

第一章 张量的定义及表示

1.1 对偶基，度量

1.1.1 对偶基

设 $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m$ 是 \mathbb{R}^m 空间中的一组基，即极大线性无关向量组。此时， \mathbb{R}^m 中将唯一存在另一组基 $\{\mathbf{g}^i\}_{i=1}^m$ ，二者满足对偶关系：

$$\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & j = i; \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (1.1)$$

式中， $\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m}$ 的 δ_i^j 是 **Kronecker δ 函数**。

证明： 根据内积的定义，

$$\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m} = (\mathbf{g}^j)^\top \mathbf{g}_i = \delta_i^j, \quad (1.2)$$

其中的 i, j 可取 $1, 2, \dots, m$ 。写成矩阵形式，为^①

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{g}^1)^\top \\ \vdots \\ (\mathbf{g}^m)^\top \end{bmatrix} [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m] = \mathbf{I}_m. \quad (1.3)$$

左边的第一个矩阵拆分成了 m 行，每行是一个 m 维行向量；第二个矩阵则拆分成了 m 列，每行是一个 m 维列向量。根据分块矩阵的乘法，所得结果对角元为 δ_i^i ，非对角元则为 δ_i^j （其中 $i \neq j$ ），即单位阵。

把第一个矩阵的转置挪到外面，可有

$$[\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^m]^\top [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m] = \mathbf{I}_m. \quad (1.4)$$

$\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m$ 作为基，必然满足 $[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]$ 非奇异。因此

$$[\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^m]^\top = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]^{-1}, \quad (1.5)$$

即

$$[\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^m] = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]^{-\top}. \quad (1.6)$$

逆矩阵（及其转置）是存在且唯一的，这就证明了对偶基的存在性和唯一性。 \square

① 除非特殊说明，本文中的所有向量均取列向量。

我们把指标写在下面的基 $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m$ 称为**协变基**；指标写在上面的基 $\{\mathbf{g}^i\}_{i=1}^m$ 称为**逆变基**。式 (1.6) 明确指出了逆变基与协变基的关系。

下面我们引入**单位正交基**（或**标准正交基**），它是指模长为1且两两正交的一组基。

如果矩阵 \mathbf{A} 满足

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}, \quad (1.7)$$

即

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \text{ 或 } \mathbf{A} = \mathbf{A}^{-T}, \quad (1.8)$$

则称 \mathbf{A} 为**正交矩阵**。正交矩阵的全体记作 Orth 。由线性代数中的结论可知，正交矩阵 \mathbf{A} 的每一行和每一列均是单位正交基；反之，若矩阵 \mathbf{A} 的每一行和每一列均是单位正交基，则 \mathbf{A} 也是正交矩阵。

设 \mathbb{R}^m 空间中的协变基 $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m$ 是一组单位正交基，则由它构成的矩阵

$$[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m] \in \text{Orth}, \quad (1.9)$$

因此

$$[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m] = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]^{-T}. \quad (1.10)$$

另一方面，根据对偶关系的矩阵表示 (1.6) 式，我们有

$$[\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^m] = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]^{-T}, \quad (1.11)$$

于是

$$[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m] = [\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^m], \quad (1.12)$$

即协变基与逆变基完全相同。反之，如果协变基与逆变基相同，那么有

$$[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]^T = [\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^m]^T = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]^{-1}, \quad (1.13)$$

因而

$$[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m] \in \text{Orth}. \quad (1.14)$$

这样，我们便获得了一个重要结论：当 $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m$ 是单位正交基，即 $\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij}$ 时，可有 $\mathbf{g}^i = \mathbf{g}_i$ 。反之亦然。

1.1.2 度量

下面引入**度量**的概念。其定义为

$$g_{ij} \triangleq \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}, \quad (1.15-a)$$

$$g^{ij} \triangleq \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.15-b)$$

这两种度量满足

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j. \quad (1.16)$$

也可以写成矩阵的形式：

$$[g_{ik}][g^{kj}] = [\delta_i^j] = \mathbf{I}_m, \quad (1.17)$$

其中的 \mathbf{I}_m 是 m 阶单位阵. 该式的证明将在稍后给出.

由于内积具有交换律, 因而度量的两个指标显然可以交换:

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji}. \quad (1.18)$$

利用度量, 可以获得**基向量转换关系**. 第 i 个协变基向量 \mathbf{g}_i 既然是向量, 就必然可以用协变基或逆变基来表示^①. 根据对偶关系式 (1.1) 和度量的定义式 (1.15-a)、(1.15-b), 可知

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = g_{ik} \mathbf{g}^k, \\ \mathbf{g}_i = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = \delta_i^k \mathbf{g}_k \end{cases} \quad (1.19-a)$$

$$\quad (1.19-b)$$

以及

$$\begin{cases} \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = \delta_k^i \mathbf{g}^k, \\ \mathbf{g}^i = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^k)_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = g^{ik} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad (1.20-a)$$

$$\quad (1.20-b)$$

这四个式子中, 式 (1.19-b) 和 (1.20-a) 是平凡的, 而式 (1.19-a) 和 (1.20-b) 则通过度量建立起了协变基与逆变基之间的关系. 这就称为**基向量转换关系**, 也可以叫做“指标升降游戏”.

需要说明的是, 根据 **Einstein 求和约定**, 重复指标 (即哑标, 这里是 k) 且一上一下时, 已经暗含了求和. 后文除非特殊说明, 也都是如此.

现在我们来证明式 (1.16):

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j. \quad (1.21)$$

证明:

$$g_{ik} g^{kj} = \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} g^{kj} = \langle \mathbf{g}_i, g^{kj} \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad (1.22)$$

根据式 (1.20-b), 有

$$g^{kj} \mathbf{g}_k = g^{jk} \mathbf{g}_k = \mathbf{g}^j \quad (1.23)$$

因此可得

$$g_{ik} g^{kj} = \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \quad (1.24)$$

□

1.1.3 向量的分量

对于任意的向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$, 它可以用协变基表示:

$$\boldsymbol{\xi} = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{g}^k \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k = \xi^k \mathbf{g}_k, \quad (1.25-a)$$

也可以用逆变基表示:

$$\boldsymbol{\xi} = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k = \xi_k \mathbf{g}^k. \quad (1.25-b)$$

式中, ξ^k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个逆变基做内积的结果, 称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**逆变分量**; 而 ξ_k 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与第 k 个协变基做内积的结果, 称为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个**协变分量**.

以后凡是指标在下的 (下标), 均称为协变某某; 指标在上的 (上标), 称为逆变某某.

① 所谓用某组基来“表示”一个向量, 就是把它朝各个基的方向做投影, 然后再求和.

1.2 张量的表示

1.2.1 张量的表示与简单张量

所谓张量，即多重线性函数。

首先用三阶张量举个例子。考虑任意的 $\Phi \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$ ，其中的 $\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$ 表示以 \mathbb{R}^m 为底空间的三阶张量全体。所谓三阶（或三重）线性函数，指“吃掉”三个向量之后变成实数，并且“吃法”具有线性性。

一般地， r 阶张量的定义如下：

$$\Phi : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{r \text{ 个 } \mathbb{R}^m} \ni \{u_1, u_2, \dots, u_r\} \mapsto \Phi(u_1, u_2, \dots, u_r) \in \mathbb{R}, \quad (1.26)$$

式中的 Φ 满足

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \Phi(u_1, \dots, \alpha \tilde{u}_i + \beta \hat{u}_i, \dots, u_r) \\ = \alpha \Phi(u_1, \dots, \tilde{u}_i, \dots, u_r) + \beta \Phi(u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_r), \end{aligned} \quad (1.27)$$

即所谓“对第 i 个变元的线性性”。这里的 i 可取 $1, 2, \dots, r$ 。

在张量空间 $\mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m)$ 上，我们引入线性结构：

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ 和 } \Phi, \Psi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad (\alpha \Phi + \beta \Psi)(u_1, u_2, \dots, u_r) \\ \triangleq \alpha \Phi(u_1, u_2, \dots, u_r) + \beta \Psi(u_1, u_2, \dots, u_r), \end{aligned} \quad (1.28)$$

