

第一章 张量的定义及表示

1.1 对偶基，度量

1.1.1 对偶基

\mathbb{R}^m 空间中的基可分为两类：指标写在下面的基

$$\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \quad (1.1)$$

称为协变基，指标写在上面的基

$$\{\mathbf{g}^i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \quad (1.2)$$

称为逆变基。它们满足对偶关系：

$$(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j)_{\mathbb{R}^m} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.3)$$

这里的 δ_j^i 是 **Kronecker δ 函数**。

1.1.2 度量

下面引入度量的概念。其定义为

$$\begin{cases} g_{ij} \triangleq (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)_{\mathbb{R}^m}, & (1.4-a) \\ g^{ij} \triangleq (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j)_{\mathbb{R}^m}. & (1.4-b) \end{cases}$$

下面证明

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j. \quad (1.5)$$

它也可以写成矩阵的形式：

$$[g_{ik}][g^{kj}] = [\delta_i^j] = \mathbf{I}_m, \quad (1.6)$$

其中的 \mathbf{I}_m 是 m 阶单位阵。

证明：

$$g_{ik} g^{kj} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} g^{kj} = (\mathbf{g}_i, g^{kj} \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \quad (1.7)$$

后文将说明 $g^{kj} \mathbf{g}_k = \mathbf{g}^j$ ，因此可得

$$g_{ik} g^{kj} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j)_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \quad (1.8)$$

要注意的是，这里的指标 k 是哑标。根据 **Einstein 求和约定**，重复指标并且一上一下时，就表示对它求和。后文除非特殊说明，也均是如此。 \square

现在澄清**基向量转换关系**。第 i 个协变基向量 \mathbf{g}_i 既然是向量，就必然可以用协变基或逆变基来表示。根据对偶关系式 (1.3) 和度量的定义式 (1.4-a)、(1.4-b)，可知

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = g_{ik} \mathbf{g}^k, \\ \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = \delta_i^k \mathbf{g}_k \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.9-a) \\ (1.9-b) \end{matrix}$$

以及

$$\begin{cases} \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = \delta_k^i \mathbf{g}^k, \\ \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = g^{ik} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.10-a) \\ (1.10-b) \end{matrix}$$

这四个式子中，式 (1.9-b) 和 (1.10-a) 是平凡的，而式 (1.9-a) 和 (1.10-b) 则通过度量建立起了协变基与逆变基之间的关系。这就称为基向量转换关系，也可以叫做“指标升降游戏”。

1.1.3 向量的分量

对于任意的向量 $\xi \in \mathbb{R}^m$ ，它可以用协变基表示：

$$\xi = (\xi, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = \xi^k \mathbf{g}_k, \quad (1.11)$$

也可以用逆变基表示：

$$\xi = (\xi, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = \xi_k \mathbf{g}^k, \quad (1.12)$$

式中， ξ^k 是 ξ 与第 k 个逆变基做内积的结果，称为 ξ 的第 k 个**逆变分量**；而 ξ_k 是 ξ 与第 k 个协变基做内积的结果，称为 ξ 的第 k 个**协变分量**。

以后凡是指标在下的（下标），均称为协变某某；指标在上的（上标），称为逆变某某。

1.2 张量的表示

1.2.1 张量的表示与简单张量

所谓**张量**，即指**多重线性函数**。

以三阶张量为例。考虑任意的 $\Phi \in \mathcal{J}^3(\mathbb{R}^m)$ ，其中的 $\mathcal{J}^3(\mathbb{R}^m)$ 表示以 \mathbb{R}^m 为底空间的三阶张量全体。所谓三阶（或三重）线性函数，指“吃掉”三个向量之后变成数，并且“吃法”具有线性性。

对于一般地张量空间 $\mathcal{J}^r(\mathbb{R}^m)$ ，我们引入了线性结构：

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \Phi, \Psi \in \mathcal{J}^r(\mathbb{R}^m), \quad (\alpha \Phi + \beta \Psi)(u_1, u_2, \dots, u_r) \\ \triangleq \alpha \Phi(u_1, u_2, \dots, u_r) + \beta \Psi(u_1, u_2, \dots, u_r), \end{aligned} \quad (1.13)$$

于是

$$\alpha \Phi + \beta \Psi \in \mathcal{J}^r(\mathbb{R}^m). \quad (1.14)$$

下面我们要获得 Φ 的表示。根据之前任意向量用协变基或逆变基的表示，有

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m, \quad \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$= \Phi(u^i g_i, v_j g^j, w^k g_k)$$

考虑到 Φ 对第一变元的线性性，可得

$$= u^i, \Phi(g_i, v_j g^j, w^k g_k)$$

同理，

$$= u^i v_j w^k, \Phi(g_i, g^j, g_k). \quad (1.15)$$

注意这里自然需要满足 Einstein 求和约定.

