第一章　张量的定义及表示

1.1　对偶基，度量

1.1.1　对偶基

设 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一组**基**，即极大线性无关向量组．此时，$\mathbb{R}^m$ 中将唯一存在另一组基 $\{\boldsymbol{g}^i\}_{i=1}^m$，二者满足**对偶关系**：

$$\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & j = i; \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \tag{1.1}$$

式中，$\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m}$ 的 δ_i^j 是 **Kronecker δ** 函数．

证明： 根据内积的定义，

$$\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{g}^j\right)^\mathsf{T} \boldsymbol{g}_i = \delta_i^j, \tag{1.2}$$

其中的 i、j 可取 $1, 2, \cdots, m$．写成矩阵形式，为[①]

$$\begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{g}^1\right)^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \left(\boldsymbol{g}^m\right)^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_m. \tag{1.3}$$

左边的第一个矩阵拆分成了 m 行，每行是一个 m 维行向量；第二个矩阵则拆分成了 m 列，每行是一个 m 维列向量．根据分块矩阵的乘法，所得结果对角元为 δ_i^i，非对角元则为 δ_j^i（其中 $i \neq j$），即单位阵．

把第一个矩阵的转置挪到外面，可有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^1, \cdots, \boldsymbol{g}^m \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_m. \tag{1.4}$$

$\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m$ 作为基，必然满足 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m \end{bmatrix}$ 非奇异．因此

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^1, \cdots, \boldsymbol{g}^m \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m \end{bmatrix}^{-1}, \tag{1.5}$$

即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^1, \cdots, \boldsymbol{g}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m \end{bmatrix}^{-\mathsf{T}}. \tag{1.6}$$

逆矩阵（及其转置）是存在且唯一的，这就证明了对偶基的存在性和唯一性． □

① 除非特殊说明，本文中的所有向量均取列向量．

我们把指标写在下面的基 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m$ 称为**协变基**；指标写在上面的基 $\{\boldsymbol{g}^i\}_{i=1}^m$ 称为**逆变基**．式 (1.6) 明确指出了逆变基与协变基的关系．

下面我们引入**单位正交基**（或**标准正交基**），它是指模长为一且两两正交的一组基．

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{I}, \tag{1.7}$$

即

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{A}^{-1} \text{ 或 } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-\mathsf{T}}, \tag{1.8}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交矩阵**．正交矩阵的全体记作 Orth．由线性代数中的结论可知，正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行和每一列均是单位正交基；反之，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行和每一列均是单位正交基，则 $\boldsymbol{A}$ 也是正交矩阵．

设 $\mathbb{R}^m$ 空间中的协变基 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m$ 是一组单位正交基，则由它构成的矩阵

$$\left[\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m\right] \in \mathsf{Orth}, \tag{1.9}$$

因此

$$\left[\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m\right] = \left[\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m\right]^{-\mathsf{T}}. \tag{1.10}$$

另一方面，根据对偶关系的矩阵表示 (1.6) 式，我们有

$$\left[\boldsymbol{g}^1, \cdots, \boldsymbol{g}^m\right] = \left[\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m\right]^{-\mathsf{T}}, \tag{1.11}$$

于是

$$\left[\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m\right] = \left[\boldsymbol{g}^1, \cdots, \boldsymbol{g}^m\right], \tag{1.12}$$

即协变基与逆变基完全相同．反之，如果协变基与逆变基相同，那么有

$$\left[\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m\right]^{\mathsf{T}} = \left[\boldsymbol{g}^1, \cdots, \boldsymbol{g}^m\right]^{\mathsf{T}} = \left[\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m\right]^{-1}, \tag{1.13}$$

因而

$$\left[\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m\right] \in \mathsf{Orth}. \tag{1.14}$$

这样，我们便获得了一个重要结论：当 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m$ 是单位正交基，即 $\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij}$ 时，可有 $\boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{g}_i$．反之亦然．

1.1.2 度量

下面引入**度量**的概念．其定义为

$$\begin{cases} g_{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}, & \text{(1.15-a)} \\ g^{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m}. & \text{(1.15-b)} \end{cases}$$

这两种度量满足

$$g_{ik}\, g^{kj} = \delta_i^j. \tag{1.16}$$

也可以写成矩阵的形式：

$$\left[g_{ik}\right]\left[g^{kj}\right] = \left[\delta_i^j\right] = \boldsymbol{I}_m, \tag{1.17}$$

其中的 $\boldsymbol{I}_m$ 是 m 阶单位阵．该式的证明将在稍后给出．

由于内积具有交换律，因而度量的两个指标显然可以交换：

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji}. \tag{1.18}$$

利用度量，可以获得**基向量转换关系**．第 i 个协变基向量 $\boldsymbol{g}_i$ 既然是向量，就必然可以用协变基或逆变基来表示[①]．根据对偶关系式 (1.1) 和度量的定义式 (1.15-a)、(1.15-b)，可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = g_{ik}\, \boldsymbol{g}^k, & \text{(1.19-a)} \\ \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = \delta_i^k\, \boldsymbol{g}_k & \text{(1.19-b)} \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = \delta^i_k\, \boldsymbol{g}^k, & \text{(1.20-a)} \\ \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = g^{ik}\, \boldsymbol{g}_k. & \text{(1.20-b)} \end{cases}$$

这四个式子中，式 (1.19-b) 和 (1.20-a) 是平凡的，而式 (1.19-a) 和 (1.20-b) 则通过度量建立起了协变基与逆变基之间的关系．这就称为基向量转换关系，也可以叫做“指标升降游戏”．

需要说明的是，根据 **Einstein 求和约定**，重复指标（即哑标，这里是 k）且一上一下时，已经暗含了求和．后文除非特殊说明，也都是如此．

现在我们来证明式 (1.16)：

$$g_{ik}\, g^{kj} = \delta_i^j. \tag{1.21}$$

证明：

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, g^{kj} \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \tag{1.22}$$

根据式 (1.20-b)，有

$$g^{kj} \boldsymbol{g}_k = g^{jk} \boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{g}^j \tag{1.23}$$

因此可得

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \tag{1.24}$$

□

1.1.3 向量的分量

对于任意的向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$，它可以用协变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = \xi^k \boldsymbol{g}_k, \tag{1.25-a}$$

也可以用逆变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = \xi_k \boldsymbol{g}^k. \tag{1.25-b}$$

式中，ξ^k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个逆变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**逆变分量**；而 ξ_k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个协变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**协变分量**．

以后凡是指标在下的（下标），均称为协变某某；指标在上的（上标），称为逆变某某．

① 所谓用某组基来“表示”一个向量，就是把它朝各个基的方向做投影，然后再求和．

1.2 张量的表示

1.2.1 张量的表示与简单张量

所谓**张量**，即**多重线性函数**.

首先用三阶张量举个例子．考虑任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，其中的 $\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$ 表示以 $\mathbb{R}^m$ 为底空间的三阶张量全体．所谓三阶（或三重）线性函数，指“吃掉”三个向量之后变成实数，并且“吃法”具有线性性.

一般地，r 阶张量的定义如下：

$$\boldsymbol{\Phi}:\ \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{r\ \text{个}\ \mathbb{R}^m} \ni \left\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right\} \mapsto \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) \in \mathbb{R}, \tag{1.26}$$

式中的 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足

$$\begin{aligned}\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad & \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \alpha\tilde{\boldsymbol{u}}_i + \beta\hat{\boldsymbol{u}}_i, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) \\ &= \alpha\,\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{u}}_i, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) + \beta\,\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{u}}_i, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right),\end{aligned} \tag{1.27}$$

即所谓“对第 i 个变元的线性性”．这里的 i 可取 $1, 2, \cdots, r$.

在张量空间 $\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$ 上，我们引入线性结构：

$$\begin{aligned}\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \text{和}\ \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad & (\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) \\ &\triangleq \alpha\,\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) + \beta\,\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right),\end{aligned} \tag{1.28}$$

于是

$$\alpha\,\boldsymbol{\Phi} + \beta\,\boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m). \tag{1.29}$$

下面我们要获得 $\boldsymbol{\Phi}$ 的表示．根据之前任意向量用协变基或逆变基的表示，有

$$\begin{aligned}\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m, \quad & \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ &= \boldsymbol{\Phi}\left(u^i\boldsymbol{g}_i, v_j\boldsymbol{g}^j, w^k\boldsymbol{g}_k\right)\end{aligned}$$

考虑到 $\boldsymbol{\Phi}$ 对第一变元的线性性，可得

$$= u^i\,\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, v_j\boldsymbol{g}^j, w^k\boldsymbol{g}_k\right)$$

同理，

$$= u^i v_j w^k\,\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right). \tag{1.30}$$

注意这里自然需要满足 Einstein 求和约定.

上式中的 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)$ 是一个数．它是张量 $\boldsymbol{\Phi}$ “吃掉”三个基向量的结果．至于 $u^i v_j w^k$ 部分，三项分别是 $\boldsymbol{u}$ 的第 i 个逆变分量、$\boldsymbol{v}$ 的第 j 个协变分量和 $\boldsymbol{w}$ 的第 k 个逆变分量．根据向量分量的定义，可知

$$u^i v_j w^k = \left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m} \cdot \left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} \cdot \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.31}$$

暂时中断一下思路，先给出**简单张量**的定义.

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \triangleq (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}, \tag{1.32}$$

式中的 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^m$. “$\otimes$”的定义将在 2.1 节中给出，现在可以暂时把 $\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}$ 理解为一种记号. 简单张量作为一个映照，组成它的三个向量分别与它们“吃掉”的第一、二、三个变元做内积并相乘，结果为一个实数.

考虑到内积的线性性，便有（以第二个变元为例）

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{w}) \triangleq (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\eta}, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}$$

注意到 $(\boldsymbol{\eta}, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} = \alpha(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} + \beta(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m}$，同时再次利用简单张量的定义，可得

$$= \alpha\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{w}) + \beta\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{w}). \tag{1.33}$$

类似地，对第一变元和第三变元，同样具有线性性. 因此，可以知道

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{1.34}$$

可见，“简单张量”的名字是名副其实的，它的确是一个特殊的张量.

回过头来看 (1.31) 式. 很明显，它可以用简单张量来表示. 要注意，由于内积的对称性，可以有两种[①] 表示方法：

$$\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \tag{1.35-a}$$

或者

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right), \tag{1.35-b}$$

我们这里取上面一种. 代入式 (1.30)，得

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \cdot \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \in \mathbb{R}^m$，因此

$$= \left[\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k\right](\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}). \tag{1.36}$$

方括号里的部分，就是根据 Einstein 求和约定，用 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)$ 对 $\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k$ 进行线性组合.

由于 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 选取的任意性，可以引入如下记号：

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k =: \Phi_{i\ k}^{\ j}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k, \tag{1.37}$$

即

$$\Phi_{i\ k}^{\ j} := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right), \tag{1.38}$$

这称为张量的**分量**. 它说明一个张量可以用张量分量和基向量组成的简单张量来表示.

指标 i、j、k 的上下是任意的. 这里，它有赖于式 (1.30) 中基向量的选取. 实际上，对于这里的三阶张量，指标的上下一共有 8 种可能. 指标全部在下面的，称为**协变分量**：

$$\Phi_{ijk} := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k\right); \tag{1.39}$$

① 这里只考虑把 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{g}^i$、$\boldsymbol{g}_j$、$\boldsymbol{g}^k$ 分别放在一起的情况.

指标全部在上面的，称为**逆变分量**：

$$\boldsymbol{\Phi}^{ijk} := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k\right); \tag{1.40}$$

其余 6 种，称为**混合分量**．对于一个 r 阶张量，显然共有 2^r 种分量表示，其中协变分量与逆变分量各一种，混合分量 $2^r - 2$ 种．

1.2.2 张量分量之间的关系

我们已经知道，对于任意一个向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$，它可以用协变基或逆变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{cases} \xi^i \boldsymbol{g}_i, \\ \xi_i \boldsymbol{g}^i. \end{cases} \tag{1.41}$$

式中，协变分量与逆变分量满足坐标转换关系：

$$\begin{cases} \xi^i = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{\xi}, g^{ik}\boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}\left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}\xi_k, & \text{(1.42-a)} \\ \xi_i = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_i\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{\xi}, g_{ik}\boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik}\left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik}\xi^k. & \text{(1.42-b)} \end{cases}$$

每一式的第二个等号都用到了基向量转换关系，见式 (1.19-a) 和 (1.20-b)．

现在再来考虑张量的分量．仍以上文中的张量 $\boldsymbol{\Phi}_i{}^j{}_k := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)$ 为例，我们想要知道它与张量 $\boldsymbol{\Phi}^p{}_q{}^r := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r\right)$ 之间的关系．利用基向量转换关系，可有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_i{}^j{}_k &:= \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \\ &= \boldsymbol{\Phi}\left(g_{ip}\boldsymbol{g}^p, g^{jq}\boldsymbol{g}_q, g_{kr}\boldsymbol{g}^r\right) \end{aligned}$$

又利用张量的线性性，得

$$\begin{aligned} &= g_{ip}g^{jq}g_{kr}\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r\right) \\ &= g_{ip}g^{jq}g_{kr}\boldsymbol{\Phi}^p{}_q{}^r. \end{aligned} \tag{1.43}$$

可见，张量的分量与向量的分量类似，其指标升降可通过度量来实现．用同样的手法，还可以得到诸如 $\boldsymbol{\Phi}^{ijk} = g^{jp}\boldsymbol{\Phi}^i{}_p{}^k$、$\boldsymbol{\Phi}^i{}_j{}^k = g_{jp}g^{kq}\boldsymbol{\Phi}^{ip}{}_k$ 这样的关系式．

1.2.3 相对不同基的张量分量之间的关系

$\mathbb{R}^m$ 空间中，除了 $\left\{\boldsymbol{g}_i\right\}_{i=1}^m$ 和相应的对偶基 $\left\{\boldsymbol{g}^i\right\}_{i=1}^m$ 之外，当然还可以有其他的基，比如带括号的 $\left\{\boldsymbol{g}_{(i)}\right\}_{i=1}^m$ 以及对应的对偶基 $\left\{\boldsymbol{g}^{(i)}\right\}_{i=1}^m$．前者对应形如 $\boldsymbol{\Phi}^i{}_j{}^k := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right)$ 的张量，后者则对应带括号的张量，如 $\boldsymbol{\Phi}^{(p)}{}_{(q)}{}^{(r)} := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{(p)}, \boldsymbol{g}_{(q)}, \boldsymbol{g}^{(r)}\right)$．下面我们来探讨这两个张量的关系．

首先来建立基之间的关系．带括号的第 i 个基向量 $\boldsymbol{g}_{(i)}$，作为 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一个向量，自然可以用另一组基来表示：

$$\boldsymbol{g}_{(i)} = \begin{cases} \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k, \\ \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k. \end{cases} \tag{1.44}$$

同理，自然还有它的对偶基：

$$\boldsymbol{g}^{(i)} = \begin{cases} \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k, \\ \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k. \end{cases} \tag{1.45}$$

引入记号 $c_{(i)}^{k} \coloneqq \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}$ 和 $c_k^{(i)} \coloneqq \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}$，那么有

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_{(i)} = c_{(i)}^{k} \boldsymbol{g}_k, & \text{(1.46-a)} \\ \boldsymbol{g}^{(i)} = c_k^{(i)} \boldsymbol{g}^k. & \text{(1.46-b)} \end{cases}$$

容易看出，这两个系数具有如下性质：

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^{k} = \delta_j^i. \tag{1.47}$$

写成矩阵形式[①]，为

$$\left[c_k^{(i)}\right]\left[c_{(j)}^{k}\right] = \left[\delta_i^j\right] = \boldsymbol{I}_m. \tag{1.48}$$

换句话说，两个系数矩阵是互逆的.

