

第一章 张量场可微性

1.1 张量的范数

1.1.1 赋范线性空间

对于一个线性空间 \mathcal{V} ，它总是定义了线性结构：

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V} \text{ 和 } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in \mathcal{V}. \quad (1.1)$$

为了进一步研究的需要，我们还要引入范数的概念。所谓“范数”，就是对线性空间中任意元素大小的一种刻画。举个我们熟悉的例子， m 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^m 中某个向量的范数，就定义为该向量在 Descartes 坐标下各分量的平方和的平方根。

一般而言，线性空间 \mathcal{V} 中的范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ 是从 \mathcal{V} 到 \mathbb{R} 的一个映照，并且需要满足以下三个条件：

1. 非负性

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{V}} \geq 0 \quad (1.2)$$

以及非退化性

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{V}} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathcal{V}, \quad (1.3)$$

这里的 $\mathbf{0}$ 是线性空间 \mathcal{V} 中的零元素，它是唯一存在的。

2. 由于零元是唯一的，因此线性空间中的元素 \mathbf{x} 就与从 $\mathbf{0}$ 指向它的向量一一对应。因此，线性空间中的元素也常被称为“向量”。

考虑线性空间中的数乘运算。从几何上看， \mathbf{x} 乘上 λ ，就是将 \mathbf{x} 沿着原来的指向进行伸缩。显然有

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \text{ 和 } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{V}} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{V}}, \quad (1.4)$$

这称为正齐次性。

想要图吗？

3. 线性空间中的加法满足平行四边形法则。直观地看，就有

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}, \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{\mathcal{V}} \leq \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{V}} + \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{V}}, \quad (1.5)$$

这称为三角不等式。

定义了范数的线性空间称为赋范线性空间。

1.1.2 张量范数的定义

考虑 p 阶张量 $\Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)$ ，它可以用逆变分量或协变分量来表示：

$$\Phi = \begin{cases} \Phi^{i_1 \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}, & (1.6-a) \\ \Phi_{i_1 \dots i_p} g^{i_1} \otimes \dots \otimes g^{i_p}, & (1.6-b) \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \Phi^{i_1 \dots i_p} = \Phi(g^{i_1}, \dots, g^{i_p}). & (1.7-a) \\ \Phi_{i_1 \dots i_p} = \Phi(g_{i_1}, \dots, g_{i_p}), & (1.7-b) \end{cases}$$

张量的范数定义为

$$\|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} \triangleq \sqrt{\Phi^{i_1 \dots i_p} \Phi_{i_1 \dots i_p}} \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

$i_1 \dots i_p$ 可独立取值，每个又有 m 种取法，所以根号下共有 m^p 项。注意 $\Phi^{i_1 \dots i_p}$ 与 $\Phi_{i_1 \dots i_p}$ 未必相等，因而根号下的部分未必是平方和，这与 Euclid 空间中向量的模是不同的。

复习一下 ?? 小节，我们可以用另一组（带括号的）基表示张量 Φ ：

$$\begin{cases} \Phi^{i_1 \dots i_p} = c_{(\xi_1)}^{i_1} \dots c_{(\xi_p)}^{i_p} \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)}, & (1.9-a) \\ \Phi_{i_1 \dots i_p} = c_{i_1}^{(\eta_1)} \dots c_{i_p}^{(\eta_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)}, & (1.9-b) \end{cases}$$

其中的 $c_{(\xi)}^i = \langle g_{(\xi)}, g^i \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ， $c_i^{(\eta)} = \langle g^{(\eta)}, g_i \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，它们满足

$$c_{(\xi)}^i c_i^{(\eta)} = \delta_{(\xi)}^{(\eta)}. \quad (1.10)$$

于是

$$\begin{aligned} & \Phi^{i_1 \dots i_p} \Phi_{i_1 \dots i_p} \\ &= \left(c_{(\xi_1)}^{i_1} \dots c_{(\xi_p)}^{i_p} \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \right) \left(c_{i_1}^{(\eta_1)} \dots c_{i_p}^{(\eta_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)} \right) \\ &= \left(c_{(\xi_1)}^{i_1} c_{i_1}^{(\eta_1)} \right) \dots \left(c_{(\xi_p)}^{i_p} c_{i_p}^{(\eta_p)} \right) \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)} \\ &= \delta_{(\xi_1)}^{(\eta_1)} \dots \delta_{(\xi_p)}^{(\eta_p)} \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)} \\ &= \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \Phi_{(\xi_1) \dots (\xi_p)}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

它是 Φ 在另一组基下的逆变分量与协变分量乘积之和。

以上结果说明，张量的范数不依赖于基的选取，这就好比用不同的秤来称同一个人的体重，都将获得相同的结果。既然如此，不妨采用单位正交基来表示张量的范数：

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} &\triangleq \sqrt{\Phi^{i_1 \dots i_p} \Phi_{i_1 \dots i_p}} \\ &= \sqrt{\Phi^{(i_1) \dots (i_p)} \Phi_{(i_1) \dots (i_p)}} \\ &=: \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\Phi_{(i_1, \dots, i_p)})^2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

这里的 $\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle}$ 表示张量 Φ 在单位正交基下的分量，它的指标不区分上下。

有了这样的表示，很容易就可以验证张量范数符合之前的三个要求。一组数的平方和开根号，必然是非负的。至于非退化性，若范数为零，则所有分量均为零，自然成为零张量；反之，对于零张量，所有分量为零，范数也为零。将 Φ 乘上 λ ，则有

$$\begin{aligned}\|\lambda \Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} &= \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\lambda \Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \\ &= |\lambda| \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \\ &= |\lambda| \cdot \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)},\end{aligned}\tag{1.13}$$