上式中的 $\Phi(g_i, g^j, g_k)$ 是一个数. 它是张量 Φ “吃掉”三个基向量的结果. 至于 $u^i v_j w^k$ 部分, 三项分别是 u 的第 i 个逆变分量、 v 的第 j 个协变分量和 w 的第 k 个逆变分量. 根据向量分量的定义, 可知

$$u^i v_j w^k = (u, g^i)_{\mathbb{R}^m} \cdot (v, g_j)_{\mathbb{R}^m} \cdot (w, g^k)_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.16)$$

暂时中断一下思路, 先给出简单张量的定义.

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^m, \quad \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, v, w) \triangleq (\xi, u)_{\mathbb{R}^m} \cdot (\eta, v)_{\mathbb{R}^m} \cdot (\zeta, w)_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}, \quad (1.17)$$

式中 $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^m$, 而暂时把 $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$ 理解为一种记号. 简单张量作为一个映照, 组成它的三个向量分别与它们“吃掉”的第一、二、三个变元做内积并相乘, 结果为一个实数.

考虑到内积的线性性, 便有 (以第二个变元为例)

$$\xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v}, w) \triangleq (\xi, u)_{\mathbb{R}^m} \cdot (\eta, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\zeta, w)_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}$$

注意到 $(\eta, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v})_{\mathbb{R}^m} = \alpha(\eta, \tilde{v})_{\mathbb{R}^m} + \beta(\eta, \hat{v})_{\mathbb{R}^m}$, 同时再次利用简单张量的定义, 可得

$$= \alpha \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \tilde{v}, w) + \beta \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \hat{v}, w). \quad (1.18)$$

类似地, 对第一变元和第三变元, 同样具有线性性. 因此, 可以知道

$$\xi \otimes \eta \otimes \zeta \in \mathcal{F}^3(\mathbb{R}^m). \quad (1.19)$$

可见, “简单张量”的名字是名副其实的, 它的确是一个特殊的张量.

回过头来看 (1.16) 式. 很明显, 它可以用简单张量来表示. 要注意, 由于内积的对称性, 可以有两种^①表示方法:

$$g^i \otimes g_j \otimes g^k(u, v, w) \quad (1.20)$$

或者

$$u \otimes v \otimes w(g^i, g_j, g^k), \quad (1.21)$$

我们这里取上面一种. 代入式 (1.15), 得

$$\Phi(u, v, w)$$

^① 这里只考虑把 u, v, w 和 g^i, g_j, g^k 分别放在一起的情况.

$$= \Phi(g_i, g^j, g_k) \cdot g^i \otimes g_j \otimes g^k(u, v, w)$$

由于 $\Phi(g_i, g^j, g_k) \in \mathbb{R}^m$ ，因此

$$= [\Phi(g_i, g^j, g_k) g^i \otimes g_j \otimes g^k](u, v, w). \quad (1.22)$$

方括号里的部分，就是根据 Einstein 求和约定，用 $\Phi(g_i, g^j, g_k)$ 对 $g^i \otimes g_j \otimes g^k$ 进行线性组合。

由于 u, v, w 选取的任意性，可以引入如下记号：

$$\Phi = \Phi(g_i, g^j, g_k) g^i \otimes g_j \otimes g^k =: \Phi_{i \ k}^j g^i \otimes g_j \otimes g^k, \quad (1.23)$$

