

# 第一章 张量场可微性

## 1.1 张量的范数

### 1.1.1 赋范线性空间

对于一个线性空间  $\mathcal{V}$ ，它总是定义了线性结构：

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V} \text{ 和 } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in \mathcal{V}. \quad (1.1)$$

为了进一步研究的需要，我们还要引入范数的概念。所谓“范数”，就是对线性空间中任意元素大小的一种刻画。举个我们熟悉的例子， $m$  维 Euclid 空间  $\mathbb{R}^m$  中某个向量的范数，就定义为该向量在 Descartes 坐标下各分量的平方和的平方根。

一般而言，线性空间  $\mathcal{V}$  中的范数  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$  是从  $\mathcal{V}$  到  $\mathbb{R}$  的一个映照，并且需要满足以下三个条件：

#### 1. 非负性

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{V}} \geq 0 \quad (1.2)$$

以及非退化性

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{V}} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathcal{V}, \quad (1.3)$$

这里的  $\mathbf{0}$  是线性空间  $\mathcal{V}$  中的零元素，它是唯一存在的。

2. 零元是唯一的，线性空间中的元素  $\mathbf{x}$  与从  $\mathbf{0}$  指向它的向量一一对应。因此，线性空间中的元素也常被称为“向量”。

考虑线性空间中的数乘运算。从几何上看， $\mathbf{x}$  乘上  $\lambda$ ，就是将  $\mathbf{x}$  沿着原来的指向进行伸缩。显然有

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \text{ 和 } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{V}} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{V}}, \quad (1.4)$$

这称为正齐次性。

想要图吗？

3. 线性空间中的加法满足平行四边形法则。直观地看，就有

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}, \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{\mathcal{V}} \leq \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{V}} + \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{V}}, \quad (1.5)$$

这称为三角不等式。

定义了范数的线性空间称为赋范线性空间。

### 1.1.2 张量范数的定义

考虑  $p$  阶张量  $\Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)$ ，它可以用逆变分量或协变分量来表示：

$$\Phi = \begin{cases} \Phi^{i_1 \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}, & (1.6-a) \\ \Phi_{i_1 \dots i_p} g^{i_1} \otimes \dots \otimes g^{i_p}, & (1.6-b) \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \Phi^{i_1 \dots i_p} = \Phi(g^{i_1}, \dots, g^{i_p}). & (1.7-a) \\ \Phi_{i_1 \dots i_p} = \Phi(g_{i_1}, \dots, g_{i_p}), & (1.7-b) \end{cases}$$

张量的范数定义为

$$\|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} \triangleq \sqrt{\Phi^{i_1 \dots i_p} \Phi_{i_1 \dots i_p}} \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

$i_1 \dots i_p$  可独立取值，每个又有  $m$  种取法，所以根号下共有  $m^p$  项。注意  $\Phi^{i_1 \dots i_p}$  与  $\Phi_{i_1 \dots i_p}$  未必相等，因而根号下的部分未必是平方和，这与 Euclid 空间中向量的模是不同的。

复习一下 ?? 小节，我们可以用另一组（带括号的）基表示张量  $\Phi$ ：

$$\begin{cases} \Phi^{i_1 \dots i_p} = c_{(\xi_1)}^{i_1} \dots c_{(\xi_p)}^{i_p} \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)}, & (1.9-a) \\ \Phi_{i_1 \dots i_p} = c_{i_1}^{(\eta_1)} \dots c_{i_p}^{(\eta_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)}, & (1.9-b) \end{cases}$$

其中的  $c_{(\xi)}^i = \langle g_{(\xi)}, g^i \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ， $c_i^{(\eta)} = \langle g^{(\eta)}, g_i \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，它们满足

$$c_{(\xi)}^i c_i^{(\eta)} = \delta_{(\xi)}^{(\eta)}. \quad (1.10)$$

于是

$$\begin{aligned} & \Phi^{i_1 \dots i_p} \Phi_{i_1 \dots i_p} \\ &= \left( c_{(\xi_1)}^{i_1} \dots c_{(\xi_p)}^{i_p} \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \right) \left( c_{i_1}^{(\eta_1)} \dots c_{i_p}^{(\eta_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)} \right) \\ &= \left( c_{(\xi_1)}^{i_1} c_{i_1}^{(\eta_1)} \right) \dots \left( c_{(\xi_p)}^{i_p} c_{i_p}^{(\eta_p)} \right) \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)} \\ &= \delta_{(\xi_1)}^{(\eta_1)} \dots \delta_{(\xi_p)}^{(\eta_p)} \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)} \\ &= \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \Phi_{(\xi_1) \dots (\xi_p)}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

它是  $\Phi$  在另一组基下的逆变分量与协变分量乘积之和。

以上结果说明，张量的范数不依赖于基的选取，这就好比用不同的秤来称同一个人的体重，都将获得相同的结果。既然如此，不妨采用单位正交基来表示张量的范数：

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} &\triangleq \sqrt{\Phi^{i_1 \dots i_p} \Phi_{i_1 \dots i_p}} \\ &= \sqrt{\Phi^{(i_1) \dots (i_p)} \Phi_{(i_1) \dots (i_p)}} \\ &=: \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\Phi_{(i_1, \dots, i_p)})^2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

这里的  $\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle}$  表示张量  $\Phi$  在单位正交基下的分量，它的指标不区分上下。

