第一章　曲线上的标架及其运动方程

1.1　Frenet 标架（弧长参数）

1.1.1　$\mathbb{R}^m$ 空间中曲线的表示

$\mathbb{R}^m$ 空间中的**曲线**，就是一个单参数的向量值映照：

$$\boldsymbol{X}(t):\ [\alpha,\,\beta]\ni t\mapsto \boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix}X^1(t)\\ \vdots\\ X^m(t)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

考虑该向量值映照关于参数 t 的变化率

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)\coloneqq\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{X}(t+\Delta t)-\boldsymbol{X}(t)}{\Delta t}\eqqcolon\begin{bmatrix}\dot{X}^1(t)\\ \vdots\\ \dot{X}^m(t)\end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

按照物理上的习惯，我们用点表示对 t 的导数．若该极限存在，则称 $\boldsymbol{X}(t)\in\mathbb{R}^m$ 在点 t 处**可微**．此时，$\dot{\boldsymbol{X}}(t)$ 称为曲线 $\boldsymbol{X}(t)$ 的**切向量**．上述极限可以等价地表述为

$$\boldsymbol{X}(t+\Delta t)=\boldsymbol{X}(t)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\Delta t+o(\Delta t). \tag{1.3}$$

在 t_0 处，则可以写成

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}\left(t_0\right)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\left(t_0\right)\cdot\left(t-t_0\right)+o\left(t-t_0\right). \tag{1.4}$$

该方程表示一条直线，称为曲线 $\boldsymbol{X}(t)$ 在 t_0 处的**切线**.

在物理域中，**弧长** s 可以表示为

$$s=\int_\alpha^\beta\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)\right|_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}t\,, \tag{1.5}$$

两边对 t 求导，可有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}(t)\right|_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.6}$$

在本节中，我们将采用弧长作为曲线的参数，即

$$\boldsymbol{r}(s):\ [0,\,L]\ni s\mapsto \boldsymbol{r}(s)\in\mathbb{R}^m. \tag{1.7}$$

对应的切向量为

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s)\coloneqq\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)}{\Delta s}. \tag{1.8}$$

根据链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\Big/\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|_{\mathbb{R}^m}, \tag{1.9}$$

因而 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 是一个单位向量，即

$$|\dot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m}=1. \tag{1.10}$$

接下来继续对 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 求导：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\coloneqq\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}(s). \tag{1.11}$$

由于 $|\dot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m}=1$，因此

$$1=|\dot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m}^2=\left\langle\dot{\boldsymbol{r}}(s),\,\dot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}, \tag{1.12}$$

两边求导，则有

$$0=\left\langle\ddot{\boldsymbol{r}}(s),\,\dot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}+\left\langle\dot{\boldsymbol{r}}(s),\,\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}=2\cdot\left\langle\ddot{\boldsymbol{r}}(s),\,\dot{\boldsymbol{r}}(s)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.13}$$

内积为零，就意味着正交：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\perp\dot{\boldsymbol{r}}(s). \tag{1.14}$$

采用一般参数时，(1.10) 式和 (1.14) 未必成立．解决方案见 1.2 节．

现在我们把目光限定在 $\mathbb{R}^3$ 空间中．如前所述，$\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 已经是单位向量，我们将其记为 $\boldsymbol{T}(s)$；而 $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ 仍需作单位化处理，其结果记作 $\boldsymbol{N}(s)$，即

$$\boldsymbol{N}(s)\coloneqq\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}=\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}/\mathrm{d}s}{\left|\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}/\mathrm{d}s\right|_{\mathbb{R}^3}}=\frac{\dot{\boldsymbol{T}}(s)}{|\dot{\boldsymbol{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}. \tag{1.15}$$

最后，只要再令

$$\boldsymbol{B}(s)\coloneqq\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s), \tag{1.16}$$

