第一章　张量的定义及表示

1.1　对偶基，度量

1.1.1　对偶基

$\mathbb{R}^m$ 空间中的基可分为两类：指标写在下面的基

$$\left\{\boldsymbol{g}_i\right\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

称为**协变基**，指标写在上面的基

$$\left\{\boldsymbol{g}^i\right\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \tag{1.2}$$

称为**逆变基**．它们满足**对偶关系**：

$$\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j\,; \\ 0, & i \neq j\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

这里的 δ^i_j 是 **Kronecker δ 函数**．

1.1.2　度量

下面引入**度量**的概念．其定义为

$$\begin{cases} g_{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m}, & \text{(1.4-a)} \\ g^{ij} \triangleq \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m}. & \text{(1.4-b)} \end{cases}$$

下面证明

$$g_{ik}\, g^{kj} = \delta^j_i\,. \tag{1.5}$$

它也可以写成矩阵的形式：

$$\left[g_{ik}\right]\left[g^{kj}\right] = \left[\delta^j_i\right] = \boldsymbol{I}_m, \tag{1.6}$$

其中的 $\boldsymbol{I}_m$ 是 m 阶单位阵．

证明：

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, g^{kj}\boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \tag{1.7}$$

后文将说明 $g^{kj}\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{g}^j$，因此可得

$$g_{ik}\, g^{kj} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta^j_i\,. \tag{1.8}$$

要注意的是，这里的指标 k 是哑标．根据 **Einstein 求和约定**，重复指标并且一上一下时，就表示对它求和．后文除非特殊说明，也均是如此． □

现在澄清**基向量转换关系**．第 i 个协变基向量 $\boldsymbol{g}_i$ 既然是向量，就必然可以用协变基或逆变基来表示．根据对偶关系式 (1.3) 和度量的定义式 (1.4-a)、(1.4-b)，可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = g_{ik}\boldsymbol{g}^k, & (1.9\text{-a}) \\ \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = \delta_i^k \boldsymbol{g}_k & (1.9\text{-b}) \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = \delta_k^i \boldsymbol{g}^k, & (1.10\text{-a}) \\ \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = g^{ik}\boldsymbol{g}_k. & (1.10\text{-b}) \end{cases}$$

这四个式子中，式 (1.9-b) 和 (1.10-a) 是平凡的，而式 (1.9-a) 和 (1.10-b) 则通过度量建立起了协变基与逆变基之间的关系．这就称为基向量转换关系，也可以叫做“指标升降游戏”．

1.1.3 向量的分量

对于任意的向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$，它可以用协变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k = \xi^k \boldsymbol{g}_k, \tag{1.11}$$

也可以用逆变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k = \xi_k \boldsymbol{g}^k, \tag{1.12}$$

式中，ξ^k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个逆变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**逆变分量**；而 ξ_k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个协变基做内积的结果，称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**协变分量**．

以后凡是指标在下的（下标），均称为协变某某；指标在上的（上标），称为逆变某某．

1.2 张量的表示

1.2.1 张量的表示与简单张量

所谓**张量**，即指**多重线性函数**．

以三阶张量为例．考虑任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，其中的 $\mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$ 表示以 $\mathbb{R}^m$ 为底空间的三阶张量全体．所谓三阶（或三重）线性函数，指“吃掉”三个向量之后变成数，并且“吃法”具有线性性．

对于一般地张量空间 $\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$，我们引入了线性结构：

$$\begin{aligned} \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad & (\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) \\ & \triangleq \alpha\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right) + \beta\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\right), \end{aligned} \tag{1.13}$$

于是

$$\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m). \tag{1.14}$$

下面我们要获得 $\boldsymbol{\Phi}$ 的表示．根据之前任意向量用协变基或逆变基的表示，有

$$\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

$$= \boldsymbol{\Phi}\left(u^i \boldsymbol{g}_i,\, v_j \boldsymbol{g}^j,\, w^k \boldsymbol{g}_k\right)$$

考虑到 $\boldsymbol{\Phi}$ 对第一变元的线性性，可得

$$= u^i\, \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i,\, v_j \boldsymbol{g}^j,\, w^k \boldsymbol{g}_k\right)$$

同理，

$$= u^i v_j w^k\, \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i,\, \boldsymbol{g}^j,\, \boldsymbol{g}_k\right). \tag{1.15}$$

注意这里自然需要满足 Einstein 求和约定.

