

第一章 曲线上的标架及其运动方程

1.1 Frenet 标架 (弧长参数)

1.1.1 \mathbb{R}^m 空间中曲线的表示

\mathbb{R}^m 空间中的曲线, 就是一个单参数的向量值映照:

$$\mathbf{X}(t) : [\alpha, \beta] \ni t \mapsto \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X^1(t) \\ \vdots \\ X^m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m. \quad (1.1)$$

考虑该向量值映照关于参数 t 的变化率

$$\dot{\mathbf{X}}(t) := \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(t + \Delta t) - \mathbf{X}(t)}{\Delta t} =: \begin{bmatrix} \dot{X}^1(t) \\ \vdots \\ \dot{X}^m(t) \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

按照物理上的习惯, 我们用点表示对 t 的导数. 若该极限存在, 则称 $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^m$ 在点 t 处可微. 此时, $\dot{\mathbf{X}}(t)$ 称为曲线 $\mathbf{X}(t)$ 的切向量. 上述极限可以等价地表述为

$$\mathbf{X}(t + \Delta t) = \mathbf{X}(t) + \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t). \quad (1.3)$$

在 t_0 处, 则可以写成

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t_0) + \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0) + o(t - t_0). \quad (1.4)$$

该方程表示一条直线, 称为曲线 $\mathbf{X}(t)$ 在 t_0 处的切线.

在物理域中, 弧长 s 可以表示为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) \right|_{\mathbb{R}^m} dt, \quad (1.5)$$

两边对 t 求导, 可有

$$\frac{ds}{dt}(t) = \left| \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) \right|_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.6)$$

为了研究问题的方便, 我们以后将用弧长作为曲线的参数, 即

$$\mathbf{r}(s) : [0, L] \ni s \mapsto \mathbf{r}(s) \in \mathbb{R}^m. \quad (1.7)$$

对应的切向量为

$$\dot{\mathbf{r}}(s) := \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s}. \quad (1.8)$$

根据链式法则,

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \cdot \frac{dt}{ds}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \Big/ \frac{ds}{dt}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \Big/ \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right|_{\mathbb{R}^m}, \quad (1.9)$$

因而 $\dot{\mathbf{r}}(s)$ 是一个单位向量, 即

$$|\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m} = 1. \quad (1.10)$$

接下来继续对 $\dot{\mathbf{r}}(s)$ 求导:

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) := \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{ds}(s). \quad (1.11)$$

由于 $|\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m} = 1$, 因此

$$1 = |\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m}^2 = \langle \dot{\mathbf{r}}(s), \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle_{\mathbb{R}^m}, \quad (1.12)$$

两边求导, 则有

$$0 = \langle \ddot{\mathbf{r}}(s), \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle_{\mathbb{R}^m} + \langle \dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s) \rangle_{\mathbb{R}^m} = 2 \cdot \langle \ddot{\mathbf{r}}(s), \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.13)$$

内积为零, 就意味着正交:

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) \perp \dot{\mathbf{r}}(s). \quad (1.14)$$

现在我们把目光限定在 \mathbb{R}^3 空间中. 如前所述, $\dot{\mathbf{r}}(s)$ 已经是单位向量, 我们将其记为 $\mathbf{T}(s)$; 而 $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ 仍需作单位化处理, 其结果记作 $\mathbf{N}(s)$, 即

$$\mathbf{N}(s) := \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}/ds}{|d\dot{\mathbf{r}}/ds|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{\dot{\mathbf{T}}(s)}{|\dot{\mathbf{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (1.15)$$

最后, 只要再令

$$\mathbf{B}(s) := \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s), \quad (1.16)$$

我们便有了 \mathbb{R}^3 空间中的一组单位正交基:

$$\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\} \subset \mathbb{R}^3, \quad (1.17)$$

它们称为 **Frenet 标架**. 其中, $\mathbf{T}(s)$ 、 $\mathbf{N}(s)$ 、 $\mathbf{B}(s)$, 分别叫做单位切向量、主单位法向量和副单位法向量.

