第一章　张量场可微性

1.1　张量的范数

1.1.1　赋范线性空间

对于一个**线性空间** $\mathscr{V}$，它总是定义了**线性结构**：

$$\forall\, \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V} \text{ 和 } \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha\, \boldsymbol{x} + \beta\, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}. \tag{1.1}$$

为了进一步研究的需要，我们还要引入**范数**的概念．所谓“范数”，就是对线性空间中任意元素大小的一种刻画．举个我们熟悉的例子，m 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 中某个向量的范数，就定义为该向量在 Descartes 坐标下各分量的平方和的平方根．

一般而言，线性空间 $\mathscr{V}$ 中的范数 $\|\cdot\|_{\mathscr{V}}$ 是从 $\mathscr{V}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映照，并且需要满足以下三个条件：

1. **非负性**

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathscr{V}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_{\mathscr{V}} \geqslant 0 \tag{1.2}$$

以及**非退化性**

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathscr{V}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_{\mathscr{V}} = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in \mathscr{V}, \tag{1.3}$$

这里的 $\boldsymbol{0}$ 是线性空间 $\mathscr{V}$ 中的**零元素**，它是唯一存在的．

2. 零元是唯一的，线性空间中的元素 $\boldsymbol{x}$ 与从 $\boldsymbol{0}$ 指向它的向量一一对应．因此，线性空间中的元素也常被称为“向量”．

考虑线性空间中的数乘运算．从几何上看，$\boldsymbol{x}$ 乘上 λ，就是将 $\boldsymbol{x}$ 沿着原来的指向进行伸缩．显然有

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathscr{V} \text{ 和 } \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda\, \boldsymbol{x}\|_{\mathscr{V}} = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{x}\|_{\mathscr{V}}, \tag{1.4}$$

这称为**正齐次性**．

想要图吗?

3. 线性空间中的加法满足*平行四边形法则*．直观地看，就有

$$\forall\, \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}, \quad \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_{\mathscr{V}} \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_{\mathscr{V}} + \|\boldsymbol{y}\|_{\mathscr{V}}, \tag{1.5}$$

这称为**三角不等式**．

定义了范数的线性空间称为**赋范线性空间**．

1.1.2 张量范数的定义

考虑 p 阶张量 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)$，它可以用逆变分量或协变分量来表示：

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{cases} \Phi^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}, & (1.6\text{-a}) \\ \Phi_{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{i_p}, & (1.6\text{-b}) \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \Phi^{i_1 \cdots i_p} = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{i_1}, \cdots, \boldsymbol{g}^{i_p}\right). & (1.7\text{-a}) \\ \Phi_{i_1 \cdots i_p} = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{g}_{i_p}\right), & (1.7\text{-b}) \end{cases}$$

张量的**范数**定义为

$$\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)} \triangleq \sqrt{\Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p}} \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

$i_1 \cdots i_p$ 可独立取值，每个又有 m 种取法，所以根号下共有 m^p 项. 注意 $\Phi^{i_1 \cdots i_p}$ 与 $\Phi_{i_1 \cdots i_p}$ 未必相等，因而根号下的部分未必是平方和，这与 Euclid 空间中向量的模是不同的.

复习一下 **??** 小节，我们可以用另一组（带括号的）基表示张量 $\boldsymbol{\Phi}$：

$$\begin{cases} \Phi^{i_1 \cdots i_p} = c^{i_1}_{(\xi_1)} \cdots c^{i_p}_{(\xi_p)} \Phi^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)}, & (1.9\text{-a}) \\ \Phi_{i_1 \cdots i_p} = c^{(\eta_1)}_{i_1} \cdots c^{(\eta_p)}_{i_p} \Phi_{(\eta_1) \cdots (\eta_p)}, & (1.9\text{-b}) \end{cases}$$

其中的 $c^i_{(\xi)} = \left\langle \boldsymbol{g}_{(\xi)}, \boldsymbol{g}^i \right\rangle_{\mathbb{R}^m}$，$c^{(\eta)}_i = \left\langle \boldsymbol{g}^{(\eta)}, \boldsymbol{g}_i \right\rangle_{\mathbb{R}^m}$，它们满足

$$c^i_{(\xi)} c^{(\eta)}_i = \delta^{(\eta)}_{(\xi)}. \tag{1.10}$$

于是

$$\begin{aligned} & \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p} \\ = & \left(c^{i_1}_{(\xi_1)} \cdots c^{i_p}_{(\xi_p)} \Phi^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)}\right)\left(c^{(\eta_1)}_{i_1} \cdots c^{(\eta_p)}_{i_p} \Phi_{(\eta_1) \cdots (\eta_p)}\right) \\ = & \left(c^{i_1}_{(\xi_1)} c^{(\eta_1)}_{i_1}\right) \cdots \left(c^{i_p}_{(\xi_p)} c^{(\eta_p)}_{i_p}\right) \Phi^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)} \Phi_{(\eta_1) \cdots (\eta_p)} \\ = & \delta^{(\eta_1)}_{(\xi_1)} \cdots \delta^{(\eta_p)}_{(\xi_p)} \Phi^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)} \Phi_{(\eta_1) \cdots (\eta_p)} \\ = & \Phi^{(\xi_1) \cdots (\xi_p)} \Phi_{(\xi_1) \cdots (\xi_p)}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

它是 $\boldsymbol{\Phi}$ 在另一组基下的逆变分量与协变分量乘积之和.

