

# 第一章 张量场可微性

## 1.1 张量的范数

### 1.1.1 赋范线性空间

对于一个线性空间  $\mathcal{V}$ ，它总是定义了线性结构：

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V} \text{ 和 } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in \mathcal{V}. \quad (1.1)$$

为了进一步研究的需要，我们还要引入范数的概念。所谓“范数”，就是对线性空间中任意元素大小的一种刻画。举个我们熟悉的例子， $m$  维 Euclid 空间  $\mathbb{R}^m$  中某个向量的范数，就定义为该向量在 Descartes 坐标下各分量的平方和的平方根。

一般而言，线性空间  $\mathcal{V}$  中的范数  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$  是从  $\mathcal{V}$  到  $\mathbb{R}$  的一个映照，并且需要满足以下三个条件：

#### 1. 非负性

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{V}} \geq 0 \quad (1.2)$$

以及非退化性

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{V}} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathcal{V}, \quad (1.3)$$

这里的  $\mathbf{0}$  是线性空间  $\mathcal{V}$  中的零元素，它是唯一存在的。

2. 零元是唯一的，线性空间中的元素  $\mathbf{x}$  与从  $\mathbf{0}$  指向它的向量一一对应。因此，线性空间中的元素也常被称为“向量”。

考虑线性空间中的数乘运算。从几何上看， $\mathbf{x}$  乘上  $\lambda$ ，就是将  $\mathbf{x}$  沿着原来的指向进行伸缩。显然有

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \text{ 和 } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{V}} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{V}}, \quad (1.4)$$

这称为正齐次性。

想要图吗？

3. 线性空间中的加法满足平行四边形法则。直观地看，就有

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}, \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{\mathcal{V}} \leq \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{V}} + \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{V}}, \quad (1.5)$$

这称为三角不等式。

定义了范数的线性空间称为赋范线性空间。

### 1.1.2 张量范数的定义

考虑  $p$  阶张量  $\Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)$ ，它可以用逆变分量或协变分量来表示：

$$\Phi = \begin{cases} \Phi^{i_1 \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}, & (1.6-a) \\ \Phi_{i_1 \dots i_p} g^{i_1} \otimes \dots \otimes g^{i_p}, & (1.6-b) \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \Phi^{i_1 \dots i_p} = \Phi(g^{i_1}, \dots, g^{i_p}). & (1.7-a) \\ \Phi_{i_1 \dots i_p} = \Phi(g_{i_1}, \dots, g_{i_p}), & (1.7-b) \end{cases}$$

张量的范数定义为

$$\|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} \triangleq \sqrt{\Phi^{i_1 \dots i_p} \Phi_{i_1 \dots i_p}} \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

$i_1 \dots i_p$  可独立取值，每个又有  $m$  种取法，所以根号下共有  $m^p$  项。注意  $\Phi^{i_1 \dots i_p}$  与  $\Phi_{i_1 \dots i_p}$  未必相等，因而根号下的部分未必是平方和，这与 Euclid 空间中向量的模是不同的。

复习一下 ?? 小节，我们可以用另一组（带括号的）基表示张量  $\Phi$ ：

$$\begin{cases} \Phi^{i_1 \dots i_p} = c_{(\xi_1)}^{i_1} \dots c_{(\xi_p)}^{i_p} \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)}, & (1.9-a) \\ \Phi_{i_1 \dots i_p} = c_{i_1}^{(\eta_1)} \dots c_{i_p}^{(\eta_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)}, & (1.9-b) \end{cases}$$

其中的  $c_{(\xi)}^i = \langle g_{(\xi)}, g^i \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ， $c_i^{(\eta)} = \langle g^{(\eta)}, g_i \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，它们满足

$$c_{(\xi)}^i c_i^{(\eta)} = \delta_{(\xi)}^{(\eta)}. \quad (1.10)$$

于是

$$\begin{aligned} & \Phi^{i_1 \dots i_p} \Phi_{i_1 \dots i_p} \\ &= \left( c_{(\xi_1)}^{i_1} \dots c_{(\xi_p)}^{i_p} \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \right) \left( c_{i_1}^{(\eta_1)} \dots c_{i_p}^{(\eta_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)} \right) \\ &= \left( c_{(\xi_1)}^{i_1} c_{i_1}^{(\eta_1)} \right) \dots \left( c_{(\xi_p)}^{i_p} c_{i_p}^{(\eta_p)} \right) \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)} \\ &= \delta_{(\xi_1)}^{(\eta_1)} \dots \delta_{(\xi_p)}^{(\eta_p)} \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)} \\ &= \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \Phi_{(\xi_1) \dots (\xi_p)}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

