = c^{i_1}_{(\xi_1)} \cdots c^{i_p}_{(\xi_p)} \boldsymbol{\Phi}^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)}, & \text{(1.9-a)} \\[2mm] \boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_p} = c^{(\eta_1)}_{i_1} \cdots c^{(\eta_p)}_{i_p} \boldsymbol{\Phi}_{(\eta_1) \cdots (\eta_p)}, & \text{(1.9-b)} \end{cases}$$

其中的 $c^i_{(\xi)} = \left\langle \boldsymbol{g}_{(\xi)}, \boldsymbol{g}^i \right\rangle_{\mathbb{R}^m}$，$c^{(\eta)}_i = \left\langle \boldsymbol{g}^{(\eta)}, \boldsymbol{g}_i \right\rangle_{\mathbb{R}^m}$，它们满足

$$c^i_{(\xi)} c^{(\eta)}_i = \delta^{(\eta)}_{(\xi)}. \tag{1.10}$$

于是

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\Phi}^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_p} \\ &= \left(c^{i_1}_{(\xi_1)} \cdots c^{i_p}_{(\xi_p)} \boldsymbol{\Phi}^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)} \right) \left(c^{(\eta_1)}_{i_1} \cdots c^{(\eta_p)}_{i_p} \boldsymbol{\Phi}_{(\eta_1) \cdots (\eta_p)} \right) \\ &= \left(c^{i_1}_{(\xi_1)} c^{(\eta_1)}_{i_1} \right) \cdots \left(c^{i_p}_{(\xi_p)} c^{(\eta_p)}_{i_p} \right) \boldsymbol{\Phi}^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)} \boldsymbol{\Phi}_{(\eta_1) \cdots (\eta_p)} \\ &= \delta^{(\eta_1)}_{(\xi_1)} \cdots \delta^{(\eta_p)}_{(\xi_p)} \boldsymbol{\Phi}^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)} \boldsymbol{\Phi}_{(\eta_1) \cdots (\eta_p)} \\ &= \boldsymbol{\Phi}^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)} \boldsymbol{\Phi}_{(\xi_1) \cdots (\xi_p)}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

它是 $\boldsymbol{\Phi}$ 在另一组基下的逆变分量与协变分量乘积之和.

以上结果说明，张量的范数不依赖于基的选取，这就好比用不同的秤来称同一个人的体重，都将获得相同的结果. 既然如此，不妨采用单位正交基来表示张量的范数：

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)} &\triangleq \sqrt{\boldsymbol{\Phi}^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_p}} \\ &= \sqrt{\boldsymbol{\Phi}^{\langle i_1 \rangle \cdots \langle i_p \rangle} \boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1 \rangle \cdots \langle i_p \rangle}} \\ &=: \sqrt{\sum_{i_1, \cdots, i_p = 1}^{m} \left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1, \cdots, i_p \rangle} \right)^2}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

这里的 $\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}$ 表示张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 在单位正交基下的分量，它的指标不区分上下.

有了这样的表示，很容易就可以验证张量范数符合之前的三个要求. 一组数的平方和开根号，必然是非负的. 至于非退化性，若范数为零，则所有分量均为零，自然成为零张量；反之，对于零张量，所有分量为零，范数也为零. 将 $\boldsymbol{\Phi}$ 乘上 λ，则有

$$
\begin{aligned}
\|\lambda\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)} &= \sqrt{\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\left(\lambda\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2} \\
&= \sqrt{\lambda^2\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2} \\
&= |\lambda|\sqrt{\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2} \\
&= |\lambda|\cdot\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)},
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

于是正齐次性也得以验证. 最后，利用 Cauchy–Schwarz 不等式，可有

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Psi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\
&= \sum\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}+\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2 \\
&= \sum\left[\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2+2\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}+\left(\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2\right] \\
&= \sum\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2+2\sum\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}+\sum\left(\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2 \\
&\leqslant \|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2+2\sqrt{\sum\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2}\sqrt{\sum\left(\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2}+\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\
&= \|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2+2\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}\cdot\|\boldsymbol{\Psi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}+\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\
&= \left(\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}+\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}\right)^2.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

两边开方，即为三角不等式.

由此，我们就完整地给出了张量大小的刻画手段. 可以看出，它实际上就是 Euclid 空间中向量模的直接推广.

1.1.3 简单张量的范数

根据 **??** 小节中的定义，简单张量是形如 $\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}$ 的张量，其中的 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}\in\mathbb{R}^m$，它是三个向量的张量积. 简单张量的范数为

$$
\|\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)} = \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^m}\cdot\|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathbb{R}^m}\cdot\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathbb{R}^m}.
\tag{1.15}
$$

证明： $\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}$ 的逆变分量为

$$
(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta})^{ijk} \triangleq \boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}\left(\boldsymbol{g}^i,\boldsymbol{g}^j,\boldsymbol{g}^k\right) = \xi^i\eta^j\zeta^k.
\tag{1.16}
$$

同理，它的协变分量为

$$
(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta})_{ijk} \triangleq \boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}\left(\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{g}_j,\boldsymbol{g}_k\right) = \xi_i\eta_j\zeta_k.
\tag{1.17}
$$

二者相乘，有

$$(\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta})^{ijk} \cdot (\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta})_{ijk}$$

$$= \left(\xi^i \eta^j \zeta^k\right) \cdot \left(\xi_i \eta_j \zeta_k\right)$$

$$= \left(\xi^i \xi_i\right) \cdot \left(\eta^j \eta_j\right) \cdot \left(\zeta^k \zeta_k\right). \tag{1.18}$$