1.1.2 标架运动方程

考虑 Frenet 标架关于弧长参数 s 的变化率, 即标架运动方程:

$$\{\dot{\mathbf{T}}(s), \dot{\mathbf{N}}(s), \dot{\mathbf{B}}(s)\} \subset \mathbb{R}^3. \quad (1.18)$$

为此, 我们需要先给出一个引理: 设 $\{\mathbf{e}_i(t)\}_{i=1}^m$ 是 \mathbb{R}^m 空间中的一组活动单位正交基, 它们满足

$$\langle \mathbf{e}_i(t), \mathbf{e}_j(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij}. \quad (1.19)$$

这组基的导数仍位于 \mathbb{R}^m 空间, 用自身展开, 可有

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{e}}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_m(t) \end{bmatrix} \mathbf{P}(t). \quad (1.20)$$

此时, 我们有

$$\mathbf{P}(t) \in \text{Skw}, \quad (1.21)$$

即 $\mathbf{P}(t)$ 是一个反对称矩阵.

证明：对式 (1.19) 两边求导，得

$$\langle \dot{e}_i(t), e_j(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} + \langle e_i(t), \dot{e}_j(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} = 0 \in \mathbb{R}, \quad (1.22)$$

写成矩阵形式，为

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1^\top(t) \\ \vdots \\ \dot{e}_m^\top(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t), \dots, e_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1^\top(t) \\ \vdots \\ e_m^\top(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_1(t), \dots, \dot{e}_m(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times m}. \quad (1.23)$$

引入矩阵 $E = [e_1(t), \dots, e_m(t)]$ ，则上式与 (1.20) 式可以分别表示成

$$\dot{E}^\top E + E^\top \dot{E} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (1.24)$$

和

$$\dot{E} = EP \in \mathbb{R}^{m \times m}. \quad (1.25)$$

两式联立，可有

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \dot{E}^\top E + E^\top \dot{E} \\ &= (EP)^\top E + E^\top (EP) \\ &= P^\top (E^\top E) + (E^\top E)P = P^\top + P, \end{aligned} \quad (1.26)$$

即 $P^\top = -P$. 按照定义，便知 $P(t) \in \text{Skw}$. □

根据这一引理，便可有

$$\begin{bmatrix} \dot{T}(s), \dot{N}(s), \dot{B}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s), N(s), B(s) \end{bmatrix} P(s), \quad (1.27)$$

其中的 $P(s)$ 是一个三阶反对称矩阵. 显然，它的对角元均为零：

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

这里，我们用 “*” 表示待定元素. 由 (1.15) 式，可知

$$\dot{T}(s) = \left| \dot{T}(s) \right|_{\mathbb{R}^3} N(s) =: \kappa(s) N(s). \quad (1.29)$$

式中的 $\kappa(s) := \left| \dot{T}(s) \right|_{\mathbb{R}^3}$. 于是，矩阵 $P(s)$ 的第一列就成为了 $[0, \kappa(s), 0]^\top$. 利用反对称性，可有

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

我们“强行”引入了 $\tau(s)$ ，用来取代占位符 *. 当然，它的具体形式仍然待定.

1.1.3 曲率和挠率

利用矩阵 $\mathbf{P}(s)$ ，可以看出

$$\dot{\mathbf{B}}(s) = -\tau(s) \mathbf{N}(s). \quad (1.31)$$

再与 $\mathbf{N}(s)$ 做内积^①，便有

$$\dot{\mathbf{B}}(s) \cdot \mathbf{N}(s) = -\tau(s). \quad (1.32)$$

根据定义 (1.16) 式，

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s), \quad (1.33)$$

于是

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}(s) &= \frac{d}{ds} [\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)] = \frac{d}{ds} \left[\dot{\mathbf{r}}(s) \times \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \dot{\mathbf{r}}(s) \times \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} + \dot{\mathbf{r}}(s) \times \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s). \end{aligned} \quad (1.34)$$

