第一章　曲线上的标架及其运动方程

1.1　Frenet 标架（弧长参数）

1.1.1　$\mathbb{R}^m$ 空间中曲线的表示

$\mathbb{R}^m$ 空间中的**曲线**，就是一个单参数的向量值映照：

$$\boldsymbol{X}(t):\ [\alpha,\beta] \ni t \mapsto \boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix} X^1(t) \\ \vdots \\ X^m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

考虑该向量值映照关于参数 t 的变化率

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) \coloneqq \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{X}(t+\Delta t)-\boldsymbol{X}(t)}{\Delta t} \eqqcolon \begin{bmatrix} \dot{X}^1(t) \\ \vdots \\ \dot{X}^m(t) \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

按照物理上的习惯，我们用点表示对 t 的导数．若该极限存在，则称 $\boldsymbol{X}(t)\in\mathbb{R}^m$ 在点 t 处**可微**．此时，$\dot{\boldsymbol{X}}(t)$ 称为曲线 $\boldsymbol{X}(t)$ 的**切向量**．上述极限可以等价地表述为

$$\boldsymbol{X}(t+\Delta t)=\boldsymbol{X}(t)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\Delta t+\boldsymbol{o}(\Delta t). \tag{1.3}$$

在 t_0 处，则可以写成

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}\left(t_0\right)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\left(t_0\right)\cdot\left(t-t_0\right)+\boldsymbol{o}\left(t-t_0\right). \tag{1.4}$$

该方程表示一条直线，称为曲线 $\boldsymbol{X}(t)$ 在 t_0 处的**切线**．

在物理域中，**弧长** s 可以表示为

$$s=\int_\alpha^\beta \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)\right|_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}t\,, \tag{1.5}$$

两边对 t 求导，可有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)\right|_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.6}$$

为了研究问题的方便，我们以后将用弧长作为曲线的参数，即

$$\boldsymbol{r}(s):\ [0,L] \ni s \mapsto \boldsymbol{r}(s)\in\mathbb{R}^m. \tag{1.7}$$

对应的切向量为

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s) \coloneqq \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)}{\Delta s}. \tag{1.8}$$

根据链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\Big/\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|_{\mathbb{R}^m}, \tag{1.9}$$

因而 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 是一个单位向量，即

$$|\dot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m}=1. \tag{1.10}$$

接下来继续对 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 求导：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\coloneqq\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}(s). \tag{1.11}$$

由于 $|\dot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m}=1$，因此

$$1=|\dot{\boldsymbol{r}}(s)|^2_{\mathbb{R}^m}=\left\langle\dot{\boldsymbol{r}}(s),\,\dot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}, \tag{1.12}$$

两边求导，则有

$$0=\left\langle\ddot{\boldsymbol{r}}(s),\,\dot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}+\left\langle\dot{\boldsymbol{r}}(s),\,\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}=2\cdot\left\langle\ddot{\boldsymbol{r}}(s),\,\dot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.13}$$

内积为零，就意味着正交：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\perp\dot{\boldsymbol{r}}(s). \tag{1.14}$$

现在我们把目光限定在 $\mathbb{R}^3$ 空间中. 如前所述，$\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 已经是单位向量，我们将其记为 $\boldsymbol{T}(s)$；而 $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ 仍需作单位化处理，其结果记作 $\boldsymbol{N}(s)$，即

$$\boldsymbol{N}(s)\coloneqq\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}=\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}\big/\mathrm{d}s}{\left|\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}\big/\mathrm{d}s\right|_{\mathbb{R}^3}}=\frac{\dot{\boldsymbol{T}}(s)}{\left|\dot{\boldsymbol{T}}(s)\right|_{\mathbb{R}^3}}. \tag{1.15}$$

最后，只要再令

$$\boldsymbol{B}(s)\coloneqq\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s), \tag{1.16}$$

我们便有了 $\mathbb{R}^3$ 空间中的一组单位正交基：

$$\left\{\boldsymbol{T}(s),\,\boldsymbol{N}(s),\,\boldsymbol{B}(s)\right\}\subset\mathbb{R}^3, \tag{1.17}$$

它们称为 **Frenet 标架**. 其中，$\boldsymbol{T}(s)$、$\boldsymbol{N}(s)$、$\boldsymbol{B}(s)$，分别叫做**单位切向量**、**主单位法向量**和**副单位法向量**.

