第一章　张量的定义及表示

1.1　对偶基，度量

1.1.1　对偶基

$\mathbb{R}^m$ 空间中的基可分为两类：指标写在下面的基

$$\left\{\boldsymbol{g}_i\right\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m$$

称为**协变基**，指标写在上面的基

$$\left\{\boldsymbol{g}^i\right\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m$$

称为**逆变基**．它们满足**对偶关系**：

$$\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j\,; \\ 0, & i \neq j\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

这里的 δ^i_j 是 **Kronecker δ 函数**．

1.1.2　度量

下面引入**度量**的概念．其定义为

$$\begin{cases} g_{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}, & \text{(1.2-a)} \\ g^{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m}. & \text{(1.2-b)} \end{cases}$$

下面证明

$$g_{ik}\, g^{kj} = \delta^j_i\,. \tag{1.3}$$

它也可以写成矩阵的形式：

$$\left[g_{ik}\right]\left[g^{kj}\right] = \left[\delta^j_i\right] = \boldsymbol{I}_m, \tag{1.4}$$

其中的 $\boldsymbol{I}_m$ 是 m 阶单位阵．

证明：

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, g^{kj}\boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \tag{1.5}$$

后文将说明 $g^{kj}\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{g}^j$，因此可得

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta^j_i\,. \tag{1.6}$$

要注意的是，这里的指标 k 是哑标．根据 **Einstein 求和约定**，重复指标并且一上一下时，就表示对它求和．后文除非特殊说明，也均是如此． □

现在澄清**基向量转换关系**．第 i 个协变基向量 $\boldsymbol{g}_i$ 既然是向量，就必然可以用协变基或逆变基来表示．根据对偶关系式 (1.1) 和度量的定义式 (1.2-a)、(1.2-b)，可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = g_{ik}\boldsymbol{g}^k, & (1.7\text{-a}) \\ \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = \delta_i^k \boldsymbol{g}_k & (1.7\text{-b}) \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = \delta^i_k \boldsymbol{g}^k, & (1.8\text{-a}) \\ \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = g^{ik} \boldsymbol{g}_k. & (1.8\text{-b}) \end{cases}$$

这四个式子中，式 (1.7-b) 和 (1.8-a) 是平凡的，而式 (1.7-a) 和 (1.8-b) 则通过度量建立起了协变基与逆变基之间的关系．这就称为基向量转换关系，也可以叫做“指标升降游戏”．

1.1.3 向量的分量

对于任意的向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$，它可以用协变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = \xi^k \boldsymbol{g}_k, \tag{1.9-a}$$

也可以用逆变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = \xi_k \boldsymbol{g}^k. \tag{1.9-b}$$

式中，ξ^k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个逆变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**逆变分量**；而 ξ_k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个协变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**协变分量**．

以后凡是指标在下的（下标），均称为协变某某；指标在上的（上标），称为逆变某某．

1.2 张量的表示

1.2.1 张量的表示与简单张量

所谓**张量**，即**多重线性函数**．

首先用三阶张量举个例子．考虑任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，其中的 $\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$ 表示以 $\mathbb{R}^m$ 为底空间的三阶张量全体．所谓三阶（或三重）线性函数，指“吃掉”三个向量之后变成实数，并且“吃法”具有线性性．

一般地，r 阶张量的定义如下：

$$\boldsymbol{\Phi} : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{r\text{ 个 }\mathbb{R}^m} \ni \left\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right\} \mapsto \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

式中的 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \alpha\tilde{\boldsymbol{u}}_i + \beta\hat{\boldsymbol{u}}_i, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right)$$

$$= \alpha\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{u}}_i, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) + \beta\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{u}}_i, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right), \tag{1.11}$$

即所谓“对第 i 个变元的线性性”．这里的 i 可取 $1, 2, \cdots, r$.

在张量空间 $\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$ 上，我们引入线性结构：

$$\begin{aligned}\forall\,\alpha,\,\beta \in \mathbb{R},\, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad & (\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right)\\ &\triangleq \alpha\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) + \beta\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right),\end{aligned} \tag{1.12}$$

于是

$$\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m). \tag{1.13}$$

下面我们要获得 $\boldsymbol{\Phi}$ 的表示．根据之前任意向量用协变基或逆变基的表示，有

$$\begin{aligned}\forall\,\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m, \quad & \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\\ &= \boldsymbol{\Phi}\left(u^i\boldsymbol{g}_i, v_j\boldsymbol{g}^j, w^k\boldsymbol{g}_k\right)\end{aligned}$$

考虑到 $\boldsymbol{\Phi}$ 对第一变元的线性性，可得

$$= u^i\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, v_j\boldsymbol{g}^j, w^k\boldsymbol{g}_k\right)$$

同理，

$$= u^i v_j w^k\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right). \tag{1.14}$$

注意这里自然需要满足 Einstein 求和约定．

上式中的 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)$ 是一个数．它是张量 $\boldsymbol{\Phi}$ “吃掉”三个基向量的结果．至于 $u^i v_j w^k$ 部分，三项分别是 $\boldsymbol{u}$ 的第 i 个逆变分量、$\boldsymbol{v}$ 的第 j 个协变分量和 $\boldsymbol{w}$ 的第 k 个逆变分量．根据向量分量的定义，可知

$$u^i v_j w^k = \left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m} \cdot \left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} \cdot \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.15}$$

暂时中断一下思路，先给出**简单张量**的定义．

$$\forall\,\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \triangleq (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}, \tag{1.16}$$

式中 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^m$，而暂时把 $\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}$ 理解为一种记号．简单张量作为一个映照，组成它的三个向量分别与它们“吃掉”的第一、二、三个变元做内积并相乘，结果为一个实数．

考虑到内积的线性性，便有（以第二个变元为例）

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{w}) \triangleq (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\eta}, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}$$

注意到 $(\boldsymbol{\eta}, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} = \alpha(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} + \beta(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m}$，同时再次利用简单张量的定义，可得

$$= \alpha\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{w}) + \beta\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{w}). \tag{1.17}$$

类似地，对第一变元和第三变元，同样具有线性性．因此，可以知道

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{1.18}$$

可见，“简单张量”的名字是名副其实的，它的确是一个特殊的张量.

回过头来看 (1.15) 式. 很明显，它可以用简单张量来表示. 要注意，由于内积的对称性，可以有两种[①] 表示方法：

$$\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \tag{1.19-a}$$

或者

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right), \tag{1.19-b}$$

我们这里取上面一种. 代入式 (1.14)，得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ =\,& \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \cdot \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \in \mathbb{R}^m$，因此

$$= \left[\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k\right](\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}). \tag{1.20}$$

方括号里的部分，就是根据 Einstein 求和约定，用 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)$ 对 $\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k$ 进行线性组合.