注意到

$$\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^m} = \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

分别把二者用协变和逆变分量表示：

$$= \left\langle \xi^i \boldsymbol{g}_i, \xi_j \boldsymbol{g}^j \right\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

$$= \xi^i \xi_j \left\langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j \right\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

$$= \xi^i \xi_j \delta_i^j = \xi^i \xi_i, \tag{1.19}$$

于是

$$(\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta})^{ijk} \cdot (\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta})_{ijk} = \|\xi\|^2_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\eta\|^2_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\zeta\|^2_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.20}$$

两边开方，即得 (1.15) 式. □

1.2　张量场的偏导数；协变导数

在区域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \subset \mathbb{R}^m$ 上，若存在一个自变量用位置刻画的映照

$$\boldsymbol{\Phi}: \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m), \tag{1.21}$$

则称张量 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ [1] 是定义在 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 上的一个 **张量场**.

下面我们以三阶张量为例. 设在物理域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}} \subset \mathbb{R}^m$ 和参数域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \subset \mathbb{R}^m$ 之间已经建立了微分同胚 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p\left(\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}; \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}\right)$. 在 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 处，张量场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 可以用分量形式表示为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \Phi^i{}_j{}^k(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m), \tag{1.22}$$

其中的 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})$ 都是局部基，而张量分量则定义为 [2]

$$\Phi^i{}_j{}^k(\boldsymbol{x}) \triangleq \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})\right] \in \mathbb{R}. \tag{1.23}$$

类似地，当点沿着 x^μ-线运动到 $\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x} + \lambda \, \boldsymbol{e}_\mu\right)$ 处时，有

$$\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x} + \lambda \, \boldsymbol{e}_\mu\right) = \Phi^i{}_j{}^k\left(\boldsymbol{x} + \lambda \, \boldsymbol{e}_\mu\right) \boldsymbol{g}_i\left(\boldsymbol{x} + \lambda \, \boldsymbol{e}_\mu\right) \otimes \boldsymbol{g}^j\left(\boldsymbol{x} + \lambda \, \boldsymbol{e}_\mu\right) \otimes \boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x} + \lambda \, \boldsymbol{e}_\mu\right). \tag{1.24}$$

现在研究 $\lambda \to 0 \in \mathbb{R}$ 时的极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x} + \lambda \, \boldsymbol{e}_\mu\right) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})}{\lambda} =: \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{1.25}$$

---

[1] 类似 "$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$" 的记号在前文也表示张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 作用在向量 $\boldsymbol{x}$ 上（"吃掉"了 $\boldsymbol{x}$），此时有 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$，注意不要混淆. 符号有限，难免如此，还望诸位体谅.

[2] 请注意，下式 $\boldsymbol{\Phi}$ 之后的第一个圆括号表示位于 $\boldsymbol{x}$ 处；而后面的方括号则表示作用在这几个向量上.

与之前的向量值映照类似，该极限表示张量场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 作为一个整体，相对于自变量第 μ 个分量的变化率，即 $\boldsymbol{\Phi}$ 关于 x^μ（在 $\boldsymbol{x}$ 处）的**偏导数**. 式中，$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu)$ 已由 (1.24) 式给出. 注意到张量分量实际上就是一个多元函数，于是

$$\Phi^{i\,k}_{\ j}\big(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\big)=\Phi^{i\,k}_{\ j}(\boldsymbol{x})+\frac{\partial\Phi^{i\,k}_{\ j}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\cdot\lambda+o^{i\,k}_{\ j}(\lambda)\in\mathbb{R}.\tag{1.26}$$

另外，三个基向量作为向量值映照，同样可以展开：

$$\begin{cases}\boldsymbol{g}_i\big(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\big)=\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})+\dfrac{\partial\boldsymbol{g}_i}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\cdot\lambda+\boldsymbol{o}_i(\lambda)\in\mathbb{R}^m,&\text{(1.27-a)}\\[3mm]\boldsymbol{g}^j\big(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\big)=\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})+\dfrac{\partial\boldsymbol{g}^j}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\cdot\lambda+\boldsymbol{o}^j(\lambda)\in\mathbb{R}^m,&\text{(1.27-b)}\\[3mm]\boldsymbol{g}_k\big(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\big)=\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})+\dfrac{\partial\boldsymbol{g}_k}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\cdot\lambda+\boldsymbol{o}_k(\lambda)\in\mathbb{R}^m.&\text{(1.27-c)}\end{cases}$$

如果直接展开，一共有 81 项，显然过于繁杂，不便操作. 我们将按 λ 的次数逐次展开. 首先看 λ 的零次项：

$$\Phi^{i\,k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}),\tag{1.28}$$

这就是 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$. 然后是 λ 的一次项：

$$\lambda\cdot\left[\frac{\partial\Phi^{i\,k}_{\ j}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})+\Phi^{i\,k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\frac{\partial\boldsymbol{g}_i}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})\right.$$
$$\left.+\Phi^{i\,k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\otimes\frac{\partial\boldsymbol{g}^j}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})+\Phi^{i\,k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\frac{\partial\boldsymbol{g}_k}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\right].\tag{1.29}$$

剩下的至少是 λ 的二次项，我们将其统一写作 "res."（余项）.