上式中的 $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k\right)$ 是一个数．它是张量 $\boldsymbol{\Phi}$ “吃掉”三个基向量的结果．至于 $u^i v_j w^k$ 部分，三项分别是 $\boldsymbol{u}$ 的第 i 个逆变分量、$\boldsymbol{v}$ 的第 j 个协变分量和 $\boldsymbol{w}$ 的第 k 个逆变分量．根据向量分量的定义，可知

$$u^i v_j w^k = \left(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^m} \cdot \left(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^m} \cdot \left(\boldsymbol{w},\, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.16}$$

暂时中断一下思路，先给出**简单张量**的定义.

$$\forall\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \triangleq (\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\eta},\, \boldsymbol{v})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}, \tag{1.17}$$

式中 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^m$，而暂时把 $\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}$ 理解为一种记号．简单张量作为一个映照，组成它的三个向量分别与它们“吃掉”的第一、二、三个变元做内积并相乘，结果为一个实数.

考虑到内积的线性性，便有（以第二个变元为例）

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}},\, \boldsymbol{w}) \triangleq (\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\eta},\, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} \cdot (\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}$$

注意到 $(\boldsymbol{\eta},\, \alpha\tilde{\boldsymbol{v}} + \beta\hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} = \alpha(\boldsymbol{\eta},\, \tilde{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m} + \beta(\boldsymbol{\eta},\, \hat{\boldsymbol{v}})_{\mathbb{R}^m}$，同时再次利用简单张量的定义，可得

$$= \alpha\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\, \tilde{\boldsymbol{v}},\, \boldsymbol{w}) + \beta\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u},\, \hat{\boldsymbol{v}},\, \boldsymbol{w}). \tag{1.18}$$

类似地，对第一变元和第三变元，同样具有线性性．因此，可以知道

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\zeta} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{1.19}$$

可见，“简单张量”的名字是名副其实的，它的确是一个特殊的张量.

回过头来看 (1.16) 式．很明显，它可以用简单张量来表示．要注意，由于内积的对称性，可以有两种[①]表示方法：

$$\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \tag{1.20}$$

或者

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{g}^i,\, \boldsymbol{g}_j,\, \boldsymbol{g}^k\right), \tag{1.21}$$

我们这里取上面一种．代入式 (1.15)，得

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w})$$

① 这里只考虑把 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{g}^i$、$\boldsymbol{g}_j$、$\boldsymbol{g}^k$ 分别放在一起的情况.

$$= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k) \cdot \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k) \in \mathbb{R}^m$，因此

$$= \left[\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k)\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k\right](\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}). \tag{1.22}$$

方括号里的部分，就是根据 Einstein 求和约定，用 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k)$ 对 $\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k$ 进行线性组合.

由于 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 选取的任意性，可以引入如下记号：

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k)\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k =: \boldsymbol{\Phi}_i{}^j{}_k\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k, \tag{1.23}$$

即

$$\boldsymbol{\Phi}_i{}^j{}_k := \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k), \tag{1.24}$$

这称为张量的**分量**．它说明一个张量可以用张量分量和基向量组成的简单张量来表示.

指标 i、j、k 的上下是任意的．这里，它有赖于式 (1.15) 中基向量的选取．实际上，对于这里的三阶张量，指标的上下一共有 8 种可能．指标全部在下面的，称为**协变分量**：

$$\boldsymbol{\Phi}^{ijk} := \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k); \tag{1.25}$$

指标全部在上面的，称为**逆变分量**：

$$\boldsymbol{\Phi}_{ijk} := \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k); \tag{1.26}$$

其余 6 种，称为**混合分量**．对于一个 r 阶张量，显然共有 2^r 种分量表示，其中协变分量与逆变分量各一种，混合分量 $2^r - 2$ 种.