显然，该式中的第一项为零。考虑 $\dot{\mathbf{B}}(s) \cdot \mathbf{N}(s)$ ，注意到 $\mathbf{N}(s)$ 与 $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ 平行，因此与 $\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)$ 垂直，所以第三项在点乘 $\mathbf{N}(s)$ 后也为零。这样便有

$$\begin{aligned} \tau(s) &= -\dot{\mathbf{B}}(s) \cdot \mathbf{N}(s) \\ &= -\dot{\mathbf{r}}(s) \times \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \cdot \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \\ &= -\frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}^2} [\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(s)] \end{aligned}$$

利用向量三重积的性质，再把负号移进来，可得

$$= \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det [\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s)]. \quad (1.35)$$

至此，我们就得到了 \mathbb{R}^3 空间中以弧长为参数的 *Frenet* 标架：

$$\begin{cases} \mathbf{T}(s) \triangleq \dot{\mathbf{r}}(s), \end{cases} \quad (1.36-a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{N}(s) \triangleq \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{\dot{\mathbf{T}}(s)}{|\dot{\mathbf{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}, \end{cases} \quad (1.36-b)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}(s) \triangleq \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s). \end{cases} \quad (1.36-c)$$

以及对应的标架运动方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}}(s) = \kappa(s) \mathbf{N}(s), \end{cases} \quad (1.37-a)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{N}}(s) = -\kappa(s) \mathbf{T}(s) + \tau(s) \mathbf{B}(s), \end{cases} \quad (1.37-b)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{B}}(s) = -\tau(s) \mathbf{N}(s), \end{cases} \quad (1.37-c)$$

其中，

$$\kappa(s) \triangleq |\dot{\mathbf{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3} \quad (1.38)$$

^① 为了表述的清晰，本小节中用 “ \cdot ” 来表示内积。

称为曲率,

$$\tau(s) \triangleq \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \dddot{\mathbf{r}}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa^2(s)} \det \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \dddot{\mathbf{r}}(s) \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

称为挠率.

1.1.4 应用：速度与加速度

三维空间中，质点的运动轨迹可以用 \mathbb{R}^3 中的曲线 $\mathbf{r}(t)$ 来表示，其中的参数 t 为时间. 质点运动的速度 $\mathbf{v}(t)$ ，定义为

$$\mathbf{v}(t) \triangleq \dot{\mathbf{r}}(t) := \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = \dot{\mathbf{r}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t). \quad (1.40)$$

由式 (1.5)，弧长的定义为

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}(\xi)|_{\mathbb{R}^m} d\xi, \quad (1.41)$$

求导，可得

$$\frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.42)$$

再代入 Frenet 标架的定义 (1.36-a) 式，便有

$$\mathbf{v}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \mathbf{T}(s). \quad (1.43)$$

可见，速度 $\mathbf{v}(t)$ 的方向与 $\mathbf{T}(t)$ 平行. 另外由于 $\mathbf{T}(t)$ 是单位向量，因此速度的大小

$$|\mathbf{v}(t)|_{\mathbb{R}^m} = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}, \quad (1.44)$$

我们称之为速率.

速度相对时间的变化率称为加速度：

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) \triangleq \dot{\mathbf{v}}(t) &= \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \mathbf{T}(s) + |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt}(s) \\ &= \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \mathbf{T}(s) + |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \dot{\mathbf{T}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) \end{aligned}$$

代入标架运动方程 (1.37-a) 式以及弧长的导数 (1.42) 式，可有

$$= \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \mathbf{T}(s) + |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \kappa(s) \mathbf{N}(s) \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}$$

换成速率，则为

$$= \frac{d}{dt} |\mathbf{v}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \mathbf{T}(s) + |\mathbf{v}(t)|_{\mathbb{R}^m}^2 \kappa(s) \mathbf{N}(s). \quad (1.45)$$

由此可知，加速度只有 \mathbf{T} 分量和 \mathbf{N} 分量；当质点做匀变速运动时，则只有 \mathbf{N} 分量.

1.2 Frenet 标架（一般参数）

本节我们重回一般参数下的映照形式，即

$$\mathbf{r}(t) : [\alpha, \beta] \ni t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3, \quad (1.46)$$

其中的参数 t 与弧长 s 的关系同式 (1.6):

$$\frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}. \quad (1.47)$$

后文的推导需要用到向量的内蕴正交分解: $\forall \xi, \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ 且满足 $|\mathbf{e}|_{\mathbb{R}^3} = 1$, 有

$$\xi = (\xi \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} - (\xi \times \mathbf{e}) \times \mathbf{e}. \quad (1.48)$$

证明见 **内蕴正交分解**.