现在回头看之前的极限 (1.25) 式. λ 的零次项与 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 相互抵消，而一次项就只剩下了系数部分. 至于余项 res.，则要证明它趋于零. 以

$$\Phi^{i\,k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{o}_i(\lambda)\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})\tag{1.30}$$

为例，我们需要证明它等于 $\boldsymbol{o}(\lambda)\in\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，即

$$\lim_{\lambda\to0}\frac{\left\|\Phi^{i\,k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{o}_i(\lambda)\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)}}{\lambda}=0\in\mathbb{R}.\tag{1.31}$$

证明： 这里为了叙述方便，我们将暂时不使用 Einstein 求和约定，而是把求和号显式地写出来. 于是分子部分可以写成

$$\left\|\sum_{i,\,j,\,k=1}^m\Phi^{i\,k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{o}_i(\lambda)\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

根据范数的三角不等式，有

$$\leqslant\sum_{i,\,j,\,k=1}^m\left\|\Phi^{i\,k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{o}_i(\lambda)\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

再利用正齐次性，可得

$$= \sum_{i,j,k=1}^{m} \left| \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x}) \right| \cdot \left\| \boldsymbol{\sigma}_i(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}) \right\|_{\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

代入简单张量的范数，便有

$$= \sum_{i,j,k=1}^{m} \left| \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x}) \right| \cdot \left\| \boldsymbol{\sigma}_i(\lambda) \right\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \left\| \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}) \right\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \left\| \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}) \right\|_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.32}$$

这几项中只有 $\left\| \boldsymbol{\sigma}_i(\lambda) \right\|_{\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)}$ 与 λ 有关. 于是

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\left\| \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{\sigma}_i(\lambda) \otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}) \right\|_{\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)}}{\lambda}$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{m} \left| \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x}) \right| \cdot \left\| \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}) \right\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \left\| \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}) \right\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \lim_{\lambda \to 0} \frac{\left\| \boldsymbol{\sigma}_i(\lambda) \right\|_{\mathbb{R}^m}}{\lambda}$$

根据定义，最后的极限为零，因此

$$= 0. \tag{1.33}$$

$\square$

类似地，其他七十多项也都是 λ 的一阶无穷小量. 而有限个无穷小量之和仍为无穷小量，于是 res. $\to 0$.

综上，我们有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^{\mu}}(\boldsymbol{x}) := \lim_{\lambda \to 0} \frac{\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x} + \lambda \, \boldsymbol{e}_{\mu} \right) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})}{\lambda}$$

$$= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}}{\partial x^{\mu}} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^{\mu}} \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k} \boldsymbol{g}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^{\mu}} \otimes \boldsymbol{g}_k + \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^{\mu}} \right)(\boldsymbol{x}). \tag{1.34}$$

式中，$\partial \boldsymbol{g}_i / \partial x^{\mu} (\boldsymbol{x})$ 可以用 Christoffel 符号表示：

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^{\mu}}(\boldsymbol{x}) = \Gamma^{s}{}_{\mu i} \, \boldsymbol{g}_s(\boldsymbol{x}). \tag{1.35}$$

因此 (1.34) 式的第二项

$$\boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^{\mu}}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})$$

$$= \Gamma^{s}{}_{\mu i} \, \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{g}_s(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})$$

i 和 s 都是哑标，不妨进行一下交换：

$$= \Gamma^{i}{}_{\mu s} \, \boldsymbol{\Phi}^{s}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}). \tag{1.36}$$

同样，后面的两项也可进行类似的处理. 这样便有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^{\mu}}(\boldsymbol{x}) := \lim_{\lambda \to 0} \frac{\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x} + \lambda \, \boldsymbol{e}_{\mu} \right) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})}{\lambda}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial \Phi^i{}_j{}^k}{\partial x^\mu} + \Gamma^i{}_{\mu s} \Phi^s{}_j{}^k - \Gamma^s{}_{\mu j} \Phi^i{}_s{}^k + \Gamma^k{}_{\mu s} \Phi^i{}_j{}^s \right) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \right](\boldsymbol{x})$$

$$=: \nabla_\mu \Phi^i{}_j{}^k(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}), \tag{1.37}$$

式中，我们称 $\nabla_\mu \Phi^i{}_j{}^k(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ 为张量分量 $\Phi^i{}_j{}^k(\boldsymbol{x})$ 相对于 x^μ 的**协变导数**，其定义为：

$$\nabla_\mu \Phi^i{}_j{}^k(\boldsymbol{x}) \triangleq \frac{\partial \Phi^i{}_j{}^k}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}) + \Gamma^i{}_{\mu s} \Phi^s{}_j{}^k(\boldsymbol{x}) - \Gamma^s{}_{\mu j} \Phi^i{}_s{}^k(\boldsymbol{x}) + \Gamma^k{}_{\mu s} \Phi^i{}_j{}^s(\boldsymbol{x}). \tag{1.38}$$

1.3 张量场的梯度

1.3.1 梯度；可微性

我们在参数域中的内点 $\boldsymbol{x}_0$ 处取一个半径为 δ 的邻域 $\mathfrak{B}_\delta(\boldsymbol{x}_0)$. 若使自变量变化到 $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}$，则在物理域中，对应的点就将从 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)$ 变化到 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h})$. 考察定义在参数域 $\mathfrak{D}_x$ 上的张量场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$，它的变化为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0)$$
$$= \Phi^i{}_j{}^k(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) \, \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) \otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) \otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h})$$
$$- \Phi^i{}_j{}^k(\boldsymbol{x}_0) \, \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0) \otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}_0) \otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_0). \tag{1.39}$$