于是

$$\alpha \Phi + \beta \Psi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m). \quad (1.29)$$

下面我们要获得 Φ 的表示。根据之前任意向量用协变基或逆变基的表示，有

$$\begin{aligned} \forall u, v, w \in \mathbb{R}^m, \quad \Phi(u, v, w) \\ = \Phi(u^i g_i, v_j g^j, w^k g_k) \end{aligned}$$

考虑到 Φ 对第一变元的线性性，可得

$$= u^i \Phi(g_i, v_j g^j, w^k g_k)$$

同理，

$$= u^i v_j w^k \Phi(g_i, g^j, g_k). \quad (1.30)$$

注意这里自然需要满足 Einstein 求和约定。

上式中的 $\Phi(g_i, g^j, g_k)$ 是一个数。它是张量 Φ “吃掉”三个基向量的结果。至于 $u^i v_j w^k$ 部分，三项分别是 u 的第 i 个逆变分量、 v 的第 j 个协变分量和 w 的第 k 个逆变分量。根据向量分量的定义，可知

$$u^i v_j w^k = \langle u, g^i \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdot \langle v, g_j \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdot \langle w, g^k \rangle_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.31)$$

暂时中断一下思路，先给出简单张量的定义。

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^m, \quad \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, v, w) \triangleq \langle \xi, u \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdot \langle \eta, v \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdot \langle \zeta, w \rangle_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}, \quad (1.32)$$

式中的 $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^m$ 。“ \otimes ”的定义将在 2.1 节中给出，现在可以暂时把 $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$ 理解为一种记号。简单张量作为一个映照，组成它的三个向量分别与它们“吃掉”的第一、二、三个变元做内积并相乘，结果为一个实数。

考虑到内积的线性性，便有（以第二个变元为例）

$$\xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v}, w) \triangleq \langle \xi, u \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdot \langle \eta, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v} \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdot \langle \zeta, w \rangle_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}$$

注意到 $\langle \eta, \alpha \tilde{v} + \beta \hat{v} \rangle_{\mathbb{R}^m} = \alpha \langle \eta, \tilde{v} \rangle_{\mathbb{R}^m} + \beta \langle \eta, \hat{v} \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，同时再次利用简单张量的定义，可得

$$= \alpha \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \tilde{v}, w) + \beta \xi \otimes \eta \otimes \zeta(u, \hat{v}, w). \quad (1.33)$$

类似地，对第一变元和第三变元，同样具有线性性。因此，可以知道

$$\xi \otimes \eta \otimes \zeta \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m). \quad (1.34)$$

可见，“简单张量”的名字是名副其实的，它的确是一个特殊的张量。

回过头来看 (1.31) 式。很明显，它可以用简单张量来表示。要注意，由于内积的对称性，可以有两种^①表示方法：

$$g^i \otimes g_j \otimes g^k(u, v, w) \quad (1.35-a)$$

或者

$$u \otimes v \otimes w(g^i, g_j, g^k), \quad (1.35-b)$$

我们这里取上面一种。代入式 (1.30)，得

$$\Phi(u, v, w) = \Phi(g_i, g^j, g_k) \cdot g^i \otimes g_j \otimes g^k(u, v, w)$$

由于 $\Phi(g_i, g^j, g_k) \in \mathbb{R}^m$ ，因此

$$= [\Phi(g_i, g^j, g_k) g^i \otimes g_j \otimes g^k](u, v, w). \quad (1.36)$$

方括号里的部分，就是根据 Einstein 求和约定，用 $\Phi(g_i, g^j, g_k)$ 对 $g^i \otimes g_j \otimes g^k$ 进行线性组合。

由于 u, v, w 选取的任意性，可以引入如下记号：

$$\Phi = \Phi(g_i, g^j, g_k) g^i \otimes g_j \otimes g^k =: \Phi_{i \ k}^j g^i \otimes g_j \otimes g^k, \quad (1.37)$$

即

$$\Phi_{i \ k}^j := \Phi(g_i, g^j, g_k), \quad (1.38)$$

这称为张量的分量。它说明一个张量可以用张量分量和基向量组成的简单张量来表示。

指标 i, j, k 的上下是任意的。这里，它依赖于式 (1.30) 中基向量的选取。实际上，对于这里的三阶张量，指标的上下一共有 8 种可能。指标全部在下面的，称为协变分量：

$$\Phi_{ijk} := \Phi(g_i, g_j, g_k); \quad (1.39)$$

^① 这里只考虑把 u, v, w 和 g^i, g_j, g^k 分别放在一起的情况。

指标全部在上面的，称为**逆变分量**：

$$\Phi^{ijk} := \Phi(g^i, g^j, g^k); \quad (1.40)$$

其余 6 种，称为**混合分量**。对于一个 r 阶张量，显然共有 2^r 种分量表示，其中协变分量与逆变分量各一种，混合分量 $2^r - 2$ 种。

1.2.2 张量分量之间的关系

我们已经知道，对于任意一个向量 $\xi \in \mathbb{R}^m$ ，它可以用协变基或逆变基表示：

$$\xi = \begin{cases} \xi^i g_i, \\ \xi_i g^i. \end{cases} \quad (1.41)$$

式中，协变分量与逆变分量满足坐标转换关系：

$$\begin{cases} \xi^i = \langle \xi, g^i \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \xi, g^{ik} g_k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} \langle \xi, g_k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} \xi_k, \\ \xi_i = \langle \xi, g_i \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \xi, g_{ik} g^k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g_{ik} \langle \xi, g^k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g_{ik} \xi^k. \end{cases} \quad (1.42-a)$$

$$\quad (1.42-b)$$

每一式的第二个等号都用到了基向量转换关系，见式 (1.19-a) 和 (1.20-b)。

现在再来考虑张量的分量。仍以上文中的张量 $\Phi_{i \ k}^j := \Phi(g_i, g^j, g_k)$ 为例，我们想要知道它与张量 $\Phi^{p \ r}_q := \Phi(g^p, g_q, g^r)$ 之间的关系。利用基向量转换关系，可有

$$\begin{aligned} \Phi_{i \ k}^j &:= \Phi(g_i, g^j, g_k) \\ &= \Phi(g_{ip} g^p, g^{jq} g_q, g_{kr} g^r) \end{aligned}$$

又利用张量的线性性，得

$$\begin{aligned} &= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \Phi(g^p, g_q, g^r) \\ &= g_{ip} g^{jq} g_{kr} \Phi^{p \ r}_q. \end{aligned} \quad (1.43)$$

可见，张量的分量与向量的分量类似，其指标升降可通过度量来实现。用同样的手法，还可以得到诸如 $\Phi^{ijk} = g^{jp} \Phi_p^{i \ k}$ 、 $\Phi_j^{i \ k} = g_{jp} g^{kq} \Phi_k^{ip}$ 这样的关系式。

1.2.3 相对不同基的张量分量之间的关系

\mathbb{R}^m 空间中，除了 $\{g_i\}_{i=1}^m$ 和相应的对偶基 $\{g^i\}_{i=1}^m$ 之外，当然还可以有其他的基，比如带括号的 $\{g_{(i)}\}_{i=1}^m$ 以及对应的对偶基 $\{g^{(i)}\}_{i=1}^m$ 。前者对应形如 $\Phi_j^{i \ k} := \Phi(g^i, g_j, g^k)$ 的张量，后者则对应带括号的张量，如 $\Phi_{(q)}^{(p) \ (r)} := \Phi(g^{(p)}, g_{(q)}, g^{(r)})$ 。下面我们来探讨这两个张量的关系。

首先来建立基之间的关系。带括号的第 i 个基向量 $g_{(i)}$ ，作为 \mathbb{R}^m 空间中的一个向量，自然可以用另一组基来表示：

$$g_{(i)} = \begin{cases} \langle g_{(i)}, g_k \rangle_{\mathbb{R}^m} g^k, \\ \langle g_{(i)}, g^k \rangle_{\mathbb{R}^m} g_k. \end{cases} \quad (1.44)$$