1.2.2 张量分量之间的关系

我们已经知道，对于任意一个向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$，它可以用协变基或逆变基表示：

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{cases} \xi^i \boldsymbol{g}_i, \\ \xi_i \boldsymbol{g}^i. \end{cases} \tag{1.27}$$

式中，协变分量与逆变分量满足坐标转换关系：

$$\begin{cases} \xi^i = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^i)_{\mathbb{R}^m} = (\boldsymbol{\xi}, g^{ik}\boldsymbol{g}_k)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_k)_{\mathbb{R}^m} = g^{ik}\xi_k, & \text{(1.28-a)} \\ \xi_i = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}_i)_{\mathbb{R}^m} = (\boldsymbol{\xi}, g_{ik}\boldsymbol{g}^k)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g}^k)_{\mathbb{R}^m} = g_{ik}\xi^k. & \text{(1.28-b)} \end{cases}$$

每一式的第二个等号都用到了基向量转换关系，见式 (1.9-a) 和 (1.10-b).

现在再来考虑张量的分量．仍以上文中的张量 $\boldsymbol{\Phi}_i{}^j{}_k := \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k)$ 为例，我们想要知道它与张量 $\boldsymbol{\Phi}^p{}_q{}^r := \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r)$ 之间的关系．利用基向量转换关系，可有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_i{}^j{}_k &:= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_k) \\ &= \boldsymbol{\Phi}(g_{ip}\boldsymbol{g}^p, g^{jq}\boldsymbol{g}_q, g_{kr}\boldsymbol{g}^r) \end{aligned}$$

又利用张量的线性性，得

$$\begin{aligned} &= g_{ip}g^{jq}g_{kr}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}^r) \\ &= g_{ip}g^{jq}g_{kr}\boldsymbol{\Phi}^p{}_q{}^r. \end{aligned} \tag{1.29}$$

可见，张量的分量与向量的分量类似，其指标升降可通过度量来实现．用同样的手法，还可以得到诸如 $\boldsymbol{\Phi}^{ijk} = g^{jp}\boldsymbol{\Phi}^i{}_p{}^k$、$\boldsymbol{\Phi}^i{}_j{}^k = g_{jp}g^{kq}\boldsymbol{\Phi}^{ip}{}_q$ 这样的关系式.

1.2.3 相对不同基的张量分量之间的关系

$\mathbb{R}^m$ 空间中，除了 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m$ 和相应的对偶基 $\{\boldsymbol{g}^i\}_{i=1}^m$ 之外，当然还可以有其他的基，比如带括号的 $\{\boldsymbol{g}_{(i)}\}_{i=1}^m$ 以及对应的对偶基 $\{\boldsymbol{g}^{(i)}\}_{i=1}^m$. 前者对应形如 $\boldsymbol{\Phi}^i{}_j{}^k \coloneqq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\right)$ 的张量，后者则对应带括号的张量，如 $\boldsymbol{\Phi}^{(p)}{}_{(q)}{}^{(r)} \coloneqq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{(p)}, \boldsymbol{g}_{(q)}, \boldsymbol{g}^{(r)}\right)$. 下面我们来探讨这两个张量的关系.

首先来建立基之间的关系. 带括号的第 i 个基向量 $\boldsymbol{g}_{(i)}$，作为 $\mathbb{R}^m$ 空间中的一个向量，自然可以用另一组基来表示：

$$\boldsymbol{g}_{(i)} = \begin{cases} \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k, \\ \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k. \end{cases} \tag{1.30}$$

同理，自然还有它的对偶基：

$$\boldsymbol{g}^{(i)} = \begin{cases} \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^k, \\ \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_k. \end{cases} \tag{1.31}$$

引入记号 $c_{(i)}^k \coloneqq \left(\boldsymbol{g}_{(i)}, \boldsymbol{g}^k\right)_{\mathbb{R}^m}$ 和 $c_k^{(i)} \coloneqq \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}$，那么有