与之前一样将第一部分逐项展开，有

$$\begin{cases} \Phi^i{}_j{}^k(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = \Phi^i{}_j{}^k(\boldsymbol{x}_0) + \dfrac{\partial \Phi^i{}_j{}^k}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0) \cdot h^\mu + o^i{}_j{}^k\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big) \in \mathbb{R}, & \text{(1.40-a)} \\[2.5ex] \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0) + \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0) \cdot h^\mu + \boldsymbol{o}_i\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big) \in \mathbb{R}^m, & \text{(1.40-b)} \\[2.5ex] \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}_0) + \dfrac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0) \cdot h^\mu + \boldsymbol{o}^j\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big) \in \mathbb{R}^m, & \text{(1.40-c)} \\[2.5ex] \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_0) + \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0) \cdot h^\mu + \boldsymbol{o}_k\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big) \in \mathbb{R}^m. & \text{(1.40-d)} \end{cases}$$

不要忘记对哑标 μ 进行求和.

不显含 $\boldsymbol{h}$ 的只有每行的第一项；它们组合起来，与式 (1.39) 的第二部分相互抵消. 再看 $\boldsymbol{h}$ 的一次项：[①]

$$\left[\frac{\partial \Phi^i{}_j{}^k}{\partial x^\mu} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \Phi^i{}_j{}^k \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^\mu} \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \boldsymbol{g}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^\mu} \otimes \boldsymbol{g}_k + \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^\mu} \right) \right](\boldsymbol{x}_0) \cdot h^\mu. \tag{1.41}$$

利用 Christoffel 符号又可以把它写成

$$\left[\frac{\partial \Phi^i{}_j{}^k}{\partial x^\mu} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \Phi^i{}_j{}^k \left(\Gamma^s{}_{\mu i} \boldsymbol{g}_s \right) \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \right.$$

$$\left. - \Phi^i{}_j{}^k \boldsymbol{g}_i \otimes \left(\Gamma^j{}_{\mu s} \boldsymbol{g}^s \right) \otimes \boldsymbol{g}_k + \Phi^i{}_j{}^k \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \left(\Gamma^s{}_{\mu k} \boldsymbol{g}_s \right) \right](\boldsymbol{x}_0) \cdot h^\mu$$

---

① 实际是 h^μ 的一次项. 别忘了求和.

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial \Phi^i{}_j{}^k}{\partial x^\mu}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \Gamma^i_{\mu s}\, \Phi^s{}_j{}^k\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \right.\\
&\qquad \left. - \Gamma^s_{\mu j}\, \Phi^i{}_s{}^k\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \Gamma^k_{\mu s}\, \Phi^i{}_j{}^s\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \right) \big(\boldsymbol{x}_0 \big) \cdot h^\mu \\
&= \left[\left(\frac{\partial \Phi^i{}_j{}^k}{\partial x^\mu} + \Gamma^i_{\mu s}\, \Phi^s{}_j{}^k - \Gamma^s_{\mu j}\, \Phi^i{}_s{}^k + \Gamma^k_{\mu s}\, \Phi^i{}_j{}^s \right) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \right] \big(\boldsymbol{x}_0 \big) \cdot h^\mu .
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

至于高阶项，它们都等于 $\boldsymbol{o}\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m} \big) \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，并且满足

$$
\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^m} \frac{\left\| \boldsymbol{o}\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m} \big) \right\|_{\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)}}{\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}} = 0 \in \mathbb{R}.
\tag{1.43}
$$

证明与 (1.31) 式类似.

整理一下，我们有

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \big) - \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \\
&= \left[\left(\frac{\partial \Phi^i{}_j{}^k}{\partial x^\mu} + \Gamma^i_{\mu s}\, \Phi^s{}_j{}^k - \Gamma^s_{\mu j}\, \Phi^i{}_s{}^k + \Gamma^k_{\mu s}\, \Phi^i{}_j{}^s \right) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \right] \big(\boldsymbol{x}_0 \big) \cdot h^\mu + \boldsymbol{o}\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m} \big)
\end{aligned}
$$

利用协变导数，有

$$
=: \left[\nabla_\mu \Phi^i{}_j{}^k\big(\boldsymbol{x}_0 \big)\, \boldsymbol{g}_i\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \otimes \boldsymbol{g}^j\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \otimes \boldsymbol{g}_k\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \right] h^\mu + \boldsymbol{o}\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m} \big).
\tag{1.44}
$$

至此，从微分学的角度来看，任务已经完成. 但对于张量分析而言，我们还需要再做一点微小的工作. 简单张量部分再并上一个 $\boldsymbol{g}^\mu$，从而使张量升一阶；后面则改成 $h^\nu \boldsymbol{g}_\nu\big(\boldsymbol{x}_0 \big)$，并利用点乘保持总阶数不变：

$$
\begin{aligned}
&\left[\nabla_\mu \Phi^i{}_j{}^k\big(\boldsymbol{x}_0 \big)\, \boldsymbol{g}_i\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \otimes \boldsymbol{g}^j\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \otimes \boldsymbol{g}_k\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \right] h^\mu \\
&= \left[\nabla_\mu \Phi^i{}_j{}^k\big(\boldsymbol{x}_0 \big)\, \boldsymbol{g}_i\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \otimes \boldsymbol{g}^j\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \otimes \boldsymbol{g}_k\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \otimes \boldsymbol{g}^\mu\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \right] \cdot \left[h^\nu \boldsymbol{g}_\nu\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \right].
\end{aligned}
\tag{1.45}
$$

所谓"点乘"，其实就是 e 点积在 $e = 1$ 时的情况. 实际上，

$$
\boldsymbol{g}^\mu\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \cdot \left[h^\nu \boldsymbol{g}_\nu\big(\boldsymbol{x}_0 \big) \right] = h^\nu \delta^\mu_\nu = h^\mu .
\tag{1.46}
$$

这里用到了局部基的对偶关系 (**??**) 式.