以上结果说明，张量的范数不依赖于基的选取，这就好比用不同的秤来称同一个人的体重，都将获得相同的结果. 既然如此，不妨采用单位正交基来表示张量的范数：

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)} & \triangleq \sqrt{\Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p}} \\ & = \sqrt{\Phi^{\langle i_1 \rangle \cdots \langle i_p \rangle} \Phi_{\langle i_1 \rangle \cdots \langle i_p \rangle}} \\ & =: \sqrt{\sum\nolimits_{i_1, \cdots, i_p = 1}^m \left(\Phi_{\langle i_1, \cdots, i_p \rangle}\right)^2}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

这里的 $\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}$ 表示张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 在单位正交基下的分量，它的指标不区分上下．

有了这样的表示，很容易就可以验证张量范数符合之前的三个要求．一组数的平方和开根号，必然是非负的．至于非退化性，若范数为零，则所有分量均为零，自然成为零张量；反之，对于零张量，所有分量为零，范数也为零．将 $\boldsymbol{\Phi}$ 乘上 λ，则有

$$
\begin{aligned}
\|\lambda\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)} &= \sqrt{\sum\nolimits_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\left(\lambda\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2} \\
&= \sqrt{\lambda^2\sum\nolimits_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2} \\
&= |\lambda|\sqrt{\sum\nolimits_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2} \\
&= |\lambda|\cdot\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)},
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

于是正齐次性也得以验证．最后，利用 Cauchy–Schwarz 不等式，可有

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Psi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\
={}& \sum\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}+\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2 \\
={}& \sum\left[\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2+2\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}+\left(\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2\right] \\
={}& \sum\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2+2\sum\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}+\sum\left(\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2 \\
\leqslant{}& \|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2+2\sqrt{\sum\left(\boldsymbol{\Phi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2}\sqrt{\sum\left(\boldsymbol{\Psi}_{\langle i_1,\cdots,i_p\rangle}\right)^2}+\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\
={}& \|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2+2\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}\cdot\|\boldsymbol{\Psi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}+\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\
={}& \left(\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}+\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}\right)^2.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

两边开方，即为三角不等式．

由此，我们就完整地给出了张量大小的刻画手段．可以看出，它实际上就是 Euclid 空间中向量模的直接推广．

1.1.3 简单张量的范数

根据 **??** 小节中的定义，简单张量是形如 $\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}$ 的张量，其中的 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}\in\mathbb{R}^m$，它是三个向量的张量积．简单张量的范数为

$$
\|\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)} = \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^m}\cdot\|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathbb{R}^m}\cdot\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathbb{R}^m}.
\tag{1.15}
$$

证明： $\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}$ 的逆变分量为

$$
(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta})^{ijk} \triangleq \boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}\left(\boldsymbol{g}^i,\boldsymbol{g}^j,\boldsymbol{g}^k\right) = \xi^i\eta^j\zeta^k.
\tag{1.16}
$$

同理，它的协变分量为

$$
(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta})_{ijk} \triangleq \boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}\left(\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{g}_j,\boldsymbol{g}_k\right) = \xi_i\eta_j\zeta_k.
\tag{1.17}
$$

二者相乘，有

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta})^{ijk}\cdot(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta})_{ijk}\\
&=\left(\xi^i\eta^j\zeta^k\right)\cdot\left(\xi_i\eta_j\zeta_k\right)\\
&=\left(\xi^i\xi_i\right)\cdot\left(\eta^j\eta_j\right)\cdot\left(\zeta^k\zeta_k\right).
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

注意到

$$
\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^m}=\langle\xi,\,\xi\rangle_{\mathbb{R}^m}
$$

分别把二者用协变和逆变分量表示：

$$
\begin{aligned}
&=\left\langle\xi^i\boldsymbol{g}_i,\,\xi_j\boldsymbol{g}^j\right\rangle_{\mathbb{R}^m}\\
&=\xi^i\xi_j\left\langle\boldsymbol{g}_i,\,\boldsymbol{g}^j\right\rangle_{\mathbb{R}^m}\\
&=\xi^i\xi_j\delta_i^j=\xi^i\xi_i,
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