它是  $\Phi$  在另一组基下的逆变分量与协变分量乘积之和。

以上结果说明，张量的范数不依赖于基的选取，这就好比用不同的秤来称同一个人的体重，都将获得相同的结果。既然如此，不妨采用单位正交基来表示张量的范数：

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} &\triangleq \sqrt{\Phi^{i_1 \dots i_p} \Phi_{i_1 \dots i_p}} \\ &= \sqrt{\Phi^{(i_1) \dots (i_p)} \Phi_{(i_1) \dots (i_p)}} \\ &=: \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\Phi_{(i_1, \dots, i_p)})^2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

这里的  $\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle}$  表示张量  $\Phi$  在单位正交基下的分量，它的指标不区分上下。

有了这样的表示，很容易就可以验证张量范数符合之前的三个要求。一组数的平方和开根号，必然是非负的。至于非退化性，若范数为零，则所有分量均为零，自然成为零张量；反之，对于零张量，所有分量为零，范数也为零。将  $\Phi$  乘上  $\lambda$ ，则有

$$\begin{aligned}\|\lambda \Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} &= \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\lambda \Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \\ &= |\lambda| \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \\ &= |\lambda| \cdot \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)},\end{aligned}\tag{1.13}$$

于是正齐次性也得以验证。最后，利用 Cauchy–Schwarz 不等式，可有

$$\begin{aligned}\|\Phi + \Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 &= \sum \left( \Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} + \Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} \right)^2 \\ &= \sum \left[ (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 + 2\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle}\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} + (\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 \right] \\ &= \sum (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 + 2 \sum \Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle}\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} + \sum (\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 \\ &\leq \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 + 2\sqrt{\sum (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \sqrt{\sum (\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} + \|\Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 + 2\|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} \cdot \|\Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} + \|\Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= \left( \|\Phi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} + \|\Psi\|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} \right)^2.\end{aligned}\tag{1.14}$$

两边开方，即为三角不等式。

由此，我们就完整地给出了张量大小的刻画手段。可以看出，它实际上就是 Euclid 空间中向量模的直接推广。

### 1.1.3 简单张量的范数

根据 ?? 小节中的定义，简单张量是形如  $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$  的张量，其中的  $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^m$ ，它是三个向量的张量积。简单张量的范数为

$$\|\xi \otimes \eta \otimes \zeta\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)} = \|\xi\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\eta\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\zeta\|_{\mathbb{R}^m}.\tag{1.15}$$

证明：  $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$  的逆变分量为

$$(\xi \otimes \eta \otimes \zeta)^{ijk} \triangleq \xi \otimes \eta \otimes \zeta(g^i, g^j, g^k) = \xi^i \eta^j \zeta^k.\tag{1.16}$$

同理，它的协变分量为

$$(\xi \otimes \eta \otimes \zeta)_{ijk} \triangleq \xi \otimes \eta \otimes \zeta(g_i, g_j, g_k) = \xi_i \eta_j \zeta_k.\tag{1.17}$$

二者相乘，有

$$\begin{aligned}
& (\xi \otimes \eta \otimes \zeta)^{ijk} \cdot (\xi \otimes \eta \otimes \zeta)_{ijk} \\
&= (\xi^i \eta^j \zeta^k) \cdot (\xi_i \eta_j \zeta_k) \\
&= (\xi^i \xi_i) \cdot (\eta^j \eta_j) \cdot (\zeta^k \zeta_k).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

注意到

$$\|\xi\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

分别把二者用协变和逆变分量表示：

$$\begin{aligned}
&= \langle \xi^i g_i, \xi_j g^j \rangle_{\mathbb{R}^m} \\
&= \xi^i \xi_j \langle g_i, g^j \rangle_{\mathbb{R}^m} \\
&= \xi^i \xi_j \delta_i^j = \xi^i \xi_i,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

于是

$$(\xi \otimes \eta \otimes \zeta)^{ijk} \cdot (\xi \otimes \eta \otimes \zeta)_{ijk} = \|\xi\|_{\mathbb{R}^m}^2 \cdot \|\eta\|_{\mathbb{R}^m}^2 \cdot \|\zeta\|_{\mathbb{R}^m}^2. \tag{1.20}$$

两边开方，即得 (1.15) 式.  $\square$

## 1.2 张量场沿坐标曲线的变化率

在区域  $\mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$  上，若存在一个自变量用位置刻画的映照

$$\Phi : \mathfrak{D}_x \ni x \mapsto \Phi(x) \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m), \tag{1.21}$$