有了这样的表示，很容易就可以验证张量范数符合之前的三个要求。一组数的平方和开根号，必然是非负的。至于非退化性，若范数为零，则所有分量均为零，自然成为零张量；反之，对于零张量，所有分量为零，范数也为零。将  $\Phi$  乘上  $\lambda$ ，则有

$$\begin{aligned}\|\lambda \Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} &= \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\lambda \Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \\ &= |\lambda| \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \\ &= |\lambda| \cdot \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)},\end{aligned}\tag{1.13}$$

于是正齐次性也得以验证。最后，利用 Cauchy–Schwarz 不等式，可有

$$\begin{aligned}\|\Phi + \Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 &= \sum \left( \Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} + \Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} \right)^2 \\ &= \sum \left[ (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 + 2\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle}\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} + (\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 \right] \\ &= \sum (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 + 2 \sum \Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle}\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} + \sum (\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 \\ &\leq \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 + 2\sqrt{\sum (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \sqrt{\sum (\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} + \|\Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 + 2\|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} \cdot \|\Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} + \|\Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= \left( \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} + \|\Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} \right)^2.\end{aligned}\tag{1.14}$$

两边开方，即为三角不等式。

由此，我们就完整地给出了张量大小的刻画手段。可以看出，它实际上就是 Euclid 空间中向量模的直接推广。

### 1.1.3 简单张量的范数

根据 ?? 小节中的定义，简单张量是形如  $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$  的张量，其中的  $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^m$ ，它是三个向量的张量积。简单张量的范数为

$$\|\xi \otimes \eta \otimes \zeta\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)} = \|\xi\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\eta\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\zeta\|_{\mathbb{R}^m}.\tag{1.15}$$

证明：  $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$  的逆变分量为

$$(\xi \otimes \eta \otimes \zeta)^{ijk} \triangleq \xi \otimes \eta \otimes \zeta(g^i, g^j, g^k) = \xi^i \eta^j \zeta^k.\tag{1.16}$$

同理，它的协变分量为

$$(\xi \otimes \eta \otimes \zeta)_{ijk} \triangleq \xi \otimes \eta \otimes \zeta(g_i, g_j, g_k) = \xi_i \eta_j \zeta_k.\tag{1.17}$$

二者相乘，有

$$\begin{aligned}
& (\xi \otimes \eta \otimes \zeta)^{ijk} \cdot (\xi \otimes \eta \otimes \zeta)_{ijk} \\
&= (\xi^i \eta^j \zeta^k) \cdot (\xi_i \eta_j \zeta_k) \\
&= (\xi^i \xi_i) \cdot (\eta^j \eta_j) \cdot (\zeta^k \zeta_k).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

注意到

$$\|\xi\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

分别把二者用协变和逆变分量表示：

$$\begin{aligned}
&= \langle \xi^i g_i, \xi_j g^j \rangle_{\mathbb{R}^m} \\
&= \xi^i \xi_j \langle g_i, g^j \rangle_{\mathbb{R}^m} \\
&= \xi^i \xi_j \delta_i^j = \xi^i \xi_i,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

于是

$$(\xi \otimes \eta \otimes \zeta)^{ijk} \cdot (\xi \otimes \eta \otimes \zeta)_{ijk} = \|\xi\|_{\mathbb{R}^m}^2 \cdot \|\eta\|_{\mathbb{R}^m}^2 \cdot \|\zeta\|_{\mathbb{R}^m}^2. \tag{1.20}$$

两边开方，即得 (1.15) 式.  $\square$

## 1.2 张量场的偏导数；协变导数

在区域  $\mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$  上，若存在一个自变量用位置刻画的映照

$$\Phi : \mathfrak{D}_x \ni x \mapsto \Phi(x) \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m), \tag{1.21}$$

则称张量  $\Phi(x)$ <sup>①</sup> 是定义在  $\mathfrak{D}_x$  上的一个张量场。

下面我们以三阶张量为例。设在物理域  $\mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$  和参数域  $\mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$  之间已经建立了微分同胚  $X(x) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_x; \mathfrak{D}_X)$ 。在  $X(x)$  处，张量场  $\Phi(x)$  可以用分量形式表示为

$$\Phi(x) = \Phi_j^{i\ k}(x) g_i(x) \otimes g^j(x) \otimes g_k(x) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m), \tag{1.22}$$

其中的  $g_i(x), g^j(x), g_k(x)$  都是局部基，而张量分量则定义为<sup>②</sup>

$$\Phi_j^{i\ k}(x) \triangleq \Phi(x)[g_i(x), g^j(x), g_k(x)] \in \mathbb{R}. \tag{1.23}$$

类似地，当点沿着  $x^\mu$ -线运动到  $X(x + \lambda e_\mu)$  处时，有

$$\Phi(x + \lambda e_\mu) = \Phi_j^{i\ k}(x + \lambda e_\mu) g_i(x + \lambda e_\mu) \otimes g^j(x + \lambda e_\mu) \otimes g_k(x + \lambda e_\mu). \tag{1.24}$$

现在研究  $\lambda \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$  时的极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \lambda e_\mu) - \Phi(x)}{\lambda} =: \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{1.25}$$

① 类似“ $\Phi(x)$ ”的记号在前文也表示张量  $\Phi$  作用在向量  $x$  上（“吃掉”了  $x$ ），此时有  $\Phi(x) \in \mathbb{R}$ ，注意不要混淆。符号有限，难免如此，还望诸位体谅。

② 请注意，下式  $\Phi$  之后的第一个圆括号表示位于  $x$  处；而后面的方括号则表示作用在这几个向量上。

与之前的向量值映照类似，该极限表示张量场  $\Phi(\mathbf{x})$  作为一个整体，相对于自变量第  $\mu$  个分量的变化率，即  $\Phi$  关于  $x^\mu$ （在  $\mathbf{x}$  处）的偏导数。式中， $\Phi(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu)$  已由 (1.24) 式给出。注意到张量分量实际上就是一个多元函数，于是

$$\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) = \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \cdot \lambda + \phi_j^{i\ k}(\lambda) \in \mathbb{R}. \quad (1.26)$$