由于 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 选取的任意性，可以引入如下记号：

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k =: \Phi_{i\ k}^{\ j}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k, \tag{1.21}$$

即

$$\Phi_{i\ k}^{\ j} := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right), \tag{1.22}$$

这称为张量的**分量**. 它说明一个张量可以用张量分量和基向量组成的简单张量来表示.

指标 i、j、k 的上下是任意的. 这里，它有赖于式 (1.14) 中基向量的选取. 实际上，对于这里的三阶张量，指标的上下一共有 8 种可能. 指标全部在下面的，称为**协变分量**：

$$\Phi_{ijk} := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k\right); \tag{1.23}$$

指标全部在上面的，称为**逆变分量**：

$$\Phi^{ijk} := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k\right); \tag{1.24}$$

其余 6 种，称为**混合分量**. 对于一个 r 阶张量，显然共有 2^r 种分量表示，其中协变分量与逆变分量各一种，混合分量 $2^r - 2$ 种.

1.2.2 张量分量之间的关系

我们已经知道，对于任意一个向量 $\xi \in \mathbb{R}^m$，它可以用协变基或逆变基表示：

$$\xi = \begin{cases} \xi^i \boldsymbol{g}_i, \\ \xi_i \boldsymbol{g}^i. \end{cases} \tag{1.25}$$

① 这里只考虑把 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{g}^i$、$\boldsymbol{g}_j$、$\boldsymbol{g}^k$ 分别放在一起的情况.

式中，协变分量与逆变分量满足坐标转换关系：

$$\begin{cases} \xi^i = \left(\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{\xi},\, g^{ik}\boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}\left(\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}\xi_k\,, & \text{(1.26-a)} \\ \xi_i = \left(\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{g}_i\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{\xi},\, g_{ik}\boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik}\left(\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik}\xi^k. & \text{(1.26-b)} \end{cases}$$

每一式的第二个等号都用到了基向量转换关系，见式 (1.7-a) 和 (1.8-b).

现在再来考虑张量的分量．仍以上文中的张量 $\boldsymbol{\Phi}_{i\ k}^{\ j} := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)$ 为例，我们想要知道它与张量 $\boldsymbol{\Phi}^{p\ r}_{\ q} := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r\right)$ 之间的关系．利用基向量转换关系，可有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_{i\ k}^{\ j} &:= \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right) \\ &= \boldsymbol{\Phi}\left(g_{ip}\boldsymbol{g}^p, g^{jq}\boldsymbol{g}_q, g_{kr}\boldsymbol{g}^r\right) \end{aligned}$$

又利用张量的线性性，得

$$\begin{aligned} &= g_{ip}g^{jq}g_{kr}\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r\right) \\ &= g_{ip}g^{jq}g_{kr}\boldsymbol{\Phi}^{p\ r}_{\ q}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

可见，张量的分量与向量的分量类似，其指标升降可通过度量来实现．用同样的手法，还可以得到诸如 $\boldsymbol{\Phi}^{ijk} = g^{jp}\boldsymbol{\Phi}^{i\ k}_{\ p}$、$\boldsymbol{\Phi}^{i\ k}_{\ j} = g_{jp}g^{kq}\boldsymbol{\Phi}^{ip}_{\ \ k}$ 这样的关系式.

1.2.3　相对不同基的张量分量之间的关系

$\mathbb{R}^m$ 空间中，除了 $\left\{\boldsymbol{g}_i\right\}_{i=1}^m$ 和相应的对偶基 $\left\{\boldsymbol{g}^i\right\}_{i=1}^m$ 之外，当然还可以有其他的基，比如带括号的 $\left\{\boldsymbol{g}_{(i)}\right\}_{i=1}^m$ 以及对应的对偶基 $\left\{\boldsymbol{g}^{(i)}\right\}_{i=1}^m$．前者对应形如 $\boldsymbol{\Phi}^{i\ k}_{\ j} := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right)$ 的张量，后者则对应带括号的张量，如 $\boldsymbol{\Phi}^{(p)\ \ (r)}_{\ \ (q)} := \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{(p)}, \boldsymbol{g}_{(q)}, \boldsymbol{g}^{(r)}\right)$．下面我们来探讨这两个张量的关系.

首先来建立基之间的关系．带括号的第 i 个基向量 $\boldsymbol{g}_{(i)}$，作为 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一个向量，自然可以用另一组基来表示：

$$\boldsymbol{g}_{(i)} = \begin{cases} \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}\boldsymbol{g}^k\,, \\ \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}\boldsymbol{g}_k\,. \end{cases} \tag{1.28}$$

同理，自然还有它的对偶基：

$$\boldsymbol{g}^{(i)} = \begin{cases} \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}\boldsymbol{g}^k\,, \\ \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}\boldsymbol{g}_k\,. \end{cases} \tag{1.29}$$

引入记号 $c_{(i)}^k := \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}$ 和 $c_k^{(i)} := \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}$，那么有

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_{(i)} = c_{(i)}^k\boldsymbol{g}_k\,, & \text{(1.30-a)} \\ \boldsymbol{g}^{(i)} = c_k^{(i)}\boldsymbol{g}^k. & \text{(1.30-b)} \end{cases}$$

容易看出，这两个系数具有如下性质：

$$c_k^{(i)}c_{(j)}^k = \delta_j^i. \tag{1.31}$$

写成矩阵形式[①]，为

$$\left[c_k^{(i)}\right]\left[c_{(j)}^k\right] = \left[\delta_i^j\right] = \boldsymbol{I}_m. \tag{1.32}$$

换句话说，两个系数矩阵是互逆的.

① 通常我们约定上面的标号作为行号，下面的标号作为列号.

证明：

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} c_{(j)}^k$$

利用内积的线性性，有

$$= \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, c_{(j)}^k \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}$$

根据 $c_{(j)}^k$ 的定义，得到

$$= \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_{(j)}\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.33}$$

带括号的基同样满足对偶关系 (1.1) 式，于是得证. □

上面我们用不带括号的基表示了带括号的基. 反之也是可以的：

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^{(k)}\right)_{\mathbb{R}^m} \mathbb{R}^m \ \boldsymbol{g}_{(k)} = c_i^{(k)} \boldsymbol{g}_{(k)}, & (1.34\text{-a}) \\ \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_{(k)}\right)_{\mathbb{R}^m} \mathbb{R}^m \ \boldsymbol{g}^{(k)} = c_{(k)}^i \boldsymbol{g}^{(k)}. & (1.34\text{-b}) \end{cases}$$

这样一来，就建立起了不同基之间的转换关系.