此时，我们获得了一个四阶张量与 $h^\nu \boldsymbol{g}_\nu\big(\boldsymbol{x}_0 \big)$ 的点积. 接下来讨论该项的意义. 参数域中 $\boldsymbol{x}_0$ 发生 $\boldsymbol{h} = h^i \boldsymbol{e}_i$ 的变化时，根据向量值映照 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 的可微性，对应物理域中的变化为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \big) - \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0 \big) &= \mathsf{D}\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0 \big)(\boldsymbol{h}) + \boldsymbol{o}\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m} \big) \\
&=: \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^\nu}\big(\boldsymbol{x}_0 \big)\, h^\nu + \boldsymbol{o}\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m} \big)
\end{aligned}
$$

代入 **??** 小节中局部协变基的定义，可有

$$
=: h^\nu \boldsymbol{g}_\nu\big(\boldsymbol{x}_0 \big) + \boldsymbol{o}\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m} \big).
\tag{1.47}
$$

代入式 (1.44)，有

$$
\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\big) - \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{x}_0\big)
$$

$$
= \left[\nabla_\mu \boldsymbol{\Phi}^{i\ k}_{\ j}\big(\boldsymbol{x}_0\big)\, \boldsymbol{g}_i\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}^j\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}_k\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}^\mu\big(\boldsymbol{x}_0\big) \right]
$$

$$
\cdot \left[\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\big) - \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big) + \mathscr{o}\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big) \right] + \mathscr{o}\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big)
$$

合并掉一阶无穷小量[①]，可得

$$
= \left[\nabla_\mu \boldsymbol{\Phi}^{i\ k}_{\ j}\big(\boldsymbol{x}_0\big)\, \boldsymbol{g}_i\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}^j\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}_k\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}^\mu\big(\boldsymbol{x}_0\big) \right]
$$

$$
\cdot \left[\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\big) - \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big) \right] + \mathscr{o}\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big)
$$

$$
= \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\mu}\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}^\mu\big(\boldsymbol{x}_0\big) \right] \cdot \left[\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\big) - \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big) \right] + \mathscr{o}\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big) \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{1.48}
$$

引入记号

$$
\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \left[\boldsymbol{g}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\big(\boldsymbol{x}_0\big) \right] := \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\mu}\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}^\mu\big(\boldsymbol{x}_0\big), \tag{1.49}
$$

再引入**梯度算子**

$$
\boldsymbol{\nabla} := \boldsymbol{g}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\big(\boldsymbol{x}_0\big), \tag{1.50}
$$

我们得到的结论就可以表述为

$$
\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\big) - \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{x}_0\big) = \big(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla}\big)\big(\boldsymbol{x}_0\big) \cdot \left[\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\big) - \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big) \right] + \mathscr{o}\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big) \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m), \tag{1.51}
$$

式中的 "·" 表示点乘. 以上结果称之为张量场的**可微性**，它表明，由一点处的位置移动所引起张量场的变化，可以用该点处张量场的**梯度**（即 $\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla}$）点乘物理空间中的位置差别来近似，误差为一阶无穷小量. 以上分析基于三阶张量. 但显然，对于 p 阶张量，将会有完全一致的结果.

1.3.2 方向导数

现在来研究张量场沿 $\boldsymbol{e}$ 方向的变化率（设 $\|\boldsymbol{e}\|_{\mathbb{R}^m} = 1$）. 取一个与 $\boldsymbol{e}$ 平行的向量 $\lambda \boldsymbol{e}$. 注意到 $\lambda \boldsymbol{e}$ 其实就是物理空间中的位置变化，于是根据张量场的可微性，我们有

$$
\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}\big) - \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{x}_0\big) = \big(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla}\big)\big(\boldsymbol{x}_0\big) \cdot \big(\lambda \boldsymbol{e}\big) + \mathscr{o}(\lambda), \tag{1.52}
$$

该式等价于

$$
\lim_{\lambda \to 0} \frac{\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}\big) - \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{x}_0\big)}{\lambda} = \big(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla}\big)\big(\boldsymbol{x}_0\big) \cdot \boldsymbol{e}. \tag{1.53}
$$

我们把它定义为张量场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 沿 $\boldsymbol{e}$ 方向的**方向导数**：

$$
\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}_0) \triangleq \big(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla}\big)\big(\boldsymbol{x}_0\big) \cdot \boldsymbol{e}. \tag{1.54}
$$

---

① 式中的两个 $\mathscr{o}\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big)$ 是不同的，前者属于 $\mathbb{R}^m$，后者属于 $\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$.

1.3.3 左梯度与右梯度

我们已经知道，利用梯度算子

$$\boldsymbol{\nabla} := \boldsymbol{g}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0), \tag{1.55}$$

可以把张量场的梯度表示为

$$(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0) \otimes \left[\boldsymbol{g}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0)\right] := \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0) \otimes \boldsymbol{g}^\mu(\boldsymbol{x}_0). \tag{1.56}$$

"$\boldsymbol{\nabla}$"在右边，故称之为**右梯度**（简称**梯度**）. 相应地，自然会有**左梯度**：

$$(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{x}_0) = \left[\boldsymbol{g}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0)\right] \otimes \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0) := \boldsymbol{g}^\mu(\boldsymbol{x}_0) \otimes \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0). \tag{1.57}$$

张量积不存在交换律，因而这两者是不同的.

