第一章　张量的定义及表示

1.1　对偶基，度量

1.1.1　对偶基

设 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一组**基**，即极大线性无关向量组．此时，$\mathbb{R}^m$ 中将唯一存在另一组基 $\{\boldsymbol{g}^i\}_{i=1}^m$，二者满足**对偶关系**：

$$\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & j = i; \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \tag{1.1}$$

式中，$\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m}$ 的 δ_i^j 是 **Kronecker δ 函数**.

证明： 根据内积的定义，

$$\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{g}^j\right)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{g}_i = \delta_i^j, \tag{1.2}$$

其中的 i、j 可取 $1, 2, \cdots, m$．写成矩阵形式，为[①]

$$\begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{g}^1\right)^{\mathsf{T}} \\ \vdots \\ \left(\boldsymbol{g}^m\right)^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \cdots & \boldsymbol{g}_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_m. \tag{1.3}$$

左边的第一个矩阵拆分成了 m 行，每行是一个 m 维行向量；第二个矩阵则拆分成了 m 列，每行是一个 m 维列向量．根据分块矩阵的乘法，所得结果对角元为 δ_i^i，非对角元则为 δ_j^i（其中 $i \neq j$），即单位阵.

把第一个矩阵的转置挪到外面，可有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^1 & \cdots & \boldsymbol{g}^m \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \cdots & \boldsymbol{g}_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_m. \tag{1.4}$$

$\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m$ 作为基，必然满足 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \cdots & \boldsymbol{g}_m \end{bmatrix}$ 非奇异．因此

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^1 & \cdots & \boldsymbol{g}^m \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \cdots & \boldsymbol{g}_m \end{bmatrix}^{-1}, \tag{1.5}$$

即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^1 & \cdots & \boldsymbol{g}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \cdots & \boldsymbol{g}_m \end{bmatrix}^{-\mathsf{T}}. \tag{1.6}$$

逆矩阵（及其转置）是存在且唯一的，这就证明了对偶基的存在性和唯一性. □

我们把指标写在下面的基 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m$ 称为**协变基**；指标写在上面的基 $\{\boldsymbol{g}^i\}_{i=1}^m$ 称为**逆变基**．式 (1.6) 明确指出了逆变基与协变基的关系.

① 除非特殊说明，本文中的所有向量均取列向量.

1.1.2 度量

下面引入**度量**的概念．其定义为

$$\begin{cases} g_{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}, & \text{(1.7-a)} \\ g^{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m}. & \text{(1.7-b)} \end{cases}$$

这两种度量满足

$$g_{ik}\, g^{kj} = \delta_i^j. \tag{1.8}$$

也可以写成矩阵的形式：

$$\left[g_{ik}\right]\left[g^{kj}\right] = \left[\delta_i^j\right] = \boldsymbol{I}_m, \tag{1.9}$$

其中的 $\boldsymbol{I}_m$ 是 m 阶单位阵．该式的证明将在稍后给出．

由于内积具有交换律，因而度量的两个指标显然可以交换：

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji}. \tag{1.10}$$

利用度量，可以获得**基向量转换关系**．第 i 个协变基向量 $\boldsymbol{g}_i$ 既然是向量，就必然可以用协变基或逆变基来表示[①]．根据对偶关系式 (1.1) 和度量的定义式 (1.7-a)、(1.7-b)，可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = g_{ik}\, \boldsymbol{g}^k, & \text{(1.11-a)} \\ \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = \delta_i^k \boldsymbol{g}_k & \text{(1.11-b)} \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = \delta_k^i\, \boldsymbol{g}^k, & \text{(1.12-a)} \\ \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = g^{ik} \boldsymbol{g}_k. & \text{(1.12-b)} \end{cases}$$

这四个式子中，式 (1.11-b) 和 (1.12-a) 是平凡的，而式 (1.11-a) 和 (1.12-b) 则通过度量建立起了协变基与逆变基之间的关系．这就称为基向量转换关系，也可以叫做“指标升降游戏”．

需要说明的是，根据 **Einstein 求和约定**，重复指标（即哑标，这里是 k）且一上一下时，已经暗含了求和．后文除非特殊说明，也都是如此．

现在我们来证明式 (1.8)：

$$g_{ik}\, g^{kj} = \delta_i^j. \tag{1.13}$$

证明：

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, g^{kj} \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \tag{1.14}$$

根据式 (1.12-b)，有

$$g^{kj} \boldsymbol{g}_k = g^{jk} \boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{g}^j \tag{1.15}$$

因此可得

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \tag{1.16}$$

□

① 所谓用某组基来“表示”一个向量，就是把它朝各个基的方向做投影，然后再求和．

1.1.3 向量的分量

对于任意的向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$，它可以用协变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = \xi^k \boldsymbol{g}_k, \tag{1.17-a}$$

也可以用逆变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = \xi_k \boldsymbol{g}^k. \tag{1.17-b}$$

式中，ξ^k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个逆变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**逆变分量**；而 ξ_k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个协变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**协变分量**.

以后凡是指标在下的（下标），均称为协变某某；指标在上的（上标），称为逆变某某.

1.2 张量的表示

1.2.1 张量的表示与简单张量

所谓**张量**，即**多重线性函数**.

首先用三阶张量举个例子. 考虑任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，其中的 $\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$ 表示以 $\mathbb{R}^m$ 为底空间的三阶张量全体. 所谓三阶（或三重）线性函数，指“吃掉”三个向量之后变成实数，并且“吃法”具有线性性.

一般地，r 阶张量的定义如下：

$$\boldsymbol{\Phi}: \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{r\text{ 个 }\mathbb{R}^m} \ni \left\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right\} \mapsto \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) \in \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

式中的 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad & \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \alpha\tilde{\boldsymbol{u}}_i + \beta\hat{\boldsymbol{u}}_i, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) \\ & = \alpha\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{u}}_i, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) + \beta\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{u}}_i, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right), \end{aligned} \tag{1.19}$$

即所谓“对第 i 个变元的线性性”. 这里的 i 可取 $1, 2, \cdots, r$.

在张量空间 $\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$ 上，我们引入线性结构：

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ 和 } \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad & (\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) \\ & \triangleq \alpha\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) + \beta\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right), \end{aligned} \tag{1.20}$$

于是

$$\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m). \tag{1.21}$$

下面我们要获得 $\boldsymbol{\Phi}$ 的表示. 根据之前任意向量用协变基或逆变基的表示，有

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m, \quad & \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ & = \boldsymbol{\Phi}\left(u^i\boldsymbol{g}_i, v_j\boldsymbol{g}^j, w^k\boldsymbol{g}_k\right) \end{aligned}$$

考虑到 $\boldsymbol{\Phi}$ 对第一变元的线性性，可得

$$= u^i \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i,\, v_j \boldsymbol{g}^j,\, w^k \boldsymbol{g}_k\right)$$

同理，

$$= u^i v_j w^k \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i,\, \boldsymbol{g}^j,\, \boldsymbol{g}_k\right). \tag{1.22}$$

注意这里自然需要满足 Einstein 求和约定.

上式中的 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)$ 是一个数．它是张量 $\boldsymbol{\Phi}$ “吃掉”三个基向量的结果．至于 $u^i v_j w^k$ 部分，三项分别是 $\boldsymbol{u}$ 的第 i 个逆变分量、$\boldsymbol{v}$ 的第 j 个协变分量和 $\boldsymbol{w}$ 的第 k 个逆变分量．根据向量分量的定义，可知

$$u^i v_j w^k = \left(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m} \cdot \left(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} \cdot \left(\boldsymbol{w},\, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.23}$$

暂时中断一下思路，先给出**简单张量**的定义.

$$\forall \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \triangleq (\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\eta},\, \boldsymbol{v})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}, \tag{1.24}$$

式中的 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^m$．“$\otimes$”的定义将在 2.1 节中给出，现在可以暂时把 $\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}$ 理解为一种记号．简单张量作为一个映照，组成它的三个向量分别与它们“吃掉”的第一、二、三个变元做内积并相乘，结果为一个实数.