于是

$$
(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta})^{ijk}\cdot(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta})_{ijk}=\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^m}\cdot\|\boldsymbol{\eta}\|^2_{\mathbb{R}^m}\cdot\|\boldsymbol{\zeta}\|^2_{\mathbb{R}^m}.
\tag{1.20}
$$

两边开方，即得 (1.15) 式. □

1.2 张量场的偏导数；协变导数

在区域 $\mathfrak{D}_x\subset\mathbb{R}^m$ 上，若存在一个自变量用位置刻画的映照

$$
\boldsymbol{\Phi}:\ \mathfrak{D}_x\ni\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\in\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m),
\tag{1.21}
$$

则称张量 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ [①] 是定义在 $\mathfrak{D}_x$ 上的一个**张量场**.

下面我们以三阶张量为例．设在物理域 $\mathfrak{D}_X\subset\mathbb{R}^m$ 和参数域 $\mathfrak{D}_x\subset\mathbb{R}^m$ 之间已经建立了微分同胚 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\in\mathscr{C}^p\left(\mathfrak{D}_x;\mathfrak{D}_X\right)$．在 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 处，张量场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 可以用分量形式表示为

$$
\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})=\Phi^{i\ \,k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})\in\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m),
\tag{1.22}
$$

其中的 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}),\,\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}),\,\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})$ 都是局部基，而张量分量则定义为[②]

$$
\Phi^{i\ \,k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\triangleq\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}),\,\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}),\,\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})\right]\in\mathbb{R}.
\tag{1.23}
$$

类似地，当点沿着 x^μ-线运动到 $\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\right)$ 处时，有

$$
\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\right)=\Phi^{i\ \,k}_{\ j}\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\right)\boldsymbol{g}_i\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\right)\otimes\boldsymbol{g}^j\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\right)\otimes\boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\right).
\tag{1.24}
$$

现在研究 $\lambda\to0\in\mathbb{R}$ 时的极限

$$
\lim_{\lambda\to0}\frac{\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\right)-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})}{\lambda}=:\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\in\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m).
\tag{1.25}
$$

① 类似“$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$”的记号在前文也表示张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 作用在向量 $\boldsymbol{x}$ 上（“吃掉”了 $\boldsymbol{x}$），此时有 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}$，注意不要混淆．符号有限，难免如此，还望诸位体谅．

② 请注意，下式 $\boldsymbol{\Phi}$ 之后的第一个圆括号表示位于 $\boldsymbol{x}$ 处；而后面的方括号则表示作用在这几个向量上．

与之前的向量值映照类似，该极限表示张量场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 作为一个整体，相对于自变量第 μ 个分量的变化率，即 $\boldsymbol{\Phi}$ 关于 x^μ（在 $\boldsymbol{x}$ 处）的**偏导数**．式中，$\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\right)$ 已由 (1.24) 式给出．注意到张量分量实际上就是一个多元函数，于是

$$\Phi^{i\ k}_{\ j}\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\right)=\Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x})+\frac{\partial\Phi^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\cdot\lambda+o^{i\ k}_{\ j}(\lambda)\in\mathbb{R}. \tag{1.26}$$

另外，三个基向量作为向量值映照，同样可以展开：

$$\begin{cases}\boldsymbol{g}_i\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\right)=\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})+\dfrac{\partial\boldsymbol{g}_i}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\cdot\lambda+\boldsymbol{o}_i(\lambda)\in\mathbb{R}^m, & \text{(1.27-a)}\\[2ex] \boldsymbol{g}^j\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\right)=\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})+\dfrac{\partial\boldsymbol{g}^j}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\cdot\lambda+\boldsymbol{o}^j(\lambda)\in\mathbb{R}^m, & \text{(1.27-b)}\\[2ex] \boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x}+\lambda\,\boldsymbol{e}_\mu\right)=\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})+\dfrac{\partial\boldsymbol{g}_k}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\cdot\lambda+\boldsymbol{o}_k(\lambda)\in\mathbb{R}^m. & \text{(1.27-c)}\end{cases}$$

如果直接展开，一共有 81 项，显然过于繁杂，不便操作．我们将按 λ 的次数逐次展开．首先看 λ 的零次项:

$$\Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}), \tag{1.28}$$

这就是 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$．然后是 λ 的一次项：

$$\begin{aligned}\lambda\cdot\Bigg[&\frac{\partial\Phi^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})+\Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial\boldsymbol{g}_i}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})\\&+\Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\otimes\frac{\partial\boldsymbol{g}^j}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})+\Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\frac{\partial\boldsymbol{g}_k}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x})\Bigg].\end{aligned} \tag{1.29}$$

剩下的至少是 λ 的二次项，我们将其统一写作“res.”（余项）.