张量场的可微性可以用*左*梯度来等价表述：

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0) = \left[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)\right] \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{x}_0) + \mathscr{o}\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\right). \tag{1.58}$$

类似地，还有方向导数：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}_0) \triangleq (\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{x}_0). \tag{1.59}$$

1.4 场论恒等式

1.4.1 Ricci 引理

首先来证明两个结论：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \in \mathscr{T}^2(\mathbb{R}^m), & \text{(1.60-a)} \\[4mm] \dfrac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^3), & \text{(1.60-b)} \end{cases}$$

其中的 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}$ 分别是度量张量和 Eddington 张量.

证明： 为方便起见，证明中我们将省去"$(\boldsymbol{x})$".

先考察度量张量的偏导数：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(g_{ij}\,\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j\right) \\ &= \nabla_\mu g_{ij}\,\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j, \end{aligned} \tag{1.61}$$

式中，协变导数定义为

$$\nabla_\mu g_{ij} \triangleq \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} - \Gamma^s_{\mu i}\,g_{sj} - \Gamma^s_{\mu j}\,g_{is}. \tag{1.62}$$

以下有两种方法证明 $\nabla_\mu g_{ij} = 0$.

方法一利用度量的定义：

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} &\triangleq \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ &= \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^\mu}, \boldsymbol{g}_j \right\rangle_{\mathbb{R}^m} + \left\langle \boldsymbol{g}_i, \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^\mu} \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

根据 Christoffel 符号的定义（见 **??** 小节），有

$$= \Gamma_{\mu i, j} + \Gamma_{\mu j, i}. \tag{1.63}$$

另一方面，回忆 **(??)** 式：

$$\Gamma^{k}_{ij} = \Gamma_{ij, l} g^{kl}, \tag{1.64}$$

可有

$$\begin{cases} \Gamma^{s}_{\mu i} g_{sj} = \Gamma_{\mu i, k} g^{sk} g_{sj} = \Gamma_{\mu i, k} \delta^{k}_{j} = \Gamma_{\mu i, j}, & \text{(1.65-a)} \\ \Gamma^{s}_{\mu j} g_{is} = \Gamma_{\mu j, k} g^{sk} g_{is} = \Gamma_{\mu j, k} \delta^{k}_{i} = \Gamma_{\mu j, i}. & \text{(1.65-b)} \end{cases}$$

于是

$$\nabla_{\mu} g_{ij} = \Gamma_{\mu i, j} + \Gamma_{\mu j, i} - \Gamma_{\mu i, j} - \Gamma_{\mu j, i} = 0. \tag{1.66}$$

方法二则利用第一类 Christoffel 符号的性质 **(??)** 式：

$$\Gamma_{ij, k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}} \right). \tag{1.67}$$

因而

$$\Gamma^{s}_{\mu i} g_{sj} + \Gamma^{s}_{\mu j} g_{is}$$

$$= \Gamma_{\mu i, j} + \Gamma_{\mu j, i}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x^{j}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^{i}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^{\mu}} \right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\mu}}. \tag{1.68}$$

显然，立刻就有

$$\nabla_{\mu} g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\mu}} = 0. \tag{1.69}$$

综上，因为 $\nabla_{\mu} g_{ij} = 0 \in \mathbb{R}$，所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x^{\mu}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \in \mathscr{T}^{2}(\mathbb{R}^{m}). \tag{1.70}$$

如果用其他形式的分量来表述这一结果，我们便有

$$\nabla_{\mu} g_{ij} = \nabla_{\mu} g^{ij} = \nabla_{\mu} \delta^{i}_{j} = 0. \tag{1.71}$$

此结论称为 **Ricci 引理**.

再来看 Eddington 张量的偏导数：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\epsilon^{i\ k}_{\ j} \boldsymbol{g}_{i} \otimes \boldsymbol{g}^{j} \otimes \boldsymbol{g}_{k} \right)$$

$$= \nabla_{\mu} \epsilon^{i\ k}_{\ j} \boldsymbol{g}_{i} \otimes \boldsymbol{g}^{j} \otimes \boldsymbol{g}_{k}, \tag{1.72}$$

式中，

$$\nabla_{\mu} \epsilon^{i\ k}_{\ j} \triangleq \frac{\partial \epsilon^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{i}_{\mu s} \epsilon^{s\ k}_{\ j} - \Gamma^{s}_{\mu j} \epsilon^{i\ k}_{\ s} + \Gamma^{k}_{\mu s} \epsilon^{i\ s}_{\ j}. \tag{1.73}$$

根据定义，$\epsilon^i{}_j{}^k = \det[\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k]$. 因此

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \epsilon^i{}_j{}^k}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\det[\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k]\right) \\
&= \det\left[\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^\mu}, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right] + \det\left[\boldsymbol{g}^i, \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^\mu}, \boldsymbol{g}^k\right] + \det\left[\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^\mu}\right]
\end{aligned}$$

利用标架运动方程，有

$$= \det\left[-\Gamma^i_{\mu s}\boldsymbol{g}^s, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right] + \det\left[\boldsymbol{g}^i, \Gamma^s_{\mu j}\boldsymbol{g}_s, \boldsymbol{g}^k\right] + \det\left[\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, -\Gamma^k_{\mu s}\boldsymbol{g}^s\right]$$