我们便有了 $\mathbb{R}^3$ 空间中的一组单位正交基：

$$\left\{\boldsymbol{T}(s),\,\boldsymbol{N}(s),\,\boldsymbol{B}(s)\right\}\subset\mathbb{R}^3, \tag{1.17}$$

它们称为 **Frenet 标架**．其中，$\boldsymbol{T}(s)$、$\boldsymbol{N}(s)$、$\boldsymbol{B}(s)$，分别叫做**单位切向量**、**主单位法向量**和**副单位法向量**．

1.1.2 标架运动方程

考虑 Frenet 标架关于弧长参数 s 的变化率，即标架运动方程：

$$\left\{\dot{\boldsymbol{T}}(s),\,\dot{\boldsymbol{N}}(s),\,\dot{\boldsymbol{B}}(s)\right\}\subset\mathbb{R}^3. \tag{1.18}$$

为此，我们需要先给出一个引理：设 $\left\{\boldsymbol{e}_i(t)\right\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一组活动单位正交基，它们满足

$$\left\langle\boldsymbol{e}_i(t),\,\boldsymbol{e}_j(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^m}=\delta_{ij}. \tag{1.19}$$

这组基的导数仍位于 $\mathbb{R}^m$ 空间，用自身展开，可有

$$\left[\dot{\boldsymbol{e}}_1(t),\,\cdots,\,\dot{\boldsymbol{e}}_m(t)\right]=\left[\boldsymbol{e}_1(t),\,\cdots,\,\boldsymbol{e}_m(t)\right]\boldsymbol{P}(t). \tag{1.20}$$

此时，我们有

$$\boldsymbol{P}(t)\in\mathsf{Skw}, \tag{1.21}$$

即 $\boldsymbol{P}(t)$ 是一个反对称矩阵．

证明： 对式 (1.19) 两边求导，得

$$\left\langle \dot{\boldsymbol{e}}_i(t),\, \boldsymbol{e}_j(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} + \left\langle \boldsymbol{e}_i(t),\, \dot{\boldsymbol{e}}_j(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = 0 \in \mathbb{R}, \tag{1.22}$$

写成矩阵形式，为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{e}}_1^{\mathsf{T}}(t) \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{e}}_m^{\mathsf{T}}(t) \end{bmatrix} \left[\boldsymbol{e}_1(t),\, \cdots,\, \boldsymbol{e}_m(t) \right] + \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathsf{T}}(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_m^{\mathsf{T}}(t) \end{bmatrix} \left[\dot{\boldsymbol{e}}_1(t),\, \cdots,\, \dot{\boldsymbol{e}}_m(t) \right] = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{1.23}$$

引入矩阵 $\boldsymbol{E} = \left[\boldsymbol{e}_1(t),\, \cdots,\, \boldsymbol{e}_m(t) \right]$，则上式与 (1.20) 式可以分别表示成

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^{m\times m} \tag{1.24}$$

和

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{1.25}$$

两式联立，可有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} &= \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \dot{\boldsymbol{E}} \\ &= \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}\right)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}\right) \\ &= \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} \left(\boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}\right) + \left(\boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}\right) \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{P}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

即 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{P}$. 按照定义，便知 $\boldsymbol{P}(t) \in \mathsf{Skw}$. □

根据这一引理，便可有

$$\left[\dot{\boldsymbol{T}}(s),\, \dot{\boldsymbol{N}}(s),\, \dot{\boldsymbol{B}}(s) \right] = \left[\boldsymbol{T}(s),\, \boldsymbol{N}(s),\, \boldsymbol{B}(s) \right] \boldsymbol{P}(s), \tag{1.27}$$

其中的 $\boldsymbol{P}(s)$ 是一个三阶反对称矩阵. 显然，它的对角元均为零：

$$\boldsymbol{P}(s) = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.28}$$

这里，我们用 “$*$” 表示待定元素. 由 (1.15) 式，可知

$$\dot{\boldsymbol{T}}(s) = \left| \dot{\boldsymbol{T}}(s) \right|_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{N}(s) =: \kappa(s)\, \boldsymbol{N}(s). \tag{1.29}$$