即

$$\Phi_{i \ k}^j := \Phi(g_i, g^j, g_k), \quad (1.24)$$

这称为张量的分量。它说明一个张量可以用张量分量和基向量组成的简单张量来表示。

指标 i, j, k 的上下是任意的。这里，它依赖于式 (1.15) 中基向量的选取。实际上，对于这里的三阶张量，指标的上一共有 8 种可能。指标全部在下面的，称为协变分量：

$$\Phi^{ijk} := \Phi(g^i, g^j, g^k); \quad (1.25)$$

指标全部在上面的，称为逆变分量：

$$\Phi_{ijk} := \Phi(g_i, g_j, g_k); \quad (1.26)$$

其余 6 种，称为混合分量。对于一个 r 阶张量，显然共有 2^r 种分量表示，其中协变分量与逆变分量各一种，混合分量 $2^r - 2$ 种。

1.2.2 张量分量之间的关系

我们已经知道，对于任意一个向量 $\xi \in \mathbb{R}^m$ ，它可以用协变基或逆变基表示：

$$\xi = \begin{cases} \xi^i g_i, \\ \xi_i g^i. \end{cases} \quad (1.27)$$

式中，协变分量与逆变分量满足坐标转换关系：

$$\begin{cases} \xi^i = (\xi, g^i)_{\mathbb{R}^m} = (\xi, g^{ik} g_k)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} (\xi, g_k)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} \xi_k, \\ \xi_i = (\xi, g_i)_{\mathbb{R}^m} = (\xi, g_{ik} g^k)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik} (\xi, g^k)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik} \xi^k. \end{cases} \quad (1.28-a)$$

$$\quad (1.28-b)$$

每一式的第二个等号都用到了基向量转换关系，见式 (1.9-a) 和 (1.10-b)。

现在再来考虑张量的分量。仍以上文中的张量 $\Phi_{i \ k}^j := \Phi(g_i, g^j, g_k)$ 为例，我们想要知道它与张量 $\Phi_q^{p \ r} := \Phi(g^p, g_q, g^r)$ 之间的关系。利用基向量转换关系，可有

$$\begin{aligned} \Phi_{i \ k}^j &:= \Phi(g_i, g^j, g_k) \\ &= \Phi(g_{ip} g^p, g^{jq} g_q, g_{kr} g^r) \end{aligned}$$

又利用张量的线性性，得

$$\begin{aligned} &= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \Phi(g^p, g_q, g^r) \\ &= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \Phi_q^{p \ r}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

可见，张量的分量与向量的分量类似，其指标升降可通过度量来实现。用同样的手法，还可以得到诸如 $\Phi^{ijk} = g^{ip} \Phi_p^{j \ k}$ 、 $\Phi_j^{i \ k} = g_{jp} g^{kq} \Phi_k^{ip}$ 这样的关系式。

1.2.3 相对不同基的张量分量之间的关系

\mathbb{R}^m 空间中, 除了 $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m$ 和相应的对偶基 $\{\mathbf{g}^i\}_{i=1}^m$ 之外, 当然还可以有其他的基, 比如带括号的 $\{\mathbf{g}_{(i)}\}_{i=1}^m$ 以及对应的对偶基 $\{\mathbf{g}^{(i)}\}_{i=1}^m$. 前者对应形如 $\Phi_j^{i\ k} := \Phi(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k)$ 的张量, 后者则对应带括号的张量, 如 $\Phi_{(q)}^{(p)\ (r)} := \Phi(\mathbf{g}^{(p)}, \mathbf{g}_{(q)}, \mathbf{g}^{(r)})$. 下面我们来探讨这两个张量的关系.

首先来建立基之间的关系. 带括号的第 i 个基向量 $\mathbf{g}_{(i)}$, 作为 \mathbb{R}^m 空间中的一个向量, 自然可以用另一组基来表示:

$$\mathbf{g}_{(i)} = \begin{cases} (\mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k, \\ (\mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad (1.30)$$

同理, 自然还有它的对偶基:

$$\mathbf{g}^{(i)} = \begin{cases} (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k, \\ (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad (1.31)$$

引入记号 $c_{(i)}^k := (\mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m}$ 和 $c_k^{(i)} := (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m}$, 那么有

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{(i)} = c_{(i)}^k \mathbf{g}_k, \\ \mathbf{g}^{(i)} = c_k^{(i)} \mathbf{g}^k. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.32\text{-a}) \\ (1.32\text{-b}) \end{matrix}$$

容易看出, 这两个系数具有如下性质:

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = \delta_j^i. \quad (1.33)$$

写成矩阵形式^①, 为

$$\begin{bmatrix} c_k^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{(j)}^k \end{bmatrix} = [\delta_j^i] = \mathbf{I}_m. \quad (1.34)$$

换句话说, 两个系数矩阵是互逆的.