考虑到内积的线性性，便有（以第二个变元为例）

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}},\, \boldsymbol{w}) \triangleq (\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\eta},\, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}$$

注意到 $(\boldsymbol{\eta},\, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} = \alpha(\boldsymbol{\eta},\, \tilde{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} + \beta(\boldsymbol{\eta},\, \hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m}$，同时再次利用简单张量的定义，可得

$$= \alpha\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\, \tilde{\boldsymbol{v}},\, \boldsymbol{w}) + \beta\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\, \hat{\boldsymbol{v}},\, \boldsymbol{w}). \tag{1.25}$$

类似地，对第一变元和第三变元，同样具有线性性．因此，可以知道

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{1.26}$$

可见，“简单张量”的名字是名副其实的，它的确是一个特殊的张量.

回过头来看 (1.23) 式．很明显，它可以用简单张量来表示．要注意，由于内积的对称性，可以有两种① 表示方法：

$$\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \tag{1.27-a}$$

或者

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{g}^i,\, \boldsymbol{g}_j,\, \boldsymbol{g}^k\right), \tag{1.27-b}$$

我们这里取上面一种．代入式 (1.22)，得

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w})$$

① 这里只考虑把 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{g}^i$、$\boldsymbol{g}_j$、$\boldsymbol{g}^k$ 分别放在一起的情况.

$$= \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\big) \cdot \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\big) \in \mathbb{R}^m$，因此

$$= \big[\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\big)\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k\big](\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}). \tag{1.28}$$

方括号里的部分，就是根据 Einstein 求和约定，用 $\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\big)$ 对 $\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k$ 进行线性组合.

由于 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 选取的任意性，可以引入如下记号：

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\big)\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k =: \boldsymbol{\Phi}_{i\ k}^{\ j}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k, \tag{1.29}$$

即

$$\boldsymbol{\Phi}_{i\ k}^{\ j} := \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\big), \tag{1.30}$$

这称为张量的**分量**．它说明一个张量可以用张量分量和基向量组成的简单张量来表示.

指标 i、j、k 的上下是任意的．这里，它有赖于式 (1.22) 中基向量的选取．实际上，对于这里的三阶张量，指标的上下一共有 8 种可能．指标全部在下面的，称为**协变分量**：

$$\boldsymbol{\Phi}_{ijk} := \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k\big); \tag{1.31}$$

指标全部在上面的，称为**逆变分量**：

$$\boldsymbol{\Phi}^{ijk} := \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k\big); \tag{1.32}$$

其余 6 种，称为**混合分量**．对于一个 r 阶张量，显然共有 2^r 种分量表示，其中协变分量与逆变分量各一种，混合分量 $2^r - 2$ 种.

1.2.2 张量分量之间的关系

我们已经知道，对于任意一个向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$，它可以用协变基或逆变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{cases} \xi^i \boldsymbol{g}_i, \\ \xi_i \boldsymbol{g}^i. \end{cases} \tag{1.33}$$

式中，协变分量与逆变分量满足坐标转换关系：

$$\begin{cases} \xi^i = \big(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^i\big)_{\mathbb{R}^m} = \big(\boldsymbol{\xi}, g^{ik}\boldsymbol{g}_k\big)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}\big(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_k\big)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}\xi_k, & \text{(1.34-a)} \\ \xi_i = \big(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_i\big)_{\mathbb{R}^m} = \big(\boldsymbol{\xi}, g_{ik}\boldsymbol{g}^k\big)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik}\big(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^k\big)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik}\xi^k. & \text{(1.34-b)} \end{cases}$$

每一式的第二个等号都用到了基向量转换关系，见式 (1.11-a) 和 (1.12-b).

现在再来考虑张量的分量．仍以上文中的张量 $\boldsymbol{\Phi}_{i\ k}^{\ j} := \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\big)$ 为例，我们想要知道它与张量 $\boldsymbol{\Phi}^{p\ r}_{\ q} := \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r\big)$ 之间的关系．利用基向量转换关系，可有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_{i\ k}^{\ j} &:= \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\big) \\ &= \boldsymbol{\Phi}\big(g_{ip}\boldsymbol{g}^p, g^{jq}\boldsymbol{g}_q, g_{kr}\boldsymbol{g}^r\big) \end{aligned}$$

又利用张量的线性性，得

$$\begin{aligned} &= g_{ip}g^{jq}g_{kr}\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r\big) \\ &= g_{ip}g^{jq}g_{kr}\boldsymbol{\Phi}^{p\ r}_{\ q}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

可见，张量的分量与向量的分量类似，其指标升降可通过度量来实现．用同样的手法，还可以得到诸如 $\boldsymbol{\Phi}^{ijk} = g^{jp}\boldsymbol{\Phi}^{i\ k}_{\ p}$、$\boldsymbol{\Phi}^{i\ k}_{\ j} = g_{jp}g^{kq}\boldsymbol{\Phi}^{ip}_{\ \ k}$ 这样的关系式.

1.2.3 相对不同基的张量分量之间的关系

$\mathbb{R}^m$ 空间中，除了 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m$ 和相应的对偶基 $\{\boldsymbol{g}^i\}_{i=1}^m$ 之外，当然还可以有其他的基，比如带括号的 $\{\boldsymbol{g}_{(i)}\}_{i=1}^m$ 以及对应的对偶基 $\{\boldsymbol{g}^{(i)}\}_{i=1}^m$．前者对应形如 $\boldsymbol{\Phi}^i{}_j{}^k \coloneqq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right)$ 的张量，后者则对应带括号的张量，如 $\boldsymbol{\Phi}^{(p)}{}_{(q)}{}^{(r)} \coloneqq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{(p)}, \boldsymbol{g}_{(q)}, \boldsymbol{g}^{(r)}\right)$．下面我们来探讨这两个张量的关系．

首先来建立基之间的关系．带括号的第 i 个基向量 $\boldsymbol{g}_{(i)}$，作为 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一个向量，自然可以用另一组基来表示：

$$\boldsymbol{g}_{(i)} = \begin{cases} \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k, \\ \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k. \end{cases} \tag{1.36}$$

同理，自然还有它的对偶基：

$$\boldsymbol{g}^{(i)} = \begin{cases} \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k, \\ \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k. \end{cases} \tag{1.37}$$

引入记号 $c^k_{(i)} \coloneqq \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}$ 和 $c^{(i)}_k \coloneqq \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}$，那么有

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_{(i)} = c^k_{(i)} \boldsymbol{g}_k, & (1.38\text{-a}) \\ \boldsymbol{g}^{(i)} = c^{(i)}_k \boldsymbol{g}^k. & (1.38\text{-b}) \end{cases}$$

容易看出，这两个系数具有如下性质：

$$c^{(i)}_k c^k_{(j)} = \delta^i_j. \tag{1.39}$$

写成矩阵形式[①]，为

$$\left[c^{(i)}_k\right]\left[c^k_{(j)}\right] = \left[\delta^j_i\right] = \boldsymbol{I}_m. \tag{1.40}$$

换句话说，两个系数矩阵是互逆的．

证明：

$$c^{(i)}_k c^k_{(j)} = \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} c^k_{(j)}$$

利用内积的线性性，有

$$= \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, c^k_{(j)} \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}$$

根据 $c^k_{(j)}$ 的定义，得到

$$= \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_{(j)}\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.41}$$

带括号的基同样满足对偶关系 (1.1) 式，于是得证． □

上面我们用不带括号的基表示了带括号的基．反之也是可以的：

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^{(k)}\right)_{\mathbb{R}^m} \mathbb{R}^m\, \boldsymbol{g}_{(k)} = c^{(k)}_i \boldsymbol{g}_{(k)}, & (1.42\text{-a}) \\ \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_{(k)}\right)_{\mathbb{R}^m} \mathbb{R}^m\, \boldsymbol{g}^{(k)} = c^i_{(k)} \boldsymbol{g}^{(k)}. & (1.42\text{-b}) \end{cases}$$

① 通常我们约定上面的标号作为行号，下面的标号作为列号．

这样一来，就建立起了不同基之间的转换关系.