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_{(i)} = c_{(i)}^k \boldsymbol{g}_k, & \text{(1.32-a)} \\ \boldsymbol{g}^{(i)} = c_k^{(i)} \boldsymbol{g}^k. & \text{(1.32-b)} \end{cases}$$

容易看出，这两个系数具有如下性质：

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = \delta_j^i. \tag{1.33}$$

写成矩阵形式[①]，为

$$\left[c_k^{(i)}\right]\left[c_{(j)}^k\right] = \left[\delta_i^j\right] = \boldsymbol{I}_m. \tag{1.34}$$

换句话说，两个系数矩阵是互逆的.

证明：

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m} c_{(j)}^k$$

利用内积的线性性，有

$$= \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, c_{(j)}^k \boldsymbol{g}_k\right)_{\mathbb{R}^m}$$

根据 $c_{(j)}^k$ 的定义，得到

$$= \left(\boldsymbol{g}^{(i)}, \boldsymbol{g}_{(j)}\right)_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.35}$$

带括号的基同样满足对偶关系 (1.3) 式，于是得证. □

上面我们用不带括号的基表示了带括号的基. 反之也是可以的：

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^{(k)}\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}_{(k)} = c_i^{(k)} \boldsymbol{g}_{(k)}, & \text{(1.36-a)} \\ \boldsymbol{g}^i = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_{(k)}\right)_{\mathbb{R}^m} \boldsymbol{g}^{(k)} = c_{(k)}^i \boldsymbol{g}^{(k)}. & \text{(1.36-b)} \end{cases}$$

① 通常我们约定上面的标号作为行号，下面的标号作为列号.

这样一来，就建立起了不同基之间的转换关系.

现在我们回到张量. 根据张量分量的定义，

$$\boldsymbol{\Phi}^{i}{}_{j}{}^{k} \coloneqq \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{i}, \boldsymbol{g}_{j}, \boldsymbol{g}^{k}\right)$$

利用之前推导的不同基向量之间的转换关系，得

$$= \boldsymbol{\Phi}\left(c^{i}_{(p)}\boldsymbol{g}^{(p)}, c^{(q)}_{j}\boldsymbol{g}_{(q)}, c^{k}_{(r)}\boldsymbol{g}^{(r)}\right)$$

由张量的线性性，提出系数：

$$\begin{aligned} &= c^{i}_{(p)}c^{(q)}_{j}c^{k}_{(r)}\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{g}^{(p)}, \boldsymbol{g}_{(q)}, \boldsymbol{g}^{(r)}\right) \\ &= c^{i}_{(p)}c^{(q)}_{j}c^{k}_{(r)}\boldsymbol{\Phi}^{(p)}{}_{(q)}{}^{(r)}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

完全类似，还可以有

$$\boldsymbol{\Phi}^{(i)}{}_{(j)}{}^{(k)} = c^{(i)}_{p}c^{g}_{(j)}c^{(k)}_{r}\boldsymbol{\Phi}^{p}{}_{q}{}^{r}. \tag{1.38}$$

总结一下这两小节得到的结果. 对于同一组基下的张量分量，其指标升降通过度量来实现；对于不同基下的张量分量，其指标转换则通过不同基之间的转换系数来完成.

第二章　张量的运算性质

2.1　张量积

张量积也叫**张量并**，用符号 "$\otimes$" 表示．在 1.2.1 小节给出简单张量的定义时，实际上就用到了张量积．张量积的定义为：

$$
\begin{aligned}
\forall \boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^q(\mathbb{R}^m), \quad \boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi} &\in \mathscr{T}^{p+q}(\mathbb{R}^m) \\
&= \left(\Phi^{i_1\cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\Psi_{j_1\cdots j_q} \boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right) \\
&\triangleq \Phi^{i_1\cdots i_p} \Psi_{j_1\cdots j_q} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right).
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

由该定义可以知道，关于简单张量 $\left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right)$，相应的张量分量为

$$
\left(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}\right)^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}. \tag{2.2}
$$