1.2.1 标架的形式

首先来处理单位切向量: ^①

$$\mathbf{T}(s) \triangleq \dot{\mathbf{r}}(s) = \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{dt}{ds}(s) = \dot{\mathbf{r}}(t) / \frac{ds}{dt}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (1.49)$$

接下来计算它的导数 $\dot{\mathbf{T}}(s)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}(s) &= \frac{d}{ds} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \cdot \frac{dt}{ds}(s) \end{aligned}$$

代入 (1.47) 式, 得

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \left[\ddot{\mathbf{r}}(t) - \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \cdot \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \right]. \end{aligned} \quad (1.50)$$

此处涉及到了模的导数. 考虑

$$\frac{d}{dt} \left[|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2 \right] = 2 |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}; \quad (1.51)$$

另一方面,

$$\frac{d}{dt} \left[|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2 \right] = \frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)] = 2 \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t). \quad (1.52)$$

联立两式, 便有

$$\frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (1.53)$$

代回 (1.50) 式, 继续推导:

$$\dot{\mathbf{T}}(s) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \left[\ddot{\mathbf{r}}(t) - \left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

式中的 $\dot{\mathbf{r}}(t)/|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}$ 是一个单位向量, 它相当于式 (1.48) 中的 \mathbf{e} , 而 $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ 则相当于 ξ . 因此, 利用向量的内蕴正交分解, 有

$$= -\frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \left[\left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

^① 此时我们把 s 作为参数, 只不过 $s = s(t)$. 所以 $\mathbf{T}(s)$ 实际上和 $\mathbf{T}(t)$ 相等.

$$= -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}. \quad (1.54)$$

根据曲率的定义 (1.38) 式,

$$\kappa(s) \triangleq |\dot{T}(s)|_{\mathbb{R}^3} = \frac{|(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}. \quad (1.55)$$

注意到 $(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \perp \dot{\mathbf{r}}(t)$, 所以

$$|(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}. \quad (1.56)$$

这样, 曲率就能够写成

$$\kappa(s) = \frac{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3}. \quad (1.57)$$

利用定义 (1.36-b) 式, $\mathbf{N}(s)$ 也便可以易如反掌地写出来了:

$$\mathbf{N}(s) \triangleq \frac{\dot{T}(s)}{|\dot{T}(s)|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{\dot{T}(s)}{\kappa(s)} = -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (1.58)$$

最后轮到 $\mathbf{B}(s)$ 了:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(s) &= \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \times \left[-\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \times \left[-\left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \end{aligned}$$

这样处理是为了倒过来应用内蕴正交分解:

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \times \left[\ddot{\mathbf{r}}(t) - \left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

由于 $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$, 因而方括号中的第二项可以略去, 使得结果大为简化:

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (1.59)$$

1.2.2 曲率和挠率

曲率在计算 \mathbf{N} 的时候已经顺带求过了, 我们现在来求挠率. 根据式 (1.39), 有

$$\tau(s) = \frac{1}{\kappa^2(s)} \det[\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \dddot{\mathbf{r}}(s)]. \quad (1.60)$$

因此首先需要知道 \mathbf{r} 关于 s 的一至三阶导数. 由 (1.49) 式, 可知

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{T}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}; \quad (1.61)$$

二阶导数则要利用式 (1.54):

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) = \dot{T}(s) = -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}; \quad (1.62)$$

进而又可得到三阶导数：

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{ds}(s) = -\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}(s) \cdot \frac{dt}{ds} = -\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}(s) \Big/ \frac{ds}{dt}(t) = -\frac{d}{dt} \left[\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4} \right] \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (1.63)$$

最后一步仍然利用了 (1.47) 式。我们知道，

$$\det \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s) \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(s).$$

首先考察叉乘项：

$$\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \times \left[-\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4} \right]$$