另外，三个基向量作为向量值映照，同样可以展开：

$$\begin{cases} g_i(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) = g_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial g_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \cdot \lambda + \phi_i(\lambda) \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (1.27-a)$$

$$\begin{cases} g^j(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) = g^j(\mathbf{x}) + \frac{\partial g^j}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \cdot \lambda + \phi^j(\lambda) \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (1.27-b)$$

$$\begin{cases} g_k(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) = g_k(\mathbf{x}) + \frac{\partial g_k}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \cdot \lambda + \phi_k(\lambda) \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (1.27-c)$$

如果直接展开，一共有 81 项，显然过于繁杂，不便操作。我们将按  $\lambda$  的次数逐次展开。首先看  $\lambda$  的零次项：

$$\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}), \quad (1.28)$$

这就是  $\Phi(\mathbf{x})$ 。然后是  $\lambda$  的一次项：

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \left[ \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}) + \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \frac{\partial g_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}) \right. \\ \left. + \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) \otimes \frac{\partial g^j}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}) + \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes \frac{\partial g_k}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

剩下的至少是  $\lambda$  的二次项，我们将其统一写作 “res.”（余项）。

现在回头看之前的极限 (1.25) 式。 $\lambda$  的零次项与  $\Phi(\mathbf{x})$  相互抵消，而一次项就只剩下了系数部分。至于余项 res.，则要证明它趋于零。以

$$\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \phi_i(\lambda) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}) \quad (1.30)$$

为例，我们需要证明它等于  $\phi(\lambda) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$ ，即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \phi_i(\lambda) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x})\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}}{\lambda} = 0 \in \mathbb{R}. \quad (1.31)$$

**证明：** 这里为了叙述方便，我们将暂时不使用 Einstein 求和约定，而是把求和号显式地写出来。于是分子部分可以写成

$$\left\| \sum_{i,j,k=1}^m \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \phi_i(\lambda) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}) \right\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

根据范数的三角不等式，有

$$\leq \sum_{i,j,k=1}^m \|\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \phi_i(\lambda) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x})\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

再利用正齐次性，可得

$$= \sum_{i,j,k=1}^m |\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x})| \cdot \|\phi_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

代入简单张量的范数，便有

$$= \sum_{i,j,k=1}^m |\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x})| \cdot \|\phi_i(\lambda)\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\mathbf{g}^j(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\mathbf{g}_k(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.32)$$

这几项中只有  $\|\phi_i(\lambda)\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}$  与  $\lambda$  有关。于是

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \phi_i(\lambda) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}}{\lambda} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^m |\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x})| \cdot \|\mathbf{g}^j(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\mathbf{g}_k(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|\phi_i(\lambda)\|_{\mathbb{R}^m}}{\lambda} \end{aligned}$$

根据定义，最后的极限为零，因此

$$= 0. \quad (1.33)$$

□

类似地，其他七十多项也都是  $\lambda$  的一阶无穷小量。而有限个无穷小量之和仍为无穷小量，于是  $\text{res.} \rightarrow 0$ 。

综上所述，我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) &:= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) - \Phi(\mathbf{x})}{\lambda} \\ &= \left( \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k + \Phi_j^{i\ k} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^\mu} \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k + \Phi_j^{i\ k} \mathbf{g}_i \otimes \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial x^\mu} \otimes \mathbf{g}_k + \Phi_j^{i\ k} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^\mu} \right)(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.34)$$

式中， $\partial \mathbf{g}_i / \partial x^\mu(\mathbf{x})$  可以用 Christoffel 符号表示：

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) = \Gamma_{\mu i}^s \mathbf{g}_s(\mathbf{x}). \quad (1.35)$$

因此 (1.34) 式的第二项

$$\begin{aligned} & \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \\ &= \Gamma_{\mu i}^s \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_s(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$i$  和  $s$  都是哑标，不妨进行一下交换：

$$= \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}). \quad (1.36)$$

同样，后面的两项也可进行类似的处理。这样便有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) - \Phi(\mathbf{x})}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \left( \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^{s\ k} - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^{i\ k} + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^{i\ s} \right) g_i \otimes g^j \otimes g_k \right] (x) \\
&=: \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(x) g_i(x) \otimes g^j(x) \otimes g_k(x),
\end{aligned} \tag{1.37}$$

式中，我们称  $\nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(x) \in \mathbb{R}$  为张量分量  $\Phi_j^{i\ k}(x)$  相对于  $x^\mu$  的协变导数，其定义为：

$$\nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(x) \triangleq \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu}(x) + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^{s\ k}(x) - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^{i\ k}(x) + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^{i\ s}(x). \tag{1.38}$$

## 1.3 张量场的梯度

### 1.3.1 梯度；可微性

我们在参数域中的内点  $\mathbf{x}_0$  处取一个半径为  $\delta$  的邻域  $\mathfrak{B}_\delta(\mathbf{x}_0)$ . 若使自变量变化到  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ ，则在物理域中，对应的点就将从  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)$  变化到  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$ . 考察定义在参数域  $\mathfrak{D}_x$  上的张量场  $\Phi(\mathbf{x})$ ，它的变化为

$$\begin{aligned}
&\Phi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}_0) \\
&= \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) g_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \otimes g^j(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \otimes g_k(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \\
&\quad - \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0) g_i(\mathbf{x}_0) \otimes g^j(\mathbf{x}_0) \otimes g_k(\mathbf{x}_0).
\end{aligned} \tag{1.39}$$

与之前一样将第一部分逐项展开，有

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}_j^{i\ k}(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}, \end{aligned} \right. \tag{1.40-a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} g_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= g_i(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial g_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}_i(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \right. \tag{1.40-b}$$

$$\left\{ \begin{aligned} g^j(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= g^j(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial g^j}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}^j(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \right. \tag{1.40-c}$$

$$\left\{ \begin{aligned} g_k(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= g_k(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial g_k}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}_k(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \right. \tag{1.40-d}$$

不要忘记对哑标  $\mu$  进行求和.