2.2　e 点积

张量的 e **点积**可以用符号 "$\binom{e}{\cdot}$" 表示．从这个符号可以看出 e 点积的作用：前 e 个指标缩并，后面的点乘．

对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^q(\mathbb{R}^m), e \leqslant \min\{p, q\} \in \mathbb{N}^*$，$e$ 点积是这样定义的：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi} \binom{e}{\cdot} \boldsymbol{\Psi} \\
&= \left(\Phi^{i_1\cdots i_{p-e} i_{p-e+1}\cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}} \otimes \boxed{\boldsymbol{g}_{i_{p-e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}}\right) \\
&\qquad \binom{e}{\cdot} \left(\Psi^{j_1\cdots j_e j_{e+1}\cdots j_q} \boxed{\boldsymbol{g}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_e}} \otimes \boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right)
\end{aligned}
$$

把高亮的部分做内积，得到度量：

$$
\begin{aligned}
&\triangleq \Phi^{i_1\cdots i_{p-e} i_{p-e+1}\cdots i_p} \Psi^{j_1\cdots j_e j_{e+1}\cdots j_q} \\
&\qquad \cdot g_{i_{p-e+1} j_1} \cdots g_{i_p j_e} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right)
\end{aligned}
$$

玩一下 "指标升降游戏"（注意有两种结合方式：与 $\boldsymbol{\Phi}$ 或 $\boldsymbol{\Psi}$），可得

$$
= \left\{
\begin{aligned}
&\Phi^{i_1\cdots i_{p-e}}{}_{\boxed{j_1\cdots j_e}} \Psi^{\boxed{j_1\cdots j_e}\, j_{e+1}\cdots j_q} \\
&\Phi^{i_1\cdots i_{p-e} \boxed{i_{p-e+1}\cdots i_p}} \Psi_{\boxed{i_{p-e+1}\cdots i_p}}{}^{j_{e+1}\cdots j_q}
\end{aligned}
\right\} \left(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-e}}\right) \otimes \left(\boldsymbol{g}_{j_{e+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_q}\right). \tag{2.3}
$$

最后一步的大括号中，高亮的 $j_1 \cdots j_e$ 和 $i_{p-e+1} \cdots i_p$ 都是哑标，可以通过求和求掉．因此有

$$\boldsymbol{\Phi} \binom{e}{\cdot} \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^{p+q-2e}(\mathbb{R}^m). \tag{2.4}$$

换句话说，e 点积的作用就是将指标哑标化．

作为一个特殊的应用，接下来我们介绍**全点积**，用符号“$\odot$”表示．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)$，有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi} \odot \boldsymbol{\Psi} \triangleq \boldsymbol{\Phi} \binom{p}{\cdot} \boldsymbol{\Psi} \\
=& \left(\Phi^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \binom{p}{\cdot} \left(\Psi^{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{g}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{j_p}\right) \\
=& \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_p j_p} \\
=& \begin{cases} \Phi_{j_1 \cdots j_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} \\ \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{i_1 \cdots i_p} \end{cases} \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

可见，全点积将全部指标哑标化．

张量自身和自身的全点积，定义为它的**范数**：

$$\boldsymbol{\Phi} \odot \boldsymbol{\Phi} = \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p} =: |\boldsymbol{\Phi}|^2_{\mathscr{T}^p(\mathbb{R}^m)}. \tag{2.6}$$

2.3 叉乘

张量的**叉乘**要求底空间为 $\mathbb{R}^3$．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}^p(\mathbb{R}^3), \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^q(\mathbb{R}^3)$，叉乘的定义如下：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Psi} \\
=& \left(\Phi^{i_1 \cdots i_{p-1} i_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-1}} \otimes \boldsymbol{g}_{i_p}\right) \times \left(\Psi_{j_1 j_2 \cdots j_q} \boldsymbol{g}^{j_1} \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}\right) \\
\triangleq& \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-1}} \otimes \left(\boldsymbol{g}_{i_p} \times \boldsymbol{g}^{j_1}\right) \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q} \in \mathscr{T}^{p+q-1}(\mathbb{R}^3).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