则称张量  $\Phi(x)$  <sup>①</sup> 是定义在  $\mathfrak{D}_x$  上的一个张量场。

下面我们以三阶张量为例。设在物理域  $\mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$  和参数域  $\mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$  之间已经建立了微分同胚  $X(x) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_x; \mathfrak{D}_X)$ 。在  $X(x)$  处，张量场  $\Phi(x)$  可以用分量形式表示为

$$\Phi(x) = \Phi_j^i{}^k(x) g_i(x) \otimes g^j(x) \otimes g_k(x) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m), \tag{1.22}$$

其中的  $g_i(x), g^j(x), g_k(x)$  都是局部基，而张量分量则定义为<sup>②</sup>

$$\Phi_j^i{}^k(x) \triangleq \Phi(x)[g_i(x), g^j(x), g_k(x)] \in \mathbb{R}. \tag{1.23}$$

类似地，当点沿着  $x^\mu$ -线运动到  $X(x + \lambda e_\mu)$  处时，有

$$\Phi(x + \lambda e_\mu) = \Phi_j^i{}^k(x + \lambda e_\mu) g_i(x + \lambda e_\mu) \otimes g^j(x + \lambda e_\mu) \otimes g_k(x + \lambda e_\mu). \tag{1.24}$$

现在研究  $\lambda \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$  时的极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \lambda e_\mu) - \Phi(x)}{\lambda} =: \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{1.25}$$

① 类似“ $\Phi(x)$ ”的记号在前文也表示张量  $\Phi$  作用在向量  $x$  上（“吃掉”了  $x$ ），此时有  $\Phi(x) \in \mathbb{R}$ ，注意不要混淆。符号有限，难免如此，还望诸位体谅。

② 请注意，下式  $\Phi$  之后的第一个圆括号表示位于  $x$  处；而后面的方括号则表示作用在这几个向量上。

与之前的向量值映照类似，该极限表示张量场  $\Phi(\mathbf{x})$  作为一个整体，相对于自变量第  $\mu$  个分量的变化率。式中， $\Phi(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu)$  已由 (1.24) 式给出。注意到张量分量实际上就是一个多元函数，于是

$$\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) = \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \cdot \lambda + \mathcal{O}_j^{i\ k}(\lambda) \in \mathbb{R}. \quad (1.26)$$

另外，三个基向量作为向量值映照，同样可以展开：

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \cdot \lambda + \mathcal{O}_i(\lambda) \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (1.27-a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{g}^j(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) = \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \cdot \lambda + \mathcal{O}^j(\lambda) \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (1.27-b)$$

$$\begin{cases} \mathbf{g}_k(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \cdot \lambda + \mathcal{O}_k(\lambda) \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (1.27-c)$$

如果直接展开，一共有 81 项，显然过于繁杂，不便操作。我们将按  $\lambda$  的次数逐次展开。首先看  $\lambda$  的零次项：

$$\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}), \quad (1.28)$$

这就是  $\Phi(\mathbf{x})$ 。然后是  $\lambda$  的一次项：

$$\begin{aligned} \lambda \cdot & \left[ \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) + \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \right. \\ & \left. + \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \otimes \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) + \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

剩下的至少是  $\lambda$  的二次项，我们将其统一写作“res.”（即余项）。

现在回头看之前的极限 (1.25) 式。 $\lambda$  的零次项与  $\Phi(\mathbf{x})$  相互抵消，而一次项就只剩下了系数部分。至于余项 res.，则要证明它趋于零。以

$$\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathcal{O}_i(\lambda) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \quad (1.30)$$

为例，我们需要证明它等于  $\mathcal{O}(\lambda) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$ ，即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathcal{O}_i(\lambda) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}}{\lambda} = 0 \in \mathbb{R}. \quad (1.31)$$

**证明：** 这里为了叙述方便，我们将暂时不使用 Einstein 求和约定，而是把求和号显式地写出来。于是分子部分可以写成

$$\left\| \sum_{i,j,k=1}^m \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathcal{O}_i(\lambda) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \right\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

根据范数的三角不等式，有

$$\leq \sum_{i,j,k=1}^m \|\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathcal{O}_i(\lambda) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

再利用正齐次性，可得

$$= \sum_{i,j,k=1}^m |\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x})| \cdot \|\mathcal{O}_i(\lambda) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

代入简单张量的范数，便有

$$= \sum_{i,j,k=1}^m |\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x})| \cdot \|\boldsymbol{\phi}_i(\lambda)\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\mathbf{g}^j(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\mathbf{g}_k(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.32)$$

这几项中只有  $\|\boldsymbol{\phi}_i(\lambda)\|_{\mathcal{F}^3(\mathbb{R}^m)}$  与  $\lambda$  有关。于是