现在我们回到张量. 根据张量分量的定义，

$$\boldsymbol{\Phi}^{i\ \ k}_{\ j} \coloneqq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right)$$

利用之前推导的不同基向量之间的转换关系，得

$$= \boldsymbol{\Phi}\left(c_{(p)}^i \boldsymbol{g}^{(p)}, c_j^{(q)} \boldsymbol{g}_{(q)}, c_{(r)}^k \boldsymbol{g}^{(r)}\right)$$

由张量的线性性，提出系数：

$$\begin{aligned} &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{(p)}, \boldsymbol{g}_{(q)}, \boldsymbol{g}^{(r)}\right) \\ &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \boldsymbol{\Phi}^{(p)\ \ \ (r)}_{\ \ \ (q)}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

完全类似，还可以有

$$\boldsymbol{\Phi}^{(i)\ \ \ (k)}_{\ \ \ (j)} = c_p^{(i)} c_{(j)}^g c_r^{(k)} \boldsymbol{\Phi}^{p\ \ r}_{\ q}. \tag{1.36}$$

总结一下这两小节得到的结果. 对于同一组基下的张量分量，其指标升降通过度量来实现；对于不同基下的张量分量，其指标转换则通过不同基之间的转换系数来完成.

第二章　张量的运算性质

2.1　张量积

张量积也叫**张量并**，用符号“$\otimes$”表示．在 1.2.1 小节给出简单张量的定义时，实际上就用到了张量积．张量积的定义为：

$$
\begin{aligned}
\forall \boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^{p}(\mathbb{R}^m), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^{q}(\mathbb{R}^m), \quad \boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi} &\in \mathscr{T}^{p+q}(\mathbb{R}^m) \\
&= \left(\Phi^{i_1\cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\Psi_{j_1\cdots j_q} \boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right) \\
&\triangleq \Phi^{i_1\cdots i_p} \Psi_{j_1\cdots j_q} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right).
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

由该定义可以知道，关于简单张量 $\left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right)$，相应的张量分量为

$$
\left(\Phi \otimes \Psi\right)^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}. \tag{2.2}
$$

2.2　e 点积

张量的 e **点积**可以用符号“$\binom{e}{\cdot}$”表示．从这个符号可以看出 e 点积的作用：前 e 个指标缩并，后面的点乘．

对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^{p}(\mathbb{R}^m), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^{q}(\mathbb{R}^m), e \leqslant \min\{p, q\} \in \mathbb{N}^*$，$e$ 点积是这样定义的：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi} \binom{e}{\cdot} \boldsymbol{\Psi} \\
&= \left(\Phi^{i_1\cdots i_{p-e} i_{p-e+1}\cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}} \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \\
&\quad \binom{e}{\cdot} \left(\Psi^{j_1\cdots j_e j_{e+1}\cdots j_q} \boldsymbol{g}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_e} \otimes \boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right)
\end{aligned}
$$

把高亮的部分做内积，得到度量：

$$
\begin{aligned}
&\triangleq \Phi^{i_1\cdots i_{p-e} i_{p-e+1}\cdots i_p} \Psi^{j_1\cdots j_e j_{e+1}\cdots j_q} \\
&\quad \cdot g_{i_{p-e+1} j_1} \cdots g_{i_p j_e} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right)
\end{aligned}
$$

玩一下“指标升降游戏”（注意有两种结合方式：与 $\boldsymbol{\Phi}$ 或 $\boldsymbol{\Psi}$），可得

$$
= \left\{\begin{aligned}
&\Phi^{i_1\cdots i_{p-e}}{}_{j_1\cdots j_e} \Psi^{j_1\cdots j_e\, j_{e+1}\cdots j_q} \\
&\Phi^{i_1\cdots i_{p-e}\, i_{p-e+1}\cdots i_p} \Psi_{i_{p-e+1}\cdots i_p}{}^{j_{e+1}\cdots j_q}
\end{aligned}\right\} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right). \tag{2.3}
$$

最后一步的花括号中，高亮的 $j_1\cdots j_e$ 和 $i_{p-e+1}\cdots i_p$ 都是哑标，可以通过求和求掉．因此有

$$\boldsymbol{\Phi}\binom{e}{\cdot}\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}^{p+q-2e}(\mathbb{R}^m).\tag{2.4}$$

换句话说，e 点积的作用就是将指标哑标化．

作为一个特殊的应用，接下来我们介绍**全点积**，用符号“$\odot$”表示．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)$，有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}\odot\boldsymbol{\Psi}\triangleq\boldsymbol{\Phi}\binom{p}{\cdot}\boldsymbol{\Psi}\\
&=\left(\Phi^{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_p}\right)\binom{p}{\cdot}\left(\Psi^{j_1\cdots j_p}\boldsymbol{g}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{j_p}\right)\\
&=\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi^{j_1\cdots j_p}g_{i_1j_1}\cdots g_{i_pj_p}\\
&=\begin{cases}\Phi_{j_1\cdots j_p}\Psi^{j_1\cdots j_p}\\ \Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi_{i_1\cdots i_p}\end{cases}\in\mathbb{R}.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

可见，全点积将全部指标哑标化．

张量自身和自身的全点积，定义为它的**范数**：

$$\boldsymbol{\Phi}\odot\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{i_1\cdots i_p}\Phi_{i_1\cdots i_p}=:|\boldsymbol{\Phi}|^2_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}.\tag{2.6}$$

2.3 叉乘

张量的**叉乘**要求底空间为 $\mathbb{R}^3$．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}^p\left(\mathbb{R}^3\right),\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}^q\left(\mathbb{R}^3\right)$，叉乘的定义如下：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}\times\boldsymbol{\Psi}\\
&=\left(\Phi^{i_1\cdots i_{p-1}i_p}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_{p-1}}\otimes\boldsymbol{g}_{i_p}\right)\times\left(\Psi_{j_1j_2\cdots j_q}\boldsymbol{g}^{j_1}\otimes\boldsymbol{g}^{j_2}\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_q}\right)\\
&\triangleq\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi_{j_1\cdots j_p}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_{p-1}}\otimes\left(\boldsymbol{g}_{i_p}\times\boldsymbol{g}^{j_1}\right)\otimes\boldsymbol{g}^{j_2}\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_q}\in\mathscr{T}^{p+q-1}\left(\mathbb{R}^3\right).
\end{aligned}\tag{2.7}$$

注意到，此时简单张量的维数已经降了一阶．

利用 **Levi-Civita 记号**，可以进一步展开上式．

$$\boldsymbol{g}_{i_p}\times\boldsymbol{g}^{j_1}=\epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s\,\boldsymbol{g}^s,\tag{2.8}$$