注意到，此时简单张量的维数已经降了一阶．

利用 **Levi-Civita 记号**，可以进一步展开上式．

$$\boldsymbol{g}_{i_p} \times \boldsymbol{g}^{j_1} = \epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s \boldsymbol{g}^s, \tag{2.8}$$

式中的

$$\epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s = \det\left[\boldsymbol{g}_{i_p}, \boldsymbol{g}^{j_1}, \boldsymbol{g}_s\right]. \tag{2.9}$$

于是

$$\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Psi} = \epsilon_{i_p}{}^{j_1}{}_s \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{p-1}} \otimes \boldsymbol{g}^s \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_q}. \tag{2.10}$$

下面我们再来类比地定义一种混合积“$\binom{\times}{\cdot}$”．对于任意的 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^m)$，定义

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi} \binom{\times}{\cdot} \boldsymbol{\Psi} &= \left(\Phi^{ijk} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}_k\right) \binom{\times}{\cdot} \left(\Psi_{pqr} \boldsymbol{g}^p \otimes \boldsymbol{g}^q \otimes \boldsymbol{g}^r\right) \\
&\triangleq \Phi^{ijk} \Psi_{pqr} \delta_j^q \boldsymbol{g}_i \otimes \left(\boldsymbol{g}_k \times \boldsymbol{g}^p\right) \otimes \boldsymbol{g}^r
\end{aligned}$$

缩并掉 Kronecker δ，同时利用 Levi-Civita 记号展开叉乘项，可有

$$= \epsilon_{k\ s}^{\ p} \boldsymbol{\Phi}^{ijk} \boldsymbol{\Psi}_{pjr} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^s \otimes \boldsymbol{g}^r, \tag{2.11}$$

式中的

$$\epsilon_{k\ s}^{\ p} = \det\left[\boldsymbol{g}_k, \boldsymbol{g}^p, \boldsymbol{g}_s\right]. \tag{2.12}$$

对于这种混合积，并没有一般的约定．不同的研究者往往会采用不同的写法及表示．

2.4 置换

2.4.1 置换的定义

置换运算实际上是一种交换位置或者改变次序的运算．之后我们还将引入针对张量的置换算子，它是外积运算和外微分运算的基础．这些运算是现代张量分析与微分几何的支柱．

我们从一个例子开始．下面是一个 2×7 的“矩阵”：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ \\ ⑦ & ④ & ⑤ & ① & ⑥ & ② & ③ \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

矩阵里面的每一个数字表示一个位置．可以想象成 7 把椅子，先是按第一行的顺序依次排列，再按照第二行的顺序打乱，重新排列．于是这就成为一个 **7 阶置换**．这个定义等价于

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \tag{2.14-a}$$

自然也等价于

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}, \tag{2.14-b}$$

当然，换用任何元素也都是可以的．

通常我们用方括号表示置换的**序号定义**，即标号的排列轮换；用圆括号表示**元素定义**，即标号对应元素的轮换．

2.4.2 置换的符号

接着来定义置换的**符号** $\operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma}$．这里我们把每次交换两个数字称为一次“操作”．如果经过偶数次“操作”，可以把经置换后的序列恢复为原来的顺序，那么该置换的符号 $\operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} = 1$；而如果经过奇数次“操作”才可以复原，则 $\operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} = -1$．若用一个式子表示，则为

$$\operatorname{sgn} \boldsymbol{\sigma} = (-1)^n, \tag{2.15}$$

其中的 n 是恢复原本顺序所需“操作”的次数．

下面我们以式 (2.13) 所定义的 $\boldsymbol{\sigma}$ 为例，演示求置换符号的过程．这里的关键是通过两两交换，按如下步骤把式 (2.14-b) 的第二行变换成第一行：

$$\boxed{\blacklozenge} \quad \clubsuit \quad \spadesuit \quad \boxed{\spadesuit} \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \diamondsuit$$