证明：

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^{k} = \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} c_{(j)}^{k}$$

利用内积的线性性，有

$$= \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, c_{(j)}^{k} \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}$$

根据 $c_{(j)}^{k}$ 的定义，得到

$$= \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_{(j)}\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.49}$$

带括号的基同样满足对偶关系 (1.1) 式，于是得证. □

上面我们用不带括号的基表示了带括号的基. 反之也是可以的：

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^{(k)}\right)_{\mathbb{R}^m} \mathbb{R}^m \, \boldsymbol{g}_{(k)} = c_i^{(k)} \boldsymbol{g}_{(k)}, & \text{(1.50-a)} \\ \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_{(k)}\right)_{\mathbb{R}^m} \mathbb{R}^m \, \boldsymbol{g}^{(k)} = c_{(k)}^{i} \boldsymbol{g}^{(k)}. & \text{(1.50-b)} \end{cases}$$

这样一来，就建立起了不同基之间的转换关系.

现在我们回到张量. 根据张量分量的定义，

$$\boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k} \coloneqq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right)$$

利用之前推导的不同基向量之间的转换关系，得

$$= \boldsymbol{\Phi}\left(c_{(p)}^{i} \boldsymbol{g}^{(p)}, c_j^{(q)} \boldsymbol{g}_{(q)}, c_{(r)}^{k} \boldsymbol{g}^{(r)}\right)$$

① 通常我们约定上面的标号作为行号，下面的标号作为列号.

由张量的线性性，提出系数：

$$
\begin{aligned}
&= c^{i}_{(p)} c^{(q)}_{j} c^{k}_{(r)} \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{(p)}, \boldsymbol{g}_{(q)}, \boldsymbol{g}^{(r)}\right) \\
&= c^{i}_{(p)} c^{(q)}_{j} c^{k}_{(r)} \boldsymbol{\Phi}^{(p)}{}_{(q)}{}^{(r)}.
\end{aligned} \tag{1.51}
$$

完全类似，还可以有

$$
\boldsymbol{\Phi}^{(i)}{}_{(j)}{}^{(k)} = c^{(i)}_{p} c^{g}_{(j)} c^{(k)}_{r} \boldsymbol{\Phi}^{p}{}_{q}{}^{r}. \tag{1.52}
$$

总结一下这两小节得到的结果．对于同一组基下的张量分量，其指标升降通过度量来实现；对于不同基下的张量分量，其指标转换则通过不同基之间的转换系数来完成．

第二章　张量的运算性质

2.1　张量积

张量积也叫**张量并**，用符号“$\otimes$”表示．在 1.2.1 小节给出简单张量的定义时，实际上就用到了张量积．张量积的定义为：

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^q(\mathbb{R}^m), \quad \boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi} &\in \mathscr{T}^{p+q}(\mathbb{R}^m)\\ &= \left(\Phi^{i_1\cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\Psi_{j_1\cdots j_q} \boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right)\\ &\triangleq \Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi_{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right).\end{aligned} \tag{2.1}$$

由该定义可以知道，关于简单张量 $\left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right)$，相应的张量分量为

$$(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi})^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}. \tag{2.2}$$

2.2　e 点积

张量的 e **点积**可以用符号“$\binom{e}{\cdot}$”表示．从这个符号可以看出 e 点积的作用：前 e 个指标缩并，后面的点乘．

对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^q(\mathbb{R}^m), e \leqslant \min\{p, q\} \in \mathbb{N}^*$，$e$ 点积是这样定义的：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}\binom{e}{\cdot}\boldsymbol{\Psi}\\ &= \left(\Phi^{i_1\cdots i_{p-e} i_{p-e+1}\cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}} \otimes \boxed{\boldsymbol{g}_{i_{p-e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}}\right)\\ &\qquad \binom{e}{\cdot}\left(\Psi^{j_1\cdots j_e j_{e+1}\cdots j_q} \boxed{\boldsymbol{g}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_e}} \otimes \boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right)\end{aligned}$$

把高亮的部分做内积，得到度量：

$$\begin{aligned}&\triangleq \Phi^{i_1\cdots i_{p-e} i_{p-e+1}\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_e j_{e+1}\cdots j_q}\\ &\qquad \cdot g_{i_{p-e+1}j_1}\cdots g_{i_p j_e}\left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right)\end{aligned}$$

玩一下“指标升降游戏”（注意有两种结合方式：与 $\boldsymbol{\Phi}$ 或 $\boldsymbol{\Psi}$ ），可得

$$= \left\{\begin{aligned}&\Phi^{i_1\cdots i_{p-e}}{}_{\boxed{j_1\cdots j_e}}\,\Psi^{\boxed{j_1\cdots j_e}\, j_{e+1}\cdots j_q}\\ &\Phi^{i_1\cdots i_{p-e}\,\boxed{i_{p-e+1}\cdots i_p}}\,\Psi_{\boxed{i_{p-e+1}\cdots i_p}}{}^{j_{e+1}\cdots j_q}\end{aligned}\right\}\left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right). \tag{2.3}$$

最后一步的花括号中，高亮的 $j_1 \cdots j_e$ 和 $i_{p-e+1} \cdots i_p$ 都是哑标，可以通过求和求掉．因此有

$$\boldsymbol{\Phi} \binom{e}{.} \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^{p+q-2e}(\mathbb{R}^m). \tag{2.4}$$

换句话说，e 点积的作用就是将指标哑标化．

作为一个特例，接下来我们介绍**全点积**，用符号“$\odot$”表示．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)$，有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi} \odot \boldsymbol{\Psi} \triangleq \boldsymbol{\Phi} \binom{p}{.} \boldsymbol{\Psi} \\
&= \left(\Phi^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \binom{p}{.} \left(\Psi^{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{g}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_p}\right) \\
&= \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_p j_p} \\
&= \begin{cases} \Phi_{j_1 \cdots j_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} \\ \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{i_1 \cdots i_p} \end{cases} \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

可见，全点积将全部指标哑标化．

张量自身和自身的全点积，定义为它的**范数**：

$$\boldsymbol{\Phi} \odot \boldsymbol{\Phi} = \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p} =: \|\boldsymbol{\Phi}\|^2_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}. \tag{2.6}$$

2.3 叉乘

张量的**叉乘**要求底空间为 $\mathbb{R}^3$．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p\left(\mathbb{R}^3\right), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^q\left(\mathbb{R}^3\right)$，叉乘的定义如下：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Psi} \\
&= \left(\Phi^{i_1 \cdots i_{p-1} i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-1}} \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \times \left(\Psi_{j_1 j_2 \cdots j_q} \boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right) \\
&\triangleq \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-1}} \otimes \left(\boldsymbol{g}_{i_p} \times \boldsymbol{g}^{j_1}\right) \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q} \in \mathscr{T}^{p+q-1}\left(\mathbb{R}^3\right).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

注意到，此时简单张量的维数已经降了一阶．

利用 **Levi-Civita 记号**，可以进一步展开上式．

$$\boldsymbol{g}_{i_p} \times \boldsymbol{g}^{j_1} = \epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s \boldsymbol{g}^s, \tag{2.8}$$

式中的

$$\epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s = \det\left[\boldsymbol{g}_{i_p}, \boldsymbol{g}^{j_1}, \boldsymbol{g}_s\right]. \tag{2.9}$$

于是

$$\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Psi} = \epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-1}} \otimes \boldsymbol{g}^s \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}. \tag{2.10}$$

下面我们再来类比地定义一种混合积“$\binom{\times}{.}$”．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，定义

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi} \binom{\times}{.} \boldsymbol{\Psi} &= \left(\Phi^{ijk} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}_k\right) \binom{\times}{.} \left(\Psi_{pqr} \boldsymbol{g}^p \otimes \boldsymbol{g}^q \otimes \boldsymbol{g}^r\right) \\
&\triangleq \Phi^{ijk} \Psi_{pqr} \delta^q_j \boldsymbol{g}_i \otimes \left(\boldsymbol{g}_k \times \boldsymbol{g}^p\right) \otimes \boldsymbol{g}^r
\end{aligned}$$

缩并掉 Kronecker δ，同时利用 Levi-Civita 记号展开叉乘项，可有

$$= \epsilon_{k\ s}^{\ p} \boldsymbol{\Phi}^{ijk} \boldsymbol{\Psi}_{pjr} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^s \otimes \boldsymbol{g}^r, \tag{2.11}$$

式中的

$$\epsilon_{k\ s}^{\ p} = \det\left[\boldsymbol{g}_k, \boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_s\right]. \tag{2.12}$$

对于这种混合积，并没有一般的约定．不同的研究者往往会采用不同的写法及表示．

2.4 置换（一）

本节主要介绍**置换运算**的定义及相关概念，这将使我们暂时离开张量运算的主线．

置换运算实际上是一种交换位置或者改变次序的运算．之后我们还将引入针对张量的置换算子，它是外积运算和外微分运算的基础．这些运算是现代张量分析与微分几何的支柱．

2.4.1 置换的定义

我们从一个例子开始．下面是一个 2×7 的“矩阵”：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ \\ ⑦ & ④ & ⑤ & ① & ⑥ & ② & ③ \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

矩阵里面的每一个数字表示一个位置．可以想象成 7 把椅子，先是按第一行的顺序依次排列，再按照第二行的顺序打乱，重新排列．于是这就成为一个 **7 阶置换**．这个定义等价于

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \tag{2.14-a}$$

自然也等价于

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}, \tag{2.14-b}$$

当然，换用任何元素也都是可以的．

通常我们用方括号表示置换的**序号定义**，即标号的排列轮换；用圆括号表示**元素定义**，即标号对应元素的轮换．

2.4.2 置换的符号

接着来定义置换的**符号** $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}$．这里我们把每次交换两个数字称为一次“操作”．如果经过偶数次“操作”，可以把经置换后的序列恢复为原来的顺序，那么该置换的符号 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = 1$；而如果经过奇数次“操作”才可以复原，则 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = -1$．若用一个式子表示，则为

$$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = (-1)^n, \tag{2.15}$$

其中的 n 是恢复原本顺序所需“操作”的次数．

下面我们以式 (2.13) 所定义的 $\boldsymbol{\sigma}$ 为例，演示求置换符号的过程．这里的关键是通过两两交换，按如下步骤把式 (2.14-b) 的第二行变换成第一行：

$$
\begin{array}{ccccccc}
\text{♦} & \text{♣} & \text{♤} & \text{♠} & \text{♥} & \text{♡} & \text{♢} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\text{♠} & \text{♣} & \text{♤} & \text{♦} & \text{♥} & \text{♡} & \text{♢} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\text{♠} & \text{♡} & \text{♤} & \text{♦} & \text{♥} & \text{♣} & \text{♢} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\text{♠} & \text{♡} & \text{♢} & \text{♦} & \text{♥} & \text{♣} & \text{♤} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\text{♠} & \text{♡} & \text{♢} & \text{♣} & \text{♥} & \text{♦} & \text{♤} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\text{♠} & \text{♡} & \text{♢} & \text{♣} & \text{♤} & \text{♦} & \text{♥} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\text{♠} & \text{♡} & \text{♢} & \text{♣} & \text{♤} & \text{♥} & \text{♦}
\end{array}
$$

一共进行了 6 次两两交换，因此 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = 1$．

2.4.3 置换的复合

再定义一个置换

$$
\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.16}
$$

注意这里用了方括号，因此它是一个序号定义．方便起见，以后的序号我们都只用不带圈的普通数字表示．考虑之前定义的置换

$$
\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \tag{2.17}
$$

则 $\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 的复合

$$
\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma} = \left(\begin{array}{ccccccc} \text{⚀} & \text{⚁} & \text{⚂} & \text{⚃} & \text{⚄} & \text{⚅} & \odot \\ \odot & \text{⚃} & \text{⚄} & \text{⚀} & \text{⚅} & \text{⚁} & \text{⚂} \\ \hdashline \text{⚅} & \odot & \text{⚂} & \text{⚄} & \text{⚁} & \text{⚀} & \text{⚃} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \boldsymbol{\sigma} \\ \leftarrow \boldsymbol{\tau} \end{array} \tag{2.18}
$$

与函数、线性变换等的复合类似，这里也用小圆圈“∘”表示置换的复合．

假设经过置换 $\boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{\tau}$ 作用后得到的序列，分别需要 p 次和 q 次两两交换才能复原为原来的序列．那么很显然，经过复合置换 $\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}$ 作用后的序列，经过 $q + p$ 次两两交换也一定可以复原．因此，复

合置换的符号

$$\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}) = (-1)^{q+p} = (-1)^q\cdot(-1)^p = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}. \tag{2.19}$$

2.4.4 逆置换

逆置换 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ 的定义为

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Id}, \tag{2.20}$$

其中的“$\mathbf{Id}$”是恒等映照.