式中的

$$\epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s=\det\left[\boldsymbol{g}_{i_p},\boldsymbol{g}^{j_1},\boldsymbol{g}_s\right].\tag{2.9}$$

于是

$$\boldsymbol{\Phi}\times\boldsymbol{\Psi}=\epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi_{j_1\cdots j_p}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_{p-1}}\otimes\boldsymbol{g}^s\otimes\boldsymbol{g}^{j_2}\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_q}.\tag{2.10}$$

下面我们再来类比地定义一种混合积“$\binom{\times}{\cdot}$”．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，定义

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}\binom{\times}{\cdot}\boldsymbol{\Psi}&=\left(\Phi^{ijk}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\right)\binom{\times}{\cdot}\left(\Psi_{pqr}\boldsymbol{g}^p\otimes\boldsymbol{g}^q\otimes\boldsymbol{g}^r\right)\\
&\triangleq\Phi^{ijk}\Psi_{pqr}\delta^q_j\,\boldsymbol{g}_i\otimes\left(\boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{g}^p\right)\otimes\boldsymbol{g}^r
\end{aligned}$$

缩并掉 Kronecker δ，同时利用 Levi-Civita 记号展开叉乘项，可有

$$= \epsilon_{k\ s}^{\ p} \boldsymbol{\Phi}^{ijk} \boldsymbol{\Psi}_{pjr} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^s \otimes \boldsymbol{g}^r, \tag{2.11}$$

式中的

$$\epsilon_{k\ s}^{\ p} = \det\left[\boldsymbol{g}_k, \boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_s\right]. \tag{2.12}$$

对于这种混合积，并没有一般的约定．不同的研究者往往会采用不同的写法及表示．

2.4 置换（一）

本节主要介绍**置换运算**的定义及相关概念，这将使我们暂时离开张量运算的主线．

置换运算实际上是一种交换位置或者改变次序的运算．之后我们还将引入针对张量的*置换算子*，它是外积运算和外微分运算的基础．这些运算是现代张量分析与微分几何的支柱．

2.4.1 置换的定义

我们从一个例子开始．下面是一个 2×7 的“矩阵”：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ \\ ⑦ & ④ & ⑤ & ① & ⑥ & ② & ③ \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

矩阵里面的每一个数字表示一个位置．可以想象成 7 把椅子，先是按第一行的顺序依次排列，再按照第二行的顺序打乱，重新排列．于是这就成为一个 **7 阶置换**．这个定义等价于

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \tag{2.14-a}$$

自然也等价于

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}, \tag{2.14-b}$$

当然，换用任何元素也都是可以的．

通常我们用方括号表示置换的**序号定义**，即标号的排列轮换；用圆括号表示**元素定义**，即标号对应元素的轮换．

2.4.2 置换的符号

接着来定义置换的**符号** $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}$．这里我们把每次交换两个数字称为一次“操作”．如果经过*偶数*次“操作”，可以把经置换后的序列恢复为原来的顺序，那么该置换的符号 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = 1$；而如果经过*奇数次*“操作”才可以复原，则 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = -1$．若用一个式子表示，则为

$$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = (-1)^n, \tag{2.15}$$

其中的 n 是恢复原本顺序所需“操作”的次数．

下面我们以式 (2.13) 所定义的 $\boldsymbol{\sigma}$ 为例，演示求置换符号的过程．这里的关键是通过两两交换，按如下步骤把式 (2.14-b) 的第二行变换成第一行：

$$
\begin{array}{ccccccc}
\vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\spadesuit & \clubsuit & \varspadesuit & \vardiamondsuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\spadesuit & \heartsuit & \varspadesuit & \vardiamondsuit & \varheartsuit & \clubsuit & \diamondsuit \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \vardiamondsuit & \varheartsuit & \clubsuit & \varspadesuit \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varheartsuit & \vardiamondsuit & \varspadesuit \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \vardiamondsuit & \varheartsuit \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \varheartsuit & \vardiamondsuit
\end{array}
$$

一共进行了 6 次两两交换，因此 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = 1$．

2.4.3 置换的复合

再定义一个置换

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

注意这里用了方括号，因此它是一个序号定义．方便起见，以后的序号我们都只用不带圈的普通数字表示．考虑之前定义的置换

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

则 $\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 的复合

$$\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma} = \left(\begin{array}{ccccccc} \text{⚀} & \text{⚁} & \text{⚂} & \text{⚃} & \text{⚄} & \text{⚅} & \odot \\ \odot & \text{⚃} & \text{⚄} & \text{⚀} & \text{⚅} & \text{⚁} & \text{⚂} \\ \hdashline \text{⚅} & \odot & \text{⚂} & \text{⚄} & \text{⚁} & \text{⚀} & \text{⚃} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \boldsymbol{\sigma} \\ \leftarrow \boldsymbol{\tau} \end{array} \tag{2.18}$$

与函数、线性变换等的复合类似，这里也用小圆圈“$\circ$”表示置换的复合．

假设经过置换 $\boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{\tau}$ 作用后得到的序列，分别需要 p 次和 q 次两两交换才能复原为原来的序列．那么很显然，经过复合置换 $\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}$ 作用后的序列，经过 $q+p$ 次两两交换也一定可以复原．因此，复合置换的符号

$$\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\sigma}) = (-1)^{q+p} = (-1)^q\cdot(-1)^p = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}. \tag{2.19}$$

2.4.4 逆置换

逆置换 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ 的定义为

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1} \circ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Id}, \tag{2.20}$$

其中的“$\mathbf{Id}$”是恒等映照.

仍然使用式 (2.14-b)：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \varheartsuit & \vardiamondsuit \\ \vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

那么自然有

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} \vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \varheartsuit & \vardiamondsuit \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

显然，我们有 $\boldsymbol{\sigma}^{-1} \circ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Id}$.

回忆一下逆矩阵的定义. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 既要满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$，又要满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$. 对于置换也是如此，因此我们需要检查 $\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\sigma}^{-1}$：①

$$\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\sigma}^{-1} = \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccccccc} \vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \spadesuit_1 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3 & \clubsuit_4 & \varspadesuit_5 & \varheartsuit_6 & \vardiamondsuit_7 \\ \hdashline \vardiamondsuit_7 & \clubsuit_4 & \varspadesuit_5 & \spadesuit_1 & \varheartsuit_6 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \boldsymbol{\sigma}^{-1} \\ \leftarrow \boldsymbol{\sigma} \end{array} \tag{2.23}$$

可见的确有 $\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\sigma}^{-1} = \mathbf{Id}$.