再利用行列式的线性性，提出系数：

$$= -\Gamma^i_{\mu s}\det\left[\boldsymbol{g}^s, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right] + \Gamma^s_{\mu j}\det\left[\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_s, \boldsymbol{g}^k\right] - \Gamma^k_{\mu s}\det\left[\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^s\right]$$

代回 Eddington 张量的定义，可得

$$= -\Gamma^i_{\mu s}\epsilon^s{}_j{}^k + \Gamma^s_{\mu j}\epsilon^i{}_s{}^k - \Gamma^k_{\mu s}\epsilon^i{}_j{}^s. \tag{1.74}$$

这与式 (1.73) 的后三项恰好抵消. 于是便有 $\nabla_\mu \epsilon^i{}_j{}^k = 0$. 进而

$$\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^3). \tag{1.75}$$

和度量张量类似，Eddington 张量其他分量的偏导数，如 $\nabla_\mu \epsilon_{ijk}$、$\nabla_\mu \epsilon^{ijk}$ 等，也都等于零. 此结论同样称为 **Ricci 引理**. □

1.4.2 Leibniz 法则

协变导数满足 **Leibniz 法则**：

$$\nabla_\mu\left(\Phi^i{}_j{}^k \Psi_p{}^q\right) = \left(\nabla_\mu \Phi^i{}_j{}^k\right)\Psi_p{}^q + \Phi^i{}_j{}^k\left(\nabla_\mu \Psi_p{}^q\right). \tag{1.76}$$

式中，张量的形式可以是任意的.

证明：显然，$\Phi^i{}_j{}^k \Psi_p{}^q \in \mathscr{T}^5(\mathbb{R}^m)$. 不妨令

$$\Omega^i{}_j{}^k{}_p{}^q = \Phi^i{}_j{}^k \Psi_p{}^q. \tag{1.77}$$

则

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu&\left(\Phi^i{}_j{}^k \Psi_p{}^q\right) = \nabla_\mu \Omega^i{}_j{}^k{}_p{}^q \\
&\triangleq \frac{\partial \Omega^i{}_j{}^k{}_p{}^q}{\partial x^\mu} + \Gamma^i_{\mu s}\Omega^s{}_j{}^k{}_p{}^q - \Gamma^s_{\mu j}\Omega^i{}_s{}^k{}_p{}^q + \Gamma^k_{\mu s}\Omega^i{}_j{}^s{}_p{}^q - \Gamma^s_{\mu p}\Omega^i{}_j{}^k{}_s{}^q + \Gamma^q_{\mu s}\Omega^i{}_j{}^k{}_p{}^s \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\Phi^i{}_j{}^k \Psi_p{}^q\right) + \left(\Gamma^i_{\mu s}\Phi^s{}_j{}^k - \Gamma^s_{\mu j}\Phi^i{}_s{}^k + \Gamma^k_{\mu s}\Phi^i{}_j{}^s\right)\Psi_p{}^q + \Phi^i{}_j{}^k\left(-\Gamma^s_{\mu p}\Psi_s{}^q + \Gamma^q_{\mu s}\Psi_p{}^s\right). \tag{1.78}
\end{aligned}$$

第一项偏导数自然满足乘积法则：

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\Phi^i{}_j{}^k \Psi_p{}^q\right) = \frac{\partial \Phi^i{}_j{}^k}{\partial x^\mu}\Psi_p{}^q + \Phi^i{}_j{}^k\frac{\partial \Psi_p{}^q}{\partial x^\mu}. \tag{1.79}$$

代回前一式，即有

$$\nabla_\mu \left(\Phi^{i\ k}_{\ j}\Psi^{\ q}_p \right) = \left(\frac{\partial \Phi^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^\mu} + \Gamma^i_{\mu s}\Phi^{s\ k}_{\ j} - \Gamma^s_{\mu j}\Phi^{i\ k}_{\ s} + \Gamma^k_{\mu s}\Phi^{i\ s}_{\ j} \right)\Psi^{\ q}_p + \Phi^{i\ k}_{\ j}\left(\frac{\partial \Psi^{\ q}_p}{\partial x^\mu} - \Gamma^s_{\mu p}\Psi^{\ q}_s + \Gamma^q_{\mu s}\Psi^{\ s}_p \right)$$

$$\triangleq \left(\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j} \right)\Psi^{\ q}_p + \Phi^{i\ k}_{\ j}\left(\nabla_\mu \Psi^{\ q}_p \right). \tag{1.80}$$

$\square$

现在来考虑 $\nabla_\mu \left(\Phi^{i\ k}_{\ j}\Psi^{\ q}_k \right)$，注意其中的 k 是哑标. 若按照 Leibniz 法则，似乎有

$$\nabla_\mu \left(\Phi^{i\ k}_{\ j}\Psi^{\ q}_k \right) = \left(\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j} \right)\Psi^{\ q}_k + \Phi^{i\ k}_{\ j}\left(\nabla_\mu \Psi^{\ q}_k \right)$$

$$= \left(\frac{\partial \Phi^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^\mu} + \Gamma^i_{\mu s}\Phi^{s\ k}_{\ j} - \Gamma^s_{\mu j}\Phi^{i\ k}_{\ s} + \Gamma^k_{\mu s}\Phi^{i\ s}_{\ j} \right)\Psi^{\ q}_k + \Phi^{i\ k}_{\ j}\left(\frac{\partial \Psi^{\ q}_k}{\partial x^\mu} - \Gamma^s_{\mu k}\Psi^{\ q}_s + \Gamma^q_{\mu s}\Psi^{\ s}_k \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\Phi^{i\ k}_{\ j}\Psi^{\ q}_k \right) + \left(\Gamma^i_{\mu s}\Phi^{s\ k}_{\ j} - \Gamma^s_{\mu j}\Phi^{i\ k}_{\ s} \right)\Psi^{\ q}_k + \Phi^{i\ k}_{\ j}\left(\Gamma^q_{\mu s}\Psi^{\ s}_k \right)$$

$$+ \Gamma^k_{\mu s}\Phi^{i\ s}_{\ j}\Psi^{\ q}_k - \Gamma^s_{\mu k}\Phi^{i\ k}_{\ j}\Psi^{\ q}_s. \tag{1.81}$$