式中的 $\kappa(s) := \left| \dot{\boldsymbol{T}}(s) \right|_{\mathbb{R}^3}$. 于是，矩阵 $\boldsymbol{P}(s)$ 的第一列就成为了 $[0,\, \kappa(s),\, 0]^{\mathsf{T}}$. 利用反对称性，可有

$$\boldsymbol{P}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.30}$$

我们 “强行” 引入了 $\tau(s)$，用来取代占位符 $*$. 当然，它的具体形式仍然待定.

1.1.3 曲率和挠率

利用矩阵 $\boldsymbol{P}(s)$，可以看出

$$\dot{\boldsymbol{B}}(s) = -\tau(s)\,\boldsymbol{N}(s). \tag{1.31}$$

再与 $\boldsymbol{N}(s)$ 做内积[①]，便有

$$\dot{\boldsymbol{B}}(s) \bullet \boldsymbol{N}(s) = -\tau(s). \tag{1.32}$$

根据定义 (1.16) 式，

$$\boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}(s), \tag{1.33}$$

于是

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{B}}(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big[\boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}(s)\Big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\dot{\boldsymbol{r}}(s) \times \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}\right] \\ &= \ddot{\boldsymbol{r}}(s) \times \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} + \dot{\boldsymbol{r}}(s) \times \frac{\dddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}\right)\dot{\boldsymbol{r}}(s) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(s).\end{aligned} \tag{1.34}$$

显然，该式中的第一项为零．考虑 $\dot{\boldsymbol{B}}(s) \bullet \boldsymbol{N}(s)$，注意到 $\boldsymbol{N}(s)$ 与 $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ 平行，因此与 $\dot{\boldsymbol{r}}(s) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ 垂直，所以第三项在点乘 $\boldsymbol{N}(s)$ 后也为零．这样便有

$$\begin{aligned}\tau(s) &= -\dot{\boldsymbol{B}}(s) \bullet \boldsymbol{N}(s) \\ &= -\dot{\boldsymbol{r}}(s) \times \frac{\dddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \bullet \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \\ &= -\frac{1}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|^2_{\mathbb{R}^3}}\Big[\dot{\boldsymbol{r}}(s) \times \dddot{\boldsymbol{r}}(s) \bullet \ddot{\boldsymbol{r}}(s)\Big]\end{aligned}$$

利用向量三重积的性质，再把负号移进来，可得

$$= \frac{1}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|^2_{\mathbb{R}^3}} \det\Big[\dot{\boldsymbol{r}}(s), \ddot{\boldsymbol{r}}(s), \dddot{\boldsymbol{r}}(s)\Big]. \tag{1.35}$$

至此，我们就得到了 $\mathbb{R}^3$ 空间中以弧长为参数的 *Frenet* 标架：

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}(s) = \dot{\boldsymbol{r}}(s), & \text{(1.36-a)} \\ \boldsymbol{N}(s) = \dfrac{\dot{\boldsymbol{T}}(s)}{\big|\dot{\boldsymbol{T}}(s)\big|_{\mathbb{R}^3}} = \dfrac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}, & \text{(1.36-b)} \\ \boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}(s) = \dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}(s) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}. & \text{(1.36-c)}\end{cases}$$

以及对应的标架运动方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{T}}(s) = \kappa(s)\,\boldsymbol{N}(s), & \text{(1.37-a)} \\ \dot{\boldsymbol{N}}(s) = -\kappa(s)\,\boldsymbol{T}(s) + \tau(s)\,\boldsymbol{B}(s), & \text{(1.37-b)} \\ \dot{\boldsymbol{B}}(s) = -\tau(s)\,\boldsymbol{N}(s), & \text{(1.37-c)}\end{cases}$$

其中，

$$\kappa(s) \triangleq \big|\dot{\boldsymbol{T}}(s)\big|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3} \tag{1.38}$$