不显含  $\mathbf{h}$  的只有每行的第一项；它们组合起来，与式 (1.39) 的第二部分相互抵消. 再看  $\mathbf{h}$  的一次项：<sup>①</sup>

$$\left[ \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} g_i \otimes g^j \otimes g_k + \Phi_j^{i\ k} \left( \frac{\partial g_i}{\partial x^\mu} \otimes g^j \otimes g_k + g_i \otimes \frac{\partial g^j}{\partial x^\mu} \otimes g_k + g_i \otimes g^j \otimes \frac{\partial g_k}{\partial x^\mu} \right) \right] (\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu. \tag{1.41}$$

利用 Christoffel 符号又可以把它写成

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} g_i \otimes g^j \otimes g_k + \Phi_j^{i\ k} \left( \Gamma_{\mu i}^s g_s \right) \otimes g^j \otimes g_k \right. \\
&\quad \left. - \Phi_j^{i\ k} g_i \otimes \left( \Gamma_{\mu s}^j g^s \right) \otimes g_k + \Phi_j^{i\ k} g_i \otimes g^j \otimes \left( \Gamma_{\mu k}^s g_s \right) \right] (\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu
\end{aligned}$$

<sup>①</sup> 实际是  $h^\mu$  的一次项. 别忘了求和.

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\partial \Phi_j^i}{\partial x^\mu} g_i \otimes g^j \otimes g_k + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s g_i \otimes g^j \otimes g_k \right. \\
&\quad \left. - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i g_i \otimes g^j \otimes g_k + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s g_i \otimes g^j \otimes g_k \right) (x_0) \cdot h^\mu \\
&= \left[ \left( \frac{\partial \Phi_j^i}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \right) g_i \otimes g^j \otimes g_k \right] (x_0) \cdot h^\mu. \tag{1.42}
\end{aligned}$$

至于高阶项，它们都等于  $\mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$ ，并且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^m} \frac{\|\mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m})\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}}{\|h\|_{\mathbb{R}^m}} = 0 \in \mathbb{R}. \tag{1.43}$$

证明与 (1.31) 式类似。

整理一下，我们有

$$\begin{aligned}
&\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) \\
&= \left[ \left( \frac{\partial \Phi_j^i}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \right) g_i \otimes g^j \otimes g_k \right] (x_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m})
\end{aligned}$$

利用协变导数，有

$$=: \left[ \nabla_\mu \Phi_j^i(x_0) g_i(x_0) \otimes g^j(x_0) \otimes g_k(x_0) \right] h^\mu + \mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m}). \tag{1.44}$$

至此，从微分学的角度来看，任务已经完成。但对于张量分析而言，我们还需要再做一点微小的工作。简单张量部分再并上一个  $g^\mu$ ，从而使张量升一阶；后面则改成  $h^\nu g_\nu(x_0)$ ，并利用点乘保持总阶数不变：

$$\begin{aligned}
&\left[ \nabla_\mu \Phi_j^i(x_0) g_i(x_0) \otimes g^j(x_0) \otimes g_k(x_0) \right] h^\mu \\
&= \left[ \nabla_\mu \Phi_j^i(x_0) g_i(x_0) \otimes g^j(x_0) \otimes g_k(x_0) \otimes g^\mu(x_0) \right] \cdot \left[ h^\nu g_\nu(x_0) \right]. \tag{1.45}
\end{aligned}$$

所谓“点乘”，其实就是  $e$  点积在  $e = 1$  时的情况。实际上，

$$g^\mu(x_0) \cdot \left[ h^\nu g_\nu(x_0) \right] = h^\nu \delta_\nu^\mu = h^\mu. \tag{1.46}$$

这里用到了局部基的对偶关系 (??) 式。

此时，我们获得了一个四阶张量与  $h^\nu g_\nu(x_0)$  的点积。接下来讨论该项的意义。参数域中  $x_0$  发生  $h = h^i e_i$  的变化时，根据向量值映照  $X(x)$  的可微性，对应物理域中的变化为

$$\begin{aligned}
X(x_0 + h) - X(x_0) &= DX(x_0)(h) + \mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m}) \\
&=: \frac{\partial X}{\partial x^\nu}(x_0) h^\nu + \mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m})
\end{aligned}$$

代入 ?? 小节中局部协变基的定义，可有

$$=: h^\nu g_\nu(x_0) + \mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m}). \tag{1.47}$$



代入式 (1.44), 有

$$\begin{aligned} & \Phi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}_0) \\ &= \left[ \nabla_\mu \Phi_j^i(\mathbf{x}_0) g_i(\mathbf{x}_0) \otimes g^j(\mathbf{x}_0) \otimes g_k(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0) \right] \\ & \quad \cdot \left[ X(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0) + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \right] + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \end{aligned}$$