而根据定义，则

$$\nabla_\mu \left(\Phi^{i\ k}_{\ j}\Psi^{\ q}_k \right) \triangleq \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\Phi^{i\ k}_{\ j}\Psi^{\ q}_k \right) + \left(\Gamma^i_{\mu s}\Phi^{s\ k}_{\ j} - \Gamma^s_{\mu j}\Phi^{i\ k}_{\ s} \right)\Psi^{\ q}_k + \Phi^{i\ k}_{\ j}\left(\Gamma^q_{\mu s}\Psi^{\ s}_k \right). \tag{1.82}$$

很明显，式 (1.81) 中多了两项. 不过稍作计算，就可知道

$$\Gamma^k_{\mu s}\Phi^{i\ s}_{\ j}\Psi^{\ q}_k - \Gamma^s_{\mu k}\Phi^{i\ k}_{\ j}\Psi^{\ q}_s$$

k 和 s 都是哑标，不妨在第二项中将二者交换：

$$= \Gamma^k_{\mu s}\Phi^{i\ s}_{\ j}\Psi^{\ q}_k - \Gamma^k_{\mu s}\Phi^{i\ s}_{\ j}\Psi^{\ q}_k = 0. \tag{1.83}$$

可见，Leibniz 法则经受住了考验.

把 Ricci 引理和 Leibniz 法则联合起来，便有

$$\begin{cases} \nabla_\mu \left(g_{ij}\Psi^p_{\ q} \right) = \left(\nabla_\mu g_{ij} \right)\Psi^p_{\ q} + g_{ij}\left(\nabla_\mu \Psi^p_{\ q} \right) = g_{ij}\nabla_\mu \Psi^p_{\ q}, & \text{(1.84-a)} \\[2mm] \nabla_\mu \left(\epsilon^{i\ k}_{\ j}\Psi^p_{\ q} \right) = \left(\nabla_\mu \epsilon^{i\ k}_{\ j} \right)\Psi^p_{\ q} + \epsilon^{i\ k}_{\ j}\left(\nabla_\mu \Psi^p_{\ q} \right) = \epsilon^{i\ k}_{\ j}\nabla_\mu \Psi^p_{\ q}. & \text{(1.84-b)} \end{cases}$$

这说明度量张量和 Eddington 张量类似常数，可以提到协变导数的外面.

1.4.3　混合协变导数

与混合偏导数定理类似，协变导数满足

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j} = \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi^{i\ k}_{\ j}. \tag{1.85}$$

需注意，该定理只在 <mark>体积上张量场场论</mark> 成立.

证明： 首先计算张量场整体的一阶偏导数：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\Phi^{i\ k}_{\ j}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k\right) = \nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{1.86}$$

再求一次偏导数，可有

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} := \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k\right). \tag{1.87}$$

请注意，括号里的张量带有一个独立指标 μ. 按照极限分析，有

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\right) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^\nu} \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \boldsymbol{g}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^\nu} \otimes \boldsymbol{g}_k + \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^\nu}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\right) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\left(\Gamma^s_{\nu i}\, \boldsymbol{g}_s \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k - \Gamma^j_{\nu s}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^s \otimes \boldsymbol{g}_k + \Gamma^s_{\nu k}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_s\right)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\right) + \Gamma^i_{\nu s}\, \nabla_\mu \Phi^{s\ k}_{\ j} - \Gamma^s_{\nu j}\, \nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ s} + \Gamma^k_{\nu s}\, \nabla_\mu \Phi^{i\ s}_{\ j}\right] \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k. \tag{1.88}$$

但是 $\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}$ 本身带有 4 个指标，因而

$$\nabla_\nu\left(\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\right) \triangleq \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\right) + \Gamma^i_{\nu s}\, \nabla_\mu \Phi^{s\ k}_{\ j} - \Gamma^s_{\nu j}\, \nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ s} + \Gamma^k_{\nu s}\, \nabla_\mu \Phi^{i\ s}_{\ j} - \Gamma^s_{\nu \mu}\, \nabla_s \Phi^{i\ k}_{\ j}. \tag{1.89}$$

代入 (1.88) 式，可得

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k\right) = \left(\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j} + \Gamma^s_{\nu \mu}\, \nabla_s \Phi^{i\ k}_{\ j}\right) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k. \tag{1.90}$$

同理，

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \left(\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi^{i\ k}_{\ j} + \Gamma^s_{\mu \nu}\, \nabla_s \Phi^{i\ k}_{\ j}\right) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k. \tag{1.91}$$

根据 Christoffel 符号的性质，

$$\Gamma^s_{\nu \mu} = \Gamma^s_{\mu \nu}; \tag{1.92}$$

而按照 一般赋范线性空间上的微分学，当张量场具有足够正则性时，成立

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \tag{1.93}$$

这样就可得到

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j} = \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi^{i\ k}_{\ j}. \tag{1.94}$$

$\square$