① 为了表述的清晰，本小节中用“$\bullet$”来表示内积．

称为**曲率**，

$$\tau(s) \triangleq \frac{1}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det\left[\dot{\boldsymbol{r}}(s), \ddot{\boldsymbol{r}}(s), \dddot{\boldsymbol{r}}(s)\right] = \frac{1}{\kappa^2(s)} \det\left[\dot{\boldsymbol{r}}(s), \ddot{\boldsymbol{r}}(s), \dddot{\boldsymbol{r}}(s)\right] \tag{1.39}$$

称为**挠率**.

1.1.4 Frenet 标架的几何意义

利用 Taylor 公式，把 $\boldsymbol{r}(s_0 + \Delta s)$ 展开至三阶，可得

$$\boldsymbol{r}(s_0 + \Delta s) = \boldsymbol{r}(s_0) + \dot{\boldsymbol{r}}(s_0) \cdot (\Delta s) + \frac{1}{2} \ddot{\boldsymbol{r}}(s_0) \cdot (\Delta s)^2 + \frac{1}{6} \dddot{\boldsymbol{r}}(s_0) \cdot (\Delta s)^3 + o\left((\Delta s)^3\right). \tag{1.40}$$

其中的一阶和二阶导数，根据式 (1.36)，可以分别表示为

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s_0) = \boldsymbol{T}(s_0) \tag{1.41}$$

和

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0) = \left|\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)\right|_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{N}(s_0) = \kappa(s_0) \boldsymbol{N}(s_0). \tag{1.42}$$

至于三阶导数，可用一组单位正交基（此处当然要用 Frenet 标架）展开：

$$\dddot{\boldsymbol{r}}(s_0) = \left[\dddot{\boldsymbol{r}}(s_0) \bullet \boldsymbol{T}(s_0)\right] \boldsymbol{T}(s_0) + \left[\dddot{\boldsymbol{r}}(s_0) \bullet \boldsymbol{N}(s_0)\right] \boldsymbol{N}(s_0) + \left[\dddot{\boldsymbol{r}}(s_0) \bullet \boldsymbol{B}(s_0)\right] \boldsymbol{B}(s_0). \tag{1.43}$$

关于 $\boldsymbol{T}(s_0)$、$\boldsymbol{N}(s_0)$、$\boldsymbol{B}(s_0)$ 合并同类项，可得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}(s_0 + \Delta s) \\
={}& \boldsymbol{r}(s_0) + \left[\Delta s + \frac{1}{6} \dddot{\boldsymbol{r}}(s_0) \bullet \boldsymbol{T}(s_0)(\Delta s)^3\right] \boldsymbol{T}(s_0) \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} \kappa(s_0)(\Delta s)^2 + \frac{1}{6} \dddot{\boldsymbol{r}}(s_0) \bullet \boldsymbol{N}(s_0)(\Delta s)^3\right] \boldsymbol{N}(s_0) \\
&\quad + \left[\frac{1}{6} \dddot{\boldsymbol{r}}(s_0) \bullet \boldsymbol{B}(s_0)(\Delta s)^3\right] \boldsymbol{B}(s_0) + o\left((\Delta s)^3\right) \\
={}& \boldsymbol{r}(s_0) + \left[\boldsymbol{T}(s_0), \boldsymbol{N}(s_0), \boldsymbol{B}(s_0)\right] \begin{bmatrix} \Delta s + \frac{1}{6} \dddot{\boldsymbol{r}}(s_0) \bullet \boldsymbol{T}(s_0)(\Delta s)^3 + o\left((\Delta s)^3\right) \\ \frac{1}{2} \kappa(s_0)(\Delta s)^2 + \frac{1}{6} \dddot{\boldsymbol{r}}(s_0) \bullet \boldsymbol{N}(s_0)(\Delta s)^3 + o\left((\Delta s)^3\right) \\ \frac{1}{6} \dddot{\boldsymbol{r}}(s_0) \bullet \boldsymbol{B}(s_0)(\Delta s)^3 + o\left((\Delta s)^3\right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.44-a}$$