证明:

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} c_{(j)}^k$$

利用内积的线性性, 有

$$= (\mathbf{g}^{(i)}, c_{(j)}^k \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m}$$

根据 $c_{(j)}^k$ 的定义, 得到

$$= (\mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_{(j)})_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.35)$$

带括号的基同样满足对偶关系 (1.3) 式, 于是得证. \square

上面我们用不带括号的基表示了带括号的基. 反之也是可以的:

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^{(k)})_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_{(k)} = c_i^{(k)} \mathbf{g}_{(k)}, \\ \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_{(k)})_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^{(k)} = c_{(k)}^i \mathbf{g}^{(k)}. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.36\text{-a}) \\ (1.36\text{-b}) \end{matrix}$$

^① 通常我们约定上面的标号作为行号, 下面的标号作为列号.

这样一来，就建立起了不同基之间的转换关系.

现在我们回到张量. 根据张量分量的定义，

$$\Phi_j^{i \ k} := \Phi(g^i, g_j, g^k)$$

利用之前推导的不同基向量之间的转换关系，得

$$= \Phi\left(c_{(p)}^i g^{(p)}, c_j^{(q)} g_{(q)}, c_{(r)}^k g^{(r)}\right)$$

由张量的线性性，提出系数：

$$\begin{aligned} &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \Phi(g^{(p)}, g_{(q)}, g^{(r)}) \\ &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \Phi_{(q)}^{(p) \ (r)}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

完全类似，还可以有

$$\Phi_{(j)}^{(i) \ (k)} = c_p^{(i)} c_{(j)}^g c_r^{(k)} \Phi_q^{p \ r}. \tag{1.38}$$

总结一下这两小节得到的结果. 对于同一组基下的张量分量，其指标升降通过度量来实现；对于不同基下的张量分量，其指标转换则通过不同基之间的转换系数来完成.

第二章 张量的运算性质

2.1 张量积

张量积也叫张量并，用符号“ \otimes ”表示。在 1.2.1 小节给出简单张量的定义时，实际上就用到了张量积。张量积的定义为：

$$\begin{aligned} \forall \Phi \in \mathcal{J}^p(\mathbb{R}^m), \Psi \in \mathcal{J}^q(\mathbb{R}^m), \quad \Phi \otimes \Psi &\in \mathcal{J}^{p+q}(\mathbb{R}^m) \\ &= (\Phi^{i_1 \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}) \otimes (\Psi^{j_1 \dots j_q} g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q}) \\ &\triangleq \Phi^{i_1 \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_q} (g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}) \otimes (g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

由该定义可以知道，关于简单张量 $(g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}) \otimes (g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q})$ ，相应的张量分量为

$$(\Phi \otimes \Psi)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}. \quad (2.2)$$

2.2 e 点积

张量的 e 点积可以用符号“ $\binom{e}{\cdot}$ ”表示。从这个符号可以看出 e 点积的作用：前 e 个指标缩并，后面的点乘。

对于任意的 $\Phi \in \mathcal{J}^p(\mathbb{R}^m), \Psi \in \mathcal{J}^q(\mathbb{R}^m), e \leq \min\{p, q\} \in \mathbb{N}^*$ ， e 点积是这样定义的：

$$\begin{aligned} &\Phi \binom{e}{\cdot} \Psi \\ &= \left(\Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}} \otimes g_{i_{p-e+1}} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \\ &\quad \binom{e}{\cdot} \left(\Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} g_{j_1} \otimes \dots \otimes g_{j_e} \otimes g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q} \right) \end{aligned}$$

把高亮的部分做内积，得到度量：

$$\begin{aligned} &\triangleq \Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \\ &\quad g_{i_{p-e+1} j_1} \dots g_{i_p j_e} (g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}}) \otimes (g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q}) \end{aligned}$$

玩一下“指标升降游戏”（注意有两种结合方式：与 Φ 或 Ψ ），可得

$$= \left\{ \begin{array}{l} \Phi^{i_1 \dots i_{p-e}} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \\ \Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \end{array} \right\} (g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}}) \otimes (g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q}). \quad (2.3)$$