仍然使用式 (2.14-b)：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \varheartsuit & \vardiamondsuit \\ \vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

那么自然有

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} \vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \varheartsuit & \vardiamondsuit \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

显然，我们有 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Id}$.

回忆一下逆矩阵的定义. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 既要满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$，又要满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$. 对于置换也是如此，因此我们需要检查 $\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\sigma}^{-1}$：[①]

$$\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\sigma}^{-1} = \left(\begin{array}{ccccccc} \vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \spadesuit_1 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3 & \clubsuit_4 & \varspadesuit_5 & \varheartsuit_6 & \vardiamondsuit_7 \\ \hdashline \vardiamondsuit_7 & \clubsuit_4 & \varspadesuit_5 & \spadesuit_1 & \varheartsuit_6 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow\boldsymbol{\sigma}^{-1} \\ \leftarrow\boldsymbol{\sigma} \end{array} \tag{2.23}$$

可见的确有 $\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\sigma}^{-1} = \mathbf{Id}$.

另外，由于恒等映照 $\mathbf{Id}$ 作用后序列不发生变化，复原所需的交换次数为 0，因此

$$\operatorname{sgn}\mathbf{Id} = (-1)^0 = 1. \tag{2.24}$$

而根据定义，

$$\mathbf{Id} = \boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.25}$$

故有

$$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}^{-1} = 1. \tag{2.26}$$

由此，可以推知

$$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}^{-1}, \tag{2.27}$$

即置换与它的逆具有相同的符号.

2.5 置换（二）

本节将介绍置换运算的基本性质.

① 该式中的数字角标用来澄清原始序号.

2.5.1　置换的穷尽

先要做一点铺垫．设有序数组

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$$

经置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 作用后成为

$$\{\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\},$$

则根据之前的元素定义（圆括号），可以把 $\boldsymbol{\sigma}$ 记为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \boldsymbol{\sigma}(i_1) & \boldsymbol{\sigma}(i_2) & \cdots & \boldsymbol{\sigma}(i_r) \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

每次置换都将得到一个有序数组．把它们组合到一起，就可以得到集合

$$\left\{ \left(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r \right\}. \tag{2.29}$$

其中的 $\mathscr{P}_r$ 表示 r 阶置换的全体．根据排列组合原理，r 阶置换的总数等于 r 个元素的全排列数．即该集合共有 $r!$ 个元素．

下面我们要证明

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r \right\} \\
&= \left\{ \left(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}(i_r)\right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathscr{P}_r \right\} &\text{(2.30-a)}\\
&= \left\{ \left(\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}(i_1), \boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}(i_r)\right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathscr{P}_r \right\} &\text{(2.30-b)}\\
&= \left\{ \left(\boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_1), \boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_r)\right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r \right\}. &\text{(2.30-c)}
\end{aligned}$$

所谓“穷尽”，就是将 $\mathscr{P}_r$ 中的所有置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 全部枚举出来．关于 $\boldsymbol{\sigma}$ 的求和就是一个例子．以上这条性质说明，置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 如果作为一个广义上的“哑标”，那么穷尽的结果与用 $\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}$ 或 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ 代替该“哑标”的结果是一样的．

这说明置换构成了置换群．?

证明： 证明的思路是说明集合互相包含．

对于式 (2.30-a)，右边的 $\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}$ 也是一个 r 阶置换，自然符合左边集合的定义，因此 右边 $\subset$ 左边．由于这一步是相当显然的，以下的几个证明我们将略去该步．另一方面，左边的 $\boldsymbol{\sigma}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Id}\circ\boldsymbol{\sigma} = \left(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}\right)\circ\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}\circ\left(\boldsymbol{\tau}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}\right), \tag{2.31}$$

这就是右边集合的定义，因此 左边 $\subset$ 右边．故可证得等式成立．

对于式 (2.30-b)，我们有

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\circ\mathbf{Id} = \boldsymbol{\sigma}\circ\left(\boldsymbol{\tau}^{-1}\circ\boldsymbol{\tau}\right) = \left(\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}\right)\circ\boldsymbol{\tau}, \tag{2.32}$$

它符合了右边集合的定义，因此 左边 $\subset$ 右边．于是等式成立．

对于式 (2.30-c)，我们有

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\boldsymbol{\sigma}^{-1}\right)^{-1}, \tag{2.33}$$

它符合了右边集合的定义，因此 左边 $\subset$ 右边．于是等式成立．　□

2.5.2 数组元素的乘积

设有序数组 $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$、$\{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$ 和 $\{k_1, k_2, \cdots, k_r\}$ 经 r 阶置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 作用后分别成为 $\{\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\}$、$\{\boldsymbol{\sigma}(j_1), \boldsymbol{\sigma}(j_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(j_r)\}$ 和 $\{\boldsymbol{\sigma}(k_1), \boldsymbol{\sigma}(k_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(k_r)\}$，也就是说

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \boldsymbol{\sigma}(i_1) & \boldsymbol{\sigma}(i_2) & \cdots & \boldsymbol{\sigma}(i_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ \boldsymbol{\sigma}(j_1) & \boldsymbol{\sigma}(j_2) & \cdots & \boldsymbol{\sigma}(j_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ \boldsymbol{\sigma}(k_1) & \boldsymbol{\sigma}(k_2) & \cdots & \boldsymbol{\sigma}(k_r) \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

我们有如下结论：

$$\forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r, \quad A_{i_1 j_1 k_1} A_{i_2 j_2 k_2} \cdots A_{i_r j_r k_r} = A_{\boldsymbol{\sigma}(i_1)\boldsymbol{\sigma}(j_1)\boldsymbol{\sigma}(k_1)} A_{\boldsymbol{\sigma}(i_2)\boldsymbol{\sigma}(j_2)\boldsymbol{\sigma}(k_2)} \cdots A_{\boldsymbol{\sigma}(i_r)\boldsymbol{\sigma}(j_r)\boldsymbol{\sigma}(k_r)}, \tag{2.35}$$

式中的 A_{ijk} 表示三维数组 $\boldsymbol{A}$ 的一个元素，其指标为 ijk.

下面通过一个例子来说明这一条性质．还是用式 (2.14-a) 和 (2.14-b) 所定义的置换 $\boldsymbol{\sigma}$：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \varheartsuit & \vardiamondsuit \\ \vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

随意写出一个数组元素乘积：

$$A_{379} A_{264} A_{157} A_{483} A_{698} A_{\diamondsuit\clubsuit\heartsuit} A_{\vardiamondsuit\varspadesuit\varheartsuit}. \tag{2.37}$$

三组下标分别为

$$\begin{cases} 3,\ 2,\ 1,\ 4,\ 6,\ \diamondsuit,\ \vardiamondsuit; \\ 7,\ 6,\ 5,\ 8,\ 9,\ \clubsuit,\ \varspadesuit; \\ 9,\ 4,\ 7,\ 3,\ 8,\ \heartsuit,\ \varheartsuit. \end{cases} \tag{2.38}$$

考虑 $\boldsymbol{\sigma}$ 的序号定义式 (2.13)：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{2.39}$$

所谓序号只是位置的抽象表示，而不代表任何真实的元素．请记住：置换始终是位置的变换，而非元素的变换，不要被式 (2.36) 给迷惑了．把 $\boldsymbol{\sigma}$ 作用在这三组下标上，可得

$$\begin{cases} \vardiamondsuit,\ 4,\ 6,\ 3,\ \diamondsuit,\ 2,\ 1; \\ \varspadesuit,\ 8,\ 9,\ 7,\ \clubsuit,\ 6,\ 5; \\ \varheartsuit,\ 3,\ 8,\ 9,\ \heartsuit,\ 4,\ 7. \end{cases} \tag{2.40}$$

于是之前的数组元素乘积就变成了

$$A_{\vardiamondsuit\varspadesuit\varheartsuit} A_{483} A_{698} A_{379} A_{\diamondsuit\clubsuit\heartsuit} A_{264} A_{157}. \tag{2.41}$$

比对一下各元素，可见与式 (2.37) 的确是完全一样的．

2.5.3 哑标的穷尽

考虑如下集合：

$$\left\{\left(i_1, i_2, \cdots, i_r\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\}. \tag{2.42}$$

每个 i_k 都有 m 种取法，而 i_k 又有 r 个，因此该集合一共有 m^r 元素．我们有

$$\begin{aligned}
\forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r,\quad & \left\{\left(i_1, i_2, \cdots, i_r\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\} \\
&= \left\{\left(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\} && \text{(2.43-a)} \\
&= \left\{\left(\boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_1), \boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_r)\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\}. && \text{(2.43-b)}
\end{aligned}$$

这里，i_k 起的就是哑标的作用．

证明： 无论怎样置换，$\boldsymbol{\sigma}(i_k)$ 都是 $1, 2, \cdots, m$ 中的数．因此，对于 $\forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r$，

$$\left(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\right) \in \left\{\left(i_1, i_2, \cdots, i_r\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\}, \tag{2.44}$$

即

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\} \\
\subset &\left\{\left(i_1, i_2, \cdots, i_r\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

另一方面，由于 $\mathbf{Id} = \boldsymbol{\sigma}^{-1} \circ \boldsymbol{\sigma}$，即

$$\left(i_1, i_2, \cdots, i_r\right) = \left(\boldsymbol{\sigma}^{-1} \circ \boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}^{-1} \circ \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}^{-1} \circ \boldsymbol{\sigma}(i_r)\right), \tag{2.46}$$

而进行一次逆置换仍然使得元素不离开原有的范围，也就是说

$$\left(i_1, i_2, \cdots, i_r\right) \in \left\{\left(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\}, \tag{2.47}$$

即

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(i_1, i_2, \cdots, i_r\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\} \\
\subset &\left\{\left(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\}.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

两个集合互相包含，也就证得了式 (2.43-a)．

用相同的方法也可证得关于逆置换的 (2.43-b) 式，此处从略． □

2.6 置换（三）

本节将给出置换运算在线性代数中的一些应用．

2.6.1 行列式

2.7 置换（四）

本节将重回张量运算的主线，引入**置换算子**.

2.7.1 置换算子；对称张量与反对称张量

对于任意的置换 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r$，定义**置换算子**

$$\mathrm{I}_\sigma : \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m) \ni \boldsymbol{\Phi} \mapsto \mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m), \tag{2.49}$$

式中

$$\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big) \triangleq \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{u}_{\sigma(2)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(r)}\big) \in \mathbb{R}. \tag{2.50}$$

这里的“$\cdots \in \mathbb{R}$”是根据张量的定义：多重线性函数.

如果我们的置换

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \boldsymbol{\sigma}(i_1) & \boldsymbol{\sigma}(i_1) & \cdots & \boldsymbol{\sigma}(i_1) \end{pmatrix}, \tag{2.51}$$

那么对应的置换算子将满足

$$\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\big) \triangleq \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)}, \boldsymbol{u}_{\sigma(i_2)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}\big). \tag{2.52}$$

根据张量的线性性，容易知道置换算子也具有线性性：

$$\forall \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m) \text{ 以及 } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{I}_\sigma(\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi}) = \alpha\,\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) + \beta\,\alpha\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Psi}). \tag{2.53}$$

证明：

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_\sigma(\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})\big(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big) &= (\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(r)}\big) \\
&= \alpha\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(r)}\big) + \beta\boldsymbol{\Psi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(r)}\big) \\
&= \alpha\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big) + \beta\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Psi})\big(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big) \\
&= \big[\alpha\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) + \beta\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Psi})\big]\big(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

□

两个置换算子复合的结果也是很显然的：

$$\forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathscr{P}_r, \quad \mathrm{I}_\sigma \circ \mathrm{I}_\tau = \mathrm{I}_{\sigma\circ\tau}. \tag{2.55}$$

证明：

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_\sigma \circ \mathrm{I}_\tau(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\big) &= \mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{\tau(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\tau(r)}\big) \\
&= \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma\circ\tau(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma\circ\tau(r)}\big) \\
&= \mathrm{I}_{\sigma\circ\tau}(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\big).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

□

有了置换算子，我们就可以来定义**对称张量**和**反对称张量**．对称张量的全体记为 Sym，反对称张量的全体记为 Skw．如果以 $\mathbb{R}^m$ 为底空间，又分别可以记为 $\mathscr{S}^r(\mathbb{R}^m)$ 和 $\Lambda^r(\mathbb{R}^m)$．

对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$，如果

$$\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \boldsymbol{\Phi}, \tag{2.57}$$

则称 $\boldsymbol{\Phi}$ 为对称张量，即 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathrm{Sym}$ 或 $\mathscr{S}^r(\mathbb{R}^m)$；如果

$$\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Phi}, \tag{2.58}$$

则称 $\boldsymbol{\Phi}$ 为反对称张量，即 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathrm{Skw}$ 或 $\Lambda^r(\mathbb{R}^m)$．

有些书中采用分量形式来定义（反）对称张量．这与此处的定义是等价的：

$$\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \boldsymbol{\Phi} \iff \Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_p)} = \Phi_{i_1\cdots i_p}, \tag{2.59-a}$$

$$\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Phi} \iff \Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_p)} = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} \cdot \Phi_{i_1\cdots i_p}. \tag{2.59-b}$$

反对称张量与我们熟知的行列式有些类似：交换两列（对于张量就是两个分量），符号相反．全部分量两两交换一遍，前面的系数自然是置换的符号．而如果无论怎么交换分量（当然需要全部两两交换一遍），符号都不变，那这样的张量就是对称张量．

一个二阶张量的协变（或逆变）分量，可以用一个矩阵表示．如果这个张量是一个反对称张量，交换任意两个分量要添加负号；对于矩阵而言，这就意味着交换两行（或两列）……

2.7.2　置换算子的表示

根据上文给出的定义，我们有

$$\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\left(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\right) \triangleq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}\right). \tag{2.60}$$

首先回忆一下 1.2.1 小节中张量的表示：选一组基（协变、逆变均可），然后把张量用这组基表示．于是

$$\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\left(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\right) = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}\right)$$

把向量用协变基表示：

$$= \boldsymbol{\Phi}\left(u^{i_1}_{\sigma(i_1)}\boldsymbol{g}_{i_1}, \cdots, u^{i_r}_{\sigma(i_r)}\boldsymbol{g}_{i_r}\right)$$

根据张量的线性性，提出系数：

$$= \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{g}_{i_r}\right) \cdot \left(u^{i_1}_{\sigma(i_1)} \cdots u^{i_r}_{\sigma(i_r)}\right)$$

前半部分可以用张量分量表示；而后半部分是一组逆变分量，可以写成内积的形式

$$= \Phi_{i_1\cdots i_p}\left[\left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)}, \boldsymbol{g}^{i_1}\right)_{\mathbb{R}^m} \cdots \left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}, \boldsymbol{g}^{i_r}\right)_{\mathbb{R}^m}\right] \tag{2.61*}$$

注意到方括号中的其实是简单张量的定义，这就有

$$= \Phi_{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{i_r}\left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}\right). \tag{2.61}$$

最后一步仍然没能回到 $\left(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\right)$，因此以上推导只是简单地展开了 $\boldsymbol{\Phi}$，并没有获得实质性的结果.