现在我们回到张量. 根据张量分量的定义，

$$\boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k} \coloneqq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{i}, \boldsymbol{g}_{j}, \boldsymbol{g}^{k}\right)$$

利用之前推导的不同基向量之间的转换关系，得

$$= \boldsymbol{\Phi}\left(c^{i}_{(p)}\boldsymbol{g}^{(p)}, c^{(q)}_{j}\boldsymbol{g}_{(q)}, c^{k}_{(r)}\boldsymbol{g}^{(r)}\right)$$

由张量的线性性，提出系数：

$$\begin{aligned} &= c^{i}_{(p)}c^{(q)}_{j}c^{k}_{(r)}\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{(p)}, \boldsymbol{g}_{(q)}, \boldsymbol{g}^{(r)}\right) \\ &= c^{i}_{(p)}c^{(q)}_{j}c^{k}_{(r)}\boldsymbol{\Phi}^{(p)}{}_{(q)}{}^{(r)}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

完全类似，还可以有

$$\boldsymbol{\Phi}^{(i)}{}_{(j)}{}^{(k)} = c^{(i)}_{p}c^{g}_{(j)}c^{(k)}_{r}\boldsymbol{\Phi}^{p}{}_{q}{}^{r}. \tag{1.44}$$

总结一下这两小节得到的结果. 对于同一组基下的张量分量，其指标升降通过度量来实现；对于不同基下的张量分量，其指标转换则通过不同基之间的转换系数来完成.

第二章　张量的运算性质

2.1　张量积

张量积也叫**张量并**，用符号"$\otimes$"表示．在 1.2.1 小节给出简单张量的定义时，实际上就用到了张量积．张量积的定义为：

$$
\begin{aligned}
\forall \boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^{p}(\mathbb{R}^{m}), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^{q}(\mathbb{R}^{m}), \quad & \boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^{p+q}(\mathbb{R}^{m}) \\
& = \left(\Phi^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\Psi_{j_1 \cdots j_q} \boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right) \\
& \triangleq \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_q} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right).
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

由该定义可以知道，关于简单张量 $\left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right)$，相应的张量分量为

$$
\left(\Phi \otimes \Psi\right)^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q}. \tag{2.2}
$$

2.2　e 点积

张量的 e **点积**可以用符号"$\binom{e}{\cdot}$"表示．从这个符号可以看出 e 点积的作用：前 e 个指标缩并，后面的点乘．

对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^{p}(\mathbb{R}^{m}), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^{q}(\mathbb{R}^{m}), e \leqslant \min\{p, q\} \in \mathbb{N}^{*}$，$e$ 点积是这样定义的：

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{\Phi} \binom{e}{\cdot} \boldsymbol{\Psi} \\
= & \left(\Phi^{i_1 \cdots i_{p-e} i_{p-e+1} \cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}} \otimes \boxed{\boldsymbol{g}_{i_{p-e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}}\right) \\
& \binom{e}{\cdot} \left(\Psi^{j_1 \cdots j_e j_{e+1} \cdots j_q} \boxed{\boldsymbol{g}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_e}} \otimes \boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right)
\end{aligned}
$$

把高亮的部分做内积，得到度量：

$$
\begin{aligned}
\triangleq\ & \Phi^{i_1 \cdots i_{p-e} i_{p-e+1} \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_e j_{e+1} \cdots j_q} \\
& \cdot g_{i_{p-e+1} j_1} \cdots g_{i_p j_e} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right)
\end{aligned}
$$

玩一下"指标升降游戏"（注意有两种结合方式：与 $\boldsymbol{\Phi}$ 或 $\boldsymbol{\Psi}$），可得

$$
= \left\{
\begin{aligned}
& \Phi^{i_1 \cdots i_{p-e}}{}_{\boxed{j_1 \cdots j_e}} \Psi^{\boxed{j_1 \cdots j_e}\, j_{e+1} \cdots j_q} \\
& \Phi^{i_1 \cdots i_{p-e} \boxed{i_{p-e+1} \cdots i_p}} \Psi_{\boxed{i_{p-e+1} \cdots i_p}}{}^{j_{e+1} \cdots j_q}
\end{aligned}
\right\} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right). \tag{2.3}
$$

最后一步的花括号中，高亮的 $j_1 \cdots j_e$ 和 $i_{p-e+1} \cdots i_p$ 都是哑标，可以通过求和求掉．因此有

$$\boldsymbol{\Phi} \binom{e}{\cdot} \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^{p+q-2e}(\mathbb{R}^m). \tag{2.4}$$

换句话说，e 点积的作用就是将指标哑标化．

作为一个特殊的应用，接下来我们介绍**全点积**，用符号 “$\odot$” 表示．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)$，有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi} \odot \boldsymbol{\Psi} \triangleq \boldsymbol{\Phi} \binom{p}{\cdot} \boldsymbol{\Psi} \\
&= \left(\Phi^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \binom{p}{\cdot} \left(\Psi^{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{g}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_p}\right) \\
&= \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_p j_p} \\
&= \begin{cases} \Phi_{j_1 \cdots j_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} \\ \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{i_1 \cdots i_p} \end{cases} \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

可见，全点积将全部指标哑标化．

张量自身和自身的全点积，定义为它的**范数**：

$$\boldsymbol{\Phi} \odot \boldsymbol{\Phi} = \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p} =: |\boldsymbol{\Phi}|^2_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}. \tag{2.6}$$

2.3 叉乘

张量的**叉乘**要求底空间为 $\mathbb{R}^3$．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^3), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^q(\mathbb{R}^3)$，叉乘的定义如下：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Psi} \\
&= \left(\Phi^{i_1 \cdots i_{p-1} i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-1}} \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \times \left(\Psi_{j_1 j_2 \cdots j_q} \boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right) \\
&\triangleq \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-1}} \otimes \left(\boldsymbol{g}_{i_p} \times \boldsymbol{g}^{j_1}\right) \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q} \in \mathscr{T}^{p+q-1}(\mathbb{R}^3).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

注意到，此时简单张量的维数已经降了一阶．

利用 **Levi-Civita 记号**，可以进一步展开上式．

$$\boldsymbol{g}_{i_p} \times \boldsymbol{g}^{j_1} = \epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s \boldsymbol{g}^s, \tag{2.8}$$

式中的

$$\epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s = \det\left[\boldsymbol{g}_{i_p}, \boldsymbol{g}^{j_1}, \boldsymbol{g}_s\right]. \tag{2.9}$$

于是

$$\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Psi} = \epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-1}} \otimes \boldsymbol{g}^s \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}. \tag{2.10}$$

下面我们再来类比地定义一种混合积 “$\binom{\times}{\cdot}$”．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，定义

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi} \binom{\times}{\cdot} \boldsymbol{\Psi} &= \left(\Phi^{ijk} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}_k\right) \binom{\times}{\cdot} \left(\Psi_{pqr} \boldsymbol{g}^p \otimes \boldsymbol{g}^q \otimes \boldsymbol{g}^r\right) \\
&\triangleq \Phi^{ijk} \Psi_{pqr} \delta_j^q \boldsymbol{g}_i \otimes \left(\boldsymbol{g}_k \times \boldsymbol{g}^p\right) \otimes \boldsymbol{g}^r
\end{aligned}$$

缩并掉 Kronecker δ，同时利用 Levi-Civita 记号展开叉乘项，可有

$$= \epsilon_{k\ s}^{\ p} \boldsymbol{\Phi}^{ijk} \boldsymbol{\Psi}_{pjr} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^s \otimes \boldsymbol{g}^r, \tag{2.11}$$

式中的

$$\epsilon_{k\ s}^{\ p} = \det\left[\boldsymbol{g}_k, \boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_s\right]. \tag{2.12}$$