1.1.2 标架运动方程

考虑 Frenet 标架关于弧长参数 s 的变化率，即标架运动方程：

$$\left\{\dot{\boldsymbol{T}}(s),\,\dot{\boldsymbol{N}}(s),\,\dot{\boldsymbol{B}}(s)\right\}\subset\mathbb{R}^3. \tag{1.18}$$

为此，我们需要先给出一个引理：设 $\left\{\boldsymbol{e}_i(t)\right\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一组活动单位正交基，它们满足

$$\left\langle\boldsymbol{e}_i(t),\,\boldsymbol{e}_j(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}=\delta_{ij}. \tag{1.19}$$

这组基的导数仍位于 $\mathbb{R}^m$ 空间，用自身展开，可有

$$\left[\dot{\boldsymbol{e}}_1(t),\,\cdots,\,\dot{\boldsymbol{e}}_m(t)\right]=\left[\boldsymbol{e}_1(t),\,\cdots,\,\boldsymbol{e}_m(t)\right]\boldsymbol{P}(t). \tag{1.20}$$

此时，我们有

$$\boldsymbol{P}(t)\in\mathsf{Skw}, \tag{1.21}$$

即 $\boldsymbol{P}(t)$ 是一个反对称矩阵.

证明： 对式 (1.19) 两边求导，得

$$\left\langle \dot{e}_i(t),\, e_j(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} + \left\langle e_i(t),\, \dot{e}_j(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = 0 \in \mathbb{R}, \tag{1.22}$$

写成矩阵形式，为

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1^{\mathsf{T}}(t) \\ \vdots \\ \dot{e}_m^{\mathsf{T}}(t) \end{bmatrix} \Big[e_1(t),\, \cdots,\, e_m(t) \Big] + \begin{bmatrix} e_1^{\mathsf{T}}(t) \\ \vdots \\ e_m^{\mathsf{T}}(t) \end{bmatrix} \Big[\dot{e}_1(t),\, \cdots,\, \dot{e}_m(t) \Big] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{1.23}$$

引入矩阵 $\boldsymbol{E} = \big[e_1(t),\, \cdots,\, e_m(t) \big]$，则上式与 (1.20) 式可以分别表示成

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \dot{\boldsymbol{E}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m\times m} \tag{1.24}$$

和

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{1.25}$$

两式联立，可有

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \dot{\boldsymbol{E}} & \\ &= \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}\right)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}\right) \\ &= \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} \left(\boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}\right) + \left(\boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}\right) \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{P}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

即 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{P}$. 按照定义，便知 $\boldsymbol{P}(t) \in \mathsf{Skw}$. □

根据这一引理，便可有

$$\Big[\dot{\boldsymbol{T}}(s),\, \dot{\boldsymbol{N}}(s),\, \dot{\boldsymbol{B}}(s) \Big] = \Big[\boldsymbol{T}(s),\, \boldsymbol{N}(s),\, \boldsymbol{B}(s) \Big] \boldsymbol{P}(s), \tag{1.27}$$

其中的 $\boldsymbol{P}(s)$ 是一个三阶反对称矩阵. 显然，它的对角元均为零：

$$\boldsymbol{P}(s) = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.28}$$

这里，我们用 “$*$” 表示待定元素. 由 (1.15) 式，可知

$$\dot{\boldsymbol{T}}(s) = \left| \dot{\boldsymbol{T}}(s) \right|_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{N}(s) =: \kappa(s)\, \boldsymbol{N}(s). \tag{1.29}$$

式中的 $\kappa(s) := \left| \dot{\boldsymbol{T}}(s) \right|_{\mathbb{R}^3}$. 于是，矩阵 $\boldsymbol{P}(s)$ 的第一列就成为了 $[0,\, \kappa(s),\, 0]^{\mathsf{T}}$. 利用反对称性，可有

$$\boldsymbol{P}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.30}$$

我们 “强行” 引入了 $\tau(s)$，用来取代占位符 $*$. 当然，它的具体形式仍然待定.

1.1.3　曲率和挠率

利用矩阵 $\boldsymbol{P}(s)$，可以看出

$$\dot{\boldsymbol{B}}(s)=-\tau(s)\,\boldsymbol{N}(s). \tag{1.31}$$

再与 $\boldsymbol{N}(s)$ 做内积[①]，便有

$$\dot{\boldsymbol{B}}(s)\bullet\boldsymbol{N}(s)=-\tau(s). \tag{1.32}$$

根据定义 (1.16) 式，

$$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s), \tag{1.33}$$

于是

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{B}}(s)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big[\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)\Big]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}\right]\\&=\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\times\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}+\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\frac{\dddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}\right)\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(s).\end{aligned} \tag{1.34}$$

显然，该式中的第一项为零．考虑 $\dot{\boldsymbol{B}}(s)\bullet\boldsymbol{N}(s)$，注意到 $\boldsymbol{N}(s)$ 与 $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ 平行，因此与 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ 垂直，所以第三项在点乘 $\boldsymbol{N}(s)$ 后也为零．这样便有

$$\begin{aligned}\tau(s)&=-\dot{\boldsymbol{B}}(s)\bullet\boldsymbol{N}(s)\\&=-\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\frac{\dddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}\bullet\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}\\&=-\frac{1}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|^2_{\mathbb{R}^3}}\Big[\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\dddot{\boldsymbol{r}}(s)\bullet\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\Big]\end{aligned}$$