然而，只要稍作改动，情况就会大不相同．考虑一下 2.5.2 小节中置换运算有关数组元素乘积的性质：

$$\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathscr{P}_r, \quad A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_r j_r} = A_{\tau(i_1)\tau(j_1)} \cdots A_{\tau(i_r)\tau(j_r)}, \tag{2.62}$$

式中

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ \boldsymbol{\tau}(i_1) & \cdots & \boldsymbol{\tau}(i_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_r \\ \boldsymbol{\tau}(j_1) & \cdots & \boldsymbol{\tau}(j_r) \end{pmatrix}. \tag{2.63}$$

由此可以看出，式 (2.61*) 方括号中的部分其实是由 $\boldsymbol{\sigma}(i_k)$ 和 i_k 两套指标确定的一组数：

$$A_{\sigma(i_k) i_k} = \left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_k)}, \boldsymbol{g}^{i_k}\right)_{\mathbb{R}^m}; \tag{2.64}$$

另一方面，显然有 $\boldsymbol{\sigma}^{-1} \in \mathscr{P}_r$．于是

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\left(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\right) \\ &= \boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_r}\left[\left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)}, \boldsymbol{g}^{i_1}\right)_{\mathbb{R}^m} \cdots \left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}, \boldsymbol{g}^{i_r}\right)_{\mathbb{R}^m}\right] \end{aligned}$$

应用置换的性质 (2.62) 式：

$$\begin{aligned} &= \boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_r}\left[\left(\boldsymbol{u}_{\sigma^{-1}\circ\sigma(i_1)}, \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)}\right)_{\mathbb{R}^m} \cdots \left(\boldsymbol{u}_{\sigma^{-1}\circ\sigma(i_r)}, \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)}\right)_{\mathbb{R}^m}\right] \\ &= \boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_r}\left[\left(\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)}\right)_{\mathbb{R}^m} \cdots \left(\boldsymbol{u}_{i_2}, \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)}\right)_{\mathbb{R}^m}\right] \end{aligned}$$

同样，用简单张量表示，可得

$$= \boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_r} \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)}\left(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\right). \tag{2.65}$$

这样，我们就得到了置换算子的一种表示：

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) &= \mathrm{I}_\sigma\left(\boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_r} \boldsymbol{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{i_r}\right) \\ &= \boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_r} \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

在式 (2.66) 中，$i_1, \cdots, i_r$ 都是哑标，要被求和求掉．张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的底空间是 $\mathbb{R}^m$，所以每个 i_k 都有 m 个取值．考虑一下 2.5.3 小节中置换运算有关哑标穷尽的性质，有

$$\begin{aligned} &\forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r, \quad \left\{\left(i_1, i_2, \cdots, i_r\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\} \\ &= \left\{\left(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\}. \end{aligned} \tag{2.67}$$

因此，我们可以把式 (2.66) 中的指标 i_k 换成 $\boldsymbol{\sigma}(i_k)$：

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) &= \boldsymbol{\Phi}_{i_1 \cdots i_r} \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)} \\ &= \boldsymbol{\Phi}_{\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r)} \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}\circ\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}\circ\sigma(i_r)} \\ &= \boldsymbol{\Phi}_{\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r)} \boldsymbol{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{i_r}. \end{aligned} \tag{2.68}$$

这是置换算子的另一种表示.

综上，要获得置换算子的表示，若是对张量分量进行操作，就直接使用对分量指标使用置换；若是对简单张量进行操作，则要对其指标使用逆置换：[①]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) &= \mathrm{I}_\sigma\left(\Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\right)\\
&= \Phi^{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r} && \text{(2.69-a)}\\
&= \Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{\sigma^{-1}(i_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\sigma^{-1}(i_r)}. && \text{(2.69-b)}
\end{aligned}
$$

2.8 对称化算子与反对称化算子

2.8.1 定义

对称化算子 $\mathscr{S}$ 和**反对称化算子** $\mathscr{A}$ 的定义分别为

$$
\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}) \triangleq \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r}\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) \tag{2.70}
$$

和

$$
\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) \triangleq \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r}\operatorname{sgn}\sigma\cdot\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}), \tag{2.71}
$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$. 根据置换算子的线性性，很容易知道对称化算子与反对称化算子也具有线性性.

对于任意的 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$，我们有

$$
\begin{cases}
\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Sym}, & \text{(2.72-a)}\\
\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Skw}. & \text{(2.72-b)}
\end{cases}
$$

这说明任意一个张量，对它作用对称化算子之后，将变为对称张量；反之，作用反对称算子之后，将变为反对称张量.[②]

证明： 要判断 $\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi})$ 是不是对称张量，首先需要在其上作用一个置换算子 I_τ：

$$
\mathrm{I}_\tau\left[\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi})\right] = \mathrm{I}_\tau\left[\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r}\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right]
$$

根据置换算子的线性性 (2.53) 式，可有

$$
= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r}\mathrm{I}_\tau\circ\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})
$$

再用一下 (2.55) 式，得到

$$
= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r}\mathrm{I}_{\tau\circ\sigma}(\boldsymbol{\Phi})
$$

① 这里稍有改动，用了张量的逆变分量，不过实质都是一样的. 使用协变分量还是逆变分量，这个嘛，悉听尊便.

② 换一个角度，（反）对称张量实际上可以用（反）对称化算子来定义.

这里求和的作用就是把置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 穷尽了．根据 2.5.1 小节中的内容，再在 $\boldsymbol{\sigma}$ 上复合一个置换 $\boldsymbol{\tau}$，结果将保持不变：

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}). \tag{2.73}$$

对照一下对称张量的定义 (2.57) 式，可见的确有 $\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Sym}$.

类似地，

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_\tau\left[\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi})\right] &= \mathrm{I}_\tau\left[\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right] \\
&= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left[\mathrm{I}_\tau\circ\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right] \\
&= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{I}_{\tau\circ\sigma}(\boldsymbol{\Phi})
\end{aligned}$$

根据式 (2.19)，$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma})$，于是

$$= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \frac{\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma})}{\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathrm{I}_{\tau\circ\sigma}(\boldsymbol{\Phi})$$

注意到始终成立 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau} = 1$（因为 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau} = \pm 1$），又有

$$= \frac{\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathrm{I}_{\tau\circ\sigma}(\boldsymbol{\Phi})$$

利用置换的穷尽，$\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 相比，结果将保持不变：

$$= \operatorname{sgn}\tau\cdot\left[\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right] = \operatorname{sgn}\tau\cdot\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}). \tag{2.74}$$

与反对称张量的定义 (2.58) 式相比，可见的确有 $\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Skw}$.

这里的操作直接对张量本身进行，没有采用涉及到张量“自变量”（向量）的繁琐计算，因而显得更加干净利落. □

2.8.2 反对称化算子的性质

上文已经定义了**反对称化算子** $\mathscr{A}$：

$$\forall\,\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m),\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) \triangleq \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Skw}\text{ 或 }\Lambda^r(\mathbb{R}^m). \tag{2.75}$$

即任意一个 r 阶张量，作用反对称化算子后就变成了 r 阶反对称张量. r 阶反对称张量也称为 ***r*-form**（***r*-形式**）.

下面列出反对称化算子的几条性质.

1. 反对称化算子若重复作用，仅相当于一次作用：

$$\mathscr{A}^2 := \mathscr{A}\circ\mathscr{A} = \mathscr{A}. \tag{2.76}$$

根据数学归纳法，显然有

$$\forall\,p\in\mathbb{N}^*,\quad \mathscr{A}^p := \underbrace{\mathscr{A}\circ\cdots\circ\mathscr{A}}_{p\text{ 个 }\mathscr{A}} = \mathscr{A}. \tag{2.77}$$

证明：

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^2 &= \mathscr{A}\left[\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi})\right] \\ &\triangleq \mathscr{A}\left[\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot \mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right] \\ &\triangleq \frac{1}{r!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_r}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot \mathrm{I}_\tau\left[\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot \mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right]\end{aligned}$$

根据线性性，可有

$$= \frac{1}{(r!)^2}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_r}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot \mathrm{I}_\tau\circ \mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})$$

根据式 (2.19) 和式 (2.55)，有

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{(r!)^2}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_r}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r}\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma})\cdot \mathrm{I}_{\tau\circ\sigma}(\boldsymbol{\Phi}) \\ &= \frac{1}{(r!)^2}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_r}\left[\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r}\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma})\cdot \mathrm{I}_{\tau\circ\sigma}(\boldsymbol{\Phi})\right]\end{aligned}$$

注意到方括号中的部分穷尽了置换 $\boldsymbol{\sigma}$，因此可以用 $\boldsymbol{\sigma}$ 取代“指标” $\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}$：

$$= \frac{1}{(r!)^2}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_r}\left[\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot \mathrm{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right]$$

回到定义，有

$$= \frac{1}{r!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_r}\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) = \frac{1}{r!}\cdot r!\,\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) = \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}). \tag{2.78}$$

□

2. 对任意两个张量 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)$ 和 $\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}^q(\mathbb{R}^m)$ 的并施加反对称化算子，可以得到如下结果：

$$\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right) = \mathscr{A}\left[\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi})\otimes\boldsymbol{\Psi}\right] \tag{2.79-a}$$

$$= \mathscr{A}\left[\boldsymbol{\Phi}\otimes\mathscr{A}(\boldsymbol{\Psi})\right] \tag{2.79-b}$$

$$= \mathscr{A}\left[\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi})\otimes\mathscr{A}(\boldsymbol{\Psi})\right]. \tag{2.79-c}$$

证明： 这里只给出式 (2.79-b) 的证明．另外两式的证明是类似的．

$$\mathscr{A}\left[\boldsymbol{\Phi}\otimes\mathscr{A}(\boldsymbol{\Psi})\right] = \mathscr{A}\left[\boldsymbol{\Phi}\otimes\left(\frac{1}{q!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_q}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot \mathrm{I}_\tau(\boldsymbol{\Psi})\right)\right]$$

根据张量积的线性性提出系数：

$$= \mathscr{A}\left[\frac{1}{q!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_q}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Phi}\otimes \mathrm{I}_\tau(\boldsymbol{\Psi})\right]$$

利用置换的穷尽，可以把 $\boldsymbol{\tau}$ 换作 $\boldsymbol{\tau}^{-1}$：

$$= \mathscr{A}\left[\frac{1}{q!}\sum_{\boldsymbol{\tau}\in\mathscr{P}_q}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}^{-1}\cdot\boldsymbol{\Phi}\otimes\mathrm{I}_{\boldsymbol{\tau}^{-1}}(\boldsymbol{\Psi})\right]$$

注意到 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau} = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}^{-1}$，于是

$$= \mathscr{A}\left[\frac{1}{q!}\sum_{\boldsymbol{\tau}\in\mathscr{P}_q}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Phi}\otimes\mathrm{I}_{\boldsymbol{\tau}^{-1}}(\boldsymbol{\Psi})\right], \tag{2.80}$$

式中，

$$\mathrm{I}_{\boldsymbol{\tau}^{-1}}(\boldsymbol{\Psi}) = \Psi^{j_1\cdots j_q}\,\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{\tau}(j_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{\tau}(j_q)}. \tag{2.81}$$

于是有

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\mathrm{I}_{\boldsymbol{\tau}^{-1}}(\boldsymbol{\Psi}) = \Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_p}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{\tau}(j_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{\tau}(j_q)}\right). \tag{2.82}$$

置换 $\boldsymbol{\tau}\in\mathscr{P}_q$ 的元素定义为

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_q \\ \boldsymbol{\tau}(j_1) & \cdots & \boldsymbol{\tau}(j_q)\end{pmatrix}. \tag{2.83}$$

引入它的“延拓”（或曰“增广”）置换 $\hat{\boldsymbol{\tau}}\in\mathscr{P}_{p+q}$，其定义为

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ i_1 & \cdots & i_p & \boldsymbol{\tau}(j_1) & \cdots & \boldsymbol{\tau}(j_q)\end{pmatrix}. \tag{2.84}$$

这样一来，就有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}\otimes\mathrm{I}_{\boldsymbol{\tau}^{-1}}(\boldsymbol{\Psi}) &= \Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_p}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{\tau}(j_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{\tau}(j_q)}\right)\\ &= \Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}(i_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}(i_p)}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}(j_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}(j_q)}\right)\\ &= \mathrm{I}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right).\end{aligned} \tag{2.85}$$

另一方面，参与轮换的元素只有后面的 q 个，因此 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 起到的作用实际上等同于 $\boldsymbol{\tau}$（当然两者作用范围不同）. 所以可知

$$\operatorname{sgn}\hat{\boldsymbol{\tau}} = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}. \tag{2.86}$$

把以上这两点代入式 (2.80) 的推导，有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\left[\boldsymbol{\Phi}\otimes\mathscr{A}(\boldsymbol{\Psi})\right] &= \mathscr{A}\left[\frac{1}{q!}\sum_{\boldsymbol{\tau}\in\mathscr{P}_q}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Phi}\otimes\mathrm{I}_{\boldsymbol{\tau}^{-1}}(\boldsymbol{\Psi})\right]\\ &= \mathscr{A}\left[\frac{1}{q!}\sum_{\boldsymbol{\tau}\in\mathscr{P}_q}\operatorname{sgn}\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathrm{I}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)\right]\end{aligned}$$

再用一次线性性，可得

$$= \frac{1}{q!}\sum_{\boldsymbol{\tau}\in\mathscr{P}_q}\operatorname{sgn}\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathscr{A}\left[\mathrm{I}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)\right]. \tag{2.87}$$

$\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}$ 是一个 $p+q$ 阶张量，它作用置换算子后阶数当然保持不变．根据反对称化算子的定义，可有

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\left[\mathrm{I}_{\hat{\sigma}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right)\right] &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathscr{P}_{p+q}} \operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left[\mathrm{I}_{\hat{\sigma}} \circ \mathrm{I}_{\hat{\tau}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathscr{P}_{p+q}} \operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left[\mathrm{I}_{\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right)\right], \qquad (2.88)
\end{aligned}$$

式中的 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 和之前定义的 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 含义相同，只是为了确保哑标不重复，我们采用了不同的字母来表示．该式 (2.88) 中的 $\operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 可以写成

$$\operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\operatorname{sgn}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \circ \hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\right)}{\operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}} = \frac{\operatorname{sgn}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \circ \hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\right)}{\operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\tau}}}. \qquad (2.89)$$

第二个等号是根据式 (2.27).