现在回头看之前的极限 (1.25) 式．λ 的零次项与 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 相互抵消，而一次项就只剩下了系数部分．至于余项 res.，则要证明它趋于零．以

$$\Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{o}_i(\lambda)\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}) \tag{1.30}$$

为例，我们需要证明它等于 $\boldsymbol{o}(\lambda)\in\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，即

$$\lim_{\lambda\to0}\frac{\left\|\Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{o}_i(\lambda)\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)}}{\lambda}=0\in\mathbb{R}. \tag{1.31}$$

证明： 这里为了叙述方便，我们将暂时不使用 Einstein 求和约定，而是把求和号显式地写出来．于是分子部分可以写成

$$\left\|\sum_{i,j,k=1}^{m}\Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{o}_i(\lambda)\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

根据范数的三角不等式，有

$$\leqslant\sum_{i,j,k=1}^{m}\left\|\Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{o}_i(\lambda)\otimes\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

再利用正齐次性，可得

$$= \sum_{i,j,k=1}^{m} \left|\boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x})\right| \cdot \left\|\boldsymbol{o}_{i}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^{j}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_{k}(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathscr{T}^{3}(\mathbb{R}^{m})}$$

代入简单张量的范数，便有

$$= \sum_{i,j,k=1}^{m} \left|\boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x})\right| \cdot \left\|\boldsymbol{o}_{i}(\lambda)\right\|_{\mathbb{R}^{m}} \cdot \left\|\boldsymbol{g}^{j}(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathbb{R}^{m}} \cdot \left\|\boldsymbol{g}_{k}(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathbb{R}^{m}}. \tag{1.32}$$

这几项中只有 $\left\|\boldsymbol{o}_{i}(\lambda)\right\|_{\mathscr{T}^{3}(\mathbb{R}^{m})}$ 与 λ 有关．于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0} \frac{\left\|\boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{o}_{i}(\lambda) \otimes \boldsymbol{g}^{j}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_{k}(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathscr{T}^{3}(\mathbb{R}^{m})}}{\lambda} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{m} \left|\boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x})\right| \cdot \left\|\boldsymbol{g}^{j}(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathbb{R}^{m}} \cdot \left\|\boldsymbol{g}_{k}(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathbb{R}^{m}} \cdot \lim_{\lambda\to 0} \frac{\left\|\boldsymbol{o}_{i}(\lambda)\right\|_{\mathbb{R}^{m}}}{\lambda}
\end{aligned}$$

根据定义，最后的极限为零，因此

$$= 0. \tag{1.33}$$

□

类似地，其他七十多项也都是 λ 的一阶无穷小量．而有限个无穷小量之和仍为无穷小量，于是 res. $\to 0$.

综上，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^{\mu}}(\boldsymbol{x}) := \lim_{\lambda\to 0} \frac{\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x} + \lambda\, \boldsymbol{e}_{\mu}\right) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})}{\lambda} \\
&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}}{\partial x^{\mu}}\, \boldsymbol{g}_{i} \otimes \boldsymbol{g}^{j} \otimes \boldsymbol{g}_{k} + \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}\, \frac{\partial \boldsymbol{g}_{i}}{\partial x^{\mu}} \otimes \boldsymbol{g}^{j} \otimes \boldsymbol{g}_{k} + \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}\, \boldsymbol{g}_{i} \otimes \frac{\partial \boldsymbol{g}^{j}}{\partial x^{\mu}} \otimes \boldsymbol{g}_{k} + \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}\, \boldsymbol{g}_{i} \otimes \boldsymbol{g}^{j} \otimes \frac{\partial \boldsymbol{g}_{k}}{\partial x^{\mu}}\right)(\boldsymbol{x}).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

式中，$\partial \boldsymbol{g}_{i} / \partial x^{\mu}\ (\boldsymbol{x})$ 可以用 Christoffel 符号表示：

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_{i}}{\partial x^{\mu}}(\boldsymbol{x}) = \Gamma^{s}{}_{\mu i}\, \boldsymbol{g}_{s}(\boldsymbol{x}). \tag{1.35}$$

因此 (1.34) 式的第二项

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x})\, \frac{\partial \boldsymbol{g}_{i}}{\partial x^{\mu}}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^{j}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_{k}(\boldsymbol{x}) \\
&= \Gamma^{s}{}_{\mu i}\, \boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{g}_{s}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^{j}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_{k}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

i 和 s 都是哑标，不妨进行一下交换：

$$= \Gamma^{i}{}_{\mu s}\, \boldsymbol{\Phi}^{s}{}_{j}{}^{k}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{g}_{i}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^{j}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_{k}(\boldsymbol{x}). \tag{1.36}$$