利用向量三重积的性质，再把负号移进来，可得

$$=\frac{1}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|^2_{\mathbb{R}^3}}\det\Big[\dot{\boldsymbol{r}}(s),\,\ddot{\boldsymbol{r}}(s),\,\dddot{\boldsymbol{r}}(s)\Big]. \tag{1.35}$$

至此，我们就得到了 $\mathbb{R}^3$ 空间中以弧长为参数的 *Frenet* 标架：

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}(s)\triangleq\dot{\boldsymbol{r}}(s), & \text{(1.36-a)}\\ \boldsymbol{N}(s)\triangleq\dfrac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{T}}(s)}{\big|\dot{\boldsymbol{T}}(s)\big|_{\mathbb{R}^3}}, & \text{(1.36-b)}\\ \boldsymbol{B}(s)\triangleq\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s). & \text{(1.36-c)}\end{cases}$$

以及对应的标架运动方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{T}}(s)=\kappa(s)\,\boldsymbol{N}(s), & \text{(1.37-a)}\\ \dot{\boldsymbol{N}}(s)=-\kappa(s)\,\boldsymbol{T}(s)+\tau(s)\,\boldsymbol{B}(s), & \text{(1.37-b)}\\ \dot{\boldsymbol{B}}(s)=-\tau(s)\,\boldsymbol{N}(s), & \text{(1.37-c)}\end{cases}$$

其中，

$$\kappa(s)=\big|\dot{\boldsymbol{T}}(s)\big|_{\mathbb{R}^3}=|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3} \tag{1.38}$$

① 为了表述的清晰，本小节中用“•”来表示内积．

称为**曲率**,

$$\tau(s) = \frac{1}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|^2_{\mathbb{R}^3}} \det\left[\dot{\boldsymbol{r}}(s),\ \ddot{\boldsymbol{r}}(s),\ \dddot{\boldsymbol{r}}(s)\right] \tag{1.39}$$

称为**挠率**.

1.1.4 应用：速度与加速度

三维空间中，质点的运动**轨迹**可以用 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 来表示，其中的参数 t 为时间. 质点运动的**速度** $\boldsymbol{v}(t)$，定义为

$$\boldsymbol{v}(t) \triangleq \dot{\boldsymbol{r}}(t) := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s) \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(s) \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t). \tag{1.40}$$

由式 (1.5)，弧长的定义为

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\boldsymbol{r}}(\xi)|_{\mathbb{R}^m}\,\mathrm{d}\xi\,, \tag{1.41}$$

求导，可得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.42}$$

再代入 Frenet 标架的定义 (1.36-a) 式，便有

$$\boldsymbol{v}(t) = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}\boldsymbol{T}(s). \tag{1.43}$$

可见，速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 的方向与 $\boldsymbol{T}(t)$ 平行. 另外由于 $\boldsymbol{T}(t)$ 是单位向量，因此速度的大小

$$|\boldsymbol{v}(t)|_{\mathbb{R}^m} = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}\,, \tag{1.44}$$

我们称之为**速率**.

速度相对时间的变化率称为**加速度**：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(t) \triangleq \dot{\boldsymbol{v}}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \boldsymbol{T}(s) + |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}(s) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \boldsymbol{T}(s) + |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \dot{\boldsymbol{T}}(s) \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)\end{aligned}$$

代入标架运动方程 (1.37-a) 式以及弧长的导数 (1.42) 式，可有

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \boldsymbol{T}(s) + |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \kappa(s)\,\boldsymbol{N}(s) \cdot |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}$$

换成速率，则为

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \boldsymbol{T}(s) + |\boldsymbol{v}(t)|^2_{\mathbb{R}^m}\,\kappa(s)\,\boldsymbol{N}(s). \tag{1.45}$$

由此可知，加速度只有 $\boldsymbol{T}$ 分量和 $\boldsymbol{N}$ 分量；当质点做匀变速运动时，则只有 $\boldsymbol{N}$ 分量.

1.2 Frenet 标架（一般参数）

本节我们重回一般参数下的映照形式，即

$$\boldsymbol{r}(t):\ [\alpha,\ \beta] \ni t \mapsto \boldsymbol{r}(t) \in \mathbb{R}^3\,, \tag{1.46}$$

其中的参数 t 与弧长 s 的关系同式 (1.6):

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.47}$$

后文的推导需要用到向量的**内蕴正交分解**：$\forall\, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^3$ 且满足 $|\boldsymbol{e}|_{\mathbb{R}^m} = 1$，有

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi} \bullet \boldsymbol{e}\right) \boldsymbol{e} - \left(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{e}\right) \times \boldsymbol{e}. \tag{1.48}$$

证明见 内蕴正交分解 .

下面着手计算 Frenet 标架．首先是单位切向量：

$$\boldsymbol{T}(s) \triangleq \dot{\boldsymbol{r}}(s) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) \Big/ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}}. \tag{1.49}$$