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\phi}_i(\lambda) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\|_{\mathcal{F}^3(\mathbb{R}^m)}}{\lambda} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^m |\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x})| \cdot \|\mathbf{g}^j(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\mathbf{g}_k(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|\boldsymbol{\phi}_i(\lambda)\|_{\mathbb{R}^m}}{\lambda} \end{aligned}$$

根据定义，最后的极限为零，因此

$$= 0. \quad (1.33)$$

□

类似地，其他七十多项也都是  $\lambda$  的一阶无穷小量。而有限个无穷小量之和仍为无穷小量，于是  $\text{res.} \rightarrow 0$ 。

综上，我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) &:= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) - \Phi(\mathbf{x})}{\lambda} \\ &= \left( \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k + \Phi_j^{i\ k} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^\mu} \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k + \Phi_j^{i\ k} \mathbf{g}_i \otimes \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial x^\mu} \otimes \mathbf{g}_k + \Phi_j^{i\ k} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^\mu} \right)(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.34)$$

式中， $\partial \mathbf{g}_i / \partial x^\mu(\mathbf{x})$  可以用 Christoffel 符号表示：

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) = \Gamma_{\mu i}^s \mathbf{g}_s(\mathbf{x}). \quad (1.35)$$

因此 (1.34) 式的第二项

$$\begin{aligned} & \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \\ &= \Gamma_{\mu i}^s \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_s(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$i$  和  $s$  都是哑标，不妨进行一下交换：

$$= \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}). \quad (1.36)$$

同样，后面的两项也可进行类似的处理。这样便有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) &:= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) - \Phi(\mathbf{x})}{\lambda} \\ &= \left[ \left( \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^{s\ k} - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^{i\ k} + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^{i\ s} \right) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \right](\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$=: \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}), \quad (1.37)$$

式中，我们称  $\nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$  为张量分量  $\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x})$  相对于  $x^\mu$  的协变导数，其定义为：

$$\nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \triangleq \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^{s\ k}(\mathbf{x}) - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^{i\ k}(\mathbf{x}) + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^{i\ s}(\mathbf{x}). \quad (1.38)$$

### 1.3 张量场的梯度

我们在参数域中的内点  $\mathbf{x}_0$  处取一个半径为  $\delta$  的邻域  $\mathfrak{B}_\delta(\mathbf{x}_0)$ . 若使自变量变化到  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ ，则在物理域中，对应的点就将从  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)$  变化到  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$ . 考察定义在参数域  $\mathfrak{D}_x$  上的张量场  $\Phi(\mathbf{x})$ ，它的变化为

$$\begin{aligned} & \Phi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}_0) \\ &= \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) g_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \otimes g^j(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \otimes g_k(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \\ & \quad - \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0) g_i(\mathbf{x}_0) \otimes g^j(\mathbf{x}_0) \otimes g_k(\mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (1.39)$$

与之前一样将第一部分逐项展开，有

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}_j^i(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}, \end{aligned} \right. \quad (1.40-a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} g_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= g_i(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial g_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}_i(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \right. \quad (1.40-b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} g^j(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= g^j(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial g^j}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}^j(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \right. \quad (1.40-c)$$

$$\left\{ \begin{aligned} g_k(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= g_k(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial g_k}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}_k(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \right. \quad (1.40-d)$$

不要忘记对哑标  $\mu$  进行求和.

不显含  $\mathbf{h}$  的只有每行的第一项；它们组合起来，与式 (1.39) 的第二部分相互抵消. 再看  $\mathbf{h}$  的一次项：<sup>①</sup>

$$\left[ \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} g_i \otimes g^j \otimes g_k + \Phi_j^{i\ k} \left( \frac{\partial g_i}{\partial x^\mu} \otimes g^j \otimes g_k + g_i \otimes \frac{\partial g^j}{\partial x^\mu} \otimes g_k + g_i \otimes g^j \otimes \frac{\partial g_k}{\partial x^\mu} \right) \right] (\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu. \quad (1.41)$$

利用 Christoffel 符号又可以把它写成

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} g_i \otimes g^j \otimes g_k + \Phi_j^{i\ k} \left( \Gamma_{\mu i}^s g_s \right) \otimes g^j \otimes g_k \right. \\ & \quad \left. - \Phi_j^{i\ k} g_i \otimes \left( \Gamma_{\mu s}^j g^s \right) \otimes g_k + \Phi_j^{i\ k} g_i \otimes g^j \otimes \left( \Gamma_{\mu k}^s g_s \right) \right] (\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu \\ &= \left( \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} g_i \otimes g^j \otimes g_k + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^{s\ k} g_i \otimes g^j \otimes g_k \right. \\ & \quad \left. - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^{i\ k} g_i \otimes g^j \otimes g_k + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^{i\ s} g_i \otimes g^j \otimes g_k \right) (\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu \end{aligned}$$