同样，后面的两项也可进行类似的处理．这样便有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^{\mu}}(\boldsymbol{x}) := \lim_{\lambda\to 0} \frac{\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x} + \lambda\, \boldsymbol{e}_{\mu}\right) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})}{\lambda}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{\partial \Phi^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^\mu} + \Gamma^i_{\ \mu s} \Phi^{s\ k}_{\ j} - \Gamma^s_{\ \mu j} \Phi^{i\ k}_{\ s} + \Gamma^k_{\ \mu s} \Phi^{i\ s}_{\ j} \right) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \right] (\boldsymbol{x}) \\
&=: \nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}),
\end{aligned} \tag{1.37}
$$

式中，我们称 $\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ 为张量分量 $\Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x})$ 相对于 x^μ 的**协变导数**，其定义为：

$$
\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x}) \triangleq \frac{\partial \Phi^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}) + \Gamma^i_{\ \mu s} \Phi^{s\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x}) - \Gamma^s_{\ \mu j} \Phi^{i\ k}_{\ s}(\boldsymbol{x}) + \Gamma^k_{\ \mu s} \Phi^{i\ s}_{\ j}(\boldsymbol{x}). \tag{1.38}
$$

1.3 张量场的梯度

1.3.1 梯度；可微性

我们在参数域中的内点 $\boldsymbol{x}_0$ 处取一个半径为 δ 的邻域 $\mathfrak{B}_\delta(\boldsymbol{x}_0)$．若使自变量变化到 $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}$，则在物理域中，对应的点就将从 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)$ 变化到 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h})$．考察定义在参数域 $\mathfrak{D}_x$ 上的张量场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$，它的变化为

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0) \\
&= \Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) \, \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) \otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) \otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) \\
&\quad - \Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x}_0) \, \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0) \otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}_0) \otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_0).
\end{aligned} \tag{1.39}
$$

与之前一样将第一部分逐项展开，有

$$
\begin{cases}
\Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = \Phi^{i\ k}_{\ j}(\boldsymbol{x}_0) + \dfrac{\partial \Phi^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0) \cdot h^\mu + o^{i\ k}_{\ j}(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}, & \text{(1.40-a)} \\
\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0) + \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0) \cdot h^\mu + \boldsymbol{o}_i(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^m, & \text{(1.40-b)} \\
\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}_0) + \dfrac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0) \cdot h^\mu + \boldsymbol{o}^j(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^m, & \text{(1.40-c)} \\
\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_0) + \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0) \cdot h^\mu + \boldsymbol{o}_k(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^m. & \text{(1.40-d)}
\end{cases}
$$

不要忘记对哑标 μ 进行求和．

不显含 $\boldsymbol{h}$ 的只有每行的第一项；它们组合起来，与式 (1.39) 的第二部分相互抵消．再看 $\boldsymbol{h}$ 的一次项：①

$$
\left[\frac{\partial \Phi^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^\mu} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \Phi^{i\ k}_{\ j} \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^\mu} \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \boldsymbol{g}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^\mu} \otimes \boldsymbol{g}_k + \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^\mu} \right) \right] (\boldsymbol{x}_0) \cdot h^\mu. \tag{1.41}
$$

利用 Christoffel 符号又可以把它写成

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial \Phi^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^\mu} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \Phi^{i\ k}_{\ j} \left(\Gamma^s_{\ \mu i} \boldsymbol{g}_s \right) \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \right. \\
&\quad \left. - \Phi^{i\ k}_{\ j} \boldsymbol{g}_i \otimes \left(\Gamma^j_{\ \mu s} \boldsymbol{g}^s \right) \otimes \boldsymbol{g}_k + \Phi^{i\ k}_{\ j} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \left(\Gamma^s_{\ \mu k} \boldsymbol{g}_s \right) \right] (\boldsymbol{x}_0) \cdot h^\mu
\end{aligned}
$$

① 实际是 h^μ 的一次项．别忘了求和．

$$
\begin{aligned}
&= \Bigg(\frac{\partial \Phi^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^\mu} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \Gamma^i_{\mu s} \Phi^{s\ k}_{\ j} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \\
&\quad - \Gamma^s_{\mu j} \Phi^{i\ k}_{\ s} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k + \Gamma^k_{\mu s} \Phi^{i\ s}_{\ j} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \Bigg)\big(\boldsymbol{x}_0\big) \cdot h^\mu \\
&= \left[\left(\frac{\partial \Phi^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^\mu} + \Gamma^i_{\mu s} \Phi^{s\ k}_{\ j} - \Gamma^s_{\mu j} \Phi^{i\ k}_{\ s} + \Gamma^k_{\mu s} \Phi^{i\ s}_{\ j} \right) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \right] \big(\boldsymbol{x}_0\big) \cdot h^\mu. \qquad (1.42)
\end{aligned}
$$

至于高阶项，它们都等于 $o\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big) \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，并且满足

$$
\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}\,\in\,\mathbb{R}^m} \frac{\big\|o\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big)\big\|_{\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)}}{\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}} = 0 \in \mathbb{R}. \qquad (1.43)
$$

证明与 (1.31) 式类似.