最后一步的大括号中，高亮的 $j_1 \cdots j_e$ 和 $i_{p-e+1} \cdots i_p$ 都是哑标，可以通过求和求掉。因此有

$$\Phi \binom{e}{\cdot} \Psi \in \mathcal{J}^{p+q-2e}(\mathbb{R}^m). \quad (2.4)$$

换句话说， e 点积的作用就是将指标哑标化。

作为一个特殊的应用，接下来我们介绍全点积，用符号 “ \odot ” 表示。对于任意的 $\Phi, \Psi \in \mathcal{J}^p(\mathbb{R}^m)$ ，有

$$\begin{aligned} \Phi \odot \Psi &\triangleq \Phi \binom{p}{\cdot} \Psi \\ &= \left(\Phi^{i_1 \cdots i_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_p} \right) \binom{p}{\cdot} \left(\Psi^{j_1 \cdots j_p} g_{j_1} \otimes \cdots \otimes g_{j_p} \right) \\ &= \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_p j_p} \\ &= \begin{cases} \Phi_{j_1 \cdots j_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} \\ \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{i_1 \cdots i_p} \end{cases} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

可见，全点积将全部指标哑标化。

张量自身和自身的全点积，定义为它的范数：

$$\Phi \odot \Phi = \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p} =: |\Phi|_{\mathcal{J}^p(\mathbb{R}^m)}^2. \quad (2.6)$$

2.3 叉乘

张量的叉乘要求底空间为 \mathbb{R}^3 。对于任意的 $\Phi \in \mathcal{J}^p(\mathbb{R}^3)$, $\Psi \in \mathcal{J}^q(\mathbb{R}^3)$ ，叉乘的定义如下：

$$\begin{aligned} \Phi \times \Psi &= \left(\Phi^{i_1 \cdots i_{p-1} i_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_{p-1}} \otimes g_{i_p} \right) \times \left(\Psi^{j_1 j_2 \cdots j_q} g^{j_1} \otimes g^{j_2} \cdots \otimes g^{j_q} \right) \\ &\triangleq \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_{p-1}} \otimes \left(g_{i_p} \times g^{j_1} \right) \otimes g^{j_2} \cdots \otimes g^{j_q} \in \mathcal{J}^{p+q-1}(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (2.7)$$

注意到，此时简单张量的维数已经降了一阶。

利用 Levi-Civita 记号，可以进一步展开上式。

$$g_{i_p} \times g^{j_1} = \epsilon_{i_p}^{j_1} g^s, \quad (2.8)$$

式中的

$$\epsilon_{i_p}^{j_1} = \det \left[g_{i_p}, g^{j_1}, g_s \right]. \quad (2.9)$$

于是

$$\Phi \times \Psi = \epsilon_{i_p}^{j_1} \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_{p-1}} \otimes g^s \otimes g^{j_2} \cdots \otimes g^{j_q}. \quad (2.10)$$

下面我们再来类比地定义一种混合积 “ $\binom{\times}{\cdot}$ ”。对于任意的 $\Phi, \Psi \in \mathcal{J}^3(\mathbb{R}^m)$ ，定义

$$\begin{aligned} \Phi \binom{\times}{\cdot} \Psi &= \left(\Phi^{ijk} g_i \otimes g_j \otimes g_k \right) \binom{\times}{\cdot} \left(\Psi_{pqr} g^p \otimes g^q \otimes g^r \right) \\ &\triangleq \Phi^{ijk} \Psi_{pqr} \delta_j^q g_i \otimes (g_k \times g^p) \otimes g^r \end{aligned}$$

缩并掉 Kronecker δ ，同时利用 Levi-Civita 记号展开叉乘项，可有

$$= \epsilon_{k\ s}^p \Phi^{ijk} \Psi_{pjr} g_i \otimes g^s \otimes g^r, \quad (2.11)$$

式中的

$$\epsilon_{k\ s}^p = \det[g_k, g^p, g_s]. \quad (2.12)$$

对于这种混合积，并没有一般的约定。不同的研究者往往会采用不同的写法及表示。

2.4 置换（一）

本节主要介绍**置换运算**的定义及相关概念，这将使我们暂时离开张量运算的主线。

置换运算实际上是一种交换位置或者改变次序的运算。之后我们还将引入针对张量的置换算子，它是外积运算和外微分运算的基础。这些运算是现代张量分析与微分几何的支柱。

2.4.1 置换的定义

我们从一个例子开始。下面是一个 2×7 的“矩阵”：

$$\sigma = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} \\ \textcircled{7} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{1} & \textcircled{6} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