对于这种混合积，并没有一般的约定．不同的研究者往往会采用不同的写法及表示．

2.4　置换（一）

本节主要介绍**置换运算**的定义及相关概念，这将使我们暂时离开张量运算的主线．

置换运算实际上是一种交换位置或者改变次序的运算．之后我们还将引入针对张量的置换算子，它是外积运算和外微分运算的基础．这些运算是现代张量分析与微分几何的支柱．

2.4.1　置换的定义

我们从一个例子开始．下面是一个 2×7 的“矩阵”：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ \\ ⑦ & ④ & ⑤ & ① & ⑥ & ② & ③ \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

矩阵里面的每一个数字表示一个位置．可以想象成 7 把椅子，先是按第一行的顺序依次排列，再按照第二行的顺序打乱，重新排列．于是这就成为一个 **7 阶置换**．这个定义等价于

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \tag{2.14-a}$$

自然也等价于

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}, \tag{2.14-b}$$

当然，换用任何元素也都是可以的．

通常我们用方括号表示置换的**序号定义**，即标号的排列轮换；用圆括号表示**元素定义**，即标号对应元素的轮换．

2.4.2　置换的符号

接着来定义置换的**符号** $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}$．这里我们把每次交换两个数字称为一次“操作”．如果经过偶数次“操作”，可以把经置换后的序列恢复为原来的顺序，那么该置换的符号 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = 1$；而如果经过奇数次“操作”才可以复原，则 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = -1$．若用一个式子表示，则为

$$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = (-1)^n, \tag{2.15}$$

其中的 n 是恢复原本顺序所需“操作”的次数．

下面我们以式 (2.13) 所定义的 $\boldsymbol{\sigma}$ 为例，演示求置换符号的过程．这里的关键是通过两两交换，按如下步骤把式 (2.14-b) 的第二行变换成第一行：

$$
\begin{array}{ccccccc}
\text{♦} & \text{♣} & \text{♤} & \text{♠} & \text{♥} & \text{♡} & \text{♢} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\text{♠} & \text{♣} & \text{♤} & \text{♦} & \text{♥} & \text{♡} & \text{♢} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\text{♠} & \text{♡} & \text{♤} & \text{♦} & \text{♥} & \text{♣} & \text{♢} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\text{♠} & \text{♡} & \text{♢} & \text{♦} & \text{♥} & \text{♣} & \text{♤} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\text{♠} & \text{♡} & \text{♢} & \text{♣} & \text{♥} & \text{♦} & \text{♤} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\text{♠} & \text{♡} & \text{♢} & \text{♣} & \text{♤} & \text{♦} & \text{♥} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\text{♠} & \text{♡} & \text{♢} & \text{♣} & \text{♤} & \text{♥} & \text{♦}
\end{array}
$$

一共进行了 6 次两两交换，因此 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = 1$．

2.4.3 置换的复合

再定义一个置换

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

注意这里用了方括号，因此它是一个序号定义．方便起见，以后的序号我们都只用不带圈的普通数字表示．考虑之前定义的置换

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

则 $\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 的复合

$$\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma} = \left(\begin{array}{ccccccc} \text{⚀} & \text{⚁} & \text{⚂} & \text{⚃} & \text{⚄} & \text{⚅} & \text{⚇} \\ \text{⚇} & \text{⚃} & \text{⚄} & \text{⚀} & \text{⚅} & \text{⚁} & \text{⚂} \\ \hdashline \text{⚅} & \text{⚇} & \text{⚂} & \text{⚄} & \text{⚁} & \text{⚀} & \text{⚃} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \boldsymbol{\sigma} \\ \leftarrow \boldsymbol{\tau} \end{array} \tag{2.18}$$

与函数、线性变换等的复合类似，这里也用小圆圈“$\circ$”表示置换的复合．

假设经过置换 $\boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{\tau}$ 作用后得到的序列，分别需要 p 次和 q 次两两交换才能复原为原来的序列．那么很显然，经过复合置换 $\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}$ 作用后的序列，经过 $q + p$ 次两两交换也一定可以复原．因此，复合置换的符号

$$\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}) = (-1)^{q+p} = (-1)^q \cdot (-1)^p = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau} \cdot \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}. \tag{2.19}$$

2.4.4 逆置换

逆置换 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ 的定义为

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{Id},\tag{2.20}$$

其中的“**Id**”是恒等映照.

仍然使用式 (2.14-b)：

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}\spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \varheartsuit & \vardiamondsuit\\ \vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit\end{pmatrix},\tag{2.21}$$

那么自然有

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1}=\begin{pmatrix}\vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit\\ \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \varheartsuit & \vardiamondsuit\end{pmatrix}.\tag{2.22}$$

显然，我们有 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{Id}$.

回忆一下逆矩阵的定义. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 既要满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，又要满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$. 对于置换也是如此，因此我们需要检查 $\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\sigma}^{-1}$：[①]

$$\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\sigma}^{-1}=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccccc}\vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit\\ \spadesuit_1 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3 & \clubsuit_4 & \varspadesuit_5 & \varheartsuit_6 & \vardiamondsuit_7\\ \hdashline \vardiamondsuit_7 & \clubsuit_4 & \varspadesuit_5 & \spadesuit_1 & \varheartsuit_6 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}\\ \leftarrow\boldsymbol{\sigma}^{-1}\\ \leftarrow\boldsymbol{\sigma}\end{array}\tag{2.23}$$

可见的确有 $\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\sigma}^{-1}=\mathbf{Id}$.

另外，由于恒等映照 **Id** 作用后序列不发生变化，复原所需的交换次数为 0，因此

$$\operatorname{sgn}\mathbf{Id}=(-1)^0=1.\tag{2.24}$$

而根据定义，

$$\mathbf{Id}=\boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma},\tag{2.25}$$

故有

$$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}^{-1}=1.\tag{2.26}$$

由此，可以推知

$$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}=\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}^{-1},\tag{2.27}$$

即置换与它的逆具有相同的符号.

2.5 置换（二）

本节将介绍置换运算的基本性质.

① 该式中的数字角标用来澄清原始序号.

2.5.1 置换的穷尽

先要做一点铺垫．设有序数组

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$$

经置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 作用后成为

$$\{\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\},$$

则根据之前的元素定义（圆括号），可以把 $\boldsymbol{\sigma}$ 记为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \boldsymbol{\sigma}(i_1) & \boldsymbol{\sigma}(i_2) & \cdots & \boldsymbol{\sigma}(i_r) \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

每次置换都将得到一个有序数组．把它们组合到一起，就可以得到集合

$$\left\{ \left(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r \right\}. \tag{2.29}$$

其中的 $\mathscr{P}_r$ 表示 r 阶置换的全体．根据排列组合原理，r 阶置换的总数等于 r 个元素的全排列数．即该集合共有 $r!$ 个元素．

下面我们要证明

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r \right\} \\
=& \left\{ \left(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}(i_r)\right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathscr{P}_r \right\} && \text{(2.30-a)} \\
=& \left\{ \left(\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}(i_1), \boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}(i_r)\right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathscr{P}_r \right\} && \text{(2.30-b)} \\
=& \left\{ \left(\boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_1), \boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_r)\right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r \right\}. && \text{(2.30-c)}
\end{aligned}$$

所谓“穷尽”，就是将 $\mathscr{P}_r$ 中的所有置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 全部枚举出来．关于 $\boldsymbol{\sigma}$ 的求和就是一个例子．以上这条性质说明，置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 如果作为一个广义上的“哑标”，那么穷尽的结果与用 $\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}$ 或 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ 代替该“哑标”的结果是一样的．

这说明置换构成了置换群．?

