第一章　张量的定义及表示

1.1　对偶基，度量

1.1.1　对偶基

$\mathbb{R}^m$ 空间中的基可分为两类：指标写在下面的基

$$\left\{\boldsymbol{g}_i\right\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

称为**协变基**，指标写在上面的基

$$\left\{\boldsymbol{g}^i\right\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \tag{1.2}$$

称为**逆变基**．它们满足**对偶关系**：

$$\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j\,; \\ 0, & i \neq j\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

这里的 δ^i_j 是 **Kronecker δ 函数**．

1.1.2　度量

下面引入**度量**的概念．其定义为

$$\begin{cases} g_{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}, & \text{(1.4-a)} \\ g^{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m}. & \text{(1.4-b)} \end{cases}$$

下面证明

$$g_{ik}\, g^{kj} = \delta^j_i\,. \tag{1.5}$$

它也可以写成矩阵的形式：

$$\left[g_{ik}\right]\left[g^{kj}\right] = \left[\delta^j_i\right] = \boldsymbol{I}_m, \tag{1.6}$$

其中的 $\boldsymbol{I}_m$ 是 m 阶单位阵．

证明：

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, g^{kj}\boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \tag{1.7}$$

后文将说明 $g^{kj}\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{g}^j$，因此可得

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta^j_i\,. \tag{1.8}$$

要注意的是，这里的指标 k 是哑标．根据 **Einstein 求和约定**，重复指标并且一上一下时，就表示对它求和．后文除非特殊说明，也均是如此． □

现在澄清**基向量转换关系**．第 i 个协变基向量 $\boldsymbol{g}_i$ 既然是向量，就必然可以用协变基或逆变基来表示．根据对偶关系式 (1.3) 和度量的定义式 (1.4-a)、(1.4-b)，可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = g_{ik}\, \boldsymbol{g}^k, & \text{(1.9-a)} \\ \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = \delta_i^k\, \boldsymbol{g}_k & \text{(1.9-b)} \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = \delta_k^i\, \boldsymbol{g}^k, & \text{(1.10-a)} \\ \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = g^{ik}\, \boldsymbol{g}_k. & \text{(1.10-b)} \end{cases}$$

这四个式子中，式 (1.9-b) 和 (1.10-a) 是平凡的，而式 (1.9-a) 和 (1.10-b) 则通过度量建立起了协变基与逆变基之间的关系．这就称为基向量转换关系，也可以叫做“指标升降游戏”．

1.1.3　向量的分量

对于任意的向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$，它可以用协变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = \xi^k \boldsymbol{g}_k, \tag{1.11}$$

也可以用逆变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = \xi_k \boldsymbol{g}^k, \tag{1.12}$$

式中，ξ^k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个逆变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**逆变分量**；而 ξ_k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个协变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**协变分量**．

以后凡是指标在下的（下标），均称为协变某某；指标在上的（上标），称为逆变某某．

1.2　张量的表示

1.2.1　张量的表示与简单张量

所谓**张量**，即指**多重线性函数**．

以三阶张量为例．考虑任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，其中的 $\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$ 表示以 $\mathbb{R}^m$ 为底空间的三阶张量全体．所谓三阶（或三重）线性函数，指“吃掉”三个向量之后变成数，并且“吃法”具有线性性．

对于一般地张量空间 $\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$，我们引入了线性结构：

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad (\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) \triangleq \alpha\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) + \beta\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right), \tag{1.13}$$

于是

$$\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m). \tag{1.14}$$

下面我们要获得 $\boldsymbol{\Phi}$ 的表示．根据之前任意向量用协变基或逆变基的表示，有

$$\begin{aligned} \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m, \quad & \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ & = \boldsymbol{\Phi}\left(u^i \boldsymbol{g}_i, v_j \boldsymbol{g}^j, w^k \boldsymbol{g}_k\right) \end{aligned}$$

考虑到 $\boldsymbol{\Phi}$ 对第一变元的线性性，可得

$$= u^i \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i,\, v_j \boldsymbol{g}^j,\, w^k \boldsymbol{g}_k\right)$$

同理，

$$= u^i v_j w^k \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i,\, \boldsymbol{g}^j,\, \boldsymbol{g}_k\right). \tag{1.15}$$

注意这里自然需要满足 Einstein 求和约定.