同理，自然还有它的对偶基：

$$\mathbf{g}^{(i)} = \begin{cases} \langle \mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k, \\ \langle \mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}^k \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k. \end{cases} \quad (1.45)$$

引入记号 $c_{(i)}^k := \langle \mathbf{g}_{(i)}, \mathbf{g}^k \rangle_{\mathbb{R}^m}$ 和 $c_k^{(i)} := \langle \mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，那么有

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{(i)} = c_{(i)}^k \mathbf{g}_k, \\ \mathbf{g}^{(i)} = c_k^{(i)} \mathbf{g}^k. \end{cases} \quad (1.46-a)$$

$$(1.46-b)$$

容易看出，这两个系数具有如下性质：

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = \delta_j^i. \quad (1.47)$$

写成矩阵形式^①，为

$$\begin{bmatrix} c_k^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{(j)}^k \end{bmatrix} = [\delta_j^i] = \mathbf{I}_m. \quad (1.48)$$

换句话说，两个系数矩阵是互逆的。

证明：

$$c_k^{(i)} c_{(j)}^k = \langle \mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} c_{(j)}^k$$

利用内积的线性性，有

$$= \langle \mathbf{g}^{(i)}, c_{(j)}^k \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

根据 $c_{(j)}^k$ 的定义，得到

$$= \langle \mathbf{g}^{(i)}, \mathbf{g}_{(j)} \rangle_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.49)$$

带括号的基同样满足对偶关系 (1.1) 式，于是得证。 \square

上面我们用不带括号的基表示了带括号的基。反之也是可以的：

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i = \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}^{(k)} \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^{(k)} = c_i^{(k)} \mathbf{g}^{(k)}, \\ \mathbf{g}^i = \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}_{(k)} \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_{(k)} = c_{(k)}^i \mathbf{g}_{(k)}. \end{cases} \quad (1.50-a)$$

$$(1.50-b)$$

这样一来，就建立起了不同基之间的转换关系。

现在我们回到张量。根据张量分量的定义，

$$\Phi_j^{i \ k} := \Phi(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k)$$

利用之前推导的不同基向量之间的转换关系，得

$$= \Phi(c_{(p)}^i \mathbf{g}^{(p)}, c_j^{(q)} \mathbf{g}_{(q)}, c_{(r)}^k \mathbf{g}^{(r)})$$

^① 通常我们约定上面的标号作为行号，下面的标号作为列号。

由张量的线性性，提出系数：

$$\begin{aligned}
 &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \Phi(\mathbf{g}^{(p)}, \mathbf{g}_{(q)}, \mathbf{g}^{(r)}) \\
 &= c_{(p)}^i c_j^{(q)} c_{(r)}^k \Phi_{(q)}^{(p)}{}^{(r)} .
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

完全类似，还可以有

$$\Phi_{(j)}^{(i)}{}^{(k)} = c_p^{(i)} c_{(j)}^g c_r^{(k)} \Phi_q^{p \ r} . \tag{1.52}$$

总结一下这两小节得到的结果．对于同一组基下的张量分量，其指标升降通过度量来实现；对于不同基下的张量分量，其指标转换则通过不同基之间的转换系数来完成．

第二章 张量的运算性质

2.1 张量积

张量积也叫张量并，用符号“ \otimes ”表示. 在 1.2.1 小节给出简单张量的定义时，实际上就用到了张量积. 张量积的定义为：

$$\begin{aligned} \forall \Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m), \Psi \in \mathcal{T}^q(\mathbb{R}^m), \quad \Phi \otimes \Psi &\in \mathcal{T}^{p+q}(\mathbb{R}^m) \\ &= \left(\Phi^{i_1 \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left(\Psi^{j_1 \dots j_q} g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q} \right) \\ &\triangleq \Phi^{i_1 \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_q} \left(g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left(g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

由该定义可以知道，关于简单张量 $\left(g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \otimes \left(g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_q} \right)$ ，相应的张量分量为

$$(\Phi \otimes \Psi)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}. \quad (2.2)$$

2.2 e 点积

张量的 e 点积可以用符号“ $\binom{e}{\cdot}$ ”表示. 从这个符号可以看出 e 点积的作用：前 e 个指标缩并，后面的点乘.

对于任意的 $\Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m), \Psi \in \mathcal{T}^q(\mathbb{R}^m), e \leq \min\{p, q\} \in \mathbb{N}^*$ ， e 点积是这样定义的：

$$\begin{aligned} &\Phi \binom{e}{\cdot} \Psi \\ &= \left(\Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}} \otimes g_{i_{p-e+1}} \otimes \dots \otimes g_{i_p} \right) \\ &\quad \binom{e}{\cdot} \left(\Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} g_{j_1} \otimes \dots \otimes g_{j_e} \otimes g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q} \right) \end{aligned}$$

把高亮的部分做内积，得到度量：

$$\begin{aligned} &\triangleq \Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \\ &\quad \cdot g_{i_{p-e+1} j_1} \dots g_{i_p j_e} \left(g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}} \right) \otimes \left(g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q} \right) \end{aligned}$$

玩一下“指标升降游戏”（注意有两种结合方式：与 Φ 或 Ψ ），可得

$$= \left\{ \begin{array}{l} \Phi^{i_1 \dots i_{p-e}} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \\ \Phi^{i_1 \dots i_{p-e} i_{p-e+1} \dots i_p} \Psi^{j_1 \dots j_e j_{e+1} \dots j_q} \end{array} \right\} \left(g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_{p-e}} \right) \otimes \left(g_{j_{e+1}} \otimes \dots \otimes g_{j_q} \right). \quad (2.3)$$

最后一步的花括号中，高亮的 $j_1 \cdots j_e$ 和 $i_{p-e+1} \cdots i_p$ 都是哑标，可以通过求和求掉。因此有

$$\Phi \binom{e}{\cdot} \Psi \in \mathcal{T}^{p+q-2e}(\mathbb{R}^m). \quad (2.4)$$

换句话说， e 点积的作用就是将指标哑标化。

作为一个特例，接下来我们介绍全点积，用符号 “ \odot ” 表示。对于任意的 $\Phi, \Psi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)$ ，有

$$\begin{aligned} \Phi \odot \Psi &\triangleq \Phi \binom{p}{\cdot} \Psi \\ &= \left(\Phi^{i_1 \cdots i_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_p} \right) \binom{p}{\cdot} \left(\Psi^{j_1 \cdots j_p} g_{j_1} \otimes \cdots \otimes g_{j_p} \right) \\ &= \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_p j_p} \\ &= \begin{cases} \Phi_{j_1 \cdots j_p} \Psi^{j_1 \cdots j_p} \\ \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{i_1 \cdots i_p} \end{cases} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

可见，全点积将全部指标哑标化。

张量自身和自身的全点积，定义为它的范数：

$$\Phi \odot \Phi = \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Phi_{i_1 \cdots i_p} =: |\Phi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2. \quad (2.6)$$

2.3 叉乘

张量的叉乘要求底空间为 \mathbb{R}^3 。对于任意的 $\Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^3)$, $\Psi \in \mathcal{T}^q(\mathbb{R}^3)$ ，叉乘的定义如下：

$$\begin{aligned} \Phi \times \Psi &= \left(\Phi^{i_1 \cdots i_{p-1} i_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_{p-1}} \otimes g_{i_p} \right) \times \left(\Psi^{j_1 j_2 \cdots j_q} g^{j_1} \otimes g^{j_2} \cdots \otimes g^{j_q} \right) \\ &\triangleq \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_{p-1}} \otimes \left(g_{i_p} \times g^{j_1} \right) \otimes g^{j_2} \cdots \otimes g^{j_q} \in \mathcal{T}^{p+q-1}(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (2.7)$$

注意到，此时简单张量的维数已经降了一阶。

利用 Levi-Civita 记号，可以进一步展开上式。

$$g_{i_p} \times g^{j_1} = \epsilon_{i_p}^{j_1 s} g^s, \quad (2.8)$$

式中的

$$\epsilon_{i_p}^{j_1 s} = \det \left[g_{i_p}, g^{j_1}, g^s \right]. \quad (2.9)$$