另外，由于恒等映照 $\mathbf{Id}$ 作用后序列不发生变化，复原所需的交换次数为 0，因此

$$\operatorname{sgn} \mathbf{Id} = (-1)^0 = 1. \tag{2.24}$$

而根据定义，

$$\mathbf{Id} = \boldsymbol{\sigma}^{-1} \circ \boldsymbol{\sigma}, \tag{2.25}$$

故有

$$\operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma}^{-1} = 1. \tag{2.26}$$

由此，可以推知

$$\operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} = \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma}^{-1}, \tag{2.27}$$

即置换与它的逆具有相同的符号.

2.5 置换（二）

本节将介绍置换运算的基本性质.

① 该式中的数字角标用来澄清原始序号.

2.5.1 置换的穷尽

先要做一点铺垫．设有序数组

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$$

经置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 作用后成为

$$\{\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\},$$

则根据之前的元素定义（圆括号），可以把 $\boldsymbol{\sigma}$ 记为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \boldsymbol{\sigma}(i_1) & \boldsymbol{\sigma}(i_2) & \cdots & \boldsymbol{\sigma}(i_r) \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

每次置换都将得到一个有序数组．把它们组合到一起，就可以得到集合

$$\left\{ \left(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r) \right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r \right\}. \tag{2.29}$$

其中的 $\mathscr{P}_r$ 表示 r 阶置换的全体．根据排列组合原理，r 阶置换的总数等于 r 个元素的全排列数．即该集合共有 $r!$ 个元素．

下面我们要证明

$$\left\{ \left(\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r) \right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r \right\}$$

$$= \left\{ \left(\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}(i_r) \right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathscr{P}_r \right\} \tag{2.30-a}$$

$$= \left\{ \left(\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\tau}(i_1), \boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\tau}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\tau}(i_r) \right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathscr{P}_r \right\} \tag{2.30-b}$$

$$= \left\{ \left(\boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_1), \boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_r) \right) \,\middle|\, \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r \right\}. \tag{2.30-c}$$

所谓“穷尽”，就是将 $\mathscr{P}_r$ 中的所有置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 全部枚举出来．关于 $\boldsymbol{\sigma}$ 的求和就是一个例子．以上这条性质说明，置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 如果作为一个广义上的“哑标”，那么穷尽的结果与用 $\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\tau}$ 或 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ 代替该“哑标”的结果是一样的．

这说明置换构成了置换群．?

证明： 证明的思路是说明集合互相包含．

对于式 (2.30-a)，右边的 $\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}$ 也是一个 r 阶置换，自然符合左边集合的定义，因此 右边 $\subset$ 左边．由于这一步是相当显然的，以下的几个证明我们将略去该步．另一方面，左边的 $\boldsymbol{\sigma}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Id} \circ \boldsymbol{\sigma} = \left(\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\tau}^{-1} \right) \circ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} \circ \left(\boldsymbol{\tau}^{-1} \circ \boldsymbol{\sigma} \right), \tag{2.31}$$

这就是右边集合的定义，因此 左边 $\subset$ 右边．故可证得等式成立．

对于式 (2.30-b)，我们有

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \circ \mathbf{Id} = \boldsymbol{\sigma} \circ \left(\boldsymbol{\tau}^{-1} \circ \boldsymbol{\tau} \right) = \left(\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\tau}^{-1} \right) \circ \boldsymbol{\tau}, \tag{2.32}$$

它符合了右边集合的定义，因此 左边 $\subset$ 右边．于是等式成立．

对于式 (2.30-c)，我们有

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\boldsymbol{\sigma}^{-1} \right)^{-1}, \tag{2.33}$$

它符合了右边集合的定义，因此 左边 $\subset$ 右边．于是等式成立． □

2.5.2　数组元素的乘积

设有序数组 $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$、$\{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$ 和 $\{k_1, k_2, \cdots, k_r\}$ 经 r 阶置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 作用后分别成为 $\{\boldsymbol{\sigma}(i_1), \boldsymbol{\sigma}(i_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(i_r)\}$、$\{\boldsymbol{\sigma}(j_1), \boldsymbol{\sigma}(j_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(j_r)\}$ 和 $\{\boldsymbol{\sigma}(k_1), \boldsymbol{\sigma}(k_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(k_r)\}$，也就是说

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \boldsymbol{\sigma}(i_1) & \boldsymbol{\sigma}(i_2) & \cdots & \boldsymbol{\sigma}(i_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ \boldsymbol{\sigma}(j_1) & \boldsymbol{\sigma}(j_2) & \cdots & \boldsymbol{\sigma}(j_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ \boldsymbol{\sigma}(k_1) & \boldsymbol{\sigma}(k_2) & \cdots & \boldsymbol{\sigma}(k_r) \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

我们有如下结论：

$$\forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r, \quad A_{i_1 j_1 k_1} A_{i_2 j_2 k_2} \cdots A_{i_r j_r k_r} = A_{\boldsymbol{\sigma}(i_1)\boldsymbol{\sigma}(j_1)\boldsymbol{\sigma}(k_1)} A_{\boldsymbol{\sigma}(i_2)\boldsymbol{\sigma}(j_2)\boldsymbol{\sigma}(k_2)} \cdots A_{\boldsymbol{\sigma}(i_r)\boldsymbol{\sigma}(j_r)\boldsymbol{\sigma}(k_r)}, \tag{2.35}$$

式中的 A_{ijk} 表示三维数组 $\boldsymbol{A}$ 的一个元素，其指标为 ijk.

下面通过一个例子来说明这一条性质．还是用式 (2.14-a) 和 (2.14-b) 所定义的置换 $\boldsymbol{\sigma}$：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \varheartsuit & \vardiamondsuit \\ \vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

随意写出一个数组元素乘积：

$$A_{379} A_{264} A_{157} A_{483} A_{698} A_{\diamondsuit\clubsuit\heartsuit} A_{\vardiamondsuit\varspadesuit\varheartsuit}. \tag{2.37}$$

三组下标分别为

$$\begin{cases} 3,\ 2,\ 1,\ 4,\ 6,\ \diamondsuit,\ \vardiamondsuit; \\ 7,\ 6,\ 5,\ 8,\ 9,\ \clubsuit,\ \varspadesuit; \\ 9,\ 4,\ 7,\ 3,\ 8,\ \heartsuit,\ \varheartsuit. \end{cases} \tag{2.38}$$

考虑 $\boldsymbol{\sigma}$ 的序号定义式 (2.13)：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{2.39}$$