合并掉一阶无穷小量<sup>①</sup>, 可得

$$\begin{aligned} &= \left[ \nabla_\mu \Phi_j^i(\mathbf{x}_0) g_i(\mathbf{x}_0) \otimes g^j(\mathbf{x}_0) \otimes g_k(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0) \right] \\ & \quad \cdot \left[ X(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0) \right] + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \\ &= \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0) \right] \cdot \left[ X(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0) \right] + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m). \end{aligned} \quad (1.48)$$

引入记号

$$\Phi(\mathbf{x}_0) \otimes \left[ g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \right] := \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0), \quad (1.49)$$

再引入梯度算子

$$\nabla := g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0), \quad (1.50)$$

我们得到的结论就可以表述为

$$\Phi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}_0) = (\Phi \otimes \nabla)(\mathbf{x}_0) \cdot \left[ X(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0) \right] + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m), \quad (1.51)$$

式中的“ $\cdot$ ”表示点乘. 以上结果称之为张量场的可微性, 它表明, 由一点处的位置移动所引起张量场的变化, 可以用该点处张量场的梯度 (即  $\Phi \otimes \nabla$ ) 点乘物理空间中的位置差别来近似, 误差为一阶无穷小量. 以上分析基于三阶张量. 但显然, 对于  $p$  阶张量, 将会有完全一致的结果.

### 1.3.2 方向导数

现在来研究张量场沿  $\mathbf{e}$  方向的变化率 (设  $\|\mathbf{e}\|_{\mathbb{R}^m} = 1$ ). 取一个与  $\mathbf{e}$  平行的向量  $\lambda \mathbf{e}$ . 注意到  $\lambda \mathbf{e}$  其实就是物理空间中的位置变化, 于是根据张量场的可微性, 我们有

$$\Phi(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}) - \Phi(\mathbf{x}_0) = (\Phi \otimes \nabla)(\mathbf{x}_0) \cdot (\lambda \mathbf{e}) + \mathcal{O}(\lambda), \quad (1.52)$$

该式等价于

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}) - \Phi(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = (\Phi \otimes \nabla)(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}. \quad (1.53)$$

我们把它定义为张量场  $\Phi(\mathbf{x})$  沿  $\mathbf{e}$  方向的方向导数:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{x}_0) \triangleq (\Phi \otimes \nabla)(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}. \quad (1.54)$$

<sup>①</sup> 式中的两个  $\mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m})$  是不同的, 前者属于  $\mathbb{R}^m$ , 后者属于  $\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$ .

### 1.3.3 左梯度与右梯度

我们已经知道，利用梯度算子

$$\nabla := g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0), \quad (1.55)$$

可以把张量场的梯度表示为

$$(\Phi \otimes \nabla)(\mathbf{x}_0) = \Phi(\mathbf{x}_0) \otimes \left[ g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \right] := \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0). \quad (1.56)$$

“ $\nabla$ ”在右边，故称之为**右梯度**（简称**梯度**）。相应地，自然会有**左梯度**：

$$(\nabla \otimes \Phi)(\mathbf{x}_0) = \left[ g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \right] \otimes \Phi(\mathbf{x}_0) := g^\mu(\mathbf{x}_0) \otimes \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0). \quad (1.57)$$

张量积不存在交换律，因而这两者是不同的。注意，梯度运算将使张量的阶数增加一阶。

张量场的可微性可以用左梯度来等价表述：

$$\Phi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}_0) = \left[ X(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0) \right] \cdot (\nabla \otimes \Phi)(\mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}). \quad (1.58)$$

类似地，还有方向导数：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial e}(\mathbf{x}_0) \triangleq (\Phi \otimes \nabla)(\mathbf{x}_0) \cdot e = e \cdot (\nabla \otimes \Phi)(\mathbf{x}_0). \quad (1.59)$$

## 1.4 场论恒等式（一）

为了给下一节做好铺垫，本节将证明几个重要引理。

### 1.4.1 Ricci 引理

首先来证明两个结论：

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^m), \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (1.60-a)$$

$$(1.60-b)$$

其中的  $G$  和  $\epsilon$  分别是度量张量和 Eddington 张量。

**证明：** 为方便起见，证明中我们将省去 “ $(\mathbf{x})$ ”。

先考察度量张量的偏导数：

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (g_{ij} g^i \otimes g^j) \\ &= \nabla_\mu g_{ij} g^i \otimes g^j, \end{aligned} \quad (1.61)$$

式中，协变导数定义为

$$\nabla_\mu g_{ij} \triangleq \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu i}^s g_{sj} - \Gamma_{\mu j}^s g_{is}. \quad (1.62)$$

以下有两种方法证明  $\nabla_\mu g_{ij} = 0$ 。

方法一利用度量的定义：

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} \triangleq \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle g_i, g_j \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

$$= \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^\mu}, \mathbf{g}_j \right\rangle_{\mathbb{R}^m} + \left\langle \mathbf{g}_i, \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^\mu} \right\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

根据 Christoffel 符号的定义 (见 ?? 小节), 有

$$= \Gamma_{\mu i, j} + \Gamma_{\mu j, i}. \quad (1.63)$$

另一方面, 回忆 (??) 式:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij, l} g^{kl}, \quad (1.64)$$

可有

$$\begin{cases} \Gamma_{\mu i}^s g_{sj} = \Gamma_{\mu i, k} g^{sk} g_{sj} = \Gamma_{\mu i, k} \delta_j^k = \Gamma_{\mu i, j}, \\ \Gamma_{\mu j}^s g_{is} = \Gamma_{\mu j, k} g^{sk} g_{is} = \Gamma_{\mu j, k} \delta_i^k = \Gamma_{\mu j, i}. \end{cases} \quad (1.65-a)$$

$$(1.65-b)$$

于是

$$\nabla_\mu g_{ij} = \Gamma_{\mu i, j} + \Gamma_{\mu j, i} - \Gamma_{\mu i, j} - \Gamma_{\mu j, i} = 0. \quad (1.66)$$

