第一章　微分同胚

1.1　微分同胚

1.1.1　双射

设 f 是集合 A 到 B 的映射．如果 A 中不同的元素有不同的像，则称 f 为**单射**（也叫“一对一”)；如果 B 中每个元素都是 A 中元素的像，则称 f 为**满射**；如果 f 既是单射又是满射，则称 f 为**双射**（也叫“一一对应”)．三种情况的示意见图 1.1．

Images/Three_Maps.PNG

图 1.1: 单射、满射与双射

设开集 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}, \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^m$，它们之间存在双射，即一一对应关系：

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}):\ \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \ni \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}. \tag{1.1}$$

由于该映照实现了 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 到 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 之间的双射，因此它存在逆映照：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}):\ \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}} \ni \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{X}) \in \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}. \tag{1.2}$$

我们把 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 称为**物理域**，它是实际物理事件发生的区域；$\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 则称为**参数域**．由于物理域通常较为复杂，因此我们常把参数域取为规整的形状，以便之后的处理．

设物理量 $f(\boldsymbol{X})$ 定义在物理域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{R}^m$ 上①，则 f 就定义了一个**场**：

$$f:\ \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}} \ni \boldsymbol{X} \mapsto f(\boldsymbol{X}). \tag{1.3}$$

所谓的“场”，就是自变量用位置刻画的映照．它可以是**标量场**，如温度、压强、密度等，此时 $f(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{R}$；也可以是**向量场**，如速度、加速度、力等，此时 $f(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{R}^m$；对于更深入的物理、力学研究，往往还需引入**张量场**，此时 $f(\boldsymbol{X}) \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$.

$\boldsymbol{X}$ 存在于物理域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 中，我们称它为**物理坐标**．由于上文已经定义了 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 到 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 之间的双射（不是 f！），因此 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 中就有唯一的 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 相对应，它称为**参数坐标**（也叫**曲线坐标**）．又因为物理域 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 上已经定义了场 $f(\boldsymbol{X})$，参数域中必然唯一存在场 $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ 与之对应：

$$\tilde{f}:\ \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \ni \boldsymbol{x} \mapsto \tilde{f}(\boldsymbol{x}) = f \circ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = f\big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\big). \tag{1.4}$$

$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 是完全等价的，因而 $\tilde{f}$ 与 f 也是完全等价的，所以同样有

$$f(\boldsymbol{X}) = \tilde{f}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big). \tag{1.5}$$

物理域中的场要满足守恒定律，如质量守恒、动量守恒、能量守恒等．从数学上看，这些守恒定律就是 $f(\boldsymbol{X})$ 需要满足的一系列偏微分方程．将场变换到参数域后，它仍要满足这些方程．但我们已经设法将参数域取得较为规整，故在其上进行数值求解就会相当方便．

1.1.2 参数域方程

上文已经提到，物理域中的场 $f(\boldsymbol{X})$ 需满足守恒定律，这等价于一系列偏微分方程（PDE）．在物理学和力学中，用到的 PDE 通常是二阶的，它们可以写成

$$\forall\, \boldsymbol{X} \in \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}},\quad \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(\boldsymbol{X}) \frac{\partial f}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} B_{\alpha\beta}(\boldsymbol{X}) \frac{\partial^2 f}{\partial X^\beta \partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) = 0 \tag{1.6}$$

的形式．我们的目标是把该物理域方程转化为参数域方程，即关于 $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ 的 PDE．多元微积分中已经提供了解决方案：**链式求导法则**.

考虑到

$$f(\boldsymbol{X}) = \tilde{f}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) = \tilde{f}\big(x^1(\boldsymbol{X}), \cdots, x^m(\boldsymbol{X})\big), \tag{1.7}$$

于是有

$$\frac{\partial f}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \frac{\partial x^s}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}). \tag{1.8}$$

这里用到的链式法则，由复合映照可微性定理驱动，它要求 $\tilde{f}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 可微，同时 $\boldsymbol{x}$ 关于 $\boldsymbol{X}$ 可微.

对于更高阶的项，往往需要更强的条件．一般地，我们要求

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p\big(\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}; \mathbb{R}^m\big); & \text{(1.9-a)} \\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) \in \mathscr{C}^p\big(\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}; \mathbb{R}^m\big). & \text{(1.9-b)} \end{cases}$$

这里的 $\mathscr{C}^p$ 指直至 p 阶偏导数（存在且）连续的映照全体；$p=1$ 时，它就等价于可微．至于 p 的具体取值，则由 PDE 的阶数所决定.