证明： 证明的思路是说明集合互相包含．

对于式 (2.30-a)，右边的 $\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}$ 也是一个 r 阶置换，自然符合左边集合的定义，因此 右边 $\subset$ 左边．由于这一步是相当显然的，以下的几个证明我们将略去该步．另一方面，左边的 $\boldsymbol{\sigma}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Id}\circ\boldsymbol{\sigma} = \left(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}\right)\circ\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}\circ\left(\boldsymbol{\tau}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}\right), \tag{2.31}$$

这就是右边集合的定义，因此 左边 $\subset$ 右边．故可证得等式成立．

对于式 (2.30-b)，我们有

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\circ\mathbf{Id} = \boldsymbol{\sigma}\circ\left(\boldsymbol{\tau}^{-1}\circ\boldsymbol{\tau}\right) = \left(\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}\right)\circ\boldsymbol{\tau}, \tag{2.32}$$

它符合了右边集合的定义，因此 左边 $\subset$ 右边．于是等式成立．

对于式 (2.30-c)，我们有

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\boldsymbol{\sigma}^{-1}\right)^{-1}, \tag{2.33}$$

它符合了右边集合的定义，因此 左边 $\subset$ 右边．于是等式成立． □

2.5.2　数组元素的乘积

设有序数组 $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$、$\{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$ 和 $\{k_1, k_2, \cdots, k_r\}$ 经 r 阶置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 作用后分别成为 $\{\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\}$、$\{\boldsymbol{\sigma}(j_1), \boldsymbol{\sigma}(j_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(j_r)\}$ 和 $\{\boldsymbol{\sigma}(k_1), \boldsymbol{\sigma}(k_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(k_r)\}$，也就是说

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \boldsymbol{\sigma}(i_1) & \boldsymbol{\sigma}(i_2) & \cdots & \boldsymbol{\sigma}(i_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ \boldsymbol{\sigma}(j_1) & \boldsymbol{\sigma}(j_2) & \cdots & \boldsymbol{\sigma}(j_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ \boldsymbol{\sigma}(k_1) & \boldsymbol{\sigma}(k_2) & \cdots & \boldsymbol{\sigma}(k_r) \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

我们有如下结论：

$$\forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r, \quad A_{i_1 j_1 k_1} A_{i_2 j_2 k_2} \cdots A_{i_r j_r k_r} = A_{\boldsymbol{\sigma}(i_1)\boldsymbol{\sigma}(j_1)\boldsymbol{\sigma}(k_1)} A_{\boldsymbol{\sigma}(i_2)\boldsymbol{\sigma}(j_2)\boldsymbol{\sigma}(k_2)} \cdots A_{\boldsymbol{\sigma}(i_r)\boldsymbol{\sigma}(j_r)\boldsymbol{\sigma}(k_r)}, \tag{2.35}$$

式中的 A_{ijk} 表示三维数组 $\boldsymbol{A}$ 的一个元素，其指标为 ijk.

下面通过一个例子来说明这一条性质．还是用式 (2.14-a) 和 (2.14-b) 所定义的置换 $\boldsymbol{\sigma}$：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \varheartsuit & \vardiamondsuit \\ \vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

随意写出一个数组元素乘积：

$$A_{379} A_{264} A_{157} A_{483} A_{698} A_{\diamondsuit\clubsuit\heartsuit} A_{\vardiamondsuit\varspadesuit\varheartsuit}. \tag{2.37}$$

三组下标分别为

$$\begin{cases} 3,\ 2,\ 1,\ 4,\ 6,\ \diamondsuit,\ \vardiamondsuit; \\ 7,\ 6,\ 5,\ 8,\ 9,\ \clubsuit,\ \varspadesuit; \\ 9,\ 4,\ 7,\ 3,\ 8,\ \heartsuit,\ \varheartsuit. \end{cases} \tag{2.38}$$

考虑 $\boldsymbol{\sigma}$ 的序号定义式 (2.13)：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{2.39}$$

所谓序号只是位置的抽象表示，而不代表任何真实的元素．请记住：置换始终是*位置*的变换，而非元素的变换，不要被式 (2.36) 给迷惑了．把 $\boldsymbol{\sigma}$ 作用在这三组下标上，可得

$$\begin{cases} \vardiamondsuit,\ 4,\ 6,\ 3,\ \diamondsuit,\ 2,\ 1; \\ \varspadesuit,\ 8,\ 9,\ 7,\ \clubsuit,\ 6,\ 5; \\ \varheartsuit,\ 3,\ 8,\ 9,\ \heartsuit,\ 4,\ 7. \end{cases} \tag{2.40}$$

于是之前的数组元素乘积就变成了

$$A_{\vardiamondsuit\varspadesuit\varheartsuit} A_{483} A_{698} A_{379} A_{\diamondsuit\clubsuit\heartsuit} A_{264} A_{157}. \tag{2.41}$$

比对一下各元素，可见与式 (2.37) 的确是完全一样的．

2.5.3　哑标的穷尽

考虑如下集合：

$$\Big\{ (i_1, i_2, \cdots, i_r) \,\Big|\, \{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m \Big\}. \tag{2.42}$$

每个 i_k 都有 m 种取法，而 i_k 又有 r 个，因此该集合一共有 m^r 元素．我们有

$$\begin{aligned}\forall\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{P}_r,\quad &\Big\{\big(i_1, i_2, \cdots, i_r\big)\ \Big|\ \big\{i_1, i_2, \cdots, i_r\big\}\text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\Big\}\\ &=\Big\{\big(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\big)\ \Big|\ \big\{i_1, i_2, \cdots, i_r\big\}\text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\Big\} &\text{(2.43-a)}\\ &=\Big\{\big(\boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_1), \boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_r)\big)\ \Big|\ \big\{i_1, i_2, \cdots, i_r\big\}\text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\Big\}. &\text{(2.43-b)}\end{aligned}$$

这里，i_k 起的就是哑标的作用．

证明： 无论怎样置换，$\boldsymbol{\sigma}(i_k)$ 都是 $1, 2, \cdots, m$ 中的数．因此，对于 $\forall\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{P}_r$，

$$\big(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\big)\in\Big\{\big(i_1, i_2, \cdots, i_r\big)\ \Big|\ \big\{i_1, i_2, \cdots, i_r\big\}\text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\Big\}, \tag{2.44}$$

即

$$\begin{aligned}&\Big\{\big(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\big)\ \Big|\ \big\{i_1, i_2, \cdots, i_r\big\}\text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\Big\}\\ &\subset\Big\{\big(i_1, i_2, \cdots, i_r\big)\ \Big|\ \big\{i_1, i_2, \cdots, i_r\big\}\text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\Big\}.\end{aligned} \tag{2.45}$$

另一方面，由于 $\mathbf{Id}=\boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}$，即

$$\big(i_1, i_2, \cdots, i_r\big)=\big(\boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}(i_r)\big), \tag{2.46}$$

而进行一次逆置换仍然使得元素不离开原有的范围，也就是说

$$\big(i_1, i_2, \cdots, i_r\big)\in\Big\{\big(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\big)\ \Big|\ \big\{i_1, i_2, \cdots, i_r\big\}\text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\Big\}, \tag{2.47}$$

即

$$\begin{aligned}&\Big\{\big(i_1, i_2, \cdots, i_r\big)\ \Big|\ \big\{i_1, i_2, \cdots, i_r\big\}\text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\Big\}\\ &\subset\Big\{\big(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\big)\ \Big|\ \big\{i_1, i_2, \cdots, i_r\big\}\text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\Big\}.\end{aligned} \tag{2.48}$$

两个集合互相包含，也就证得了式 (2.43-a)．

用相同的方法也可证得关于逆置换的 (2.43-b) 式，此处从略． □

2.6 置换（三）

本节将给出置换运算在线性代数中的一些应用．

2.6.1 行列式

2.7 置换（四）

本节将重回张量运算的主线，引入**置换算子**．

2.7.1 置换算子；对称张量与反对称张量

对于任意的置换 $\sigma \in \mathscr{P}_r$，定义**置换算子**

$$I_\sigma:\ \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m) \ni \boldsymbol{\Phi} \mapsto I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m), \tag{2.49}$$

式中

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big) \triangleq \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{u}_{\sigma(2)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(r)}\big) \in \mathbb{R}. \tag{2.50}$$

这里的“$\cdots \in \mathbb{R}$”是根据张量的定义：多重线性函数.