方法二则利用第一类 Christoffel 符号的性质 (??) 式:

$$\Gamma_{ij, k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \quad (1.67)$$

因而

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\mu i}^s g_{sj} + \Gamma_{\mu j}^s g_{is} \\ &= \Gamma_{\mu i, j} + \Gamma_{\mu j, i} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x^j} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

显然, 立刻就有

$$\nabla_\mu g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (1.69)$$

综上, 因为  $\nabla_\mu g_{ij} = 0 \in \mathbb{R}$ , 所以

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^m). \quad (1.70)$$

如果用其他形式的分量来表述这一结果, 我们便有

$$\nabla_\mu g_{ij} = \nabla_\mu g^{ij} = \nabla_\mu \delta_j^i = 0. \quad (1.71)$$

此结论称为 **Ricci 引理**.

再来看 Eddington 张量的偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\epsilon^i_j{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k) \\ &= \nabla_\mu \epsilon^i_j{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k, \end{aligned} \quad (1.72)$$

式中,

$$\nabla_\mu \epsilon_j^i{}^k \triangleq \frac{\partial \epsilon_j^i{}^k}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \epsilon_j^s{}^k - \Gamma_{\mu j}^s \epsilon_s^i{}^k + \Gamma_{\mu s}^k \epsilon_j^i{}^s. \quad (1.73)$$

根据定义,  $\epsilon_j^i{}^k = \det[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k]$ . 因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_j^i{}^k}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\det[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k]) \\ &= \det\left[\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^\mu}, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k\right] + \det\left[\mathbf{g}^i, \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^\mu}, \mathbf{g}^k\right] + \det\left[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \frac{\partial \mathbf{g}^k}{\partial x^\mu}\right] \end{aligned}$$

利用标架运动方程, 有

$$= \det[-\Gamma_{\mu s}^i \mathbf{g}^s, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k] + \det[\mathbf{g}^i, \Gamma_{\mu j}^s \mathbf{g}_s, \mathbf{g}^k] + \det[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, -\Gamma_{\mu s}^k \mathbf{g}^s]$$

再利用行列式的线性性, 提出系数:

$$= -\Gamma_{\mu s}^i \det[\mathbf{g}^s, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k] + \Gamma_{\mu j}^s \det[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_s, \mathbf{g}^k] - \Gamma_{\mu s}^k \det[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^s]$$

代回 Eddington 张量的定义, 可得

$$= -\Gamma_{\mu s}^i \epsilon_j^s{}^k + \Gamma_{\mu j}^s \epsilon_s^i{}^k - \Gamma_{\mu s}^k \epsilon_j^i{}^s. \quad (1.74)$$

这与式 (1.73) 的后三项恰好抵消. 于是便有  $\nabla_\mu \epsilon_j^i{}^k = 0$ . 进而

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^3). \quad (1.75)$$

和度量张量类似, Eddington 张量其他分量的偏导数, 如  $\nabla_\mu \epsilon_{ijk}$ 、 $\nabla_\mu \epsilon^{ijk}$  等, 也都等于零. 此结论同样称为 **Ricci 引理**.  $\square$

### 1.4.2 Leibniz 法则

协变导数满足 **Leibniz 法则**:

$$\nabla_\mu (\Phi_j^i{}^k \Psi_p^q) = (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) \Psi_p^q + \Phi_j^i{}^k (\nabla_\mu \Psi_p^q). \quad (1.76)$$

式中, 张量分量的形式可以是任意的.

**证明:** 显然,  $\Phi_j^i{}^k \Psi_p^q \in \mathcal{T}^5(\mathbb{R}^m)$ . 不妨令

$$\Omega_{j p}^{i k q} = \Phi_j^i{}^k \Psi_p^q. \quad (1.77)$$

则

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\Phi_j^i{}^k \Psi_p^q) &= \nabla_\mu \Omega_{j p}^{i k q} \\ &\triangleq \frac{\partial \Omega_{j p}^{i k q}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Omega_{j p}^{s k q} - \Gamma_{\mu j}^s \Omega_s^{i k q} + \Gamma_{\mu s}^k \Omega_{j p}^{i s q} - \Gamma_{\mu p}^s \Omega_{j s}^{i k q} + \Gamma_{\mu s}^q \Omega_{j p}^{i k s} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Phi_j^i{}^k \Psi_p^q) + (\Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s{}^k - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i{}^k + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^i{}^s) \Psi_p^q + \Phi_j^i{}^k (-\Gamma_{\mu p}^s \Psi_s^q + \Gamma_{\mu s}^q \Psi_p^s). \end{aligned} \quad (1.78)$$

第一项偏导数自然满足乘积法则：

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Phi_j^i \Psi_p^q) = \frac{\partial \Phi_j^i}{\partial x^\mu} \Psi_p^q + \Phi_j^i \frac{\partial \Psi_p^q}{\partial x^\mu}. \quad (1.79)$$

代回前一式，即有

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\Phi_j^i \Psi_p^q) &= \left( \frac{\partial \Phi_j^i}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \right) \Psi_p^q + \Phi_j^i \left( \frac{\partial \Psi_p^q}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu p}^s \Psi_s^q + \Gamma_{\mu s}^q \Psi_p^s \right) \\ &\triangleq (\nabla_\mu \Phi_j^i) \Psi_p^q + \Phi_j^i (\nabla_\mu \Psi_p^q). \end{aligned} \quad (1.80)$$