① 实际的物理事件当然只会发生在三维 Euclid 空间中（只就“空间”而言），但在数学上也可以推广到 m 维.

通常情况下，已知条件所给定的往往都是 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}}$ 到 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}$ 的映射

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}):\ \mathfrak{D}_{\boldsymbol{x}} \ni \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}, \tag{1.10}$$

用它不好直接得到式 (1.8) 中的 $\partial x^s / \partial X^\alpha$ 项，但获得它的“倒数” $\partial X^\alpha / \partial x^s$ 却很容易，只需利用 **Jacobi 矩阵**：

$$D\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{m\times m}, \tag{1.11}$$

它是一个方阵．

有了 Jacobi 矩阵，施加一些手法就可以得到所需要的 $\partial x^s / \partial X^\alpha$ 项．考虑到

$$\forall\, \boldsymbol{X} \in \mathfrak{D}_{\boldsymbol{X}}, \quad \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) = \boldsymbol{X}, \tag{1.12}$$

并且其中的 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$ 均可微，可以得到

$$D\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot D\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{I}_{m\times m}, \tag{1.13}$$

其中的 $\boldsymbol{I}_{m\times m}$ 是单位阵．因此

$$D\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial X^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x^m}{\partial X^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^m}{\partial X^m} \end{bmatrix}(\boldsymbol{X}) = (D\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial X^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{bmatrix}^{-1}(\boldsymbol{x}). \tag{1.14}$$

用代数的方法总可以求出

$$\frac{\partial x^s}{\partial X^\alpha} =: \varphi^s_\alpha, \tag{1.15}$$

它是通过求逆运算确定的函数，即位于矩阵 $D\boldsymbol{x}$ 第 s 行第 α 列的元素．这样就有

$$\frac{\partial f}{\partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) = \sum_{s=1}^m \frac{\partial \tilde f}{\partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \varphi^s_\alpha\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big). \tag{1.16}$$

接下来处理二阶偏导数．由上式，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial X^\beta \partial X^\alpha}(\boldsymbol{X}) = \sum_{s=1}^m \Bigg[&\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 \tilde f}{\partial x^k \partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \frac{\partial x^s}{\partial X^\beta}(\boldsymbol{X}) \right) \cdot \varphi^s_\alpha\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \\ &+ \frac{\partial \tilde f}{\partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi^s_\alpha}{\partial x^k}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \frac{\partial x^k}{\partial X^\beta}(\boldsymbol{X}) \right) \Bigg] \end{aligned}$$

继续利用式 (1.15)，有

$$\begin{aligned} = \sum_{s=1}^m \Bigg[&\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 \tilde f}{\partial x^k \partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \varphi^s_\beta\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \right) \cdot \varphi^s_\alpha\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \\ &+ \frac{\partial \tilde f}{\partial x^s}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi^s_\alpha}{\partial x^k}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \cdot \varphi^k_\beta\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})\big) \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{1.17}$$

这样，就把一阶和二阶偏导数项全部用关于 $\boldsymbol{x}$ 的函数[①] 表达了出来．换句话说，我们已经把物理域

① 当然它仍然是 $\boldsymbol{X}$ 的隐函数：$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$．

中 f 关于 $\boldsymbol{X}$ 的 PDE，转化成了参数域中 $\tilde{f}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 的 PDE．这就是上文要实现的目标．

1.1.3 微分同胚的定义

上文已经指出了 $\mathfrak{D}_x$ 到 $\mathfrak{D}_X$ 的映照 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 所需满足的一些条件．这里再次罗列如下：

1. $\mathfrak{D}_X, \mathfrak{D}_x \in \mathbb{R}^m$ 均为**开集**①；
2. 存在 $\mathfrak{D}_x$ 同 $\mathfrak{D}_X$ 之间的**双射** $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$，即存在**一一对应**关系；
3. $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 和它的逆映照 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$ 满足一定的**正则性**要求．

对第 3 点要稍作说明．

如果满足这三点，则称 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 为 $\mathfrak{D}_x$ 与 $\mathfrak{D}_X$ 之间的 $\mathscr{C}^p$**-微分同胚**，记为 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p\left(\mathfrak{D}_x; \mathfrak{D}_X\right)$．把物理域中的一个部分对应到参数域上的一个部分，需要的仅仅是*双射*这一条件；而要使得物理域中所满足的 PDE 能够转换到参数域上，就需要“过去”和“回来”都满足 p 阶偏导数连续的条件（即*正则性要求*）．