如果我们的置换

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_1) & \cdots & \sigma(i_1) \end{pmatrix}, \tag{2.51}$$

那么对应的置换算子将满足

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\big) \triangleq \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)}, \boldsymbol{u}_{\sigma(i_2)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}\big). \tag{2.52}$$

根据张量的线性性，容易知道置换算子也具有线性性：

$$\forall \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m) \text{ 以及 } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad I_\sigma(\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi}) = \alpha I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) + \beta\alpha I_\sigma(\boldsymbol{\Psi}). \tag{2.53}$$

证明：

$$\begin{aligned} I_\sigma(\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})\big(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big) &= (\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(r)}\big) \\ &= \alpha\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(r)}\big) + \beta\boldsymbol{\Psi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(r)}\big) \\ &= \alpha I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big) + \beta I_\sigma(\boldsymbol{\Psi})\big(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big) \\ &= \big[\alpha I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) + \beta I_\sigma(\boldsymbol{\Psi})\big]\big(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big). \end{aligned} \tag{2.54}$$

□

两个置换算子复合的结果也是很显然的：

$$\forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathscr{P}_r, \quad I_\sigma \circ I_\tau = I_{\sigma\circ\tau}. \tag{2.55}$$

证明：

$$\begin{aligned} I_\sigma \circ I_\tau(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\big) &= I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{\tau(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\tau(r)}\big) \\ &= \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma\circ\tau(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma\circ\tau(r)}\big) \\ &= I_{\sigma\circ\tau}(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\big). \end{aligned} \tag{2.56}$$

□

有了置换算子，我们就可以来定义**对称张量**和**反对称张量**. 对称张量的全体记为 Sym，反对称张量的全体记为 Skw. 如果以 $\mathbb{R}^m$ 为底空间，又分别可以记为 $\mathscr{S}^r(\mathbb{R}^m)$ 和 $\Lambda^r(\mathbb{R}^m)$.

对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$，如果

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \boldsymbol{\Phi}, \tag{2.57}$$

则称 $\boldsymbol{\Phi}$ 为对称张量，即 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathrm{Sym}$ 或 $\mathscr{S}^r(\mathbb{R}^m)$；如果

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Phi}, \tag{2.58}$$

则称 $\boldsymbol{\Phi}$ 为反对称张量，即 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathsf{Skw}$ 或 $\Lambda^r(\mathbb{R}^m)$.

有些书中采用分量形式来定义（反）对称张量．这与此处的定义是等价的：

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \boldsymbol{\Phi} \iff \Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_p)} = \Phi_{i_1\cdots i_p}, \tag{2.59-a}$$

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\Phi} \iff \Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_p)} = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\Phi_{i_1\cdots i_p}. \tag{2.59-b}$$

反对称张量与我们熟知的行列式有些类似：交换两列（对于张量就是两个分量），符号相反．全部分量两两交换一遍，前面的系数自然是置换的符号．而如果无论怎么交换分量（当然需要全部两两交换一遍），符号都不变，那这样的张量就是对称张量．

一个二阶张量的协变（或逆变）分量，可以用一个矩阵表示．如果这个张量是一个反对称张量，交换任意两个分量要添加负号；对于矩阵而言，这就意味着交换两行（或两列）……

2.7.2 置换算子的表示

根据上文给出的定义，我们有

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\left(\boldsymbol{u}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{u}_{i_r}\right) \triangleq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)},\cdots,\boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}\right). \tag{2.60}$$

首先回忆一下 1.2.1 小节中张量的表示：选一组基（协变、逆变均可），然后把张量用这组基表示．于是

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\left(\boldsymbol{u}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{u}_{i_r}\right) = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)},\cdots,\boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}\right)$$

把向量用协变基表示：

$$= \boldsymbol{\Phi}\left(u^{i_1}_{\sigma(i_1)}\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,u^{i_r}_{\sigma(i_r)}\boldsymbol{g}_{i_r}\right)$$

根据张量的线性性，提出系数：

$$= \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{i_r}\right)\cdot\left(u^{i_1}_{\sigma(i_1)}\cdots u^{i_r}_{\sigma(i_r)}\right)$$

前半部分可以用张量分量表示；而后半部分是一组逆变分量，可以写成内积的形式

$$= \Phi_{i_1\cdots i_p}\left[\left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)},\boldsymbol{g}^{i_1}\right)_{\mathbb{R}^m}\cdots\left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)},\boldsymbol{g}^{i_r}\right)_{\mathbb{R}^m}\right] \tag{2.61*}$$

注意到方括号中的其实是简单张量的定义，这就有

$$= \Phi_{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r}\left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)},\cdots,\boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}\right). \tag{2.61}$$

最后一步仍然没能回到 $\left(\boldsymbol{u}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{u}_{i_r}\right)$，因此以上推导只是简单地展开了 $\boldsymbol{\Phi}$，并没有获得实质性的结果．

然而，只要稍作改动，情况就会大不相同．考虑一下 2.5.2 小节中置换运算有关数组元素乘积的性质：

$$\forall\,\boldsymbol{\tau}\in\mathscr{P}_r,\quad A_{i_1j_1}\cdots A_{i_rj_r} = A_{\tau(i_1)\tau(j_1)}\cdots A_{\tau(i_r)\tau(j_r)}, \tag{2.62}$$

式中

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ \tau(i_1) & \cdots & \tau(i_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_r \\ \tau(j_1) & \cdots & \tau(j_r) \end{pmatrix}. \tag{2.63}$$

由此可以看出，式 (2.61*) 方括号中的部分其实是由 $\sigma(i_k)$ 和 i_k 两套指标确定的一组数：

$$A_{\sigma(i_k)\,i_k} = \left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_k)},\, \boldsymbol{g}^{i_k}\right)_{\mathbb{R}^m}; \tag{2.64}$$

另一方面，显然有 $\sigma^{-1} \in \mathscr{P}_r$．于是

$$\begin{aligned}
&I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\left(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\right) \\
&= \Phi_{i_1\cdots i_r}\left[\left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)},\, \boldsymbol{g}^{i_1}\right)_{\mathbb{R}^m} \cdots \left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)},\, \boldsymbol{g}^{i_r}\right)_{\mathbb{R}^m}\right]
\end{aligned}$$

应用置换的性质 (2.62) 式：

$$\begin{aligned}
&= \Phi_{i_1\cdots i_r}\left[\left(\boldsymbol{u}_{\sigma^{-1}\circ\sigma(i_1)},\, \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)}\right)_{\mathbb{R}^m} \cdots \left(\boldsymbol{u}_{\sigma^{-1}\circ\sigma(i_r)},\, \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)}\right)_{\mathbb{R}^m}\right] \\
&= \Phi_{i_1\cdots i_r}\left[\left(\boldsymbol{u}_{i_1},\, \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)}\right)_{\mathbb{R}^m} \cdots \left(\boldsymbol{u}_{i_2},\, \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)}\right)_{\mathbb{R}^m}\right]
\end{aligned}$$

同样，用简单张量表示，可得

$$= \Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)}\left(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\right). \tag{2.65}$$

这样，我们就得到了置换算子的一种表示：

$$\begin{aligned}
I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) &= I_\sigma\left(\Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{i_r}\right) \\
&= \Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)}.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

在式 (2.66) 中，$i_1, \cdots, i_r$ 都是哑标，要被求和求掉．张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的底空间是 $\mathbb{R}^m$，所以每个 i_k 都有 m 个取值．考虑一下 2.5.3 小节中置换运算有关哑标穷尽的性质，有

$$\begin{aligned}
\forall\, \sigma \in \mathscr{P}_r,\quad &\left\{\left(i_1, i_2, \cdots, i_r\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\} \\
&= \left\{\left(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \cdots, \sigma(i_r)\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\}.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

因此，我们可以把式 (2.66) 中的指标 i_k 换成 $\sigma(i_k)$：

$$\begin{aligned}
I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) &= \Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)} \\
&= \Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}\boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}\circ\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}\circ\sigma(i_r)} \\
&= \Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}\boldsymbol{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{i_r}.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

这是置换算子的另一种表示．

综上，要获得置换算子的表示，若是对张量分量进行操作，就直接使用对分量指标使用置换；若是对简单张量进行操作，则要对其指标使用逆置换：①

$$\begin{aligned}
I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) &= I_\sigma\left(\Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_r}\right) \\
&= \Phi^{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_r} && \text{(2.69-a)} \\
&= \Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{\sigma^{-1}(i_r)}. && \text{(2.69-b)}
\end{aligned}$$

① 这里稍有改动，用了张量的逆变分量，不过实质都是一样的．使用协变分量还是逆变分量，这个嘛，悉听尊便．

2.8 对称化算子与反对称化算子

2.8.1 定义

对称化算子 $\mathscr{S}$ 和**反对称化算子** $\mathscr{A}$ 的定义分别为

$$\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}) \triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \mathcal{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) \tag{2.70}$$

和

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) \triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}), \tag{2.71}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$. 根据置换算子的线性性，很容易知道对称化算子与反对称化算子也具有线性性.