于是

$$\Phi \times \Psi = \epsilon_{i_p}^{j_1 s} \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi_{j_1 \cdots j_p} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_{p-1}} \otimes g^s \otimes g^{j_2} \cdots \otimes g^{j_q}. \quad (2.10)$$

下面我们再来类比地定义一种混合积 “ $\binom{\times}{\cdot}$ ”。对于任意的 $\Phi, \Psi \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$ ，定义

$$\begin{aligned} \Phi \binom{\times}{\cdot} \Psi &= \left(\Phi^{ijk} g_i \otimes g_j \otimes g_k \right) \binom{\times}{\cdot} \left(\Psi_{pqr} g^p \otimes g^q \otimes g^r \right) \\ &\triangleq \Phi^{ijk} \Psi_{pqr} \delta_j^q g_i \otimes (g_k \times g^p) \otimes g^r \end{aligned}$$

缩并掉 Kronecker δ ，同时利用 Levi-Civita 记号展开叉乘项，可有

$$= \epsilon_{k\ s}^p \Phi^{ijk} \Psi_{pjr} g_i \otimes g^s \otimes g^r, \quad (2.11)$$

式中的

$$\epsilon_{k\ s}^p = \det [g_k, g^p, g_s]. \quad (2.12)$$

对于这种混合积，并没有一般的约定。不同的研究者往往会采用不同的写法及表示。

2.4 置换（一）

本节主要介绍**置换运算**的定义及相关概念，这将使我们暂时离开张量运算的主线。

置换运算实际上是一种交换位置或者改变次序的运算。之后我们还将引入针对张量的置换算子，它是外积运算和外微分运算的基础。这些运算是现代张量分析与微分几何的支柱。

2.4.1 置换的定义

我们从一个例子开始。下面是一个 2×7 的“矩阵”：

$$\sigma = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} \\ \textcircled{7} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{1} & \textcircled{6} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

矩阵里面的每一个数字表示一个位置。可以想象成 7 把椅子，先是按第一行的顺序依次排列，再按照第二行的顺序打乱，重新排列。于是这就成为一个 **7 阶置换**。这个定义等价于

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.14-a)$$

自然也等价于

$$\sigma = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}, \quad (2.14-b)$$

当然，换用任何元素也都是可以的。

通常我们用方括号表示置换的**序号定义**，即标号的排列轮换；用圆括号表示**元素定义**，即标号对应元素的轮换。

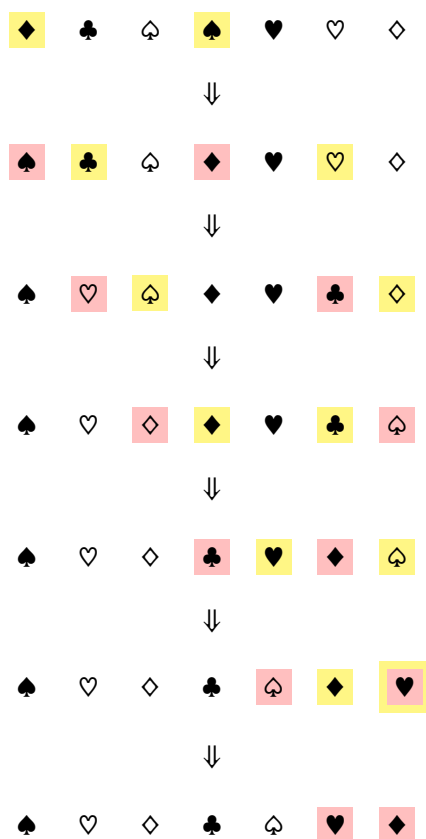
2.4.2 置换的符号

接着来定义置换的符号 $\text{sgn } \sigma$ 。这里我们把每次交换两个数字称为一次“操作”。如果经过偶数次“操作”，可以把经置换后的序列恢复为原来的顺序，那么该置换的符号 $\text{sgn } \sigma = 1$ ；而如果经过奇数次“操作”才可以复原，则 $\text{sgn } \sigma = -1$ 。若用一个式子表示，则为

$$\text{sgn } \sigma = (-1)^n, \quad (2.15)$$

其中的 n 是恢复原本顺序所需“操作”的次數。

下面我们以后式 (2.13) 所定义的 σ 为例，演示求置换符号的过程。这里的关键是通过两两交换，按如下步骤把式 (2.14-b) 的第二行变换成第一行：



一共进行了 6 次两两交换，因此 $\text{sgn } \sigma = 1$ 。

2.4.3 置换的复合

再定义一个置换

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

注意这里用了方括号，因此它是一个序号定义。方便起见，以后的序号我们都只用不带圈的普通数字表示。考虑之前定义的置换

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

则 τ 与 σ 的复合

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \odot \\ \odot & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \odot & \square & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \sigma \\ \leftarrow \tau \end{matrix} \quad (2.18)$$

与函数、线性变换等的复合类似，这里也用小圆圈“ \circ ”表示置换的复合。

假设经过置换 σ 、 τ 作用后得到的序列，分别需要 p 次和 q 次两两交换才能复原为原来的序列。那么很显然，经过复合置换 $\tau \circ \sigma$ 作用后的序列，经过 $q + p$ 次两两交换也一定可以复原。因此，复

合置换的符号

$$\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = (-1)^{q+p} = (-1)^q \cdot (-1)^p = \operatorname{sgn} \tau \cdot \operatorname{sgn} \sigma. \quad (2.19)$$

2.4.4 逆置换

逆置换 σ^{-1} 的定义为

$$\sigma^{-1} \circ \sigma = \mathbf{Id}, \quad (2.20)$$

其中的“**Id**”是恒等映照.

仍然使用式 (2.14-b):

$$\sigma = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

那么自然有

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

显然, 我们有 $\sigma^{-1} \circ \sigma = \mathbf{Id}$.

回忆一下逆矩阵的定义. 矩阵 A 的逆 A^{-1} 既要满足 $A^{-1}A = I$, 又要满足 $AA^{-1} = I$. 对于置换也是如此, 因此我们需要检查 $\sigma \circ \sigma^{-1}$: ^①

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \spadesuit_1 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3 & \clubsuit_4 & \spadesuit_5 & \heartsuit_6 & \diamondsuit_7 \\ \diamondsuit_7 & \clubsuit_4 & \spadesuit_5 & \spadesuit_1 & \heartsuit_6 & \heartsuit_2 & \diamondsuit_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \sigma^{-1} \\ \\ \leftarrow \sigma \end{matrix} \quad (2.23)$$

可见的确有 $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathbf{Id}$.

另外, 由于恒等映照 **Id** 作用后序列不发生变化, 复原所需的交换次数为 0, 因此

$$\operatorname{sgn} \mathbf{Id} = (-1)^0 = 1. \quad (2.24)$$

而根据定义,

$$\mathbf{Id} = \sigma^{-1} \circ \sigma, \quad (2.25)$$

故有

$$\operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \sigma^{-1} = 1. \quad (2.26)$$

由此, 可以推知

$$\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \sigma^{-1}, \quad (2.27)$$

即置换与它的逆具有相同的符号.

2.5 置换 (二)

本节将介绍置换运算的基本性质.

^① 该式中的数字角标用来澄清原始序号.

2.5.1 置换的穷尽

先要做一点铺垫. 设有序数组

$$\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$$

经置换 σ 作用后成为

$$\{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)\},$$

则根据之前的元素定义 (圆括号), 可以把 σ 记为

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_r) \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

每次置换都将得到一个有序数组. 把它们组合到一起, 就可以得到集合

$$\left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \forall \sigma \in \mathcal{P}_r \right\}. \quad (2.29)$$

其中的 \mathcal{P}_r 表示 r 阶置换的全体. 根据排列组合原理, r 阶置换的总数等于 r 个元素的全排列数. 即该集合共有 $r!$ 个元素.