注意到该式的结构与 (1.59) 式的第二步非常相似，因此我们采用同样的办法处理，即先调整系数，再反向运用内蕴正交分解：

$$\begin{aligned} &= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3} \times \left[-\left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3} \times \left[\ddot{\mathbf{r}}(t) - \left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \end{aligned}$$

同样，因为 $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ ，所以又只剩下了第一项，即

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3}. \quad (1.64)$$

再来看 $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ 。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) &= -\frac{d}{dt} \left[\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4} \right] \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \\ &= -\frac{\frac{d}{dt} [(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)] \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4 + [(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)] \cdot \frac{d}{dt} [|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4]}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^8} \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \\ &= -\frac{\frac{d}{dt} (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5} - \frac{\frac{d}{dt} [|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4]}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^9} \cdot [(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)] \\ &= -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5} - \frac{\frac{d}{dt} [|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4]}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^9} \cdot [(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)] \end{aligned}$$

第一项中， $\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = 0$ 。所以

$$= -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5} - \frac{\frac{d}{dt} [|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4]}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^9} \cdot [(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)]. \quad (1.65)$$

式中的高亮部分与另一个向量做叉乘后，垂直于 $\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)$ ；而另一方面， $\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)$ 又平行于 $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)$ 。因此二者做点乘后即为零。这样，我们就有

$$\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3} \cdot \left[-\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5} \right]$$

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \cdot \left[- \left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

照例，使用内蕴正交分解：

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \cdot \left[\ddot{\mathbf{r}}(t) - \left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

第二项点乘后为零：

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6}. \quad (1.66)$$

此即

$$\det \left[\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s) \right] = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \det \left[\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right]. \quad (1.67)$$

再代入一般参数下曲率的表达式 (1.57)，就可得到挠率：

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \frac{1}{\kappa^2(s)} \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \det \left[\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right] \\ &= \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \det \left[\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right] \\ &= \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det \left[\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right]. \end{aligned} \quad (1.68)$$

现在来总结一下一般参数下的 Frenet 标架：

$$\begin{cases} \mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}, \end{cases} \quad (1.69-a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{N}(t) = - \frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}, \end{cases} \quad (1.69-b)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \end{cases} \quad (1.69-c)$$

曲率和挠率分别为

$$\kappa(t) = \frac{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3} \quad (1.70)$$

和

$$\tau(t) = \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det \left[\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right]. \quad (1.71)$$

注意我们把参数全部换成了 t . ^①

至于标架运动方程，则可直接利用 (1.37) 式：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}}(t) = \dot{\mathbf{T}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot [\kappa(t) \mathbf{N}(t)], \end{cases} \quad (1.72-a)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{N}}(t) = \dot{\mathbf{N}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot [-\kappa(t) \mathbf{T}(t) + \tau(t) \mathbf{B}(t)], \end{cases} \quad (1.72-b)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{B}}(t) = \dot{\mathbf{B}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot [-\tau(t) \mathbf{N}(t)]. \end{cases} \quad (1.72-c)$$

^① 根据第 6 页的脚注 ①， $\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}(t)$ 。类似地，还有 $\kappa(s) = \kappa(t)$ 等。实际上，它们是同一个量在不同参数下的表示。但 $\mathbf{T}(s) \neq \dot{\mathbf{T}}(t)$ 。这是因为前者是对 s 求导，而后者则是对 t 求导。不要被点号迷惑。

若 t 取为 s , 有

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3} = 1. \quad (1.73)$$

根据式 (1.14), $\ddot{\mathbf{r}}(s) \perp \dot{\mathbf{r}}(s)$, 因此

$$|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(s) \times \dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}. \quad (1.74)$$

利用内蕴正交分解, 稍做计算, 还可知

$$(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = -\ddot{\mathbf{r}}(t) + (\ddot{\mathbf{r}}(t) \bullet \dot{\mathbf{r}}(t)) \dot{\mathbf{r}}(t) = -\ddot{\mathbf{r}}(t). \quad (1.75)$$

此时, 把 (1.69) ~ (1.72) 式与 (1.36) ~ (1.39) 式进行比较, 可以发现它们是完全一样的.