第一章　曲线上的标架及其运动方程

1.1　Frenet 标架

$\mathbb{R}^m$ 空间中的**曲线**，就是一个单参数的向量值映照：

$$\boldsymbol{X}(t):\ [\alpha,\beta]\ni t\mapsto \boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix} X^1(t)\\ \vdots \\ X^m(t)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

考虑该向量值映照的变化率

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t):=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{X}(t+\Delta t)-\boldsymbol{X}(t)}{\Delta t}=:\begin{bmatrix} \dot{X}^1(t)\\ \vdots \\ \dot{X}^m(t)\end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

若该极限存在，则称 $\boldsymbol{X}(t)\in\mathbb{R}^m$ 在点 t 处**可微**．此时，$\dot{\boldsymbol{X}}(t)$ 称为曲线 $\boldsymbol{X}(t)$ 的**切向量**．上述极限可以等价地表述为

$$\boldsymbol{X}(t+\Delta t)=\boldsymbol{X}(t)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\Delta t+\boldsymbol{o}(\Delta t). \tag{1.3}$$

在 t_0 处，则可以写成

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}\left(t_0\right)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\left(t_0\right)\cdot\left(t-t_0\right)+\boldsymbol{o}\left(t-t_0\right). \tag{1.4}$$

该方程表示一条直线，称为曲线 $\boldsymbol{X}(t)$ 在 t_0 处的**切线**．

在物理域中，**弧长** s 可以表示为

$$s=\int_\alpha^\beta\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}t\,, \tag{1.5}$$

两边对 t 求导，可有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.6}$$

为了研究问题的方便，我们以后将用弧长作为曲线的参数，即

$$\boldsymbol{r}(s):\ [0,L]\ni s\mapsto\boldsymbol{r}(s)\in\mathbb{R}^m. \tag{1.7}$$

对应的切向量为

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s):=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)}{\Delta s}. \tag{1.8}$$

根据链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\Big/\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|_{\mathbb{R}^m}, \tag{1.9}$$

因而 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 是一个单位向量，即

$$\|\dot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^m} = 1. \tag{1.10}$$

接下来继续对 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 求导：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s) \coloneqq \frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}(s). \tag{1.11}$$

由于 $\|\dot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^m} = 1$，因此

$$1 = \|\dot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \left\langle \dot{\boldsymbol{r}}(s), \dot{\boldsymbol{r}}(s) \right\rangle_{\mathbb{R}^m}, \tag{1.12}$$

两边求导，则有

$$0 = \left\langle \ddot{\boldsymbol{r}}(s), \dot{\boldsymbol{r}}(s) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} + \left\langle \dot{\boldsymbol{r}}(s), \ddot{\boldsymbol{r}}(s) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = 2 \cdot \left\langle \ddot{\boldsymbol{r}}(s), \dot{\boldsymbol{r}}(s) \right\rangle_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.13}$$

内积为零，就意味着正交：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s) \perp \dot{\boldsymbol{r}}(s). \tag{1.14}$$

现在我们把目光限定在 $\mathbb{R}^3$ 空间中．将 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 和 $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ 分别记为 $\boldsymbol{\tau}(s)$ 和 $\boldsymbol{k}(s)$．如前所述，$\boldsymbol{\tau}(s)$ 已经是单位向量；而 $\boldsymbol{k}(s)$ 仍需作单位化处理，其结果记作 $\boldsymbol{n}(s)$，即

$$\boldsymbol{n}(s) \coloneqq \frac{\boldsymbol{k}(s)}{\|\boldsymbol{k}(s)\|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|_{\mathbb{R}^3}}. \tag{1.15}$$

最后，只要再令

$$\boldsymbol{b}(s) \coloneqq \boldsymbol{\tau}(s) \times \boldsymbol{n}(s), \tag{1.16}$$

我们便有了 $\mathbb{R}^3$ 空间中的一组单位正交基：

$$\left\{\boldsymbol{\tau}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\right\} \subset \mathbb{R}^3, \tag{1.17}$$

它们称作 **Frenet 标架**.