整理一下，我们有

$$
\begin{aligned}
&\Phi\big(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\big) - \Phi\big(\boldsymbol{x}_0\big) \\
&= \left[\left(\frac{\partial \Phi^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^\mu} + \Gamma^i_{\mu s} \Phi^{s\ k}_{\ j} - \Gamma^s_{\mu j} \Phi^{i\ k}_{\ s} + \Gamma^k_{\mu s} \Phi^{i\ s}_{\ j} \right) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k \right] \big(\boldsymbol{x}_0\big) \cdot h^\mu + o\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big)
\end{aligned}
$$

利用协变导数，有

$$
=: \Big[\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\big(\boldsymbol{x}_0\big)\, \boldsymbol{g}_i\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}^j\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}_k\big(\boldsymbol{x}_0\big)\Big] h^\mu + o\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big). \qquad (1.44)
$$

至此，从微分学的角度来看，任务已经完成．但对于张量分析而言，我们还需要再做一点微小的工作．简单张量部分再并上一个 $\boldsymbol{g}^\mu$，从而使张量升一阶；后面则改成 $h^\nu \boldsymbol{g}_\nu\big(\boldsymbol{x}_0\big)$，并利用点乘保持总阶数不变：

$$
\begin{aligned}
&\Big[\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\big(\boldsymbol{x}_0\big)\, \boldsymbol{g}_i\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}^j\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}_k\big(\boldsymbol{x}_0\big)\Big] h^\mu \\
&= \Big[\nabla_\mu \Phi^{i\ k}_{\ j}\big(\boldsymbol{x}_0\big)\, \boldsymbol{g}_i\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}^j\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}_k\big(\boldsymbol{x}_0\big) \otimes \boldsymbol{g}^\mu\big(\boldsymbol{x}_0\big)\Big] \cdot \Big[h^\nu \boldsymbol{g}_\nu\big(\boldsymbol{x}_0\big)\Big]. \qquad (1.45)
\end{aligned}
$$

所谓“点乘”，其实就是 e 点积在 $e = 1$ 时的情况．实际上，

$$
\boldsymbol{g}^\mu\big(\boldsymbol{x}_0\big) \cdot \Big[h^\nu \boldsymbol{g}_\nu\big(\boldsymbol{x}_0\big)\Big] = h^\nu \delta^\mu_\nu = h^\mu. \qquad (1.46)
$$

这里用到了局部基的对偶关系 (**??**) 式.

此时，我们获得了一个四阶张量与 $h^\nu \boldsymbol{g}_\nu\big(\boldsymbol{x}_0\big)$ 的点积．接下来讨论该项的意义．参数域中 $\boldsymbol{x}_0$ 发生 $\boldsymbol{h} = h^i \boldsymbol{e}_i$ 的变化时，根据向量值映照 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 的可微性，对应物理域中的变化为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\big) - \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big) &= \mathrm{D}\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}_0\big)(\boldsymbol{h}) + o\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big) \\
&=: \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^\nu}\big(\boldsymbol{x}_0\big)\, h^\nu + o\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big)
\end{aligned}
$$

代入 **??** 小节中局部协变基的定义，可有

$$
=: h^\nu \boldsymbol{g}_\nu\big(\boldsymbol{x}_0\big) + o\big(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\big). \qquad (1.47)
$$

代入式 (1.44)，有

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0)\\
=&\left[\nabla_\mu \Phi^i{}_j{}^k(\boldsymbol{x}_0)\, \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0)\otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}_0)\otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_0)\otimes \boldsymbol{g}^\mu(\boldsymbol{x}_0)\right]\\
&\cdot\left[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{o}\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\right)\right]+\boldsymbol{o}\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\right)
\end{aligned}
$$

合并掉一阶无穷小量[①]，可得

$$
\begin{aligned}
=&\left[\nabla_\mu \Phi^i{}_j{}^k(\boldsymbol{x}_0)\, \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0)\otimes \boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{x}_0)\otimes \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_0)\otimes \boldsymbol{g}^\mu(\boldsymbol{x}_0)\right]\\
&\cdot\left[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)\right]+\boldsymbol{o}\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\right)\\
=&\left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0)\otimes \boldsymbol{g}^\mu(\boldsymbol{x}_0)\right]\cdot\left[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)\right]+\boldsymbol{o}\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\right)\in\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m).
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

引入记号

$$
\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0)\otimes\left[\boldsymbol{g}^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0)\right]\coloneqq\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0)\otimes \boldsymbol{g}^\mu(\boldsymbol{x}_0),
\tag{1.49}
$$

再引入**梯度算子**

$$
\boldsymbol{\nabla}\coloneqq \boldsymbol{g}^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}_0),
\tag{1.50}
$$