下面我们要证明

$$\begin{aligned} & \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \forall \sigma \in \mathcal{P}_r \right\} \\ &= \left\{ (\tau \circ \sigma(i_1), \tau \circ \sigma(i_2), \dots, \tau \circ \sigma(i_r)) \mid \forall \sigma, \tau \in \mathcal{P}_r \right\} \end{aligned} \quad (2.30-a)$$

$$= \left\{ (\sigma \circ \tau(i_1), \sigma \circ \tau(i_2), \dots, \sigma \circ \tau(i_r)) \mid \forall \sigma, \tau \in \mathcal{P}_r \right\} \quad (2.30-b)$$

$$= \left\{ (\sigma^{-1}(i_1), \sigma^{-1}(i_2), \dots, \sigma^{-1}(i_r)) \mid \forall \sigma \in \mathcal{P}_r \right\}. \quad (2.30-c)$$

所谓“穷尽”, 就是将 \mathcal{P}_r 中的所有置换 σ 全部枚举出来. 关于 σ 的求和就是一个例子. 以上这条性质说明, 置换 σ 如果作为一个广义上的“哑标”, 那么穷尽的结果与用 $\tau \circ \sigma$ 、 $\sigma \circ \tau$ 或 σ^{-1} 代替该“哑标”的结果是一样的.

这说明置换构成了置换群.?

证明: 证明的思路是说明集合互相包含.

对于式 (2.30-a), 右边的 $\tau \circ \sigma$ 也是一个 r 阶置换, 自然符合左边集合的定义, 因此右边 \subset 左边. 由于这一步是相当显然的, 以下的几个证明我们将略去该步. 另一方面, 左边的 σ 可以表示成

$$\sigma = \text{Id} \circ \sigma = (\tau \circ \tau^{-1}) \circ \sigma = \tau \circ (\tau^{-1} \circ \sigma), \quad (2.31)$$

这就是右边集合的定义, 因此 左边 \subset 右边. 故可得等式成立.

对于式 (2.30-b), 我们有

$$\sigma = \sigma \circ \text{Id} = \sigma \circ (\tau^{-1} \circ \tau) = (\sigma \circ \tau^{-1}) \circ \tau, \quad (2.32)$$

它符合了右边集合的定义, 因此 左边 \subset 右边. 于是等式成立.

对于式 (2.30-c), 我们有

$$\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}, \quad (2.33)$$

它符合了右边集合的定义, 因此 左边 \subset 右边. 于是等式成立. \square

2.5.2 数组元素的乘积

设有序数组 $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ 、 $\{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ 和 $\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ 经 r 阶置换 σ 作用后分别成为 $\{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)\}$ 、 $\{\sigma(j_1), \sigma(j_2), \dots, \sigma(j_r)\}$ 和 $\{\sigma(k_1), \sigma(k_2), \dots, \sigma(k_r)\}$ ，也就是说

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_r \\ \sigma(j_1) & \sigma(j_2) & \dots & \sigma(j_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_r \\ \sigma(k_1) & \sigma(k_2) & \dots & \sigma(k_r) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

我们有如下结论：

$$\forall \sigma \in \mathcal{P}_r, \quad A_{i_1 j_1 k_1} A_{i_2 j_2 k_2} \dots A_{i_r j_r k_r} = A_{\sigma(i_1) \sigma(j_1) \sigma(k_1)} A_{\sigma(i_2) \sigma(j_2) \sigma(k_2)} \dots A_{\sigma(i_r) \sigma(j_r) \sigma(k_r)}, \quad (2.35)$$

式中的 A_{ijk} 表示三维数组 \mathbf{A} 的一个元素，其指标为 ijk 。

下面通过一个例子来说明这一条性质。还是用式 (2.14-a) 和 (2.14-b) 所定义的置换 σ ：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \diamond & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \diamond \\ \diamond & \clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \diamond \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

随意写出一个数组元素乘积：

$$A_{379} A_{264} A_{157} A_{483} A_{698} A_{\diamond\clubsuit\heartsuit} A_{\diamond\heartsuit\heartsuit}. \quad (2.37)$$

三组下标分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} 3, 2, 1, 4, 6, \diamond, \diamond; \\ 7, 6, 5, 8, 9, \clubsuit, \spadesuit; \\ 9, 4, 7, 3, 8, \heartsuit, \heartsuit. \end{array} \right. \quad (2.38)$$

考虑 σ 的序号定义式 (2.13)：

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

所谓序号只是位置的抽象表示，而不代表任何真实的元素。请记住：置换始终是位置的变换，而非元素的变换，不要被式 (2.36) 给迷惑了。把 σ 作用在这三组下标上，可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \diamond, 4, 6, 3, \diamond, 2, 1; \\ \spadesuit, 8, 9, 7, \clubsuit, 6, 5; \\ \heartsuit, 3, 8, 9, \heartsuit, 4, 7. \end{array} \right. \quad (2.40)$$

于是之前的数组元素乘积就变成了

$$A_{\diamond\heartsuit\heartsuit} A_{483} A_{698} A_{379} A_{\diamond\clubsuit\heartsuit} A_{264} A_{157}. \quad (2.41)$$

比对一下各元素，可见与式 (2.37) 的确是完全一样的。

2.5.3 哑标的穷尽

考虑如下集合：

$$\left\{ (i_1, i_2, \dots, i_r) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (2.42)$$

每个 i_k 都有 m 种取法, 而 i_k 又有 r 个, 因此该集合一共有 m^r 元素. 我们有

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathcal{P}_r, \quad & \left\{ (i_1, i_2, \dots, i_r) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\} \\ &= \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\} \end{aligned} \quad (2.43-a)$$

$$= \left\{ (\sigma^{-1}(i_1), \sigma^{-1}(i_2), \dots, \sigma^{-1}(i_r)) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (2.43-b)$$

这里, i_k 起的就是哑标的作用.

证明: 无论怎样置换, $\sigma(i_k)$ 都是 $1, 2, \dots, m$ 中的数. 因此, 对于 $\forall \sigma \in \mathcal{P}_r$,

$$(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \in \left\{ (i_1, i_2, \dots, i_r) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}, \quad (2.44)$$

即

$$\begin{aligned} & \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\} \\ & \subset \left\{ (i_1, i_2, \dots, i_r) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

另一方面, 由于 $\mathbf{Id} = \sigma^{-1} \circ \sigma$, 即

$$(i_1, i_2, \dots, i_r) = (\sigma^{-1} \circ \sigma(i_1), \sigma^{-1} \circ \sigma(i_2), \dots, \sigma^{-1} \circ \sigma(i_r)), \quad (2.46)$$

而进行一次逆置换仍然使得元素不离开原有的范围, 也就是说

$$(i_1, i_2, \dots, i_r) \in \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}, \quad (2.47)$$

即

$$\begin{aligned} & \left\{ (i_1, i_2, \dots, i_r) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\} \\ & \subset \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

两个集合互相包含, 也就证得了式 (2.43-a).

用相同的方法也可证得关于逆置换的 (2.43-b) 式, 此处从略. □

2.6 置换 (三)

本节将给出置换运算在线性代数中的一些应用.

2.6.1 行列式

2.7 置换 (四)

本节将重回张量运算的主线, 引入置换算子.

2.7.1 置换算子；对称张量与反对称张量

对于任意的置换 $\sigma \in \mathcal{P}_r$ ，定义置换算子

$$I_\sigma : \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m) \ni \Phi \mapsto I_\sigma(\Phi) \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad (2.49)$$

式中

$$I_\sigma(\Phi)(u_1, u_2, \dots, u_r) \triangleq \Phi(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(r)}) \in \mathbb{R}. \quad (2.50)$$

这里的“ $\dots \in \mathbb{R}$ ”是根据张量的定义：多重线性函数。

如果我们的置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_r) \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

那么对应的置换算子将满足

$$I_\sigma(\Phi)(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}) \triangleq \Phi(u_{\sigma(i_1)}, u_{\sigma(i_2)}, \dots, u_{\sigma(i_r)}). \quad (2.52)$$

根据张量的线性性，容易知道置换算子也具有线性性：

$$\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m) \text{ 以及 } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad I_\sigma(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha I_\sigma(\Phi) + \beta I_\sigma(\Psi). \quad (2.53)$$