所谓序号只是位置的抽象表示，而不代表任何真实的元素．请记住：置换始终是位置的变换，而非元素的变换，不要被式 (2.36) 给迷惑了．把 $\boldsymbol{\sigma}$ 作用在这三组下标上，可得

$$\begin{cases} \vardiamondsuit,\ 4,\ 6,\ 3,\ \diamondsuit,\ 2,\ 1; \\ \varspadesuit,\ 8,\ 9,\ 7,\ \clubsuit,\ 6,\ 5; \\ \varheartsuit,\ 3,\ 8,\ 9,\ \heartsuit,\ 4,\ 7. \end{cases} \tag{2.40}$$

于是之前的数组元素乘积就变成了

$$A_{\vardiamondsuit\varspadesuit\varheartsuit} A_{483} A_{698} A_{379} A_{\diamondsuit\clubsuit\heartsuit} A_{264} A_{157}. \tag{2.41}$$

比对一下各元素，可见与式 (2.37) 的确是完全一样的．

2.5.3　哑标的穷尽

考虑如下集合：

$$\Big\{ (i_1, i_2, \cdots, i_r) \,\Big|\, \{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m \Big\}. \tag{2.42}$$

每个 i_k 都有 m 种取法，而 i_k 又有 r 个，因此该集合一共有 m^r 元素．我们有

$$\begin{aligned}\forall\,\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{P}_r,\quad &\left\{\left(i_1,i_2,\cdots,i_r\right)\,\middle|\,\left\{i_1,i_2,\cdots,i_r\right\}\text{ 可取 }1,2,\cdots,m\right\}\\ &=\left\{\left(\boldsymbol{\sigma}(i_1),\boldsymbol{\sigma}(i_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(i_r)\right)\,\middle|\,\left\{i_1,i_2,\cdots,i_r\right\}\text{ 可取 }1,2,\cdots,m\right\} \qquad (2.43\text{-a})\\ &=\left\{\left(\boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_1),\boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}^{-1}(i_r)\right)\,\middle|\,\left\{i_1,i_2,\cdots,i_r\right\}\text{ 可取 }1,2,\cdots,m\right\}. \qquad (2.43\text{-b})\end{aligned}$$

这里，i_k 起的就是哑标的作用．

证明： 无论怎样置换，$\boldsymbol{\sigma}(i_k)$ 都是 $1,2,\cdots,m$ 中的数．因此，对于 $\forall\,\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{P}_r$，

$$\left(\boldsymbol{\sigma}(i_1),\boldsymbol{\sigma}(i_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(i_r)\right)\in\left\{\left(i_1,i_2,\cdots,i_r\right)\,\middle|\,\left\{i_1,i_2,\cdots,i_r\right\}\text{ 可取 }1,2,\cdots,m\right\}, \tag{2.44}$$

即

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\boldsymbol{\sigma}(i_1),\boldsymbol{\sigma}(i_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(i_r)\right)\,\middle|\,\left\{i_1,i_2,\cdots,i_r\right\}\text{ 可取 }1,2,\cdots,m\right\}\\ &\subset\left\{\left(i_1,i_2,\cdots,i_r\right)\,\middle|\,\left\{i_1,i_2,\cdots,i_r\right\}\text{ 可取 }1,2,\cdots,m\right\}.\end{aligned} \tag{2.45}$$

另一方面，由于 $\mathbf{Id}=\boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}$，即

$$\left(i_1,i_2,\cdots,i_r\right)=\left(\boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}(i_1),\boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}(i_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}(i_r)\right), \tag{2.46}$$

而进行一次逆置换仍然使得元素不离开原有的范围，也就是说

$$\left(i_1,i_2,\cdots,i_r\right)\in\left\{\left(\boldsymbol{\sigma}(i_1),\boldsymbol{\sigma}(i_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(i_r)\right)\,\middle|\,\left\{i_1,i_2,\cdots,i_r\right\}\text{ 可取 }1,2,\cdots,m\right\}, \tag{2.47}$$

即

$$\begin{aligned}&\left\{\left(i_1,i_2,\cdots,i_r\right)\,\middle|\,\left\{i_1,i_2,\cdots,i_r\right\}\text{ 可取 }1,2,\cdots,m\right\}\\ &\subset\left\{\left(\boldsymbol{\sigma}(i_1),\boldsymbol{\sigma}(i_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(i_r)\right)\,\middle|\,\left\{i_1,i_2,\cdots,i_r\right\}\text{ 可取 }1,2,\cdots,m\right\}.\end{aligned} \tag{2.48}$$

两个集合互相包含，也就证得了式 (2.43-a)．

用相同的方法也可证得关于逆置换的 (2.43-b) 式，此处从略． □

2.6 置换（三）

本节将给出置换运算在线性代数中的一些应用．

2.6.1 行列式

2.7 置换（四）

本节将重回张量运算的主线，引入**置换算子**．

2.7.1 置换算子；对称张量与反对称张量

对于任意的置换 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{P}_r$，定义**置换算子**

$$I_\sigma : \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m) \ni \boldsymbol{\Phi} \mapsto I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m), \tag{2.49}$$

式中

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big) \triangleq \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{u}_{\sigma(2)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(r)}\big) \in \mathbb{R}. \tag{2.50}$$

这里的“$\cdots \in \mathbb{R}$”是根据张量的定义：多重线性函数.

如果我们的置换

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_1) & \cdots & \sigma(i_1) \end{pmatrix}, \tag{2.51}$$

那么对应的置换算子将满足

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\big) \triangleq \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)}, \boldsymbol{u}_{\sigma(i_2)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}\big). \tag{2.52}$$

根据张量的线性性，容易知道置换算子也具有线性性：

$$\forall\, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m) \text{ 以及 } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad I_\sigma(\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi}) = \alpha\, I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) + \beta\,\alpha I_\sigma(\boldsymbol{\Psi}). \tag{2.53}$$

证明：

$$\begin{aligned} I_\sigma(\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})\big(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big) &= (\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(r)}\big) \\ &= \alpha\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(r)}\big) + \beta\boldsymbol{\Psi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(r)}\big) \\ &= \alpha I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big) + \beta I_\sigma(\boldsymbol{\Psi})\big(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big) \\ &= \big[\alpha I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) + \beta I_\sigma(\boldsymbol{\Psi})\big]\big(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\big). \end{aligned} \tag{2.54}$$

□

两个置换算子复合的结果也是很显然的：

$$\forall\, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathscr{P}_r, \quad I_\sigma \circ I_\tau = I_{\sigma\circ\tau}. \tag{2.55}$$

证明：

$$\begin{aligned} I_\sigma \circ I_\tau(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\big) &= I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{\tau(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\tau(r)}\big) \\ &= \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma\circ\tau(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma\circ\tau(r)}\big) \\ &= I_{\sigma\circ\tau}(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\big). \end{aligned} \tag{2.56}$$

□

有了置换算子，我们就可以来定义**对称张量**和**反对称张量**. 对称张量的全体记为 Sym，反对称张量的全体记为 Skw. 如果以 $\mathbb{R}^m$ 为底空间，又分别可以记为 $\mathscr{S}^r(\mathbb{R}^m)$ 和 $\varLambda^r(\mathbb{R}^m)$.