若只精确到二阶无穷小量，则为

$$= \boldsymbol{r}(s_0) + \left[\boldsymbol{T}(s_0), \boldsymbol{N}(s_0), \boldsymbol{B}(s_0)\right] \begin{bmatrix} \Delta s + o\left((\Delta s)^2\right) \\ \frac{1}{2} \kappa(s_0)(\Delta s)^2 + o\left((\Delta s)^2\right) \\ o\left((\Delta s)^3\right) \end{bmatrix}. \tag{1.44-b}$$

以上推导说明，当误差限制在二阶无穷小量时，$\boldsymbol{B}$ 方向分量为零. 这样，我们就可以认为曲线只在 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 张成的平面中运动，此平面称为**密切平面**. 设其横纵坐标分别为 $\tilde{x}$、$\tilde{y}$，则有

$$\begin{cases} \tilde{x} = \Delta s, & (1.45\text{-a}) \\ \tilde{y} = \frac{1}{2} \kappa(s_0)(\Delta s)^2 = \frac{1}{2} \kappa(s_0) \tilde{x}^2. & (1.45\text{-b}) \end{cases}$$

如图所示．该抛物线与圆心位于 $\left(0,\,\kappa^{-1}(s_0)\right)$，半径等于 $\kappa^{-1}(s_0)$ 的圆也是密切的．

密切圆，图见“曲线上标架-Part 02”20 min．

只有考虑三阶无穷小量时，才可以看出曲线偏离密切平面．显然，这一偏离的“速率”将由挠率刻画．

1.1.5 应用：速度与加速度

三维空间中，质点的运动**轨迹**可以用 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 来表示，其中的参数 t 为时间．质点运动的**速度** $\boldsymbol{v}(t)$，定义为

$$\boldsymbol{v}(t) \triangleq \dot{\boldsymbol{r}}(t) \coloneqq \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(s)\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t). \tag{1.46}$$

由式 (1.5)，弧长的定义为

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\boldsymbol{r}}(\xi)|_{\mathbb{R}^m}\,\mathrm{d}\xi\,, \tag{1.47}$$

求导，可得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.48}$$

再代入 Frenet 标架的定义 (1.36-a) 式，便有

$$\boldsymbol{v}(t) = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}\boldsymbol{T}(s). \tag{1.49}$$

可见，速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 的方向与 $\boldsymbol{T}(t)$ 平行．另外由于 $\boldsymbol{T}(t)$ 是单位向量，因此速度的大小

$$|\boldsymbol{v}(t)|_{\mathbb{R}^m} = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}\,, \tag{1.50}$$

我们称之为**速率**．

速度相对时间的变化率称为**加速度**：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(t) \triangleq \dot{\boldsymbol{v}}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}\cdot\boldsymbol{T}(s) + |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}(s)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}\cdot\boldsymbol{T}(s) + |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}\cdot\dot{\boldsymbol{T}}(s)\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)\end{aligned}$$

代入标架运动方程 (1.37-a) 式以及弧长的导数 (1.48) 式，可有

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}\cdot\boldsymbol{T}(s) + |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}\cdot\kappa(s)\,\boldsymbol{N}(s)\cdot|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}$$

换成速率，则为

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}(t)|_{\mathbb{R}^m}\cdot\boldsymbol{T}(s) + |\boldsymbol{v}(t)|^2_{\mathbb{R}^m}\,\kappa(s)\,\boldsymbol{N}(s). \tag{1.51}$$

由此可知，加速度只有 $\boldsymbol{T}$ 分量和 $\boldsymbol{N}$ 分量；当质点做匀变速运动时，则只有 $\boldsymbol{N}$ 分量．