证明：

$$\begin{aligned} I_\sigma(\alpha\Phi + \beta\Psi)(u_1, \dots, u_r) &= (\alpha\Phi + \beta\Psi)(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r)}) \\ &= \alpha\Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r)}) + \beta\Psi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r)}) \\ &= \alpha I_\sigma(\Phi)(u_1, \dots, u_r) + \beta I_\sigma(\Psi)(u_1, \dots, u_r) \\ &= [\alpha I_\sigma(\Phi) + \beta I_\sigma(\Psi)](u_1, \dots, u_r). \end{aligned} \quad (2.54)$$

□

两个置换算子复合的结果也是很显然的：

$$\forall \sigma, \tau \in \mathcal{P}_r, \quad I_\sigma \circ I_\tau = I_{\sigma \circ \tau}. \quad (2.55)$$

证明：

$$\begin{aligned} I_\sigma \circ I_\tau(\Phi)(u_{i_1}, \dots, u_{i_r}) &= I_\sigma(\Phi)(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(r)}) \\ &= \Phi(u_{\sigma \circ \tau(1)}, \dots, u_{\sigma \circ \tau(r)}) \\ &= I_{\sigma \circ \tau}(\Phi)(u_{i_1}, \dots, u_{i_r}). \end{aligned} \quad (2.56)$$

□

有了置换算子，我们就可以来定义**对称张量**和**反对称张量**。对称张量的全体记为 Sym ，反对称张量的全体记为 Skw 。如果以 \mathbb{R}^m 为底空间，又分别可以记为 $\mathcal{S}^r(\mathbb{R}^m)$ 和 $\mathcal{A}^r(\mathbb{R}^m)$ 。

对于任意的 $\Phi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m)$ ，如果

$$I_\sigma(\Phi) = \Phi, \quad (2.57)$$

则称 Φ 为对称张量，即 $\Phi \in \text{Sym}$ 或 $\mathcal{S}^r(\mathbb{R}^m)$ ；如果

$$I_\sigma(\Phi) = \text{sgn } \sigma \cdot \Phi, \quad (2.58)$$

则称 Φ 为反对称张量，即 $\Phi \in \text{Skw}$ 或 $\Lambda^r(\mathbb{R}^m)$ 。

有些书中采用分量形式来定义（反）对称张量。这与此处的定义是等价的：

$$I_\sigma(\Phi) = \Phi \iff \Phi_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_p)} = \Phi_{i_1\dots i_p}, \quad (2.59-a)$$

$$I_\sigma(\Phi) = \text{sgn } \sigma \cdot \Phi \iff \Phi_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_p)} = \text{sgn } \sigma \cdot \Phi_{i_1\dots i_p}. \quad (2.59-b)$$

反对称张量与我们熟知的行列式有些类似：交换两列（对于张量就是两个分量），符号相反。全部分量两两交换一遍，前面的系数自然是置换的符号。而如果无论怎么交换分量（当然需要全部两两交换一遍），符号都不变，那这样的张量就是对称张量。

一个二阶张量的协变（或逆变）分量，可以用一个矩阵表示。如果这个张量是一个反对称张量，交换任意两个分量要添加负号；对于矩阵而言，这就意味着交换两行（或两列）……

2.7.2 置换算子的表示

根据上文给出的定义，我们有

$$I_\sigma(\Phi)(u_{i_1}, \dots, u_{i_r}) \triangleq \Phi(u_{\sigma(i_1)}, \dots, u_{\sigma(i_r)}). \quad (2.60)$$

首先回忆一下 1.2.1 小节中张量的表示：选一组基（协变、逆变均可），然后把张量用这组基表示。于是

$$I_\sigma(\Phi)(u_{i_1}, \dots, u_{i_r}) = \Phi(u_{\sigma(i_1)}, \dots, u_{\sigma(i_r)})$$

把向量用协变基表示：

$$= \Phi(u_{\sigma(i_1)}^{i_1} g_{i_1}, \dots, u_{\sigma(i_r)}^{i_r} g_{i_r})$$

根据张量的线性性，提出系数：

$$= \Phi(g_{i_1}, \dots, g_{i_r}) \cdot (u_{\sigma(i_1)}^{i_1} \dots u_{\sigma(i_r)}^{i_r})$$

前半部分可以用张量分量表示；而后半部分是一组逆变分量，可以写成内积的形式

$$= \Phi_{i_1\dots i_p} \left[\langle u_{\sigma(i_1)}, g^{i_1} \rangle_{\mathbb{R}^m} \dots \langle u_{\sigma(i_r)}, g^{i_r} \rangle_{\mathbb{R}^m} \right] \quad (2.61*)$$

注意到方括号中的其实是简单张量的定义，这就有

$$= \Phi_{i_1\dots i_p} g^{i_1} \otimes \dots \otimes g^{i_r} (u_{\sigma(i_1)}, \dots, u_{\sigma(i_r)}). \quad (2.61)$$

最后一步仍然没能回到 $(u_{i_1}, \dots, u_{i_r})$ ，因此以上推导只是简单地展开了 Φ ，并没有获得实质性的结果。

然而，只要稍作改动，情况就会大不相同。考虑一下 2.5.2 小节中置换运算有关数组元素乘积的性质：

$$\forall \tau \in \mathcal{P}_r, \quad A_{i_1 j_1} \dots A_{i_r j_r} = A_{\tau(i_1) \tau(j_1)} \dots A_{\tau(i_r) \tau(j_r)}, \quad (2.62)$$

式中

$$\tau = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ \tau(i_1) & \dots & \tau(i_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_r \\ \tau(j_1) & \dots & \tau(j_r) \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

由此可以看出，式 (2.61*) 方括号中的部分其实是由 $\sigma(i_k)$ 和 i_k 两套指标确定的一组数：

$$A_{\sigma(i_k)i_k} = \langle \mathbf{u}_{\sigma(i_k)}, \mathbf{g}^{i_k} \rangle_{\mathbb{R}^m}; \quad (2.64)$$

另一方面，显然有 $\sigma^{-1} \in \mathcal{P}_r$. 于是

$$\begin{aligned} & \mathbf{I}_\sigma(\Phi)(\mathbf{u}_{i_1}, \dots, \mathbf{u}_{i_r}) \\ &= \Phi_{i_1 \dots i_r} \left[\langle \mathbf{u}_{\sigma(i_1)}, \mathbf{g}^{i_1} \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdots \langle \mathbf{u}_{\sigma(i_r)}, \mathbf{g}^{i_r} \rangle_{\mathbb{R}^m} \right] \end{aligned}$$

应用置换的性质 (2.62) 式：

$$\begin{aligned} &= \Phi_{i_1 \dots i_r} \left[\langle \mathbf{u}_{\sigma^{-1} \circ \sigma(i_1)}, \mathbf{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdots \langle \mathbf{u}_{\sigma^{-1} \circ \sigma(i_r)}, \mathbf{g}^{\sigma^{-1}(i_r)} \rangle_{\mathbb{R}^m} \right] \\ &= \Phi_{i_1 \dots i_r} \left[\langle \mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdots \langle \mathbf{u}_{i_r}, \mathbf{g}^{\sigma^{-1}(i_r)} \rangle_{\mathbb{R}^m} \right] \end{aligned}$$

同样，用简单张量表示，可得

$$= \Phi_{i_1 \dots i_r} \mathbf{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}^{\sigma^{-1}(i_r)} (\mathbf{u}_{i_1}, \dots, \mathbf{u}_{i_r}). \quad (2.65)$$

这样，我们就得到了置换算子的一种表示：

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\sigma(\Phi) &= \mathbf{I}_\sigma(\Phi_{i_1 \dots i_r} \mathbf{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}^{i_r}) \\ &= \Phi_{i_1 \dots i_r} \mathbf{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}^{\sigma^{-1}(i_r)}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

在式 (2.66) 中， i_1, \dots, i_r 都是哑标，要被求和求掉。张量 Φ 的底空间是 \mathbb{R}^m ，所以每个 i_k 都有 m 个取值。考虑一下 2.5.3 小节中置换运算有关哑标穷尽的性质，有

$$\begin{aligned} & \forall \sigma \in \mathcal{P}_r, \quad \left\{ (i_1, i_2, \dots, i_r) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\} \\ &= \left\{ (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_r)) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ 可取 } 1, 2, \dots, m \right\}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