对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$，如果

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \boldsymbol{\Phi}, \tag{2.57}$$

则称 $\boldsymbol{\Phi}$ 为对称张量，即 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathrm{Sym}$ 或 $\mathscr{S}^r(\mathbb{R}^m)$；如果

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Phi}, \tag{2.58}$$

则称 $\boldsymbol{\Phi}$ 为反对称张量，即 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathsf{Skw}$ 或 $\Lambda^r(\mathbb{R}^m)$.

有些书中采用分量形式来定义（反）对称张量．这与此处的定义是等价的：

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \boldsymbol{\Phi} \iff \Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_p)} = \Phi_{i_1\cdots i_p}, \tag{2.59-a}$$

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\Phi} \iff \Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_p)} = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\Phi_{i_1\cdots i_p}. \tag{2.59-b}$$

反对称张量与我们熟知的行列式有些类似：交换两列（对于张量就是两个分量），符号相反．全部分量两两交换一遍，前面的系数自然是置换的符号．而如果无论怎么交换分量（当然需要全部两两交换一遍），符号都不变，那这样的张量就是对称张量．

一个二阶张量的协变（或逆变）分量，可以用一个矩阵表示．如果这个张量是一个反对称张量，交换任意两个分量要添加负号；对于矩阵而言，这就意味着交换两行（或两列）……

2.7.2 置换算子的表示

根据上文给出的定义，我们有

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\big) \triangleq \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}\big). \tag{2.60}$$

首先回忆一下 1.2.1 小节中张量的表示：选一组基（协变、逆变均可），然后把张量用这组基表示．于是

$$I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\big(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\big) = \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}\big)$$

把向量用协变基表示：

$$= \boldsymbol{\Phi}\Big(u^{i_1}_{\sigma(i_1)}\boldsymbol{g}_{i_1}, \cdots, u^{i_r}_{\sigma(i_r)}\boldsymbol{g}_{i_r}\Big)$$

根据张量的线性性，提出系数：

$$= \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{g}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{g}_{i_r}\big)\cdot\Big(u^{i_1}_{\sigma(i_1)}\cdots u^{i_r}_{\sigma(i_r)}\Big)$$

前半部分可以用张量分量表示；而后半部分是一组逆变分量，可以写成内积的形式

$$= \Phi_{i_1\cdots i_p}\Big[\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)}, \boldsymbol{g}^{i_1}\big)_{\mathbb{R}^m}\cdots\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}, \boldsymbol{g}^{i_r}\big)_{\mathbb{R}^m}\Big] \tag{2.61*}$$

注意到方括号中的其实是简单张量的定义，这就有

$$= \Phi_{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r}\big(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}\big). \tag{2.61}$$

最后一步仍然没能回到 $\big(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\big)$，因此以上推导只是简单地展开了 $\boldsymbol{\Phi}$，并没有获得实质性的结果．

然而，只要稍作改动，情况就会大不相同．考虑一下 2.5.2 小节中置换运算有关数组元素乘积的性质：

$$\forall\,\boldsymbol{\tau}\in\mathscr{P}_r,\quad A_{i_1j_1}\cdots A_{i_rj_r} = A_{\tau(i_1)\tau(j_1)}\cdots A_{\tau(i_r)\tau(j_r)}, \tag{2.62}$$

式中

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ \tau(i_1) & \cdots & \tau(i_r)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_r \\ \tau(j_1) & \cdots & \tau(j_r)\end{pmatrix}. \tag{2.63}$$

由此可以看出，式 (2.61*) 方括号中的部分其实是由 $\boldsymbol{\sigma}(i_k)$ 和 i_k 两套指标确定的一组数：

$$A_{\sigma(i_k)i_k} = \left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_k)}, \boldsymbol{g}^{i_k}\right)_{\mathbb{R}^m}; \tag{2.64}$$

另一方面，显然有 $\boldsymbol{\sigma}^{-1} \in \mathscr{P}_r$. 于是

$$\begin{aligned} &I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\left(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\right) \\ &= \Phi_{i_1\cdots i_r}\left[\left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_1)}, \boldsymbol{g}^{i_1}\right)_{\mathbb{R}^m} \cdots \left(\boldsymbol{u}_{\sigma(i_r)}, \boldsymbol{g}^{i_r}\right)_{\mathbb{R}^m}\right] \end{aligned}$$

应用置换的性质 (2.62) 式：

$$\begin{aligned} &= \Phi_{i_1\cdots i_r}\left[\left(\boldsymbol{u}_{\sigma^{-1}\circ\sigma(i_1)}, \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)}\right)_{\mathbb{R}^m} \cdots \left(\boldsymbol{u}_{\sigma^{-1}\circ\sigma(i_r)}, \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)}\right)_{\mathbb{R}^m}\right] \\ &= \Phi_{i_1\cdots i_r}\left[\left(\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)}\right)_{\mathbb{R}^m} \cdots \left(\boldsymbol{u}_{i_2}, \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)}\right)_{\mathbb{R}^m}\right] \end{aligned}$$

同样，用简单张量表示，可得

$$= \Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)}\left(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_r}\right). \tag{2.65}$$

这样，我们就得到了置换算子的一种表示：

$$\begin{aligned} I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) &= I_\sigma\left(\Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{i_r}\right) \\ &= \Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

在式 (2.66) 中，$i_1, \cdots, i_r$ 都是哑标，要被求和求掉. 张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的底空间是 $\mathbb{R}^m$，所以每个 i_k 都有 m 个取值. 考虑一下 2.5.3 小节中置换运算有关哑标穷尽的性质，有

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathscr{P}_r, \quad &\left\{\left(i_1, i_2, \cdots, i_r\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\} \\ &= \left\{\left(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \cdots, \sigma(i_r)\right) \,\middle|\, \left\{i_1, i_2, \cdots, i_r\right\} \text{ 可取 } 1, 2, \cdots, m\right\}. \end{aligned} \tag{2.67}$$

因此，我们可以把式 (2.66) 中的指标 i_k 换成 $\boldsymbol{\sigma}(i_k)$：

$$\begin{aligned} I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) &= \Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}(i_r)} \\ &= \Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}\boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}\circ\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{\sigma^{-1}\circ\sigma(i_r)} \\ &= \Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}\boldsymbol{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{i_r}. \end{aligned} \tag{2.68}$$

这是置换算子的另一种表示.