注意到 (2.87) 式中也有一个 $\operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\tau}}$，因此

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\left[\boldsymbol{\Phi} \otimes \mathscr{A}(\boldsymbol{\Psi})\right] &= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_q} \operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathscr{A}\left[\mathrm{I}_{\hat{\tau}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_q} \operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \left[\frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathscr{P}_{p+q}} \operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathrm{I}_{\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

用式 (2.89) 合并掉 $\operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\tau}}$ 和 $\operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\sigma}}$：

$$= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_q} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathscr{P}_{p+q}} \operatorname{sgn}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \circ \hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\right) \cdot \left[\mathrm{I}_{\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right)\right]$$

再次利用置换穷尽的性质改变“哑标”置换：

$$= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_q} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathscr{P}_{p+q}} \operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left[\mathrm{I}_{\hat{\sigma}}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right)\right]$$

终于拨开云雾见青天，看到了似曾相识的定义：

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_q} \mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right) \\
&= \frac{1}{q!} \cdot q!\, \mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right) = \mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right). \qquad (2.90)
\end{aligned}$$

□

3. 反对称化算子具有所谓**反导性**：

$$\forall \boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^q(\mathbb{R}^m), \quad \mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right) = (-1)^{pq} \cdot \mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Psi} \otimes \boldsymbol{\Phi}\right). \qquad (2.91)$$

证明： 首先单独把反对称算子展开．它所作用的张量为 $p+q$ 阶，因而相应的置换 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_{p+q}$：

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_{p+q}} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{I}_{\sigma} \\
&= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_{p+q}} \operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\tau}^{-1}\right) \cdot \mathrm{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}}. \qquad (2.92)
\end{aligned}$$

第二的等号与之前一样，利用了置换的穷尽．这里的 $\boldsymbol{\tau}$ 是 $\mathscr{P}_{p+q}$ 中一个任意的置换．利用置换符号的性质，有

$$\operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}\right)=\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}^{-1}=\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}. \tag{2.93}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)&=\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_{p+q}}\operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}\right)\cdot\mathrm{I}_{\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)\\&=\frac{\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_{p+q}}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{I}_{\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right).\end{aligned} \tag{2.94}$$

把张量展开成分量形式，可以有

$$\mathrm{I}_{\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)=\mathrm{I}_{\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}}\left[\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_p}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{j_q}\right)\right]$$

根据式 (2.55)，可得

$$=\mathrm{I}_{\boldsymbol{\sigma}}\circ\mathrm{I}_{\boldsymbol{\tau}^{-1}}\left[\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_p}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{j_q}\right)\right]$$

利用置换算子的表示 (2.69-b) 一式，对简单张量进行操作：

$$=\mathrm{I}_{\boldsymbol{\sigma}}\left[\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{\tau(i_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\tau(i_p)}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{\tau(j_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\tau(j_q)}\right)\right]. \tag{2.95}$$

根据 $\boldsymbol{\tau}$ 的任意性，不妨取[①]

$$\boldsymbol{\tau}=\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_p&j_1&\cdots&j_q\\j_1&\cdots&j_q&i_1&\cdots&i_p\end{pmatrix}. \tag{2.96}$$

这种取法恰好可以使指标为 i 和 j 的向量交换一下位置．于是

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)&=\mathrm{I}_{\boldsymbol{\sigma}}\left[\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{\tau(j_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\tau(j_q)}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{\tau(i_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\tau(i_p)}\right)\right]\\&=\mathrm{I}_{\boldsymbol{\sigma}}\left[\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_p}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{j_q}\right)\right]\end{aligned}$$

张量分量作为数，可交换顺序自然无需多言：

$$\begin{aligned}&=\mathrm{I}_{\boldsymbol{\sigma}}\left[\Psi^{j_1\cdots j_q}\Phi^{i_1\cdots i_p}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_p}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{j_q}\right)\right]\\&=\mathrm{I}_{\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\Phi}\right).\end{aligned} \tag{2.97}$$

下面再考虑一下 $\boldsymbol{\tau}$ 的符号：j_1 先和 i_p 交换，再和 i_{p-1} 交换，以此类推，直到移动至 i_1 的位置，一共交换了 p 次．而 $j_2,\cdots,j_q$ 也是同理，各需进行 p 次交换．所以总共是 $p\cdot q$ 次两两交换．因此，

$$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}=(-1)^{pq}. \tag{2.98}$$

回到式 (2.94) 的推导，有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)&=\frac{\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_{p+q}}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{I}_{\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)\\&=\frac{(-1)^{pq}}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_{p+q}}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{I}_{\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\Phi}\right)\\&=(-1)^{pq}\cdot\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\Phi}\right).\end{aligned} \tag{2.99}$$

□

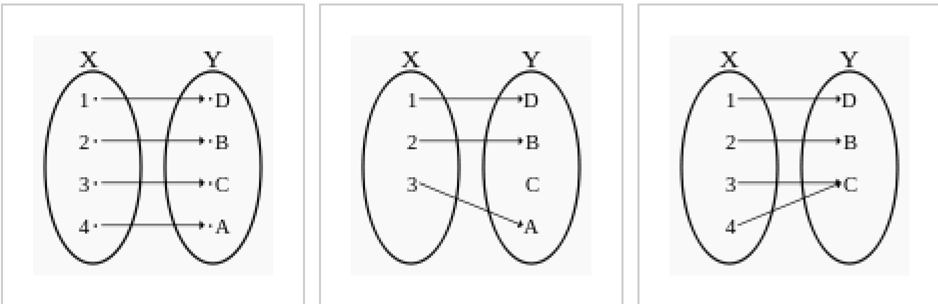
① 矩阵中的 i_p 和 j_q 等未必是对齐的，这里的写法只是为了表示方便．

第三章　微分同胚（曲线坐标系）

3.1　微分同胚

3.1.1　双射

设 f 是集合 A 到 B 的映照．如果 A 中不同的元素有不同的像，则称 f 为**单射**（也叫"一对一"）；如果 B 中每个元素都是 A 中元素的像，则称 f 为**满射**；如果 f 既是单射又是满射，则称 f 为**双射**（也叫"一一对应"）．三种情况的示意见图 3.1．



双射（单射与满射）　　单射但非满射　　满射但非单射

图 3.1: 单射、满射与双射

设开集 $\mathfrak{D}_X, \mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$，它们之间存在双射，即一一对应关系：

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) : \mathfrak{D}_x \ni \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{D}_X. \tag{3.1}$$

由于该映照实现了 $\mathfrak{D}_x$ 到 $\mathfrak{D}_X$ 之间的双射，因此它存在逆映照：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) : \mathfrak{D}_X \ni \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{X}) \in \mathfrak{D}_x. \tag{3.2}$$

我们把 $\mathfrak{D}_X$ 称为**物理域**，它是实际物理事件发生的区域；$\mathfrak{D}_x$ 则称为**参数域**．由于物理域通常较为复杂，因此我们常把参数域取为规整的形状，以便之后的处理．

设物理量 $f(\boldsymbol{X})$ 定义在物理域 $\mathfrak{D}_X \subset \mathbb{R}^m$ 上[①]，则 f 就定义了一个**场**：

$$f : \mathfrak{D}_X \ni \boldsymbol{X} \mapsto f(\boldsymbol{X}). \tag{3.3}$$

所谓的"场"，就是自变量用位置刻画的映照．它可以是**标量场**，如温度、压强、密度等，此时 $f(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{R}$；也可以是**向量场**，如速度、加速度、力等，此时 $f(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{R}^m$；对于更深入的物理、力学研究，往往还需引入**张量场**，此时 $f(\boldsymbol{X}) \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$．

$\boldsymbol{X}$ 存在于物理域 $\mathfrak{D}_X$ 中，我们称它为**物理坐标**．由于上文已经定义了 $\mathfrak{D}_x$ 到 $\mathfrak{D}_X$ 之间的双射（不是 f！），因此 $\mathfrak{D}_x$ 中就有唯一的 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 相对应，它称为**参数坐标**（也叫**曲线坐标**）．又因为物理域 $\mathfrak{D}_X$ 上已经定义了场 $f(\boldsymbol{X})$，参数域中必然唯一存在场 $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ 与之对应：

$$\tilde{f} : \mathfrak{D}_x \ni \boldsymbol{x} \mapsto \tilde{f}(\boldsymbol{x}) = f \circ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = f\big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\big). \tag{3.4}$$

$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 是完全等价的，因而 $\tilde{f}$ 与 f 也是完全等价的，所以同样有

$$f(\boldsymbol{X}) = \tilde{f}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big). \tag{3.5}$$

物理域中的场要满足守恒定律，如质量守恒、动量守恒、能量守恒等．从数学上看，这些守恒定律就是 $f(\boldsymbol{X})$ 需要满足的一系列偏微分方程．将场变换到参数域后，它仍要满足这些方程．但我们已经设法将参数域取得较为规整，故在其上进行数值求解就会相当方便．

3.1.2 参数域方程

上文已经提到，物理域中的场 $f(\boldsymbol{X})$ 需满足守恒定律，这等价于一系列偏微分方程（PDE）．在物理学和力学中，用到的 PDE 通常是二阶的，它们可以写成

$$\forall\, \boldsymbol{X} \in \mathfrak{D}_X, \quad \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(\boldsymbol{X}) \frac{\partial f}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} B_{\alpha\beta}(\boldsymbol{X}) \frac{\partial^2 f}{\partial X^\beta \partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) = 0 \tag{3.6}$$

的形式．我们的目标是把该物理域方程转化为参数域方程，即关于 $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ 的 PDE．多元微积分中已经提供了解决方案：**链式求导法则**．

考虑到

$$f(\boldsymbol{X}) = \tilde{f}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) = \tilde{f}\big(x^1(\boldsymbol{X}), \cdots, x^m(\boldsymbol{X})\big), \tag{3.7}$$

于是有

$$\frac{\partial f}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \frac{\partial x^s}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}). \tag{3.8}$$

这里用到的链式法则，由复合映照可微性定理驱动，它要求 $\tilde{f}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 可微，同时 $\boldsymbol{x}$ 关于 $\boldsymbol{X}$ 可微．

对于更高阶的项，往往需要更强的条件．一般地，我们要求

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p\big(\mathfrak{D}_x; \mathbb{R}^m\big); & \text{(3.9-a)} \\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) \in \mathscr{C}^p\big(\mathfrak{D}_X; \mathbb{R}^m\big). & \text{(3.9-b)} \end{cases}$$

这里的 $\mathscr{C}^p$ 指直至 p 阶偏导数存在且连续的映照全体；$p = 1$ 时，它就等价于可微．至于 p 的具体取值，则由 PDE 的阶数所决定．

① 实际的物理事件当然只会发生在三维 Euclid 空间中（只就"空间"而言），但在数学上也可以推广到 m 维．

通常情况下，已知条件所给定的往往都是 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 到 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 的映照

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}):\ \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \ni \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}, \tag{3.10}$$

用它不好直接得到式 (3.8) 中的 $\partial x^s / \partial X^\alpha$ 项，但获得它的“倒数” $\partial X^\alpha / \partial x^s$ 却很容易，只需利用 **Jacobi 矩阵**：

$$\mathsf{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{m\times m}, \tag{3.11}$$

它是一个方阵．

有了 Jacobi 矩阵，施加一些手法就可以得到所需要的 $\partial x^s / \partial X^\alpha$ 项．考虑到

$$\forall\, \boldsymbol{X} \in \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}, \quad \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) = \boldsymbol{X}, \tag{3.12}$$

并且其中的 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$ 均可微，可以得到

$$\mathsf{D}\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \mathsf{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{I}_m, \tag{3.13}$$

其中的 $\boldsymbol{I}_m$ 是单位阵．因此

$$\mathsf{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial X^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x^m}{\partial X^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^m}{\partial X^m} \end{bmatrix}(\boldsymbol{X}) = (\mathsf{D}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{bmatrix}^{-1}(\boldsymbol{x}). \tag{3.14}$$

用代数的方法总可以求出

$$\varphi^s_\alpha := \frac{\partial x^s}{\partial X^\alpha}, \tag{3.15}$$

它是通过求逆运算确定的函数，即位于矩阵 $\mathsf{D}\boldsymbol{x}$ 第 s 行第 α 列的元素．这样就有

$$\frac{\partial f}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \varphi^s_\alpha\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big). \tag{3.16}$$

接下来处理二阶偏导数．由上式，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial X^\beta \partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) = \sum_{s=1}^{m} \Bigg[& \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^k \partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \frac{\partial x^s}{\partial X^\beta}(\boldsymbol{X}) \right) \cdot \varphi^s_\alpha\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \\ & + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi^s_\alpha}{\partial x^k}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \frac{\partial x^k}{\partial X^\beta}(\boldsymbol{X}) \right) \Bigg] \end{aligned}$$

继续利用式 (3.15)，有

$$= \sum_{s=1}^{m} \Bigg[\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^k \partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \varphi^s_\beta\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \right) \cdot \varphi^s_\alpha\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)$$

$$+\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \varphi_\alpha^s}{\partial x^k}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\cdot\varphi_\beta^k\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big)\right)\Bigg]. \tag{3.17}$$

这样，就把一阶和二阶偏导数项全部用关于 $\boldsymbol{x}$ 的函数[①]表达了出来．换句话说，我们已经把物理域中 f 关于 $\boldsymbol{X}$ 的 PDE，转化成了参数域中 $\tilde{f}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 的 PDE．这就是上文要实现的目标．

3.1.3 微分同胚的定义

上文已经指出了 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 到 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 的映照 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 所需满足的一些条件．这里再次罗列如下:

1. $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}, \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \subset \mathbb{R}^m$ 均为**开集**[②]；
2. 存在 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 同 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 之间的**双射** $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$，即存在**一一对应**关系；
3. $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 和它的逆映照 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$ 满足一定的**正则性**要求．

对第 3 点要稍作说明．

如果满足这三点，则称 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 为 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 与 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 之间的 **$\mathscr{C}^p$-微分同胚**，记为 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p\big(\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}; \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}\big)$．把物理域中的一个部分对应到参数域上的一个部分，需要的仅仅是双射这一条件；而要使得物理域中所满足的 PDE 能够转换到参数域上，就需要“过去”和“回来”都满足 p 阶偏导数连续的条件（即正则性要求）.