因此，我们可以把式 (2.66) 中的指标 i_k 换成 $\sigma(i_k)$ ：

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\sigma(\Phi) &= \Phi_{i_1 \dots i_r} \mathbf{g}^{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}^{\sigma^{-1}(i_r)} \\ &= \Phi_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)} \mathbf{g}^{\sigma^{-1} \circ \sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}^{\sigma^{-1} \circ \sigma(i_r)} \\ &= \Phi_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)} \mathbf{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}^{i_r}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

这是置换算子的另一种表示。

综上，要获得置换算子的表示，若是对张量分量进行操作，就直接使用对分量指标使用置换；若是对简单张量进行操作，则要对其指标使用逆置换：^①

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\sigma(\Phi) &= \mathbf{I}_\sigma(\Phi^{i_1 \dots i_r} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}_{i_r}) \\ &= \Phi^{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}_{i_r} \end{aligned} \quad (2.69-a)$$

$$= \Phi^{i_1 \dots i_r} \mathbf{g}_{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}_{\sigma^{-1}(i_r)}. \quad (2.69-b)$$

^① 这里稍有改动，用了张量的逆变分量，不过实质都是一样的。使用协变分量还是逆变分量，这个嘛，悉听尊便。

2.8 对称化算子与反对称化算子

2.8.1 定义

对称化算子 \mathcal{S} 和反对称化算子 \mathcal{A} 的定义分别为

$$\mathcal{S}(\Phi) \triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \quad (2.70)$$

和

$$\mathcal{A}(\Phi) \triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\sigma(\Phi), \quad (2.71)$$

式中, $\Phi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m)$. 根据置换算子的线性性, 很容易知道对称化算子与反对称化算子也具有线性性.

对于任意的 $\Phi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m)$, 我们有

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\Phi) \in \text{Sym}, \\ \mathcal{A}(\Phi) \in \text{Skw}. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.72\text{-a}) \\ (2.72\text{-b}) \end{matrix}$$

这说明任意一个张量, 对它作用对称化算子之后, 将变为对称张量; 反之, 作用反对称算子之后, 将变为反对称张量.^①

证明: 要判断 $\mathcal{S}(\Phi)$ 是不是对称张量, 首先需要在其上作用一个置换算子 \mathbf{I}_τ :

$$\mathbf{I}_\tau[\mathcal{S}(\Phi)] = \mathbf{I}_\tau \left[\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \right]$$

根据置换算子的线性性 (2.53) 式, 可有

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \mathbf{I}_\tau \circ \mathbf{I}_\sigma(\Phi)$$

再用一下 (2.55) 式, 得到

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \mathbf{I}_{\tau \circ \sigma}(\Phi)$$

这里求和的作用就是把置换 σ 穷尽了. 根据 2.5.1 小节中的内容, 再在 σ 上复合一个置换 τ , 结果将保持不变:

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \mathbf{I}_\sigma(\Phi) = \mathcal{S}(\Phi). \quad (2.73)$$

对照一下对称张量的定义 (2.57) 式, 可见的确有 $\mathcal{S}(\Phi) \in \text{Sym}$.

类似地,

$$\mathbf{I}_\tau[\mathcal{A}(\Phi)] = \mathbf{I}_\tau \left[\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \right]$$

^① 换一个角度, (反)对称张量实际上可以用(反)对称化算子来定义.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \left[\mathbf{I}_\tau \circ \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \right] \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_{\tau \circ \sigma}(\Phi)
\end{aligned}$$

根据式 (2.19), $\text{sgn } \tau \cdot \text{sgn } \sigma = \text{sgn}(\tau \circ \sigma)$, 于是

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \frac{\text{sgn}(\tau \circ \sigma)}{\text{sgn } \tau} \cdot \mathbf{I}_{\tau \circ \sigma}(\Phi)$$

注意到始终成立 $\text{sgn } \tau \cdot \text{sgn } \tau = 1$ (因为 $\text{sgn } \tau = \pm 1$), 又有

$$= \frac{\text{sgn } \tau}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn}(\tau \circ \sigma) \cdot \mathbf{I}_{\tau \circ \sigma}(\Phi)$$

利用置换的穷尽, $\tau \circ \sigma$ 与 σ 相比, 结果将保持不变:

$$= \text{sgn } \tau \cdot \left[\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \right] = \text{sgn } \tau \cdot \mathcal{A}(\Phi). \quad (2.74)$$

与反对称张量的定义 (2.58) 式相比, 可见的确有 $\mathcal{S}(\Phi) \in \text{Skw}$.

这里的操作直接对张量本身进行, 没有采用涉及到张量“自变量”(向量)的繁琐计算, 因而显得更加干净利落. \square

2.8.2 反对称化算子的性质

上文已经定义了反对称化算子 \mathcal{A} :

$$\forall \Phi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m), \quad \mathcal{A}(\Phi) \triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \in \text{Skw} \text{ 或 } \Lambda^r(\mathbb{R}^m). \quad (2.75)$$

即任意一个 r 阶张量, 作用反对称化算子后就变成了 r 阶反对称张量. r 阶反对称张量也称为 **r -form** (**r -形式**).

下面列出反对称化算子的几条性质.

1. 反对称化算子若重复作用, 仅相当于一次作用:

$$\mathcal{A}^2 := \mathcal{A} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}. \quad (2.76)$$

根据数学归纳法, 显然有

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{A}^p := \underbrace{\mathcal{A} \circ \dots \circ \mathcal{A}}_{p \text{ 个 } \mathcal{A}} = \mathcal{A}. \quad (2.77)$$

证明:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &= \mathcal{A}[\mathcal{A}(\Phi)] \\
&\triangleq \mathcal{A} \left[\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \right]
\end{aligned}$$

$$\triangleq \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \tau \cdot \mathbf{I}_\tau \left[\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \right]$$

根据线性性，可有

$$= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_r} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \tau \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\tau \circ \mathbf{I}_\sigma(\Phi)$$

根据式 (2.19) 和式 (2.55)，有

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_r} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn}(\tau \circ \sigma) \cdot \mathbf{I}_{\tau \circ \sigma}(\Phi) \\ &= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_r} \left[\sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn}(\tau \circ \sigma) \cdot \mathbf{I}_{\tau \circ \sigma}(\Phi) \right] \end{aligned}$$

注意到方括号中的部分穷尽了置换 σ ，因此可以用 σ 取代“指标” $\tau \circ \sigma$ ：

$$= \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_r} \left[\sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\sigma(\Phi) \right]$$

回到定义，有

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_r} \mathcal{A}(\Phi) = \frac{1}{r!} \cdot r! \mathcal{A}(\Phi) = \mathcal{A}(\Phi). \quad (2.78)$$

□

2. 对任意两个张量 $\Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)$ 和 $\Psi \in \mathcal{T}^q(\mathbb{R}^m)$ 的并施加反对称化算子，可以得到如下结果：

$$\mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi) = \mathcal{A}[\mathcal{A}(\Phi) \otimes \Psi] \quad (2.79-a)$$

$$= \mathcal{A}[\Phi \otimes \mathcal{A}(\Psi)] \quad (2.79-b)$$

$$= \mathcal{A}[\mathcal{A}(\Phi) \otimes \mathcal{A}(\Psi)]. \quad (2.79-c)$$

证明： 这里只给出式 (2.79-b) 的证明。另外两式的证明是类似的。

$$\mathcal{A}[\Phi \otimes \mathcal{A}(\Psi)] = \mathcal{A} \left[\Phi \otimes \left(\frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \tau \cdot \mathbf{I}_\tau(\Psi) \right) \right]$$

根据张量积的线性性提出系数：

$$= \mathcal{A} \left[\frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \tau \cdot \Phi \otimes \mathbf{I}_\tau(\Psi) \right]$$

利用置换的穷尽，可以把 τ 换作 τ^{-1} ：

$$= \mathcal{A} \left[\frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \tau^{-1} \cdot \Phi \otimes \mathbf{I}_{\tau^{-1}}(\Psi) \right]$$