1.2 向量值映照的可微性

1.2.1 可微性的定义

设 $\boldsymbol{x}_0$ 是参数域 $\mathfrak{D}_x$ 中的一个内点．在映射 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 的作用下，它对应到物理域 $\mathfrak{D}_X$ 中的点 $\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)$．参数域是一个*开集*．根据开集的定义，必然存在一个实数 $\lambda > 0$，使得以 $\boldsymbol{x}_0$ 为球心、λ 为半径的球能够完全落在定义域 $\mathfrak{D}_x$ 内，即

$$\mathfrak{B}_\lambda\left(\boldsymbol{x}_0\right) \subset \mathfrak{D}_x, \tag{1.18}$$

其中的 $\mathfrak{B}_\lambda\left(\boldsymbol{x}_0\right)$ 表示 $\boldsymbol{x}_0$ 的 λ 邻域．

如果 $\exists\ D\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ ②，满足

$$\forall\, \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \in \mathfrak{B}_\lambda\left(\boldsymbol{x}_0\right), \quad \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\right) - \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right) = D\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)(\boldsymbol{h}) + o\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\right) \in \mathbb{R}^m, \tag{1.19}$$

则称向量值映射 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点**可微**．其中，$\mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ 表示从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的**线性变换**全体．

根据这个定义，所谓*可微性*，指由自变量变化所引起的因变量变化，可以用一个*线性变换*近似，而误差为一阶无穷小量．自变量可见到因变量空间最简单的映照形式就是线性映照（线性变换），因而具有可微性的向量值映照具有至关重要的作用．

1.2.2 Jacobi 矩阵

下面我们研究 $D\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ 的表达形式．由于 $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^m$，所以

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix} = h^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + h^i\boldsymbol{e}_i + \cdots + h^m\boldsymbol{e}_m. \tag{1.20}$$

① 用形象化的语言来说，如果在区域中的任意一点都可以吹出一个球，并能使球上的每个点都落在区域内，那么这个区域就是**开集**．这是*复合映照可微性定理*的一个要求．

② 正如之前已经定义的，$D\boldsymbol{X}$ 已经用来表示 Jacobi 矩阵．这里还是请先暂时将它视为一种记号，其具体形式将在下一小节给出．

另一方面，$DX\left(\boldsymbol{x}_0\right) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ 具有线性性：

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ 和 } \tilde{\boldsymbol{h}}, \hat{\boldsymbol{h}} \in \mathbb{R}^m, \quad DX\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\alpha\tilde{\boldsymbol{h}} + \beta\hat{\boldsymbol{h}}\right) = \alpha\, DX\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\tilde{h}\right) + \beta\, DX\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\hat{h}\right). \tag{1.21}$$

这样就有

$$\begin{aligned} DX\left(\boldsymbol{x}_0\right)(\boldsymbol{h}) &= DX\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(h^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + h^i\boldsymbol{e}_i + \cdots + h^m\boldsymbol{e}_m\right) \\ &= h^1\, DX\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\boldsymbol{e}_1\right) + \cdots + h^i\, DX\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\boldsymbol{e}_i\right) + \cdots + h^m\, DX\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\boldsymbol{e}_m\right) \end{aligned} \tag{1.22}$$

注意到 $h^i \in \mathbb{R}$ 以及 $DX\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\boldsymbol{e}_i\right) \in \mathbb{R}^m$，因而该式可以用矩阵形式表述：

$$= \begin{bmatrix} DX\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\boldsymbol{e}_1\right) & \cdots & DX\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\boldsymbol{e}_m\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix}. \tag{1.23}$$

最后一步要用到分块矩阵的思想：左边的矩阵为 1 “行” m 列，每一 “行” 是一个 m 维列向量；右边的矩阵（向量）则为 m 行 1 列．两者相乘，得到 1 “行” 1 列的矩阵（当然实际为 m 行），即之前的 (1.22) 式．

在线性代数中，$m \times m$ 的矩阵 $\begin{bmatrix} DX\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\boldsymbol{e}_1\right) & \cdots & DX\left(\boldsymbol{x}_0\right)\left(\boldsymbol{e}_m\right) \end{bmatrix}$ 称为**变换矩阵**（也叫**过渡矩阵**）.