有了微分同胚，物理域中的位置就可用参数域中的位置等价地进行刻画．因此我们也把微分同胚称为**曲线坐标系**.

3.2 向量值映照的可微性

3.2.1 可微性的定义

设 $\boldsymbol{x}_0$ 是参数域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 中的一个内点．在映照 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 的作用下，它对应到物理域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 中的点 $\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big)$．参数域是一个开集．根据开集的定义，必然存在一个实数 $\lambda > 0$，使得以 $\boldsymbol{x}_0$ 为球心、λ 为半径的球能够完全落在定义域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 内，即

$$\mathfrak{B}_\lambda\big(\boldsymbol{x}_0\big) \subset \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}, \tag{3.18}$$

其中的 $\mathfrak{B}_\lambda\big(\boldsymbol{x}_0\big)$ 表示 $\boldsymbol{x}_0$ 的 λ 邻域.

如果 $\exists\ \mathsf{D}\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ [③]，满足

$$\forall\, \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \in \mathfrak{B}_\lambda\big(\boldsymbol{x}_0\big), \quad \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\big) - \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big) = \mathsf{D}\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big)(\boldsymbol{h}) + o\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\right) \in \mathbb{R}^m, \tag{3.19}$$

则称向量值映照 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点**可微**．其中，$\mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ 表示从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的**线性变换**全体.

根据这个定义，所谓可微性，指由自变量变化所引起的因变量变化，可以用一个线性变换近似，而误差为一阶无穷小量．自变量可见到因变量空间最简单的映照形式就是线性映照（线性变换），因而具有可微性的向量值映照具有至关重要的作用.

---

① 当然它仍然是 $\boldsymbol{X}$ 的隐函数：$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$.

② 用形象化的语言来说，如果在区域中的任意一点都可以吹出一个球，并能使球上的每个点都落在区域内，那么这个区域就是**开集**．这是复合映照可微性定理的一个要求.

③ 正如之前已经定义的，$\mathsf{D}\boldsymbol{X}$ 已经用来表示 Jacobi 矩阵．这里还是请先暂时将它视为一种记号，其具体形式将在下一小节给出.

3.2.2 Jacobi 矩阵

下面我们研究 $\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ 的表达形式．由于 $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^m$，所以

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix} = h^1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + h^i \boldsymbol{e}_i + \cdots + h^m \boldsymbol{e}_m. \tag{3.20}$$

另一方面，$\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ 具有线性性：

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ 和 } \tilde{\boldsymbol{h}}, \hat{\boldsymbol{h}} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\alpha \tilde{\boldsymbol{h}} + \beta \hat{\boldsymbol{h}}) = \alpha\, \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\tilde{h}) + \beta\, \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\hat{h}). \tag{3.21}$$

这样就有

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) &= \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(h^1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + h^i \boldsymbol{e}_i + \cdots + h^m \boldsymbol{e}_m) \\ &= h^1\, \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + h^i\, \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_i) + \cdots + h^m\, \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_m) \end{aligned} \tag{3.22}$$

注意到 $h^i \in \mathbb{R}$ 以及 $\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_i) \in \mathbb{R}^m$，因而该式可以用矩阵形式表述：

$$= \Big[\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_1), \cdots, \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_m)\Big] \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

最后一步要用到分块矩阵的思想：左侧的矩阵为 1 “行” m 列，每一 “行” 是一个 m 维列向量；右侧的矩阵（向量）则为 m 行 1 列．两者相乘，得到 1 “行” 1 列的矩阵（当然实际为 m 行），即之前的 (3.22) 式．在线性代数中，$m \times m$ 的矩阵 $\Big[\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_1) \quad \cdots \quad \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_m)\Big]$ 通常称为**变换矩阵**（也叫**过渡矩阵**）.

接下来要搞清楚变换矩阵的具体形式．取

$$\boldsymbol{h} = \Big[0, \cdots, \lambda, \cdots, 0\Big]^{\mathrm{T}} = \lambda\, \boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^m, \tag{3.24}$$

即除了 $\boldsymbol{h}$ 的第 i 个元素为 λ 外，其余元素均为 0（$\lambda \neq 0$）．因而有 $\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m} = \lambda$．代入可微性的定义 (3.19) 式，可得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_i) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0) \\ &= \Big[\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_1), \cdots, \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_i), \cdots, \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_m)\Big]\Big[0, \cdots, \lambda, \cdots, 0\Big]^{\mathrm{T}} + o(\lambda) \\ &= \lambda \cdot \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_i) + o(\lambda). \end{aligned} \tag{3.25}$$

由于 λ 是非零实数，故可以在等式两边同时除以 λ 并取极限：

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_i) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)}{\lambda} = \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_i), \tag{3.26}$$

这里的 $o(\lambda)$ 根据其定义自然趋于 0．该式左侧极限中的分子部分，是自变量 $\boldsymbol{x}$ 第 i 个分量的变化所引起因变量的变化；而分母，则是自变量第 i 个分量的变化大小．我们引入下面的记号：

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0) := \lim_{\lambda \to 0} \frac{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_i) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)}{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \tag{3.27}$$

它表示因变量 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^m$ 作为一个整体，相对于自变量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ 第 i 个分量 $x^i \in \mathbb{R}$ 的“变化率”，即 $\boldsymbol{X}$ 关于 x^i（在 $\boldsymbol{x}_0$ 处）的**偏导数**．由于我们没有定义向量的除法，因此自变量作为整体所引起因变量的变化，是没有意义的．利用偏导数的定义，可有

$$\begin{aligned}&\left[\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_1),\ \cdots,\ \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_i),\ \cdots,\ \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_m)\right]\\ =&\left[\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}_0),\ \cdots,\ \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0),\ \cdots,\ \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^m}(\boldsymbol{x}_0)\right] \in \mathbb{R}^{m\times m}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

下面给出 $\partial \boldsymbol{X}/\partial x^i\ (\boldsymbol{x}_0)$ 的计算式．根据定义，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0) &:= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{e}_i)-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)}{\lambda} \in \mathbb{R}^m\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\cdot\left(\begin{bmatrix}X^1\\ \vdots\\ X^m\end{bmatrix}(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{e}_i)-\begin{bmatrix}X^1\\ \vdots\\ X^m\end{bmatrix}(\boldsymbol{x}_0)\right)\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\begin{bmatrix}\dfrac{X^1(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{e}_i)-X^1(\boldsymbol{x}_0)}{\lambda}\\ \vdots\\ \dfrac{X^m(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{e}_i)-X^m(\boldsymbol{x}_0)}{\lambda}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

向量极限存在的充要条件是各分量极限均存在，即存在

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0) := \lim_{\lambda\to 0}\frac{X^\alpha(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{e}_i)-X^\alpha(\boldsymbol{x}_0)}{\lambda} \in \mathbb{R}, \tag{3.30}$$

其中的 $\alpha = 1, \cdots, m$．这其实就是我们熟知的多元函数偏导数的定义．用它来表示向量值映照的偏导数，可有

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial X^1}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0)\end{bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{e}_\alpha. \tag{3.31}$$

向量值映照 $\boldsymbol{X}$ 关于 x^i 的偏导数，从代数的角度来看，是 Jacobi 矩阵的第 i 列；从几何的角度来看，则是物理域中 x^i 线的切向量；从计算的角度来看，又是（该映照）每个分量偏导数的组合．

现在我们重新回到 Jacobi 矩阵．情况已经十分明了：只需把之前获得的各列并起来，就可以得到完整的 Jacobi 矩阵．于是

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) &= \left[\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^1},\ \cdots,\ \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^m}\right](\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})\\ &= \begin{bmatrix}\dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^1}{\partial x^m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^m}{\partial x^m}\end{bmatrix}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\begin{bmatrix}h^1\\ \vdots\\ h^m\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

这与 3.1.2 小节中 (3.11) 式给出的定义是完全一致的．

3.2.3 偏导数的几何意义

这一小节中，我们要回过头来，澄清向量值映照偏导数的几何意义.

如图 3.2，$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 是定义域空间 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \subset \mathbb{R}^m$ 到值域空间 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}} \subset \mathbb{R}^m$ 的向量值映照. 在定义域空间 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 中，过点 $\boldsymbol{x}_0$ 作一条平行于 x^i 轴的直线，称为 x^i-线. x^i 轴定义了向量 $\boldsymbol{e}_i$，因而 x^i-线上的任意一点均可表示为 $\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_i$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$.

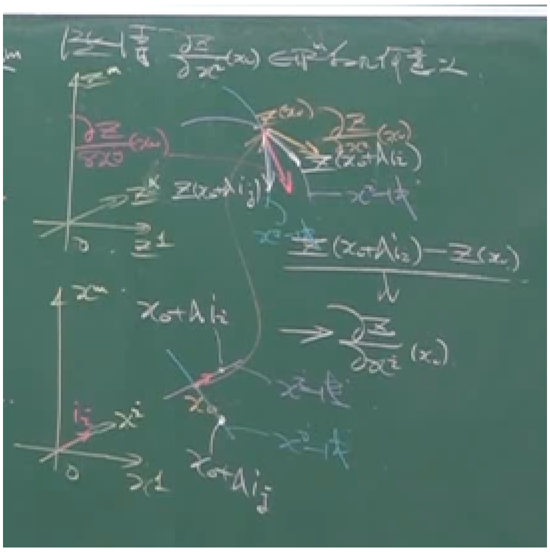


图 3.2: 向量值映照偏导数的几何意义

在 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 的作用下，点 $\boldsymbol{x}_0$ 被映照到 $\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)$，而 $\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_i$ 则被映照到了 $\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_i\right)$. 这样一来，$x^i$-线也就被映照到了值域空间 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 中，成为一条曲线.

根据前面的定义，当 $\lambda \to 0$ 时，

$$\frac{\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_i\right) - \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)}{\lambda} \to \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{x}_0\right). \tag{3.33}$$

对应到图 3.2 中，就是 x^i-线（值域空间中）在 $\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)$ 处的**切向量**.

完全类似，在定义域空间 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 中，过点 $\boldsymbol{x}_0$ 作出 x^j-线（自然是平行于 x^j 轴），其上的点可以表示为 $\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_j$. 映射到值域空间 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 上，则成为 $\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_j\right)$. 很显然，

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^j}\left(\boldsymbol{x}_0\right) = \frac{\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{e}_j\right) - \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)}{\lambda} \tag{3.34}$$

就是 x^j-线在 $\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)$ 处的切向量. 在定义域空间中，x^i-线作为直线共有 m 条，它们之间互相垂直. 作用到值域空间后，这样的 x^i-线尽管变为了曲线，但仍为 m 条. 相应的切向量，自然也有 m 个.

3.3 局部基

这里的讨论基于曲线坐标系（即微分同胚）$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p\left(\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}; \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}\right)$.

3.3.1 局部协变基

我们已经知道，$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵可以表示为

$$\mathsf{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^m}\right](\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{m\times m}, \tag{3.35}$$

式中的

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_i\right)-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})}{\lambda}. \tag{3.36}$$

在参数域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 中作出 x^i-线．映照到物理域后，它变成一条曲线，我们仍称之为 x^i-线．3.2.3 小节已经说明，(3.36) 式表示物理域中 x^i-线的切向量．在张量分析中，我们通常把它记作 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$．

由于微分同胚要求是双射，因而 Jacobi 矩阵

$$\mathsf{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \left[\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_i, \cdots, \boldsymbol{g}_m\right](\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{m\times m} \tag{3.37}$$

必须是非奇异的．这等价于

$$\left\{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^{m} \subset \mathbb{R}^m \tag{3.38}$$

线性无关．由此，它们可以构成 $\mathbb{R}^m$ 上的一组基．

用任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 均可构建一组基．但选取不同的 $\boldsymbol{x}$，将会使所得基的取向有所不同．因而这种基称为**局部协变基**．和之前一样，我们用“协变”表示指标在下方．

3.3.2 局部逆变基；对偶关系

有了局部协变基 $\left\{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^m$，根据 1.1.1 小节中的讨论，必然唯一存在与之对应的**局部逆变基** $\left\{\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^m$，满足

$$\left[\boldsymbol{g}^1(\boldsymbol{x}), \cdots, \boldsymbol{g}^m(\boldsymbol{x})\right]^{\mathsf{T}}\left[\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}), \cdots, \boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{x})\right] = \begin{bmatrix}(\boldsymbol{g}^1)^{\mathsf{T}}\\ \vdots\\ (\boldsymbol{g}^m)^{\mathsf{T}}\end{bmatrix}(\boldsymbol{x})\cdot\mathsf{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I}_m. \tag{3.39}$$

下面我们来寻找逆变基 $\left\{\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^m$ 的具体表示．考虑到①

$$\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\right) = \boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^m, \tag{3.40}$$

并利用复合映照可微性定理，可知

$$\mathsf{D}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\right)\cdot\mathsf{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{I}_m, \tag{3.41}$$

即有

$$\mathsf{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = (\mathsf{D}\boldsymbol{X})^{-1}\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\right). \tag{3.42}$$

于是

$$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{g}^1)^{\mathsf{T}}\\ \vdots\\ (\boldsymbol{g}^m)^{\mathsf{T}}\end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) = (\mathsf{D}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial X^m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial x^m}{\partial X^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^m}{\partial X^m}\end{bmatrix}(\boldsymbol{X}). \tag{3.43}$$

① 这里的几步推导在 3.1.2 小节中也有所涉及．

这样我们就得到了局部逆变基的具体表示（注意转置）：

$$\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^i}{\partial X^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x^i}{\partial X^m} \end{bmatrix} (\boldsymbol{X}) = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial x^i}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X})\, \boldsymbol{e}_\alpha. \tag{3.44}$$

定义标量场 $f(\boldsymbol{x})$ 的**梯度**为

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) \triangleq \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{e}_\alpha, \tag{3.45}$$

则局部逆变基又可以表示成

$$\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) = \nabla x^i(\boldsymbol{X}). \tag{3.46}$$

此处的梯度实际上就是我们熟知的三维情况在 m 维下的推广.