1.2 Frenet 标架（一般参数）

本节我们重回一般参数下的映照形式，即

$$\boldsymbol{r}(t):\ [\alpha,\,\beta] \ni t \mapsto \boldsymbol{r}(t) \in \mathbb{R}^3, \tag{1.52}$$

其中的参数 t 与弧长 s 的关系同式 (1.6):

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}. \tag{1.53}$$

后文的推导需要用到向量的**内蕴正交分解**：$\forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^3$ 且满足 $|\boldsymbol{e}|_{\mathbb{R}^3} = 1$，有

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi} \bullet \boldsymbol{e}\right) \boldsymbol{e} - \left(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{e}\right) \times \boldsymbol{e}. \tag{1.54}$$

证明见 内蕴正交分解.

1.2.1 标架的形式

首先来处理单位切向量：[①]

$$\boldsymbol{T}(s) \triangleq \dot{\boldsymbol{r}}(s) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) \Big/ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \tag{1.55}$$

接下来计算它的导数 $\dot{\boldsymbol{T}}(s)$：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{T}}(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right] \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s)\end{aligned}$$

代入 (1.53) 式，得

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right] \\ &= \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^2_{\mathbb{R}^3}}\left[\ddot{\boldsymbol{r}}(t) - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}\right].\end{aligned} \tag{1.56}$$

此处涉及到了模的导数．考虑

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^2_{\mathbb{R}^3}\right] = 2\,|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}; \tag{1.57}$$

另一方面，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^2_{\mathbb{R}^3}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\boldsymbol{r}}(t) \bullet \dot{\boldsymbol{r}}(t)\right] = 2\,\dot{\boldsymbol{r}}(t) \bullet \ddot{\boldsymbol{r}}(t). \tag{1.58}$$

联立两式，便有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) \bullet \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \tag{1.59}$$

代回 (1.56) 式，继续推导：

$$\dot{\boldsymbol{T}}(s) = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^2_{\mathbb{R}^3}}\left[\ddot{\boldsymbol{r}}(t) - \left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \bullet \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right)\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right]$$

式中的 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)\big/|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}$ 是一个单位向量，它相当于式 (1.54) 中的 $\boldsymbol{e}$，而 $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ 则相当于 $\boldsymbol{\xi}$．因此，利用向量的内蕴正交分解，有

$$= -\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^2_{\mathbb{R}^3}}\left[\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \times \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right) \times \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right]$$

① 此时我们把 s 作为参数，只不过 $s = s(t)$．所以 $\boldsymbol{T}(s)$ 实际上和 $\boldsymbol{T}(t)$ 相等．

$$= -\frac{\big(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\big)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^4_{\mathbb{R}^3}}. \tag{1.60}$$

根据曲率的定义 (1.38) 式，

$$\kappa(s) \triangleq \big|\dot{\boldsymbol{T}}(s)\big|_{\mathbb{R}^3} = \frac{\Big|\big(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\big)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\Big|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^4_{\mathbb{R}^3}}. \tag{1.61}$$

注意到 $\big(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\big)\perp\dot{\boldsymbol{r}}(t)$，所以

$$\Big|\big(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\big)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\Big|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}\cdot|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}. \tag{1.62}$$

这样，曲率就能够写成

$$\kappa(s) = \frac{|\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^3_{\mathbb{R}^3}}. \tag{1.63}$$

利用定义 (1.36-b) 式，$\boldsymbol{N}(s)$ 也便可以易如反掌地写出来了：

$$\boldsymbol{N}(s) \triangleq \frac{\dot{\boldsymbol{T}}(s)}{\big|\dot{\boldsymbol{T}}(s)\big|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{\dot{\boldsymbol{T}}(s)}{\kappa(s)} = -\frac{\big(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\big)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \tag{1.64}$$

最后轮到 $\boldsymbol{B}(s)$ 了：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s) &= \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\times\left[-\frac{\big(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\big)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right] \\ &= \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\times\left[-\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right)\times\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right]\end{aligned}$$