□

现在来考虑  $\nabla_\mu (\Phi_j^i \Psi_k^q)$ ，注意其中的  $k$  是哑标。若按照 Leibniz 法则，似乎有

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\Phi_j^i \Psi_k^q) &= (\nabla_\mu \Phi_j^i) \Psi_k^q + \Phi_j^i (\nabla_\mu \Psi_k^q) \\ &= \left( \frac{\partial \Phi_j^i}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \right) \Psi_k^q + \Phi_j^i \left( \frac{\partial \Psi_k^q}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu k}^s \Psi_s^q + \Gamma_{\mu s}^q \Psi_k^s \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Phi_j^i \Psi_k^q) + (\Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i) \Psi_k^q + \Phi_j^i (\Gamma_{\mu s}^q \Psi_k^s) \\ &\quad + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \Psi_k^q - \Gamma_{\mu k}^s \Phi_j^i \Psi_s^q. \end{aligned} \quad (1.81)$$

而根据定义，则

$$\nabla_\mu (\Phi_j^i \Psi_k^q) \triangleq \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Phi_j^i \Psi_k^q) + (\Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i) \Psi_k^q + \Phi_j^i (\Gamma_{\mu s}^q \Psi_k^s). \quad (1.82)$$

很明显，式 (1.81) 中多了两项。不过稍作计算，就可知道

$$\Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \Psi_k^q - \Gamma_{\mu k}^s \Phi_j^i \Psi_s^q$$

$k$  和  $s$  都是哑标，不妨在第二项中将二者交换：

$$= \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \Psi_k^q - \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^i \Psi_s^q = 0. \quad (1.83)$$

可见，Leibniz 法则经受住了考验。

把 Ricci 引理和 Leibniz 法则联合起来，便有

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla_\mu (g_{ij} \Psi_q^p) &= (\nabla_\mu g_{ij}) \Psi_q^p + g_{ij} (\nabla_\mu \Psi_q^p) = g_{ij} \nabla_\mu \Psi_q^p, \end{aligned} \right. \quad (1.84-a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla_\mu (\epsilon_j^i \Psi_q^p) &= (\nabla_\mu \epsilon_j^i) \Psi_q^p + \epsilon_j^i (\nabla_\mu \Psi_q^p) = \epsilon_j^i \nabla_\mu \Psi_q^p. \end{aligned} \right. \quad (1.84-b)$$

这说明度量张量和 Eddington 张量类似常数，可以提到协变导数的外面。

### 1.4.3 混合协变导数

与混合偏导数定理类似，协变导数满足

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^i = \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi_j^i. \quad (1.85)$$

不必多说，张量分量依然可以任意选取。只是需要注意，该定理只在 **体积上张量场论** 成立。

证明：首先计算张量场整体的一阶偏导数：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Phi_j^i{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k) = \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m). \quad (1.86)$$

再求一次偏导数，可有

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\nu \partial x^\mu} := \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k). \quad (1.87)$$

请注意，括号里的张量带有一个独立指标  $\mu$ 。按照极限分析，有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) g_i \otimes g^j \otimes g_k + \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k \left( \frac{\partial g_i}{\partial x^\nu} \otimes g^j \otimes g_k + g_i \otimes \frac{\partial g^j}{\partial x^\nu} \otimes g_k + g_i \otimes g^j \otimes \frac{\partial g_k}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) g_i \otimes g^j \otimes g_k + \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k \left( \Gamma_{\nu i}^s g_s \otimes g^j \otimes g_k - \Gamma_{\nu s}^j g_i \otimes g^s \otimes g_k + \Gamma_{\nu k}^s g_i \otimes g^j \otimes g_s \right) \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) + \Gamma_{\nu s}^i \nabla_\mu \Phi_j^s{}^k - \Gamma_{\nu j}^s \nabla_\mu \Phi_s^i{}^k + \Gamma_{\nu s}^k \nabla_\mu \Phi_j^i{}^s \right] g_i \otimes g^j \otimes g_k. \end{aligned} \quad (1.88)$$

但是  $\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k$  本身带有 4 个指标，因而

$$\nabla_\nu (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) \triangleq \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) + \Gamma_{\nu s}^i \nabla_\mu \Phi_j^s{}^k - \Gamma_{\nu j}^s \nabla_\mu \Phi_s^i{}^k + \Gamma_{\nu s}^k \nabla_\mu \Phi_j^i{}^s - \Gamma_{\nu \mu}^s \nabla_s \Phi_j^i{}^k. \quad (1.89)$$

代入 (1.88) 式，可得

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k) = (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k + \Gamma_{\nu \mu}^s \nabla_s \Phi_j^i{}^k) g_i \otimes g^j \otimes g_k. \quad (1.90)$$

同理，

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi_j^i{}^k + \Gamma_{\mu \nu}^s \nabla_s \Phi_j^i{}^k) g_i \otimes g^j \otimes g_k. \quad (1.91)$$

根据 Christoffel 符号的性质，

$$\Gamma_{\nu \mu}^s = \Gamma_{\mu \nu}^s; \quad (1.92)$$

而按照一般赋范线性空间上的微分学，当张量场具有足够正则性时，成立

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (1.93)$$

这样就可得到

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k = \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi_j^i{}^k. \quad (1.94)$$