在 3.2.3 小节中已经指出，局部协变基的几何意义是 x^i-线的切向量. 现在，我们来讨论局部逆变基的几何意义.

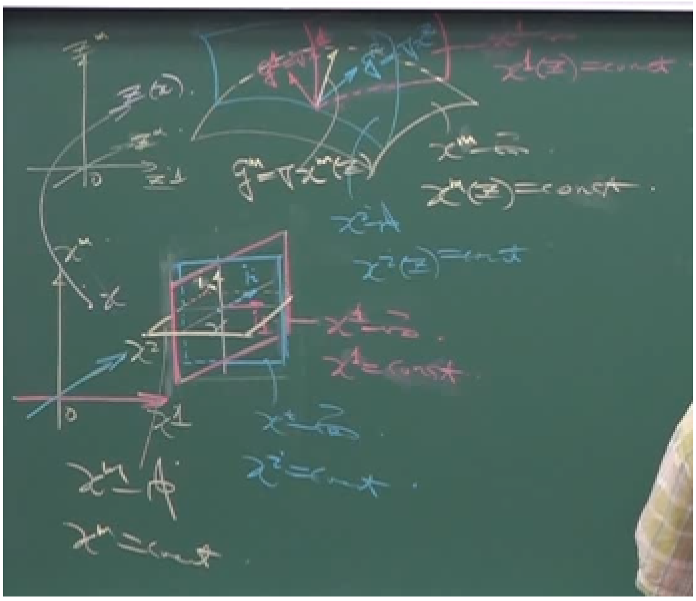


图 3.3: 局部逆变基的几何意义

如图 3.3 所示，在参数空间中，过点 $\boldsymbol{x}$ 作垂直于 x^i 轴的平面，记为 x^i-面. 在 x^i-面上，自然有 $x^i = \text{const}$. 映照到物理空间后，x^i-面变为一个曲面，其上仍有 $x^i(\boldsymbol{X}) = \text{const.}$，即它是一个等值面. 等值面的梯度方向显然与该曲面的法向相同. 因此，局部逆变基 $\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})$ 的几何意义就是 x^i-面的**法向量**.

现在来验证一下**对偶关系**.

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}), \nabla x^j(\boldsymbol{X})\right)_{\mathbb{R}^m} \\ &= \left(\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{e}_\alpha, \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}(\boldsymbol{X})\, \boldsymbol{e}_\beta\right)_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

利用内积的线性性，有

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}(\boldsymbol{X}) \cdot \left(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta\right)_{\mathbb{R}^m} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}(\boldsymbol{X}) \cdot \delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

合并掉指标 β，可得

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial x^j}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial x^j}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X})\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}). \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

最后一步求和号中的第一项位于 Jacobi 矩阵 $\mathrm{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$ 的第 j 行第 α 列，而第二项位于 $\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 的第 α 行第 i 列，因此关于 α 的求和结果便是乘积矩阵的第 j 行第 i 列．根据式 (3.41)，这两个 Jacobi 矩阵的乘积为单位阵，所以有

$$
\left(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \qquad (3.48)
$$

总结一下我们得到的结果．对于体积形态的连续介质，存在着

$$
\begin{cases}
\text{局部协变基：} & \left\{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) \triangleq \dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^{m}, \\
\text{局部逆变基：} & \left\{\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) \triangleq \nabla x^i(\boldsymbol{X})\right\}_{i=1}^{m},
\end{cases}
$$

它们满足对偶关系

$$
\left(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \qquad (3.50)
$$

这样，在研究连续介质中的一个点时，我们就有三种基可以使用：局部协变基、局部逆变基，当然还有典则基 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^m$．

3.4 标架运动方程

3.4.1 向量在局部基下的表示

对于 $\mathbb{R}^m$ 空间中的任意一个向量 $\boldsymbol{b}$，它可以用**典则基**表示：

$$
\boldsymbol{b} = \sum_{\alpha=1}^{m} b_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = b_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha. \qquad (3.51)
$$

第二步省略掉了求和号，这是根据 **Einstein 求和约定**：指标出现两次，则表示对它求和．[①] 根据之前一小节的结论，$\boldsymbol{b}$ 还可以用局部协变基和局部逆变基来表示：

$$
\boldsymbol{b} = b^i \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) = b_j \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}), \qquad (3.52)
$$

① 在 1.1.2 小节中，还要求重复指标一上一下．典则基不分协变、逆变，标号均在下方，可以视为一个特例．

式中，

$$b^i = \left(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m} \tag{3.53-a}$$

和

$$b_j = \left(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m} \tag{3.53-b}$$

分别称为向量 b 的**逆变分量**和**协变分量**. 注意，这里同样用到了 Einstein 求和约定.

将 $\boldsymbol{b} = b^i \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$ 的两边分别与 $\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})$ 作内积，可有

$$\left(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(b^i \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m}$$

利用内积的线性性，提出系数：

$$= b^i \left(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m}$$

利用对偶关系 (3.50) 式，可有

$$= b^i \delta_i^j = b^j, \tag{3.54}$$

这就得到了逆变分量的表示式 (3.53-a). 同理，将 $\boldsymbol{b} = b_j \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})$ 的两边分别与 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$ 作内积，就有

$$\left(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(b_j \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m} = b_j \left(\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\right)_{\mathbb{R}^m} = b_j \delta_i^j = b_i, \tag{3.55}$$

这便是协变分量的表示 (3.53-b) 式.

3.4.2 局部基的偏导数

所谓局部基（或曰“活动标架”），顾名思义，它在不同的点上往往是不同的. 根据之前的定义，我们有

$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) :\ \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial x^i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^i} \end{bmatrix} (\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m, \tag{3.56-a}$$

$$\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) :\ \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^i}{\partial X^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x^i}{\partial X^m} \end{bmatrix} \left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\right) \in \mathbb{R}^m. \tag{3.56-b}$$

从映照的角度来看，局部基定义了新的向量值映照，其定义域仍为参数域，而值域则为 $\mathbb{R}^m$ 空间. 这样一来，我们在 3.2 节中所引入的操作均可完全类似地应用在局部基上. 例如，我们可以来求局部基的 Jacobi 矩阵：

$$\begin{cases} \mathsf{D}\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) = \left[\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^m}\right](\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{m\times m}, & (3.57\text{-a}) \\ \mathsf{D}\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) = \left[\dfrac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^m}\right](\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{m\times m}. & (3.57\text{-b}) \end{cases}$$

Jacobi 矩阵中的每一列都是局部基作为整体相对自变量第 j 个分量的变化率，即偏导数：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) \triangleq \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{\boldsymbol{g}_i\big(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_j\big)-\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})}{\lambda} \in \mathbb{R}^m, & \text{(3.58-a)}\\[2ex]
\dfrac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) \triangleq \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{\boldsymbol{g}^i\big(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_j\big)-\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})}{\lambda} \in \mathbb{R}^m. & \text{(3.58-b)}
\end{cases}
$$

下面澄清局部基偏导数的几何意义．如图 3.4 所示，在参数空间中，过点 $\boldsymbol{x}$ 作出 x^j-线，并在其上取点 $\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_j$．分别过点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_j$ 作出 x^i-线，于是 $\partial \boldsymbol{g}_i \big/ \partial x^j\,(\boldsymbol{x})$ 就表示 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$（即 x^i-线的切向量）沿 x^j-线的变化率．同理，过点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_j$ 作出 x^i-面，则 $\partial \boldsymbol{g}^i \big/ \partial x^j\,(\boldsymbol{x})$ 就表示 $\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})$（即 x^i-面的法向量）沿 x^j-线的变化率．

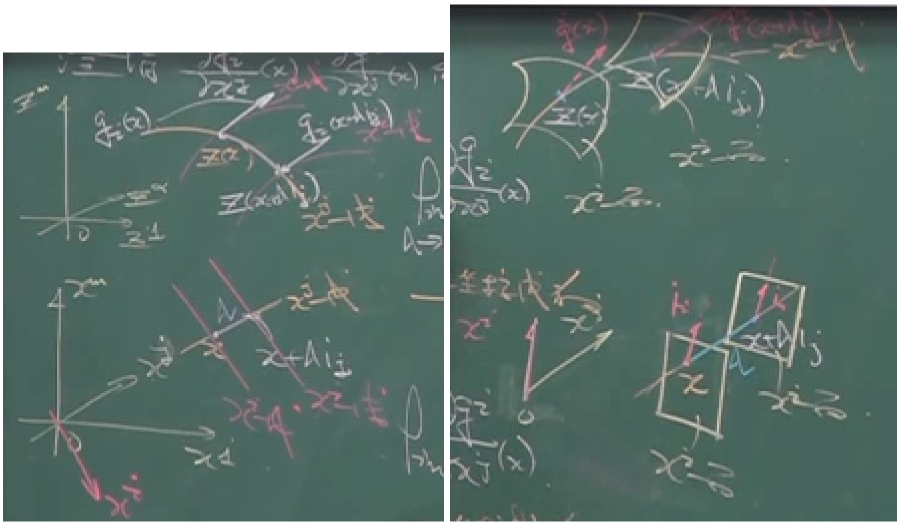


图 3.4: 局部基偏导数的几何意义

3.4.3 Christoffel 符号

考察 $\partial \boldsymbol{g}_i \big/ \partial x^j\,(\boldsymbol{x})$，即协变基的偏导数[①]．它是 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一个向量，因而可以用协变基或逆变基来表示：

$$
\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) =
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k, & \text{(3.59-a)}\\[2ex]
\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k. & \text{(3.59-b)}
\end{cases}
$$

引入**第一类 Christoffel 符号**

$$
\mathit{\Gamma}_{ji,\,k} \triangleq \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \tag{3.60}
$$

和**第二类 Christoffel 符号**

$$
\mathit{\Gamma}^{k}_{\ ji} \triangleq \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}, \tag{3.61}
$$

① 以下在不引起歧义之处，将省略局部协变基、局部逆变基的“局部”二字．为了方便，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})$ 中的“$(\boldsymbol{x})$”有时也会省略．

则式 (3.59) 可以写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \Gamma^k{}_{ji}\, \boldsymbol{g}_k\,, & (3.62\text{-a}) \\ \Gamma_{ji,\,k}\, \boldsymbol{g}^k\,. & (3.62\text{-b}) \end{cases}$$

下面我们来探讨 Christoffel 符号的基本性质——指标 i、j 可以交换：

$$\begin{cases} \Gamma^k{}_{ji} = \Gamma^k{}_{ij}\,, & (3.63\text{-a}) \\ \Gamma_{ji,\,k} = \Gamma_{ij,\,k}\,. & (3.63\text{-b}) \end{cases}$$

证明： 根据定义 (3.60) 和 (3.61) 式，指标 i、j 来源于协变基的偏导数 $\partial \boldsymbol{g}_i / \partial x^j\,(\boldsymbol{x})$. 只要偏导数中的 i、j 可以交换，Christoffel 符号中的指标 i、j 自然也可以. 回顾协变基的定义(3.56-a) 式：

$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial x^i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^i} \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}). \tag{3.64}$$

其偏导数为

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 X^1}{\partial x^j \partial x^i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^2 X^m}{\partial x^j \partial x^i} \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 X^1}{\partial x^i \partial x^j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j} \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}). \tag{3.65}$$

注意第二个等号处交换了偏导数的次序，其条件是二阶偏导数均存在且连续. 只要微分同胚达到了 $\mathscr{C}^2$，就可以满足该要求，在一般的物理情境这都是成立的. 于是我们便完成了证明. □

现在再来看逆变基的偏导数 $\partial \boldsymbol{g}^i / \partial x^j\,(\boldsymbol{x})$. 它也是 $\mathbb{R}^m$ 空间中的向量，因此

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k\,, & (3.66\text{-a}) \\ \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k\,. & (3.66\text{-b}) \end{cases}$$

利用 Christoffel 符号，可以表示出 $\left(\partial \boldsymbol{g}^i / \partial x^j\,, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}$. 根据对偶关系，

$$\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}) = \delta^i_k. \tag{3.67}$$

两边对 x^j 求偏导，用一下内积的求导公式，同时注意到 δ^i_k 是与 $\boldsymbol{x}$ 无关的常数，因而

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} + \left(\boldsymbol{g}^i, \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^j}\right)_{\mathbb{R}^m} = \frac{\partial \delta^i_k}{\partial x^j} = 0. \tag{3.68}$$

所以

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = -\left(\boldsymbol{g}^i, \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^j}\right)_{\mathbb{R}^m} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^j}, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m} = -\Gamma^i{}_{jk}\,. \tag{3.69}$$

至于 $\left(\partial \boldsymbol{g}^i / \partial x^j\,, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}$，将在以后讨论. 你想在什么时候?