$$\Downarrow$$

♠ ♣ ♤ ♦ ♥ ♡ ♢

$$\Downarrow$$

♠ ♡ ♤ ♦ ♥ ♣ ♢

$$\Downarrow$$

♠ ♡ ♢ ♦ ♥ ♣ ♤

$$\Downarrow$$

♠ ♡ ♢ ♣ ♥ ♦ ♤

$$\Downarrow$$

♠ ♡ ♢ ♣ ♤ ♦ ♥

$$\Downarrow$$

♠ ♡ ♢ ♣ ♤ ♥ ♦

一共进行了 6 次两两交换，因此 $\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma} = 1$.

2.4.3 置换的复合

再定义一个置换

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

注意这里用了方括号，因此它是一个序号定义．方便起见，以后的序号我们都只用不带圈的普通数字表示．考虑之前定义的置换

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

则 $\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 的复合

$$\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \text{⚀} & \text{⚁} & \text{⚂} & \text{⚃} & \text{⚄} & \text{⚅} & \odot \\ \odot & \text{⚃} & \text{⚄} & \text{⚀} & \text{⚅} & \text{⚁} & \text{⚂} \\ \hdashline \text{⚅} & \odot & \text{⚂} & \text{⚄} & \text{⚁} & \text{⚀} & \text{⚃} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \boldsymbol{\sigma} \\ \leftarrow \boldsymbol{\tau} \end{matrix} \tag{2.18}$$

与函数、线性变换等的复合类似，这里也用小圆圈“$\circ$”表示置换的复合．

假设经过置换 $\boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{\tau}$ 作用后得到的序列，分别需要 p 次和 q 次两两交换才能复原为原来的序列．那么很显然，经过复合置换 $\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}$ 作用后的序列，经过 $q + p$ 次两两交换也一定可以复原．因此，复合置换的符号

$$\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\sigma}) = (-1)^{q+p} = (-1)^q \cdot (-1)^p = \operatorname{sgn}\boldsymbol{\tau} \cdot \operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}. \tag{2.19}$$

2.4.4 逆置换

逆置换 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ 的定义为

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1} \circ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Id}, \tag{2.20}$$

其中的“$\mathbf{Id}$”是**恒等映照**.

仍然使用式 (2.14-b)：

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}\spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \varheartsuit & \vardiamondsuit \\ \vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit\end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

那么自然有

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1}=\begin{pmatrix}\vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \varheartsuit & \vardiamondsuit\end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

显然，我们有 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{Id}$.

回忆一下逆矩阵的定义. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 既要满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，又要满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$. 对于置换也是如此，因此我们需要检查 $\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\sigma}^{-1}$：[1]

$$\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\sigma}^{-1}=\left(\begin{array}{ccccccc}\vardiamondsuit & \clubsuit & \varspadesuit & \spadesuit & \varheartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \spadesuit_1 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3 & \clubsuit_4 & \varspadesuit_5 & \varheartsuit_6 & \vardiamondsuit_7 \\ \hdashline \vardiamondsuit_7 & \clubsuit_4 & \varspadesuit_5 & \spadesuit_1 & \varheartsuit_6 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \leftarrow\boldsymbol{\sigma}^{-1} \\ \leftarrow\boldsymbol{\sigma}\end{array} \tag{2.23}$$

可见的确有 $\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\sigma}^{-1}=\mathbf{Id}$.

另外，由于恒等映照 $\mathbf{Id}$ 作用后序列不发生变化，复原所需的交换次数为 0，因此

$$\operatorname{sgn}\mathbf{Id}=(-1)^0=1. \tag{2.24}$$

而根据定义，

$$\mathbf{Id}=\boldsymbol{\sigma}^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.25}$$

故有

$$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}^{-1}=1. \tag{2.26}$$

由此，可以推知

$$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}=\operatorname{sgn}\boldsymbol{\sigma}^{-1}, \tag{2.27}$$

即一个置换与它的置换具有相同的符号.

① 该式中的数字角标用来澄清原始序号.