我们得到的结论就可以表述为

$$
\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0)=(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{x}_0)\cdot\left[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)\right]+\boldsymbol{o}\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\right)\in\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m),
\tag{1.51}
$$

式中的“·”表示点乘．以上结果称之为张量场的**可微性**，它表明，由一点处的位置移动所引起张量场的变化，可以用该点处张量场的**梯度**（即 $\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla}$）点乘物理空间中的位置差别来近似，误差为一阶无穷小量．以上分析基于三阶张量．但显然，对于 p 阶张量，将会有完全一致的结果．

1.3.2 方向导数

现在来研究张量场沿 $\boldsymbol{e}$ 方向的变化率（设 $\|\boldsymbol{e}\|_{\mathbb{R}^m}=1$）．取一个与 $\boldsymbol{e}$ 平行的向量 $\lambda\boldsymbol{e}$．注意到 $\lambda\boldsymbol{e}$ 其实就是物理空间中的位置变化，于是根据张量场的可微性，我们有

$$
\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{e})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0)=(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\lambda\boldsymbol{e})+\boldsymbol{o}(\lambda),
\tag{1.52}
$$

该式等价于

$$
\lim_{\lambda\to 0}\frac{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{e})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0)}{\lambda}=(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{e}.
\tag{1.53}
$$

我们把它定义为张量场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 沿 $\boldsymbol{e}$ 方向的**方向导数**：

$$
\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}_0)\triangleq(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{e}.
\tag{1.54}
$$

① 式中的两个 $\boldsymbol{o}\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\right)$ 是不同的，前者属于 $\mathbb{R}^m$，后者属于 $\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$．

1.3.3 左梯度与右梯度

我们已经知道，利用梯度算子

$$\boldsymbol{\nabla} \coloneqq \boldsymbol{g}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\boldsymbol{x}_0\right), \tag{1.55}$$

可以把张量场的梯度表示为

$$\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla}\right)\left(\boldsymbol{x}_0\right) = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x}_0\right) \otimes \left[\boldsymbol{g}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\right] \coloneqq \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^{\mu}}\left(\boldsymbol{x}_0\right) \otimes \boldsymbol{g}^{\mu}\left(\boldsymbol{x}_0\right). \tag{1.56}$$

“$\boldsymbol{\nabla}$”在右边，故称之为**右梯度**（简称**梯度**）. 相应地，自然会有**左梯度**：

$$\left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\Phi}\right)\left(\boldsymbol{x}_0\right) = \left[\boldsymbol{g}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\right] \otimes \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x}_0\right) \coloneqq \boldsymbol{g}^{\mu}\left(\boldsymbol{x}_0\right) \otimes \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^{\mu}}\left(\boldsymbol{x}_0\right). \tag{1.57}$$

张量积不存在交换律，因而这两者是不同的.

张量场的可微性可以用左梯度来等价表述：

$$\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\right) - \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x}_0\right) = \left[\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\right) - \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\right] \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\Phi}\right)\left(\boldsymbol{x}_0\right) + o\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^m}\right). \tag{1.58}$$

类似地，还有方向导数：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}_0) \triangleq \left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla}\right)\left(\boldsymbol{x}_0\right) \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\Phi}\right)\left(\boldsymbol{x}_0\right). \tag{1.59}$$

1.4 场论恒等式

1.4.1 Ricci 引理

首先来证明两个结论：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x^{\mu}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \in \mathscr{T}^2(\mathbb{R}^m), & \text{(1.60-a)} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial x^{\mu}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \in \mathscr{T}^3\left(\mathbb{R}^3\right), & \text{(1.60-b)} \end{cases}$$

其中的 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}$ 分别是度量张量和 Eddington 张量.

证明： 为方便起见，证明中我们将省去“$(\boldsymbol{x})$”.

先考察度量张量的偏导数：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x^{\mu}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(g_{ij}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j\right) \\ &= \nabla_{\mu} g_{ij}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j, \end{aligned} \tag{1.61}$$

式中，协变导数定义为

$$\nabla_{\mu} g_{ij} \triangleq \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\mu}} - \varGamma^{s}_{\ \mu i}\, g_{sj} - \varGamma^{s}_{\ \mu j}\, g_{is}. \tag{1.62}$$

以下有两种方法证明 $\nabla_{\mu} g_{ij} = 0$.