这样处理是为了倒过来应用内蕴正交分解：

$$= \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\times\left[\ddot{\boldsymbol{r}}(t)-\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\bullet\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right)\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right]$$

由于 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)=0$，因而方括号中的第二项可以略去，使得结果大为简化：

$$= \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \tag{1.65}$$

1.2.2 曲率和挠率

曲率在计算 $\boldsymbol{N}$ 的时候已经顺带求过了，我们现在来求挠率. 根据式 (1.39)，有

$$\tau(s) = \frac{1}{\kappa^2(s)}\det\Big[\dot{\boldsymbol{r}}(s),\ \ddot{\boldsymbol{r}}(s),\ \dddot{\boldsymbol{r}}(s)\Big]. \tag{1.66}$$

因此首先需要知道 $\boldsymbol{r}$ 关于 s 的一至三阶导数. 由 (1.55) 式，可知

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{T}(s) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}; \tag{1.67}$$

二阶导数则要利用式 (1.60)：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s) = \dot{\boldsymbol{T}}(s) = -\frac{\big(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\big)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^4_{\mathbb{R}^3}}; \tag{1.68}$$

进而又可得到三阶导数：

$$\dddot{\boldsymbol{r}}(s)=\frac{\mathrm{d}\ddot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}(s)=-\frac{\mathrm{d}\ddot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}(s)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=-\frac{\mathrm{d}\ddot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}(s)\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}\right]\cdot\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}.\tag{1.69}$$

最后一步仍然利用了 (1.53) 式．我们知道，

$$\det\left[\dot{\boldsymbol{r}}(s),\ \ddot{\boldsymbol{r}}(s),\ \dddot{\boldsymbol{r}}(s)\right]=\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\bullet\dddot{\boldsymbol{r}}(s).$$

首先考察叉乘项：

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(s)=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\times\left[-\frac{\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}\right]$$

注意到该式的结构与 (1.65) 式的第二步非常相似，因此我们采用同样的办法处理，即先调整系数，再反向运用内蕴正交分解：

$$=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3}\times\left[-\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right)\times\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right]$$

$$=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3}\times\left[\ddot{\boldsymbol{r}}(t)-\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\bullet\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right)\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\right]$$

同样，因为 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)=0$，所以又只剩下了第一项，即

$$=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3}.\tag{1.70}$$

再来看 $\dddot{\boldsymbol{r}}(t)$．

$$\begin{aligned}
\dddot{\boldsymbol{r}}(t)&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}\right]\cdot\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\\
&=-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right]\cdot|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4+\left[\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4\right]}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^8}\cdot\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}\\
&=-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)+\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5}-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4\right]}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^9}\cdot\left[\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right]\\
&=-\frac{\left(\dddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)+\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)+\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5}-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4\right]}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^9}\cdot\left[\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right]
\end{aligned}$$

第一项中，$\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=0$．所以

$$=-\frac{\left(\dddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)+\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5}-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4\right]}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^9}\cdot\left[\left(\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right].\tag{1.71}$$

式中的高亮部分与另一个向量做叉乘后，垂直于 $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)$；而另一方面，$\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ 又平行于 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$．因此二者做点乘后即为零．这样，我们就有

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\bullet\dddot{\boldsymbol{r}}(s)=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3}\bullet\left[-\frac{\left(\dddot{\boldsymbol{r}}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5}\right]$$

$$= \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \bullet \left[-\left(\dddot{\boldsymbol{r}}(t) \times \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \times \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

照例，使用内蕴正交分解：

$$= \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \bullet \left[\dddot{\boldsymbol{r}}(t) - \left(\dddot{\boldsymbol{r}}(t) \bullet \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

第二项点乘后为零：

$$= \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t) \bullet \dddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6}. \tag{1.72}$$

此即

$$\det\left[\dot{\boldsymbol{r}}(s),\, \ddot{\boldsymbol{r}}(s),\, \dddot{\boldsymbol{r}}(s)\right] = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \det\left[\dot{\boldsymbol{r}}(t),\, \ddot{\boldsymbol{r}}(t),\, \dddot{\boldsymbol{r}}(t)\right]. \tag{1.73}$$