于是正齐次性也得以验证。最后，利用 Cauchy–Schwarz 不等式，可有

$$\begin{aligned}\|\Phi + \Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 &= \sum \left(\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} + \Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} \right)^2 \\ &= \sum \left[(\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 + 2\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle}\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} + (\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 \right] \\ &= \sum (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 + 2 \sum \Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle}\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} + \sum (\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 \\ &\leq \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 + 2\sqrt{\sum (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \sqrt{\sum (\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} + \|\Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 + 2\|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} \cdot \|\Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} + \|\Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= \left(\|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} + \|\Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} \right)^2.\end{aligned}\tag{1.14}$$

两边开方，即为三角不等式。

由此，我们就完整地给出了张量大小的刻画手段。可以看出，它实际上就是 Euclid 空间中向量模的直接推广。

1.1.3 简单张量的范数

根据 ?? 小节中的定义，简单张量是形如 $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$ 的张量，其中的 $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^m$ ，它是三个向量的张量积。简单张量的范数为

$$\|\xi \otimes \eta \otimes \zeta\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)} = \|\xi\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\eta\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\zeta\|_{\mathbb{R}^m}.\tag{1.15}$$

证明： $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$ 的逆变分量为

$$(\xi \otimes \eta \otimes \zeta)^{ijk} \triangleq \xi \otimes \eta \otimes \zeta(g^i, g^j, g^k) = \xi^i \eta^j \zeta^k.\tag{1.16}$$

同理，它的协变分量为

$$(\xi \otimes \eta \otimes \zeta)_{ijk} \triangleq \xi \otimes \eta \otimes \zeta(g_i, g_j, g_k) = \xi_i \eta_j \zeta_k.\tag{1.17}$$

二者相乘，有

$$\begin{aligned}
& (\xi \otimes \eta \otimes \zeta)^{ijk} \cdot (\xi \otimes \eta \otimes \zeta)_{ijk} \\
&= (\xi^i \eta^j \zeta^k) \cdot (\xi_i \eta_j \zeta_k) \\
&= (\xi^i \xi_i) \cdot (\eta^j \eta_j) \cdot (\zeta^k \zeta_k).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

注意到

$$\|\xi\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

分别把二者用协变和逆变分量表示：

$$\begin{aligned}
&= \langle \xi^i g_i, \xi_j g^j \rangle_{\mathbb{R}^m} \\
&= \xi^i \xi_j \langle g_i, g^j \rangle_{\mathbb{R}^m} \\
&= \xi^i \xi_j \delta_i^j = \xi^i \xi_i,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

于是

$$(\xi \otimes \eta \otimes \zeta)^{ijk} \cdot (\xi \otimes \eta \otimes \zeta)_{ijk} = \|\xi\|_{\mathbb{R}^m}^2 \cdot \|\eta\|_{\mathbb{R}^m}^2 \cdot \|\zeta\|_{\mathbb{R}^m}^2. \tag{1.20}$$

两边开方，即得 (1.15) 式. \square

1.2 张量场沿曲线坐标的变化率

在区域 $\mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$ 上，若存在一个自变量用位置刻画的映照

$$\Phi : \mathfrak{D}_x \ni \mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x}) \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m), \tag{1.21}$$

则称张量 $\Phi(\mathbf{x})$ ^① 是定义在 \mathfrak{D}_x 上的一个张量场。

下面我们以三阶张量为例。设在物理域 $\mathfrak{D}_X \subset \mathbb{R}^m$ 和参数域 $\mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$ 之间已经建立了微分同胚 $X(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_x; \mathfrak{D}_X)$ 。在 $X(\mathbf{x})$ 处，张量场 $\Phi(\mathbf{x})$ 可以用分量形式表示为

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})^i{}_j{}^k g_i(\mathbf{x}) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m), \tag{1.22}$$

其中的 $g_i(\mathbf{x})$, $g^j(\mathbf{x})$, $g_k(\mathbf{x})$ 都是局部基，而张量分量则定义为^②

$$\Phi(\mathbf{x})^i{}_j{}^k \triangleq \Phi(\mathbf{x})[g_i(\mathbf{x}), g^j(\mathbf{x}), g_k(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}. \tag{1.23}$$

类似地，当点沿着 x^μ -线运动到 $X(\mathbf{x} + \lambda e_\mu)$ 处时，有

$$\Phi(\mathbf{x} + \lambda e_\mu) = \Phi(\mathbf{x} + \lambda e_\mu)^i{}_j{}^k g_i(\mathbf{x} + \lambda e_\mu) \otimes g^j(\mathbf{x} + \lambda e_\mu) \otimes g_k(\mathbf{x} + \lambda e_\mu). \tag{1.24}$$

现在研究 $\lambda \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$ 时的极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{x} + \lambda e_\mu) - \Phi(\mathbf{x})}{\lambda} =: \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{1.25}$$

① 类似“ $\Phi(\mathbf{x})$ ”的记号在前文也表示张量 Φ 作用在向量 \mathbf{x} 上（“吃掉”了 \mathbf{x} ），此时有 $\Phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ ，注意不要混淆。符号有限，难免如此，还望诸位体谅。

② 请注意，下式 Φ 之后的第一个圆括号表示位于 \mathbf{x} 处；而后面的方括号则表示作用在这几个向量上。