上式中的 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)$ 是一个数．它是张量 $\boldsymbol{\Phi}$ “吃掉”三个基向量的结果．至于 $u^i v_j w^k$ 部分，三项分别是 $\boldsymbol{u}$ 的第 i 个逆变分量、$\boldsymbol{v}$ 的第 j 个协变分量和 $\boldsymbol{w}$ 的第 k 个逆变分量．根据向量分量的定义，可知

$$u^i v_j w^k = \left(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m} \cdot \left(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} \cdot \left(\boldsymbol{w},\, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.16}$$

暂时中断一下思路，先给出**简单张量**的定义.

$$\forall \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \triangleq (\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\eta},\, \boldsymbol{v})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}, \tag{1.17}$$

式中 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^m$，而暂时把 $\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}$ 理解为一种记号．简单张量作为一个映照，组成它的三个向量分别与它们“吃掉”的第一、二、三个变元做内积并相乘，结果为一个实数.

考虑到内积的线性性，便有（以第二个变元为例）

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}},\, \boldsymbol{w}) \triangleq (\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\eta},\, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}$$

注意到 $(\boldsymbol{\eta},\, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} = \alpha(\boldsymbol{\eta},\, \tilde{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} + \beta(\boldsymbol{\eta},\, \hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m}$，同时再次利用简单张量的定义，可得

$$= \alpha\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\, \tilde{\boldsymbol{v}},\, \boldsymbol{w}) + \beta\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\, \hat{\boldsymbol{v}},\, \boldsymbol{w}). \tag{1.18}$$

类似地，对第一变元和第三变元，同样具有线性性．因此，可以知道

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{1.19}$$

可见，“简单张量”的名字是名副其实的，它的确是一个特殊的张量.

回过头来看 (1.16) 式．很明显，它可以用简单张量来表示．要注意，由于内积的对称性，可以有两种[①] 表示方法：

$$\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \tag{1.20}$$

或者

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{g}^i,\, \boldsymbol{g}_j,\, \boldsymbol{g}^k\right), \tag{1.21}$$

我们这里取上面一种．代入式 (1.15)，得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \\ &= \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i,\, \boldsymbol{g}^j,\, \boldsymbol{g}_k\right) \cdot \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

① 这里只考虑把 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{g}^i$、$\boldsymbol{g}_j$、$\boldsymbol{g}^k$ 分别放在一起的情况.

由于 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k) \in \mathbb{R}^m$，因此

$$= \left[\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k)\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k\right](\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}). \tag{1.22}$$

方括号里的部分，就是根据 Einstein 求和约定，用 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k)$ 对 $\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k$ 进行线性组合.

由于 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 选取的任意性，可以引入如下记号：

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k)\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k =: \Phi_i{}^j{}_k\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k, \tag{1.23}$$

即

$$\Phi_i{}^j{}_k := \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k), \tag{1.24}$$

这称为张量的**分量**. 它说明一个张量可以用张量分量和基向量组成的简单张量来表示.

指标 i、j、k 的上下是任意的. 这里，它有赖于式 (1.15) 中基向量的选取. 实际上，对于这里的三阶张量，指标的上下一共有 8 种可能. 指标全部在下面的，称为**协变分量**：

$$\Phi^{ijk} := \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k); \tag{1.25}$$

指标全部在上面的，称为**逆变分量**：

$$\Phi_{ijk} := \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k); \tag{1.26}$$

其余 6 种，称为**混合分量**. 对于一个 r 阶张量，显然共有 2^r 种分量表示，其中协变分量与逆变分量各一种，混合分量 $2^r - 2$ 种.