矩阵里面的每一个数字表示一个位置。可以想象成 7 把椅子，先是按第一行的顺序依次排列，再按照第二行的顺序打乱，重新排列。于是这就成为一个**7 阶置换**。这个定义等价于

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.14-a)$$

自然也等价于

$$\sigma = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}, \quad (2.14-b)$$

当然，换用任何元素也都是可以的。

通常我们用方括号表示置换的**序号定义**，即标号的排列轮换；用圆括号表示**元素定义**，即标号对应元素的轮换。

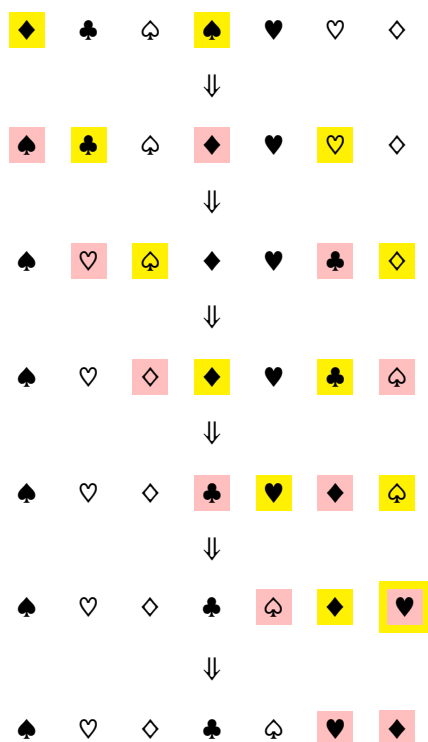
2.4.2 置换的符号

接着来定义置换的符号 $\text{sgn } \sigma$ 。这里我们把每次交换两个数字称为一次“操作”。如果经过偶数次“操作”，可以把经置换后的序列恢复为原来的顺序，那么该置换的符号 $\text{sgn } \sigma = 1$ ；而如果经过奇数次“操作”才可以复原，则 $\text{sgn } \sigma = -1$ 。若用一个式子表示，则为

$$\text{sgn } \sigma = (-1)^n, \quad (2.15)$$

其中的 n 是恢复原本顺序所需“操作”的次數。

下面我们式 (2.13) 所定义的 σ 为例，演示求置换符号的过程。这里的关键是通过两两交换，按如下步骤把式 (2.14-b) 的第二行变换成第一行：



一共进行了 6 次两两交换，因此 $\text{sgn } \sigma = 1$ 。

2.4.3 置换的复合

再定义一个置换

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

注意这里用了方括号，因此它是一个序号定义。方便起见，以后的序号我们都只用不带圈的普通数字表示。考虑之前定义的置换

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

则 τ 与 σ 的复合

$$\tau \circ \sigma = \left(\begin{array}{ccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \odot \\ \odot & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \odot & \square & \square & \square & \square & \square \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \sigma \\ \leftarrow \tau \end{array} \quad (2.18)$$

与函数、线性变换等的复合类似，这里也用小圆圈“ \circ ”表示置换的复合。

假设经过置换 σ 、 τ 作用后得到的序列，分别需要 p 次和 q 次两两交换才能复原为原来的序列。那么很显然，经过复合置换 $\tau \circ \sigma$ 作用后的序列，经过 $q + p$ 次两两交换也一定可以复原。因此，复合置换的符号

$$\text{sgn } (\tau \circ \sigma) = (-1)^{q+p} = (-1)^q \cdot (-1)^p = \text{sgn } \tau \cdot \text{sgn } \sigma. \quad (2.19)$$

2.4.4 逆置换

逆置换 σ^{-1} 的定义为

$$\sigma^{-1} \circ \sigma = \text{Id}, \quad (2.20)$$

其中的“**Id**”是恒等映照.

仍然使用式 (2.14-b):

$$\sigma = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamond & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamond \\ \clubsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamond \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

那么自然有

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \diamond & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamond \\ \spadesuit & \heartsuit & \diamond & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamond \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

显然, 我们有 $\sigma^{-1} \circ \sigma = \text{Id}$.