再代入一般参数下曲率的表达式 (1.63)，就可得到挠率：

$$\begin{aligned}
\tau(s) &= \frac{1}{\kappa^2(s)} \cdot \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \det\left[\dot{\boldsymbol{r}}(t),\, \ddot{\boldsymbol{r}}(t),\, \dddot{\boldsymbol{r}}(t)\right] \\
&= \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \cdot \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \det\left[\dot{\boldsymbol{r}}(t),\, \ddot{\boldsymbol{r}}(t),\, \dddot{\boldsymbol{r}}(t)\right] \\
&= \frac{1}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det\left[\dot{\boldsymbol{r}}(t),\, \ddot{\boldsymbol{r}}(t),\, \dddot{\boldsymbol{r}}(t)\right].
\end{aligned} \tag{1.74}$$

现在来总结一下一般参数下的 Frenet 标架：

$$\begin{cases}
\boldsymbol{T}(t) = \dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}, & \text{(1.75-a)} \\[2ex]
\boldsymbol{N}(t) = -\dfrac{\big(\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)\big) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}, & \text{(1.75-b)} \\[2ex]
\boldsymbol{B}(t) = \dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. & \text{(1.75-c)}
\end{cases}$$

曲率和挠率分别为

$$\kappa(t) = \frac{|\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3} \tag{1.76}$$

和

$$\tau(t) = \frac{1}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det\left[\dot{\boldsymbol{r}}(t),\, \ddot{\boldsymbol{r}}(t),\, \dddot{\boldsymbol{r}}(t)\right]. \tag{1.77}$$

注意我们把参数全部换成了 t. ①

至于标架运动方程，则可直接利用 (1.37) 式：

$$\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{T}}(t) = \dot{\boldsymbol{T}}(s) \cdot \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot \left[\kappa(t)\, \boldsymbol{N}(t)\right], & \text{(1.78-a)} \\[2ex]
\dot{\boldsymbol{N}}(t) = \dot{\boldsymbol{N}}(s) \cdot \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot \left[-\kappa(t)\, \boldsymbol{T}(t) + \tau(t)\, \boldsymbol{B}(t)\right], & \text{(1.78-b)} \\[2ex]
\dot{\boldsymbol{B}}(t) = \dot{\boldsymbol{B}}(s) \cdot \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot \left[-\tau(t)\, \boldsymbol{N}(t)\right]. & \text{(1.78-c)}
\end{cases}$$

① 根据第 7 页的脚注 ①，$\boldsymbol{T}(s) = \boldsymbol{T}(t)$. 类似地，还有 $\kappa(s) = \kappa(t)$ 等. 实际上，它们是同一个量在不同参数下的表示. 但 $\dot{\boldsymbol{T}}(s) \neq \dot{\boldsymbol{T}}(t)$. 这是因为前者是对 s 求导，而后者则是对 t 求导. 不要被符号迷惑.

若 t 取为 s，有

$$|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\dot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3} = 1. \tag{1.79}$$

根据式 (1.14)，$\ddot{\boldsymbol{r}}(s) \perp \dot{\boldsymbol{r}}(s)$，因此

$$|\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\boldsymbol{r}}(s) \times \dot{\boldsymbol{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}. \tag{1.80}$$

利用内蕴正交分解，稍做计算，还可知

$$\big(\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)\big) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t) = -\ddot{\boldsymbol{r}}(t) + \big(\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \bullet \dot{\boldsymbol{r}}(t)\big)\, \dot{\boldsymbol{r}}(t) = -\ddot{\boldsymbol{r}}(t). \tag{1.81}$$

此时，把 (1.75) ~ (1.78) 式与 (1.36) ~ (1.39) 式进行比较，可以发现它们是完全一样的.