<sup>①</sup> 实际是  $h^\mu$  的一次项. 别忘了求和.

$$= \left[ \left( \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^{s\ k} - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^{i\ k} + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^{i\ s} \right) g_i \otimes g^j \otimes g_k \right] (x_0) \cdot h^\mu. \quad (1.42)$$

至于高阶项，它们都等于  $\mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$ ，并且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^m} \frac{\|\mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m})\|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}}{\|h\|_{\mathbb{R}^m}} = 0 \in \mathbb{R}. \quad (1.43)$$

证明与 (1.31) 式类似.

整理一下，我们有

$$\begin{aligned} & \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) \\ &= \left[ \left( \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^{s\ k} - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^{i\ k} + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^{i\ s} \right) g_i \otimes g^j \otimes g_k \right] (x_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m}) \end{aligned}$$

利用协变导数，有

$$=: \left[ \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(x_0) g_i(x_0) \otimes g^j(x_0) \otimes g_k(x_0) \right] h^\mu + \mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m}). \quad (1.44)$$

至此，从微分学的角度来看，任务已经完成. 但对于张量分析而言，我们还需要再做一点微小的工作. 简单张量部分再并上一个  $g^\mu$ ，从而使张量升一阶；后面则改成  $h^\nu g_\nu(x_0)$ ，并利用点乘保持总阶数不变：

$$\begin{aligned} & \left[ \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(x_0) g_i(x_0) \otimes g^j(x_0) \otimes g_k(x_0) \right] h^\mu \\ &= \left[ \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(x_0) g_i(x_0) \otimes g^j(x_0) \otimes g_k(x_0) \otimes g^\mu(x_0) \right] \cdot \left[ h^\nu g_\nu(x_0) \right]. \end{aligned} \quad (1.45)$$

这里的“点乘”，其实就是  $e$  点积在  $e = 1$  时的情况. 实际上，

$$g^\mu(x_0) \cdot \left[ h^\nu g_\nu(x_0) \right] = h^\nu \delta_\nu^\mu = h^\mu. \quad (1.46)$$

这里用到了局部基的对偶关系 (??) 式.

此时，我们获得了一个四阶张量与  $h^\nu g_\nu(x_0)$  的点积. 接下来讨论该项的意义. 参数域中  $x_0$  发生  $h = h^i e_i$  的变化时，根据向量值映照  $X(x)$  的可微性，对应物理域中的变化为

$$\begin{aligned} X(x_0 + h) - X(x_0) &= DX(x_0)(h) + \mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m}) \\ &=: \frac{\partial X}{\partial x^\nu}(x_0) h^\nu + \mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m}) \end{aligned}$$

代入 ?? 小节中局部协变基的定义，可有

$$=: h^\nu g_\nu(x_0) + \mathcal{O}(\|h\|_{\mathbb{R}^m}). \quad (1.47)$$

代入式 (1.44)，有

$$\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)$$



$$= \left[ \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0) \ g_i(\mathbf{x}_0) \otimes g^j(\mathbf{x}_0) \otimes g_k(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0) \right] \\ \cdot \left[ X(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0) + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \right] + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m})$$

合并掉一阶无穷小量<sup>①</sup>，可得

$$= \left[ \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0) \ g_i(\mathbf{x}_0) \otimes g^j(\mathbf{x}_0) \otimes g_k(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0) \right] \\ \cdot \left[ X(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0) \right] + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \\ = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0) \right] \cdot \left[ X(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0) \right] + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m). \quad (1.48)$$

引入记号

$$\Phi \otimes \left[ g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \right] := \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0), \quad (1.49)$$

再引入梯度算子

$$\nabla := g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0), \quad (1.50)$$

我们得到的结论就可以表述为

$$\Phi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}_0) = (\Phi \otimes \nabla)(\mathbf{x}_0) \cdot \left[ X(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0) \right] + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m), \quad (1.51)$$

式中的“ $\cdot$ ”表示点乘。以上结果称之为张量场的可微性，它表明，由一点处的位置移动所引起张量场的变化，可以用该点处张量场的梯度点乘物理空间中的位置差别来近似，误差为一阶无穷小量。以上分析基于三阶张量。但显然，对于  $p$  阶张量，将会有完全一致的结果。

---

<sup>①</sup> 式中的两个  $\mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^m})$  是不同的，前者属于  $\mathbb{R}^m$ ，后者属于  $\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$ 。