1.2.2 张量分量之间的关系

我们已经知道，对于任意一个向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$，它可以用协变基或逆变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{cases} \xi^i \boldsymbol{g}_i, \\ \xi_i \boldsymbol{g}^i. \end{cases} \tag{1.27}$$

式中，协变分量与逆变分量满足坐标转换关系：

$$\begin{cases} \xi^i = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^i)_{\mathbb{R}^m} = (\boldsymbol{\xi}, g^{ik}\boldsymbol{g}_k)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_k)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}\xi_k, & \text{(1.28-a)} \\ \xi_i = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_i)_{\mathbb{R}^m} = (\boldsymbol{\xi}, g_{ik}\boldsymbol{g}^k)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^k)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik}\xi^k. & \text{(1.28-b)} \end{cases}$$

每一式的第二个等号都用到了基向量转换关系，见式 (1.9-a) 和 (1.10-b).

现在再来考虑张量的分量. 仍以上文中的张量 $\Phi_i{}^j{}_k := \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k)$ 为例，我们想要知道它与张量 $\Phi^p{}_q{}^r := \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r)$ 之间的关系. 利用基向量转换关系，可有

$$\begin{aligned} \Phi_i{}^j{}_k &:= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k) \\ &= \boldsymbol{\Phi}(g_{ip}\boldsymbol{g}^p, g^{jq}\boldsymbol{g}_q, g_{kr}\boldsymbol{g}^r) \end{aligned}$$

又利用张量的线性性，得

$$\begin{aligned} &= g_{ip}g^{jq}g_{kr}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r) \\ &= g_{ip}g^{jq}g_{kr}\Phi^p{}_q{}^r. \end{aligned} \tag{1.29}$$

可见，张量的分量与向量的分量类似，其指标升降可通过度量来实现. 用同样的手法，还可以得到诸如 $\Phi^{ijk} = g^{jp}\Phi^i{}_p{}^k$、$\Phi^i{}_j{}^k = g_{jp}g^{kq}\Phi^{ip}{}_q$ 这样的关系式.

1.2.3 相对不同基的张量分量之间的关系

$\mathbb{R}^m$ 空间中，除了 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m$ 和相应的对偶基 $\{\boldsymbol{g}^i\}_{i=1}^m$ 之外，当然还可以有其他的基，比如带括号的 $\{\boldsymbol{g}_{(i)}\}_{i=1}^m$ 以及对应的对偶基 $\{\boldsymbol{g}^{(i)}\}_{i=1}^m$. 前者对应形如 $\boldsymbol{\Phi}^i{}_j{}^k \coloneqq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right)$ 的张量，后者则对应带括号的张量，如 $\boldsymbol{\Phi}^{(i)}{}_{(p)}{}^{(q)} \coloneqq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_{(p)}, \boldsymbol{g}^{(q)}\right)$. 下面我们来探讨这两个张量的关系.

首先来建立基之间的关系. 带括号的第 i 个基向量 $\boldsymbol{g}_{(i)}$，作为 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一个向量，自然可以用另一组基来表示：

$$\boldsymbol{g}_{(i)} = \begin{cases} \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k, \\ \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k. \end{cases} \tag{1.30}$$

同理，自然还有它的对偶基：

$$\boldsymbol{g}^{(i)} = \begin{cases} \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k, \\ \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k. \end{cases} \tag{1.31}$$

引入记号 $c^k_{(i)} \coloneqq \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}$ 和 $c^{(i)}_k \coloneqq \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}$，那么有

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_{(i)} = c^k_{(i)} \boldsymbol{g}_k, & \text{(1.32-a)} \\ \boldsymbol{g}^{(i)} = c^{(i)}_k \boldsymbol{g}^k. & \text{(1.32-b)} \end{cases}$$

容易看出，这两个系数具有如下性质：

$$c^{(i)}_k c^k_{(j)} = \delta^i_j. \tag{1.33}$$

写成矩阵形式[①]，为

$$\left[c^{(i)}_k\right]\left[c^k_{(j)}\right] = \left[\delta^j_i\right] = \boldsymbol{I}_m. \tag{1.34}$$

换句话说，两个系数矩阵是互逆的.

证明：

$$c^{(i)}_k c^k_{(j)} = \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} c^k_{(j)}$$

利用内积的线性性，有

$$= \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, c^k_{(j)} \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}$$

根据 $c^k_{(j)}$ 的定义，得到

$$= \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_{(j)}\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.35}$$

带括号的基同样满足对偶关系 (1.3) 式，于是得证. □

① 通常我们约定上面的标号作为行号，下面的标号作为列号.