对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$，我们有

$$\begin{cases} \mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Sym}, & \text{(2.72-a)} \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Skw}. & \text{(2.72-b)} \end{cases}$$

这说明任意一个张量，对它作用对称化算子之后，将变为对称张量；反之，作用反对称算子之后，将变为反对称张量. ①

证明： 要判断 $\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi})$ 是不是对称张量，首先需要在其上作用一个置换算子 $\mathcal{I}_\tau$：

$$\mathcal{I}_\tau\big[\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi})\big] = \mathcal{I}_\tau\left[\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \mathcal{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right]$$

根据置换算子的线性性 (2.53) 式，可有

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \mathcal{I}_\tau \circ \mathcal{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})$$

再用一下 (2.55) 式，得到

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \mathcal{I}_{\tau\circ\sigma}(\boldsymbol{\Phi})$$

这里求和的作用就是把置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 穷尽了. 根据 2.5.1 小节中的内容，再在 $\boldsymbol{\sigma}$ 上复合一个置换 $\boldsymbol{\tau}$，结果将保持不变：

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \mathcal{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}). \tag{2.73}$$

对照一下对称张量的定义 (2.57) 式，可见的确有 $\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Sym}$.

类似地，

$$\mathcal{I}_\tau\big[\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi})\big] = \mathcal{I}_\tau\left[\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{I}_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right]$$

① 换一个角度，（反）对称张量实际上可以用（反）对称化算子来定义.

$$= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left[I_\tau\circ I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right]$$

$$= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot I_{\tau\circ\sigma}(\boldsymbol{\Phi})$$

根据式 (2.19)，$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma})$，于是

$$= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \frac{\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma})}{\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}}\cdot I_{\tau\circ\sigma}(\boldsymbol{\Phi})$$

注意到始终成立 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau} = 1$（因为 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau} = \pm 1$），又有

$$= \frac{\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma})\cdot I_{\tau\circ\sigma}(\boldsymbol{\Phi})$$

利用置换的穷尽，$\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 相比，结果将保持不变：

$$= \operatorname{sgn}\tau\cdot\left[\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right] = \operatorname{sgn}\tau\cdot\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}). \tag{2.74}$$

与反对称张量的定义 (2.58) 式相比，可见的确有 $\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi})\in\mathsf{Skw}$.

这里的操作直接对张量本身进行，没有采用涉及到张量“自变量”（向量）的繁琐计算，因而显得更加干净利落. □

2.8.2 反对称化算子的性质

上文已经定义了**反对称化算子** $\mathscr{A}$：

$$\forall\,\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m),\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) \triangleq \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Skw} \text{ 或 } \Lambda^r(\mathbb{R}^m). \tag{2.75}$$

即任意一个 r 阶张量，作用反对称化算子后就变成了 r 阶反对称张量. r 阶反对称张量也称为 ***r*-form**（***r*-形式**）.

下面列出反对称化算子的几条性质.

1. 反对称化算子若重复作用，仅相当于一次作用：

$$\mathscr{A}^2 := \mathscr{A}\circ\mathscr{A} = \mathscr{A}. \tag{2.76}$$

根据数学归纳法，显然有

$$\forall\,p\in\mathbb{N}^*,\quad \mathscr{A}^p := \underbrace{\mathscr{A}\circ\cdots\circ\mathscr{A}}_{p\text{ 个 }\mathscr{A}} = \mathscr{A}. \tag{2.77}$$

证明：

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^2 &= \mathscr{A}\left[\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi})\right]\\
&\triangleq \mathscr{A}\left[\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right]\\
&\triangleq \frac{1}{r!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot I_\tau\left[\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right]
\end{aligned}$$

根据线性性，可有

$$= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau\in\mathscr{P}_r} \sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} \cdot I_\tau \circ I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})$$

根据式 (2.19) 和式 (2.55)，有

$$= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau\in\mathscr{P}_r} \sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}) \cdot I_{\tau\circ\sigma}(\boldsymbol{\Phi})$$

$$= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau\in\mathscr{P}_r} \left[\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}) \cdot I_{\tau\circ\sigma}(\boldsymbol{\Phi}) \right]$$

注意到方括号中的部分穷尽了置换 $\boldsymbol{\sigma}$，因此可以用 $\boldsymbol{\sigma}$ 取代“指标” $\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}$：

$$= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau\in\mathscr{P}_r} \left[\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} \cdot I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) \right]$$

回到定义，有

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\tau\in\mathscr{P}_r} \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) = \frac{1}{r!} \cdot r!\, \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) = \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}). \tag{2.78}$$

□

2. 对任意两个张量 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)$ 和 $\boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^q(\mathbb{R}^m)$ 的并施加反对称化算子，可以得到如下结果：

$$\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right) = \mathscr{A}\left[\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi})\otimes\boldsymbol{\Psi}\right] \tag{2.79-a}$$

$$= \mathscr{A}\left[\boldsymbol{\Phi}\otimes\mathscr{A}(\boldsymbol{\Psi})\right] \tag{2.79-b}$$

$$= \mathscr{A}\left[\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi})\otimes\mathscr{A}(\boldsymbol{\Psi})\right]. \tag{2.79-c}$$

证明： 这里只给出式 (2.79-b) 的证明．另外两式的证明是类似的．

$$\mathscr{A}\left[\boldsymbol{\Phi}\otimes\mathscr{A}(\boldsymbol{\Psi})\right] = \mathscr{A}\left[\boldsymbol{\Phi}\otimes\left(\frac{1}{q!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_q}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot I_\tau(\boldsymbol{\Psi})\right)\right]$$

根据张量积的线性性提出系数：

$$= \mathscr{A}\left[\frac{1}{q!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_q}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Phi}\otimes I_\tau(\boldsymbol{\Psi})\right]$$

利用置换的穷尽，可以把 $\boldsymbol{\tau}$ 换作 $\boldsymbol{\tau}^{-1}$：

$$= \mathscr{A}\left[\frac{1}{q!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_q}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}^{-1}\cdot\boldsymbol{\Phi}\otimes I_{\tau^{-1}}(\boldsymbol{\Psi})\right]$$

注意到 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau} = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}^{-1}$，于是

$$= \mathscr{A}\left[\frac{1}{q!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_q}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Phi}\otimes I_{\tau^{-1}}(\boldsymbol{\Psi})\right], \tag{2.80}$$

式中，

$$I_{\boldsymbol{\tau}^{-1}}(\boldsymbol{\Psi}) = \Psi^{j_1\cdots j_q}\, \boldsymbol{g}_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{\tau(j_q)}. \tag{2.81}$$

于是有

$$\boldsymbol{\Phi} \otimes I_{\boldsymbol{\tau}^{-1}}(\boldsymbol{\Psi}) = \Phi^{i_1\cdots i_p} \Psi^{j_1\cdots j_q} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{\tau(j_q)}\right). \tag{2.82}$$

置换 $\boldsymbol{\tau} \in \mathscr{P}_q$ 的元素定义为

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_q \\ \boldsymbol{\tau}(j_1) & \cdots & \boldsymbol{\tau}(j_q) \end{pmatrix}. \tag{2.83}$$