□

## 1.5 场论恒等式 (二)

本节将给出微分形式张量场场论中的若干恒等式，以及它们的推演过程。

### 1.5.1 微分算子

在 1.3.3 小节中，我们已经定义了左梯度

$$(\nabla \otimes \Phi)(x) \triangleq \left[ g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \right] \otimes \Phi(x) := g^\mu(x) \otimes \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \quad (1.95-a)$$

和 (右) 梯度

$$(\Phi \otimes \nabla)(x) \triangleq \Phi(x) \otimes \left[ g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \right] := \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \otimes g^\mu(x). \quad (1.95-b)$$

如果  $\Phi(x)$  是  $r$  阶张量，则左右梯度都是  $r+1$  阶张量。

类似地，我们还可以定义左散度

$$(\nabla \cdot \Phi)(x) \triangleq \left[ g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \right] \cdot \Phi(x) := g^\mu(x) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \quad (1.96-a)$$

和右散度

$$(\Phi \cdot \nabla)(x) \triangleq \Phi(x) \cdot \left[ g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \right] := \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \cdot g^\mu(x). \quad (1.96-b)$$

如果  $\Phi(x)$  是  $r$  阶张量，则左右散度都是  $r-1$  阶张量。

当然，如果底空间是  $\mathbb{R}^3$ ，即  $\Phi(x) \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^3)$ ，还不能忘了定义左旋度

$$(\nabla \times \Phi)(x) \triangleq \left[ g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \right] \times \Phi(x) := g^\mu(x) \times \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \quad (1.97-a)$$

和右旋度

$$(\Phi \times \nabla)(x) \triangleq \Phi(x) \times \left[ g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \right] := \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \times g^\mu(x). \quad (1.97-b)$$

旋度不改变张量的阶数，即左右旋度仍属于  $\mathcal{T}^r(\mathbb{R}^3)$ 。

左右梯度、散度和旋度都是张量场中常用的微分算子。向量微积分中的梯度、散度和旋度，其实就是一阶张量的特殊情况。

### 1.5.2 推演举例

首先是为人熟知的“梯度场无旋，旋度场无源”：

$$\forall \Phi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^3), \quad \text{有} \quad \begin{cases} \nabla \times (\nabla \otimes \Phi) = \mathbf{0} \in \mathcal{T}^{r+1}(\mathbb{R}^3), \\ \nabla \cdot (\nabla \times \Phi) = \mathbf{0} \in \mathcal{T}^{r-1}(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (1.98-a)$$

$$(1.98-b)$$

证明：不失一般性，我们设  $\Phi$  是一个三阶张量。代入上一小节中梯度和旋度的定义，可有

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \otimes \Phi) &= \left( g^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \times \left( g^\mu \otimes \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right) \\ &= \left( g^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \times \left( \nabla_\mu \Phi_j^i g^\mu \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k \right) \\ &= g^\nu \times \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \nabla_\mu \Phi_j^i g^\mu \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k \right) \end{aligned}$$

与 (1.88) 式不同，第二个括号中的  $\mu$ 、 $i$ 、 $j$ 、 $k$  都是哑标，所以偏导数可以直接用协变导数表示，而不会出现多余的 Christoffel 符号：

$$= g^\nu \times \left[ (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i k}) g^\mu \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k \right]$$

按照叉乘的定义（见 ?? 节）， $g^\nu$  将与构成简单张量的第一个基向量相乘，即

$$= (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i k}) (g^\nu \times g^\mu) \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k$$

利用 Levi-Civita 记号展开叉乘项，有

$$= \epsilon^{\mu\nu s} (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i k}) g_s \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k. \quad (1.99)$$

考虑交换哑标  $\mu$ 、 $\nu$ ，结果必然保持不变。但是 Eddington 张量关于指标  $\mu\nu$  反对称<sup>①</sup>，即  $\epsilon^{\mu\nu s} = -\epsilon^{\nu\mu s}$ ；另一方面，混合协变导数却又满足  $\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i k} = \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi_j^{i k}$ ，因此总的结果将变为其相反数。这样，结果只可能为零，即

$$\nabla \times (\nabla \otimes \Phi) = 0. \quad (1.100)$$

同理，也可证明“旋度场无源”：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \Phi) &= \left( g^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \cdot \left( g^\mu \times \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right) \\ &= \left( g^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \cdot \left[ g^\mu \times (\nabla_\mu \Phi_j^{i k} g_i \otimes g^j \otimes g_k) \right] \\ &= g^\nu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[ g^\mu \times (\nabla_\mu \Phi_j^{i k} g_i \otimes g^j \otimes g_k) \right] \\ &= g^\nu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[ \nabla_\mu \Phi_j^{i k} (g^\mu \times g_i) \otimes g^j \otimes g_k \right] \\ &= g^\nu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \nabla_\mu \Phi_j^{i k} \epsilon_i^{\mu s} g_s \otimes g^j \otimes g_k \right) \end{aligned}$$

$\mu$ 、 $s$ 、 $i$ 、 $j$ 、 $k$  全部是哑标，因此

$$= g^\nu \cdot \left[ (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i k} \epsilon_i^{\mu s}) g_s \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k \right]$$

点乘出来 Kronecker  $\delta$ ：

$$\begin{aligned} &= (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i k} \epsilon_i^{\mu s}) \delta_s^\nu g_i \otimes g^j \otimes g_k \\ &= \epsilon_i^{\mu \nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i k}) g_i \otimes g^j \otimes g_k. \end{aligned} \quad (1.101)$$

交换哑标  $\mu$ 、 $\nu$ ，仿上，便有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \Phi) = 0. \quad (1.102)$$

□

① 根据式 (??)，Levi-Civita 记号由行列式定义，而行列式交换两列将改变符号。