回忆一下逆矩阵的定义. 矩阵 A 的逆 A^{-1} 既要满足 $A^{-1}A = I$, 又要满足 $AA^{-1} = I$. 对于置换也是如此, 因此我们需要检查 $\sigma \circ \sigma^{-1}$: ^①

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \diamond & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamond \\ \spadesuit_1 & \heartsuit_2 & \diamond_3 & \clubsuit_4 & \spadesuit_5 & \heartsuit_6 & \diamond_7 \\ \diamond_7 & \clubsuit_4 & \spadesuit_5 & \spadesuit_1 & \heartsuit_6 & \heartsuit_2 & \diamond_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \sigma^{-1} \\ \\ \leftarrow \sigma \end{matrix} \quad (2.23)$$

可见的确有 $\sigma \circ \sigma^{-1} = \text{Id}$.

另外, 由于恒等映照 **Id** 作用后序列不发生变化, 复原所需的交换次数为 0, 因此

$$\text{sgn } \text{Id} = (-1)^0 = 1. \quad (2.24)$$

而根据定义,

$$\text{Id} = \sigma^{-1} \circ \sigma, \quad (2.25)$$

故有

$$\text{sgn } \sigma \cdot \text{sgn } \sigma^{-1} = 1. \quad (2.26)$$

由此, 可以推知

$$\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \sigma^{-1}, \quad (2.27)$$

即置换与它的逆具有相同的符号.

2.5 置换 (二)

本节将介绍置换运算的基本性质.

^① 该式中的数字角标用来澄清原始序号.

2.5.1 置换的穷尽

先要做一点铺垫. 设有序数组

$$\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \quad (2.28)$$

经置换 σ 作用后成为

$$\{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)\}, \quad (2.29)$$

则根据之前的元素定义 (圆括号), 可以把 σ 记为

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_r) \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

每次置换都将得到一个有序数组. 把它们组合到一起, 就可以得到集合

$$\left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \forall \sigma \in P_r \right\}. \quad (2.31)$$

其中的 P_r 表示 r 阶置换的全体. 根据排列组合原理, r 阶置换的总数等于 r 个元素的全排列数. 即该集合共有 $r!$ 个元素.

下面我们要证明

$$\begin{aligned} & \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \forall \sigma \in P_r \right\} \\ &= \left\{ (\tau \circ \sigma(i_1), \tau \circ \sigma(i_2), \dots, \tau \circ \sigma(i_r)) \mid \forall \sigma, \tau \in P_r \right\} \end{aligned} \quad (2.32-a)$$

$$= \left\{ (\sigma \circ \tau(i_1), \sigma \circ \tau(i_2), \dots, \sigma \circ \tau(i_r)) \mid \forall \sigma, \tau \in P_r \right\} \quad (2.32-b)$$

$$= \left\{ (\sigma^{-1}(i_1), \sigma^{-1}(i_2), \dots, \sigma^{-1}(i_r)) \mid \forall \sigma \in P_r \right\}. \quad (2.32-c)$$

这说明置换构成了置换群.?

证明: 证明的思路是说明集合互相包含.

对于式 (2.32-a), 右边的 $\tau \circ \sigma$ 也是一个 r 阶置换, 自然符合左边集合的定义, 因此 右边 \subset 左边. 由于这一步是相当显然的, 以下的几个证明我们将略去该步. 另一方面, 左边的 σ 可以表示成

$$\sigma = \text{Id} \circ \sigma = (\tau \circ \tau^{-1}) \circ \sigma = \tau \circ (\tau^{-1} \circ \sigma), \quad (2.33)$$

这就是右边集合的定义, 因此 左边 \subset 右边. 故可证得等式成立.

对于式 (2.32-b), 我们有

$$\sigma = \sigma \circ \text{Id} = \sigma \circ (\tau^{-1} \circ \tau) = (\sigma \circ \tau^{-1}) \circ \tau, \quad (2.34)$$

它符合了右边集合的定义, 因此 左边 \subset 右边. 于是等式成立.

对于式 (2.32-c), 我们有

$$\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}, \quad (2.35)$$

它符合了右边集合的定义, 因此 左边 \subset 右边. 于是等式成立. \square

2.5.2 数组元素的乘积

2.6 置换 (三)

本节将介绍针对张量的置换算子.