3.4.4 指标升降

首先引入**度量**：

$$\begin{cases} g_{ij}(\boldsymbol{x}) \triangleq \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}), & (3.70\text{-a}) \\ g^{ij}(\boldsymbol{x}) \triangleq \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}). & (3.70\text{-b}) \end{cases}$$

由此可以获得基向量的指标升降

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) = g_{ij}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}), & (3.71\text{-a}) \\ \boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) = g^{ij}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}). & (3.71\text{-b}) \end{cases}$$

如前所述，对于任意的 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，它可以表示成

$$\boldsymbol{b} = b^i \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) = b_j \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}). \tag{3.72}$$

利用度量，同样可以获得向量分量的指标升降

$$\begin{cases} b^i = \left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{b}, g^{ik}\boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}\left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}b_k, & (3.73\text{-a}) \\ b_j = \left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{b}, g_{jk}\boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} = g_{jk}\left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} = g_{jk}b^k. & (3.73\text{-b}) \end{cases}$$

关于度量，再多说一句．由于内积的交换律，显然有

$$g_{ij}(\boldsymbol{x}) = g_{ji}(\boldsymbol{x}), \quad g^{ij} = g^{ji}. \tag{3.74}$$

3.4.5 度量的性质；Christoffel 符号的计算

首先，我们来澄清度量的两条性质．

1. 矩阵 $\left[g_{ik}\right]$ 与 $\left[g^{kj}\right]$ 互逆，即

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j. \tag{3.75}$$

证明见 1.1.2 小节（尽管省略了“$(\boldsymbol{x})$”，但请不要忘记这里的基是*局部基*）.

2. 第一类 Christoffel 符号满足

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)(\boldsymbol{x}). \tag{3.76}$$

证明： 根据式 (3.60)，第一类 Christoffel 符号的定义为

$$\Gamma_{ij,k} \triangleq \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{3.77}$$

考虑度量的定义

$$g_{ij}(\boldsymbol{x}) \triangleq \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}). \tag{3.78}$$

两边对 x^k 求偏导，可得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^k}, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}) + \left(\boldsymbol{g}_i, \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^k}\right)_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x})$$

利用上面 Christoffel 符号的定义，有

$$= \Gamma_{ki,\,j} + \Gamma_{kj,\,i}. \tag{3.79}$$

这样就获得了度量偏导数用 Christoffel 符号的表示．但我们需要的却是 Christoffel 符号用度量偏导数的表示．下面的工作就是完成这一“调转”．

利用指标轮换

$$i \to j, \quad j \to k, \quad k \to i,$$

可有

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}) = \Gamma_{ij,\,k} + \Gamma_{ik,\,j}. \tag{3.80}$$

再进行一次指标轮换：

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) = \Gamma_{jk,\,i} + \Gamma_{ji,\,k}. \tag{3.81}$$

以上三式联立，就有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)(\boldsymbol{x}) \\ = &\frac{1}{2}\left[\left(\Gamma_{ij,\,k} + \Gamma_{ik,\,j}\right) + \left(\Gamma_{jk,\,i} + \Gamma_{ji,\,k}\right) - \left(\Gamma_{ki,\,j} + \Gamma_{kj,\,i}\right)\right] \end{aligned}$$

利用 (3.63-b) 式所指出的 Christoffel 符号的指标交换性：

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\Gamma_{ij,\,k} + \Gamma_{ki,\,j}\right) + \left(\Gamma_{jk,\,i} + \Gamma_{ij,\,k}\right) - \left(\Gamma_{ki,\,j} + \Gamma_{jk,\,i}\right)\right]$$

高亮部分相互抵消，于是可得

$$= \Gamma_{ij,\,k}. \tag{3.82}$$

□

有了这两条性质，我们就能够很容易地获取 Christoffel 符号的计算方法．

第一步从度量开始．根据 3.3.1 小节，在曲线坐标系（即微分同胚）$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p\left(\mathfrak{D}_x; \mathfrak{D}_X\right)$ 中，Jacobi 矩阵可以用协变基表示为

$$\mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \left[\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_i, \cdots, \boldsymbol{g}_m\right](\boldsymbol{x}). \tag{3.83}$$

因此协变形式的度量（矩阵形式）就可以写成

$$\left[g_{ij}\right] \triangleq \left[\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}\right] = \mathrm{D}\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{D}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}). \tag{3.84}$$

两种形式的度量是互逆的，于是 g^{ij} 实际上也已经算出来了．

第二步，将求得的度量代入式 (3.76)

$$\Gamma_{ij,\,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)(\boldsymbol{x}), \tag{3.85}$$

就得到了第一类 Christoffel 符号．至于第二类 Christoffel 符号，它可以表示成

$$\Gamma^k_{\ ij} \triangleq \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}, g^{kl}\boldsymbol{g}_l\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{kl}\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}, \boldsymbol{g}_l\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{kl}\,\Gamma_{ij,\,l}. \tag{3.86}$$

这样一来，它的表示也就明确了．

3.5 度量张量与 Eddington 张量

3.5.1 度量张量的定义

在曲线坐标系（即微分同胚）$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p\left(\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}; \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}\right)$ 中，可以引入**度量张量**

$$\boldsymbol{I} = g_{ij}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j \in \mathscr{T}^2(\mathbb{R}^m). \tag{3.87}$$

这是用协变形式表达的．当然也可以切换成其他形式：

$$\boldsymbol{I} = g_{ij}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j$$

利用指标升降，有

$$= g_{ij}\left(g^{ik}\, \boldsymbol{g}_k\right) \otimes \boldsymbol{g}^j$$

再根据线性性提出系数：

$$\begin{aligned} &= g_{ij}\, g^{ik}\, \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}^j \\ &= \delta_j^k\, \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}^j. \end{aligned} \tag{3.88}$$

类似地，还可以得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} &= \delta_j^k\, \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}^j \\ &= \delta_j^k\, \boldsymbol{g}_k \otimes \left(g^{jl}\, \boldsymbol{g}_l\right) \\ &= \delta_j^k\, g^{jl}\, \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}_l \\ &= g^{kl}\, \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}_l. \end{aligned} \tag{3.89}$$

综上，度量张量有三种表示：

$$\boldsymbol{I} = \begin{cases} g_{ij}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j, & \text{(3.90-a)} \\ g^{ij}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j, & \text{(3.90-b)} \\ \delta_j^i\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j, & \text{(3.90-c)} \end{cases}$$

式中，协变分量 $g_{ij} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}$，逆变分量 $g^{ij} = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m}$，混合分量 $\delta_j^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}$.

3.5.2 Eddington 张量的定义

接下来引入 **Eddington 张量**

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{ijk}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}^k \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m), \tag{3.91}$$

式中的 $\epsilon_{ijk} = \det\left[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k\right]$．和之前一样，仍是利用指标升降来获得等价定义：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \epsilon_{ijk}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}^k \\ &= \epsilon_{ijk}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \left(g^{jl}\, \boldsymbol{g}_l\right) \otimes \boldsymbol{g}^k \end{aligned}$$

$$= \epsilon_{ijk}\, g^{jl}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{g}^k$$

根据张量分量之间的关系（回顾 1.2.2 小节），我们有

$$= \epsilon_{i\ k}^{\ l}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{g}^k. \tag{3.92}$$

当然，这里的 $\epsilon_{i\ k}^{\ l}$ 只是一个形式．要将它显式地表达出来，需要利用行列式的线性性：

$$\begin{aligned} \forall\, \boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^3 \text{ 以及 } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad & \det\left[\boldsymbol{\xi}, \alpha\,\hat{\boldsymbol{\eta}} + \beta\,\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\zeta}\right] \\ &= \alpha \det\left[\boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\zeta}\right] + \beta \det\left[\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\zeta}\right]. \end{aligned} \tag{3.93}$$

由此可知

$$\begin{aligned} \epsilon_{i\ k}^{\ l} &= \epsilon_{ijk}\, g^{jl} \\ &= g^{jl} \det\left[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k\right] \\ &= \det\left[\boldsymbol{g}_i, g^{jl}\, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k\right] \\ &= \det\left[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^l, \boldsymbol{g}_k\right]. \end{aligned} \tag{3.94}$$

一般来说，张量在定义时，只需给出其分量的一种形式．而其他的形式，则都可以通过度量来获得．说得直白一些，这其实就是一套“指标升降游戏”．

顺带一说，在 Descartes 坐标系下，$\mathbb{R}^3$ 空间中的叉乘可以用 Eddington 张量表示为

$$\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}^j = \begin{cases} \epsilon_i^{\ jk}\, \boldsymbol{g}_k\,, & \text{(3.95-a)} \\ \epsilon_{i\ k}^{\ j}\, \boldsymbol{g}^k. & \text{(3.95-b)} \end{cases}$$

证明： 利用对偶关系可以很容易地获得这一结果．$\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}^j$ 仍然得到一个 $\mathbb{R}^3$ 空间中的向量，它自然可以用协变基来表示：

$$\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}^j = \left(\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k$$

这里的内积也就是点积．根据向量三重积的知识，可以把 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$ 表示成行列式：

$$= \det\left[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k\right] \boldsymbol{g}_k$$

根据 Eddington 张量的定义即得到

$$= \epsilon_i^{\ jk}\, \boldsymbol{g}_k. \tag{3.96}$$

同理，若用逆变基表示，则为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}^j &= \left(\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k \\ &= \det\left[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right] \boldsymbol{g}^k \\ &= \epsilon_{i\ k}^{\ j}\, \boldsymbol{g}^k. \end{aligned} \tag{3.97}$$

□

3.5.3 两种度量的关系

两个 Eddington 张量的分量之积可以用一个由度量张量分量所组成的行列式来表示：

$$\epsilon^{i\ k}_{\ j}\,\epsilon_{pq}^{\ \ \ r}=\begin{vmatrix}\delta^i_p & \delta^i_q & g^{ir}\\ g_{jp} & g_{jq} & \delta^r_j\\ \delta^k_p & \delta^k_q & g^{kr}\end{vmatrix}. \tag{3.98}$$

类似矩阵乘法，行列式中第 m 行 n 列的元素，由第一个 Eddington 张量的第 m 个指标与第二个 Eddington 张量的第 n 个指标组合而成．两个指标均在上面，则获得度量张量的逆变分量；两个指标均在下面，则获得协变分量；若是一上一下，则将得到混合分量（即 Kronecker δ）.

这里的 i、j、k 和 p、q、r 都不是哑标，无需考虑求和的限制，可以任意选取．至于它们的上下位置，同样是由实际问题来确定的.

证明： 证明思路就是化为矩阵乘法．根据定义，

$$\epsilon^{i\ k}_{\ j}\,\epsilon_{pq}^{\ \ \ r}=\det\left[\boldsymbol{g}^i,\boldsymbol{g}_j,\boldsymbol{g}^k\right]\,\det\left[\boldsymbol{g}_p,\boldsymbol{g}_q,\boldsymbol{g}^r\right]$$

考虑行列式的性质 $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$ 和 $\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathsf T}\right)=\det(\boldsymbol{A})$，则有

$$=\det\left(\begin{bmatrix}(\boldsymbol{g}^i)^{\mathsf T}\\ (\boldsymbol{g}_j)^{\mathsf T}\\ (\boldsymbol{g}^k)^{\mathsf T}\end{bmatrix}\left[\boldsymbol{g}_p,\boldsymbol{g}_q,\boldsymbol{g}^r\right]\right). \tag{3.99}$$

这个矩阵可以直接算出. □

如果 Eddington 张量中存在哑标，情况就会有所不同：

$$\epsilon^{i\ s}_{\ j}\,\epsilon^{p}_{\ qs}=\sum_{s=1}^{3}\begin{vmatrix}g^{ip} & \delta^i_q & \delta^i_s\\ \delta^p_j & g_{jq} & g_{js}\\ g^{sp} & \delta^s_q & \delta^s_s\end{vmatrix}. \tag{3.100}$$

由于式中的 k 是哑标，因此需要对它求和．行列式按第一行展开，可得（下面仍将根据 Einstein 约定省略求和号）

$$\begin{aligned}\epsilon^{i\ s}_{\ j}\,\epsilon^{p}_{\ qs}&=g^{ip}\left(g_{jq}\delta^s_s-g_{js}\delta^s_q\right)-\delta^i_q\left(\delta^p_j\delta^s_s-g_{js}g^{sp}\right)+\delta^i_s\left(\delta^p_j\delta^s_q-g_{jq}g^{sp}\right)\\&=g^{ip}\left(3g_{jq}-g_{jq}\right)-\delta^i_q\left(3\delta^p_j-\delta^p_j\right)+\left(\delta^p_j\delta^i_q-g_{jq}g^{ip}\right)\\&=g^{ip}g_{jq}-\delta^p_j\delta^i_q.\end{aligned} \tag{3.101}$$

这一串稍显复杂的表达式，可以用口诀“前前后后，内内外外”来记忆．具体操作如图 3.5 所示.

下面再举两个例子来说明：

$$\epsilon^{ij}_{\ \ s}\,\epsilon_{pq}^{\ \ \ s}=\delta^i_p\delta^j_q-\delta^j_p\delta^i_q; \tag{3.102}$$

$$\epsilon^{ij}_{\ \ s}\,\epsilon^{p\ s}_{\ q}=g^{ip}\delta^j_q-g^{jp}\delta^i_q. \tag{3.103}$$

以后将会看到，这是一个相当重要的基本结构.

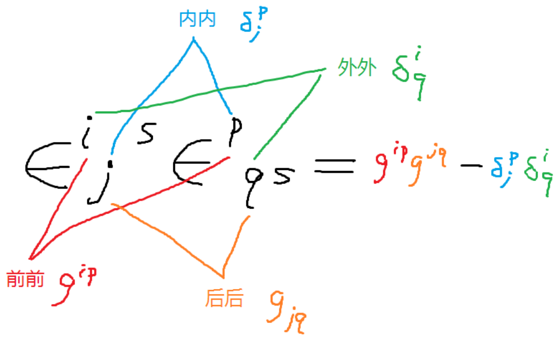


图 3.5: Eddington 张量乘积口诀“前前后后，内内外外”的示意图