方法一利用度量的定义：

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\mu}} &\triangleq \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left\langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ &= \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^{\mu}}, \boldsymbol{g}_j \right\rangle_{\mathbb{R}^m} + \left\langle \boldsymbol{g}_i, \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^{\mu}} \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

根据 Christoffel 符号的定义（见 **??** 小节），有

$$= \Gamma_{\mu i,\,j} + \Gamma_{\mu j,\,i}. \tag{1.63}$$

另一方面，回忆 (**??**) 式：

$$\Gamma^{k}{}_{ij} = \Gamma_{ij,\,l}\, g^{kl}\ , \tag{1.64}$$

可有

$$\begin{cases} \Gamma^{s}{}_{\mu i}\, g_{sj} = \Gamma_{\mu i,\,k} g^{sk} g_{sj} = \Gamma_{\mu i,\,k}\delta^k_j = \Gamma_{\mu i,\,j}\,, & \text{(1.65-a)} \\ \Gamma^{s}{}_{\mu j}\, g_{is} = \Gamma_{\mu j,\,k} g^{sk} g_{is} = \Gamma_{\mu j,\,k}\delta^k_i = \Gamma_{\mu j,\,i}\,. & \text{(1.65-b)} \end{cases}$$

于是

$$\nabla_{\mu} g_{ij} = \Gamma_{\mu i,\,j} + \Gamma_{\mu j,\,i} - \Gamma_{\mu i,\,j} - \Gamma_{\mu j,\,i} = 0. \tag{1.66}$$

方法二则利用第一类 Christoffel 符号的性质 (**??**) 式：

$$\Gamma_{ij,\,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{1.67}$$

因而

$$\begin{aligned} & \Gamma^{s}{}_{\mu i}\, g_{sj} + \Gamma^{s}{}_{\mu j}\, g_{is} \\ &= \Gamma_{\mu i,\,j} + \Gamma_{\mu j,\,i} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x^j}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \tag{1.68}$$

显然，立刻就有

$$\nabla_{\mu} g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} = 0. \tag{1.69}$$

综上，因为 $\nabla_{\mu} g_{ij} = 0 \in \mathbb{R}$，所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \in \mathscr{T}^2(\mathbb{R}^m). \tag{1.70}$$

如果用其他形式的分量来表述这一结果，我们便有

$$\nabla_{\mu} g_{ij} = \nabla_{\mu} g^{ij} = \nabla_{\mu} \delta^i_j = 0. \tag{1.71}$$

此结论称为 **Ricci 引理**.

再来看 Eddington 张量的偏导数：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\epsilon^{i}{}_{j}{}^{k}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k\right) \\ &= \nabla_{\mu} \epsilon^{i}{}_{j}{}^{k}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_k\,, \end{aligned} \tag{1.72}$$

式中，

$$\nabla_{\mu} \epsilon^{i}{}_{j}{}^{k} \triangleq \frac{\partial \epsilon^{i}{}_{j}{}^{k}}{\partial x^\mu} + \Gamma^{i}{}_{\mu s}\, \epsilon^{s}{}_{j}{}^{k} - \Gamma^{s}{}_{\mu j}\, \epsilon^{i}{}_{s}{}^{k} + \Gamma^{k}{}_{\mu s}\, \epsilon^{i}{}_{j}{}^{s}. \tag{1.73}$$

根据定义，$\epsilon^{i\ k}_{\ j} = \det\left[\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right]$．因此

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \epsilon^{i\ k}_{\ j}}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\det\left[\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right]\right) \\
&= \det\left[\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^\mu}, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right] + \det\left[\boldsymbol{g}^i, \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^\mu}, \boldsymbol{g}^k\right] + \det\left[\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^\mu}\right]
\end{aligned}
$$

利用标架运动方程，有

$$
= \det\left[-\Gamma^i_{\ \mu s}\boldsymbol{g}^s, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right] + \det\left[\boldsymbol{g}^i, \Gamma^s_{\ \mu j}\boldsymbol{g}_s, \boldsymbol{g}^k\right] + \det\left[\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, -\Gamma^k_{\ \mu s}\boldsymbol{g}^s\right]
$$

再利用行列式的线性性，提出系数：

$$
= -\Gamma^i_{\ \mu s}\det\left[\boldsymbol{g}^s, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right] + \Gamma^s_{\ \mu j}\det\left[\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_s, \boldsymbol{g}^k\right] - \Gamma^k_{\ \mu s}\det\left[\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^s\right]
$$

代回 Eddington 张量的定义，可得

$$
= -\Gamma^i_{\ \mu s}\epsilon^{s\ k}_{\ j} + \Gamma^s_{\ \mu j}\epsilon^{i\ k}_{\ s} - \Gamma^k_{\ \mu s}\epsilon^{i\ s}_{\ j}. \tag{1.74}
$$

这与式 (1.73) 的后三项恰好抵消．于是便有 $\nabla_\mu \epsilon^{i\ k}_{\ j} = 0$．进而

$$
\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \in \mathscr{T}^3\left(\mathbb{R}^3\right). \tag{1.75}
$$

和之前的 Ricci 引理类似，Eddington 张量其他形式分量的偏导数，如 $\nabla_\mu \epsilon_{ijk}$、$\nabla_\mu \epsilon^{ijk}$ 等，也都等于零． □