引入它的“延拓”（或曰“增广”）置换 $\hat{\boldsymbol{\tau}} \in \mathscr{P}_{p+q}$，其定义为

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ i_1 & \cdots & i_p & \boldsymbol{\tau}(j_1) & \cdots & \boldsymbol{\tau}(j_q) \end{pmatrix}. \tag{2.84}$$

这样一来，就有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi} \otimes I_{\boldsymbol{\tau}^{-1}}(\boldsymbol{\Psi}) &= \Phi^{i_1\cdots i_p} \Psi^{j_1\cdots j_q} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{\tau(j_q)}\right) \\ &= \Phi^{i_1\cdots i_p} \Psi^{j_1\cdots j_q} \left(\boldsymbol{g}_{\hat{\tau}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{\hat{\tau}(i_p)}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}_{\hat{\tau}(j_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{\hat{\tau}(j_q)}\right) \\ &= I_{\hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right). \end{aligned} \tag{2.85}$$

另一方面，参与轮换的元素只有后面的 q 个，因此 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 起到的作用实际上等同于 $\boldsymbol{\tau}$（当然两者作用范围不同）. 所以可知

$$\operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\tau}} = \operatorname{sgn} \boldsymbol{\tau}. \tag{2.86}$$

把以上这两点代入式 (2.80) 的推导，有

$$\begin{aligned} \mathscr{A}\left[\boldsymbol{\Phi} \otimes \mathscr{A}(\boldsymbol{\Psi})\right] &= \mathscr{A}\left[\frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_q} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Phi} \otimes I_{\boldsymbol{\tau}^{-1}}(\boldsymbol{\Psi})\right] \\ &= \mathscr{A}\left[\frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_q} \operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot I_{\hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right)\right] \end{aligned}$$

再用一次线性性，可得

$$= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_q} \operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathscr{A}\left[I_{\hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right)\right]. \tag{2.87}$$

$\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}$ 是一个 $p+q$ 阶张量，它作用置换算子后阶数当然保持不变. 根据反对称化算子的定义，可有

$$\begin{aligned} \mathscr{A}\left[I_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right)\right] &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathscr{P}_{p+q}} \operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left[I_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \circ I_{\hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right)\right] \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathscr{P}_{p+q}} \operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left[I_{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \circ \hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right)\right], \end{aligned} \tag{2.88}$$

式中的 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 和之前定义的 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 含义相同，只是为了确保哑标不重复，我们采用了不同的字母来表示. 该式 (2.88) 中的 $\operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 可以写成

$$\operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\operatorname{sgn}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \circ \hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\right)}{\operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}} = \frac{\operatorname{sgn}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \circ \hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\right)}{\operatorname{sgn} \hat{\boldsymbol{\tau}}}. \tag{2.89}$$

第二个等号是根据式 (2.27).

注意到 (2.87) 式中也有一个 $\operatorname{sgn}\hat{\boldsymbol{\tau}}$，因此

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}\left[\boldsymbol{\Phi}\otimes\mathscr{A}(\boldsymbol{\Psi})\right] &= \frac{1}{q!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_q}\operatorname{sgn}\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathscr{A}\left[I_{\hat{\tau}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{q!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_q}\operatorname{sgn}\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\left[\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\hat{\sigma}\in\mathscr{P}_{p+q}}\operatorname{sgn}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\left(I_{\hat{\sigma}\circ\hat{\tau}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

用式 (2.89) 合并掉 $\operatorname{sgn}\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 和 $\operatorname{sgn}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$：

$$
= \frac{1}{q!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_q}\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\hat{\sigma}\in\mathscr{P}_{p+q}}\operatorname{sgn}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\circ\hat{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\right)\cdot\left[I_{\hat{\sigma}\circ\hat{\tau}^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)\right]
$$

再次利用置换穷尽的性质改变“哑标”置换：

$$
= \frac{1}{q!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_q}\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\hat{\sigma}\in\mathscr{P}_{p+q}}\operatorname{sgn}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\left[I_{\hat{\sigma}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)\right]
$$

终于拨开云雾见青天，看到了似曾相识的定义：

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{q!}\sum_{\tau\in\mathscr{P}_q}\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right) \\
&= \frac{1}{q!}\cdot q!\,\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right) = \mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right).
\end{aligned}
\tag{2.90}
$$

□

3. 反对称化算子具有所谓**反导性**：

$$
\forall\,\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m),\,\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}^q(\mathbb{R}^m),\quad \mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right) = (-1)^{pq}\cdot\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\Phi}\right).
\tag{2.91}
$$

证明： 首先单独把反对称算子展开．它所作用的张量为 $p+q$ 阶，因而相应的置换 $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{P}_{p+q}$：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_{p+q}}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot I_{\sigma} \\
&= \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_{p+q}}\operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}\right)\cdot I_{\sigma\circ\tau^{-1}}.
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

第二的等号与之前一样，利用了置换的穷尽．这里的 $\boldsymbol{\tau}$ 是 $\mathscr{P}_{p+q}$ 中一个任意的置换．利用置换符号的性质，有

$$
\operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}\right) = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}^{-1} = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}.
\tag{2.93}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right) &= \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_{p+q}}\operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}^{-1}\right)\cdot I_{\sigma\circ\tau^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right) \\
&= \frac{\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_{p+q}}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot I_{\sigma\circ\tau^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right).
\end{aligned}
\tag{2.94}
$$

把张量展开成分量形式，可以有

$$I_{\sigma\circ\tau^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)=I_{\sigma\circ\tau^{-1}}\left[\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_p}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{j_q}\right)\right]$$

根据式 (2.55)，可得

$$=I_\sigma\circ I_{\tau^{-1}}\left[\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_p}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{j_q}\right)\right]$$

利用置换算子的表示 (2.69-b) 一式，对简单张量进行操作：

$$=I_\sigma\left[\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{\tau(i_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\tau(i_p)}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{\tau(j_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\tau(j_q)}\right)\right].\tag{2.95}$$

根据 $\boldsymbol{\tau}$ 的任意性，不妨取①

$$\boldsymbol{\tau}=\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_p&j_1&\cdots&j_q\\j_1&\cdots&j_q&i_1&\cdots&i_p\end{pmatrix}.\tag{2.96}$$

这种取法恰好可以使指标为 i 和 j 的向量交换一下位置. 于是

$$\begin{aligned}I_{\sigma\circ\tau^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)&=I_\sigma\left[\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{\tau(j_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\tau(j_q)}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{\tau(i_1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{\tau(i_p)}\right)\right]\\&=I_\sigma\left[\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_q}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_p}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{j_q}\right)\right]\end{aligned}$$

张量分量作为数，可交换顺序自然无需多言：

$$\begin{aligned}&=I_\sigma\left[\Psi^{j_1\cdots j_q}\Phi^{i_1\cdots i_p}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_p}\right)\otimes\left(\boldsymbol{g}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{j_q}\right)\right]\\&=I_\sigma\left(\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\Phi}\right).\end{aligned}\tag{2.97}$$

下面再考虑一下 $\boldsymbol{\tau}$ 的符号：j_1 先和 i_p 交换，再和 i_{p-1} 交换，以此类推，直到移动至 i_1 的位置，一共交换了 p 次. 而 $j_2,\cdots,j_q$ 也是同理，各需进行 p 次交换. 所以总共是 $p\cdot q$ 次两两交换. 因此，

$$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}=(-1)^{pq}.\tag{2.98}$$

回到式 (2.94) 的推导，有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)&=\frac{\operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_{p+q}}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot I_{\sigma\circ\tau^{-1}}\left(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)\\&=\frac{(-1)^{pq}}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_{p+q}}\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot I_\sigma\left(\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\Phi}\right)\\&=(-1)^{pq}\cdot\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\Phi}\right).\end{aligned}\tag{2.99}$$

□

① 矩阵中的 i_p 和 j_q 等未必是对齐的，这里的写法只是为了表示方便.