综上，要获得置换算子的表示，若是对张量分量进行操作，就直接使用对分量指标使用置换；若是对简单张量进行操作，则要对其指标使用逆置换：①

$$\begin{aligned} I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) &= I_\sigma\left(\Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_r}\right) \\ &= \Phi^{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_r} && \text{(2.69-a)} \\ &= \Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{\sigma^{-1}(i_r)}. && \text{(2.69-b)} \end{aligned}$$

① 这里稍有改动，用了张量的逆变分量，不过实质都是一样的. 使用协变分量还是逆变分量，这个嘛，悉听尊便.

2.8 对称化算子与反对称化算子

2.8.1 定义

对称化算子 $\mathscr{S}$ 和**反对称化算子** $\mathscr{A}$ 的定义分别为

$$\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}) \triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) \tag{2.70}$$

和

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) \triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}). \tag{2.71}$$

根据置换算子的线性性，很容易知道对称化算子与反对称化算子也具有线性性.

对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$，我们有

$$\begin{cases} \mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Sym}, & (2.72\text{-a}) \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Skw}. & (2.72\text{-b}) \end{cases}$$

这说明任意一个张量，对它作用对称化算子之后，将变为对称张量；反之，作用反对称算子之后，将变为反对称张量. [①]

证明： 要判断 $\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi})$ 是不是对称张量，首先需要在其上作用一个置换算子 I_τ：

$$I_\tau\big[\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi})\big] = I_\tau\left[\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right]$$

根据置换算子的线性性 (2.53) 式，可有

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} I_\tau \circ I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})$$

再用一下 (2.54) 式，得到

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} I_{\tau\circ\sigma}(\boldsymbol{\Phi})$$

这里求和的作用就是把置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 穷尽了. 根据 2.5.1 小节中的内容，再在 $\boldsymbol{\sigma}$ 上复合一个置换 $\boldsymbol{\tau}$，结果将保持不变：

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}). \tag{2.73}$$

对照一下对称张量的定义 (2.57) 式，可见的确有 $\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Sym}$.

类似地，

$$I_\tau\big[\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi})\big] = I_\tau\left[\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right]$$

① 换一个角度，（反）对称张量实际上可以用（反）对称化算子来定义.

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[I_\tau \circ I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) \right]$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot I_{\tau \circ \sigma}(\boldsymbol{\Phi})$$

根据式 (2.19)，$\operatorname{sgn} \boldsymbol{\tau} \cdot \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} = \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma})$，于是

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \frac{\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma})}{\operatorname{sgn} \boldsymbol{\tau}} \cdot I_{\tau \circ \sigma}(\boldsymbol{\Phi})$$

注意到始终成立 $\operatorname{sgn} \boldsymbol{\tau} \cdot \operatorname{sgn} \boldsymbol{\tau} = 1$ （因为 $\operatorname{sgn} \boldsymbol{\tau} = \pm 1$ ），又有

$$= \frac{\operatorname{sgn} \boldsymbol{\tau}}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}) \cdot I_{\tau \circ \sigma}(\boldsymbol{\Phi})$$

利用置换的穷尽，$\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 相比，结果将保持不变：

$$= \operatorname{sgn} \tau \cdot \left[\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) \right] = \operatorname{sgn} \tau \cdot \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}). \tag{2.74}$$

与反对称张量的定义 (2.58) 式相比，可见的确有 $\mathscr{S}(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Skw}$.

这里的操作直接对张量本身进行，没有采用涉及到张量“自变量”（向量）的繁琐计算，因而显得更加干净利落. □

2.8.2 反对称化算子的性质

上文已经定义了**反对称化算子** $\mathscr{A}$：

$$\forall \boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) \triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathsf{Skw} \text{ 或 } \Lambda^r(\mathbb{R}^m). \tag{2.75}$$

即任意一个 r 阶张量，作用反对称化算子后就变成了 r 阶反对称张量. r 阶反对称张量也称为 **r-form**（**r-形式**）.

下面列出反对称化算子的几条性质.

反对称化算子重复作用，仅相当于一次作用：

$$\mathscr{A}^2 := \mathscr{A} \circ \mathscr{A} = \mathscr{A}. \tag{2.76}$$

根据数学归纳法，显然有

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \mathscr{A}^p := \underbrace{\mathscr{A} \circ \cdots \circ \mathscr{A}}_{p \text{ 个 } \mathscr{A}} = \mathscr{A}. \tag{2.77}$$

证明：

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^2 &= \mathscr{A}\left[\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi})\right] \\
&\triangleq \mathscr{A}\left[\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right] \\
&\triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\tau} \cdot I_\tau \left[\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})\right]
\end{aligned}$$

根据线性性，可有

$$= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_r} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\tau} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot I_\tau \circ I_\sigma(\boldsymbol{\Phi})$$

根据式 (2.19) 和式 (2.54)，有

$$= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_r} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}) \cdot I_{\tau \circ \sigma}(\boldsymbol{\Phi})$$

$$= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_r} \left[\sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}) \cdot I_{\tau \circ \sigma}(\boldsymbol{\Phi}) \right]$$

注意到方括号中的部分穷尽了置换 $\boldsymbol{\sigma}$，因此可以用 $\boldsymbol{\sigma}$ 取代“指标” $\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}$：

$$= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_r} \left[\sum_{\sigma \in \mathscr{P}_r} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} \cdot I_\sigma(\boldsymbol{\Phi}) \right]$$

回到定义，有

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathscr{P}_r} \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) = \frac{1}{r!} \cdot r! \, \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) = \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}). \tag{2.78}$$

□

对任意两个张量 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)$ 和 $\boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^q(\mathbb{R}^m)$ 的并作用反对称化算子，可以得到如下结果：

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}) = \mathscr{A}\left[\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) \otimes \boldsymbol{\Psi}\right] = \mathscr{A}\left[\boldsymbol{\Phi} \otimes \mathscr{A}(\boldsymbol{\Psi})\right] = \mathscr{A}\left[\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}) \otimes \mathscr{A}(\boldsymbol{\Psi})\right]. \tag{2.79}$$

反对称化算子具有所谓**反导性**：

$$\forall \boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^{\cdot}(\mathbb{R}^m) \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^q(\mathbb{R}^m), \quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}) = (-1)^{pq} \mathscr{A}(\boldsymbol{\Psi} \otimes \boldsymbol{\Phi}). \tag{2.80}$$