注意到 $\text{sgn } \tau = \text{sgn } \tau^{-1}$ ，于是

$$= \mathcal{A} \left[\frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \tau \cdot \Phi \otimes \mathbf{I}_{\tau^{-1}}(\Psi) \right], \quad (2.80)$$

式中,

$$\mathbf{I}_{\tau^{-1}}(\Psi) = \Psi^{j_1 \cdots j_q} \mathbf{g}_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}_{\tau(j_q)}. \quad (2.81)$$

于是有

$$\Phi \otimes \mathbf{I}_{\tau^{-1}}(\Psi) = \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_q} \left(\mathbf{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}_{i_p} \right) \otimes \left(\mathbf{g}_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}_{\tau(j_q)} \right). \quad (2.82)$$

置换 $\tau \in \mathcal{P}_q$ 的元素定义为

$$\tau = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_q \\ \tau(j_1) & \cdots & \tau(j_q) \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

引入它的“延拓”(或曰“增广”)置换 $\hat{\tau} \in \mathcal{P}_{p+q}$, 其定义为

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ i_1 & \cdots & i_p & \tau(j_1) & \cdots & \tau(j_q) \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

这样一来, 就有

$$\begin{aligned} \Phi \otimes \mathbf{I}_{\tau^{-1}}(\Psi) &= \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_q} \left(\mathbf{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}_{i_p} \right) \otimes \left(\mathbf{g}_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}_{\tau(j_q)} \right) \\ &= \Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_q} \left(\mathbf{g}_{\hat{\tau}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}_{\hat{\tau}(i_p)} \right) \otimes \left(\mathbf{g}_{\hat{\tau}(j_1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}_{\hat{\tau}(j_q)} \right) \\ &= \mathbf{I}_{\hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi). \end{aligned} \quad (2.85)$$

另一方面, 参与轮换的元素只有后面的 q 个, 因此 $\hat{\tau}$ 起到的作用实际上等同于 τ (当然两者作用范围不同). 所以可知

$$\text{sgn } \hat{\tau} = \text{sgn } \tau. \quad (2.86)$$

把以上这两点代入式 (2.80) 的推导, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\Phi \otimes \mathcal{A}(\Psi)] &= \mathcal{A} \left[\frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \tau \cdot \Phi \otimes \mathbf{I}_{\tau^{-1}}(\Psi) \right] \\ &= \mathcal{A} \left[\frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \hat{\tau} \cdot \mathbf{I}_{\hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \right] \end{aligned}$$

再用一次线性性, 可得

$$= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \hat{\tau} \cdot \mathcal{A} \left[\mathbf{I}_{\hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \right]. \quad (2.87)$$

$\Phi \otimes \Psi$ 是一个 $p+q$ 阶张量, 它作用置换算子后阶数当然保持不变. 根据反对称化算子的定义, 可有

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \left[\mathbf{I}_{\hat{\sigma}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \right] &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } \hat{\sigma} \cdot \left[\mathbf{I}_{\hat{\sigma}} \circ \mathbf{I}_{\hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \right] \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } \hat{\sigma} \cdot \left[\mathbf{I}_{\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \right], \end{aligned} \quad (2.88)$$

式中的 $\hat{\sigma}$ 和之前定义的 $\hat{\tau}$ 含义相同，只是为了确保哑标不重复，我们采用了不同的字母来表示。该式 (2.88) 中的 $\text{sgn } \hat{\sigma}$ 可以写成

$$\text{sgn } \hat{\sigma} = \frac{\text{sgn } (\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1})}{\text{sgn } \hat{\tau}^{-1}} = \frac{\text{sgn } (\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1})}{\text{sgn } \hat{\tau}}. \quad (2.89)$$

第二个等号是根据式 (2.27)。

注意到 (2.87) 式中也有一个 $\text{sgn } \hat{\tau}$ ，因此

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\Phi \otimes \mathcal{A}(\Psi)] &= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \hat{\tau} \cdot \mathcal{A}[\mathbf{I}_{\hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi)] \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \text{sgn } \hat{\tau} \cdot \left[\frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } \hat{\sigma} \cdot (\mathbf{I}_{\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi)) \right] \end{aligned}$$

用式 (2.89) 合并掉 $\text{sgn } \hat{\tau}$ 和 $\text{sgn } \hat{\sigma}$ ：

$$= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } (\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1}) \cdot [\mathbf{I}_{\hat{\sigma} \circ \hat{\tau}^{-1}}(\Phi \otimes \Psi)]$$

再次利用置换穷尽的性质改变“哑标”置换：

$$= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } \hat{\sigma} \cdot [\mathbf{I}_{\hat{\sigma}}(\Phi \otimes \Psi)]$$

终于拨开云雾见青天，看到了似曾相识的定义：

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_q} \mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi) \\ &= \frac{1}{q!} \cdot q! \mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi) = \mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi). \end{aligned} \quad (2.90)$$

□

3. 反对称化算子具有所谓反导性：

$$\forall \Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m), \Psi \in \mathcal{T}^q(\mathbb{R}^m), \quad \mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi) = (-1)^{pq} \cdot \mathcal{A}(\Psi \otimes \Phi). \quad (2.91)$$

证明：首先单独把反对称算子展开。它所作用的张量为 $p+q$ 阶，因而相应的置换 $\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}$ ：

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_{\sigma} \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } (\sigma \circ \tau^{-1}) \cdot \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

第二的等号与之前一样，利用了置换的穷尽。这里的 τ 是 \mathcal{P}_{p+q} 中一个任意的置换。利用置换符号的性质，有

$$\text{sgn } (\sigma \circ \tau^{-1}) = \text{sgn } \sigma \cdot \text{sgn } \tau^{-1} = \text{sgn } \sigma \cdot \text{sgn } \tau. \quad (2.93)$$

因此

$$\mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } (\sigma \circ \tau^{-1}) \cdot \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}}(\Phi \otimes \Psi)$$

$$= \frac{\text{sgn } \tau}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}}(\Phi \otimes \Psi). \quad (2.94)$$

把张量展开成分量形式，可以有

$$\mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) = \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}} \left[\Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_q} (g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_p}) \otimes (g_{j_1} \otimes \cdots \otimes g_{j_q}) \right]$$

根据式 (2.55)，可得

$$= \mathbf{I}_\sigma \circ \mathbf{I}_{\tau^{-1}} \left[\Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_q} (g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_p}) \otimes (g_{j_1} \otimes \cdots \otimes g_{j_q}) \right]$$

利用置换算子的表示 (2.69-b) 一式，对简单张量进行操作：

$$= \mathbf{I}_\sigma \left[\Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_q} (g_{\tau(i_1)} \otimes \cdots \otimes g_{\tau(i_p)}) \otimes (g_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes g_{\tau(j_q)}) \right]. \quad (2.95)$$

根据 τ 的任意性，不妨取^①

$$\tau = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ j_1 & \cdots & j_q & i_1 & \cdots & i_p \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

这种取法恰好可以使指标为 i 和 j 的向量交换一下位置。于是

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) &= \mathbf{I}_\sigma \left[\Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_q} (g_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes g_{\tau(j_q)}) \otimes (g_{\tau(i_1)} \otimes \cdots \otimes g_{\tau(i_p)}) \right] \\ &= \mathbf{I}_\sigma \left[\Phi^{i_1 \cdots i_p} \Psi^{j_1 \cdots j_q} (g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_p}) \otimes (g_{j_1} \otimes \cdots \otimes g_{j_q}) \right] \end{aligned}$$

张量分量作为数，交换律自然无需多言：

$$\begin{aligned} &= \mathbf{I}_\sigma \left[\Psi^{j_1 \cdots j_q} \Phi^{i_1 \cdots i_p} (g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_p}) \otimes (g_{j_1} \otimes \cdots \otimes g_{j_q}) \right] \\ &= \mathbf{I}_\sigma(\Psi \otimes \Phi). \end{aligned} \quad (2.97)$$

下面再考虑一下 τ 的符号： j_1 先和 i_p 交换，再和 i_{p-1} 交换，以此类推，直到移动至 i_1 的位置，一共交换了 p 次。而 j_2, \dots, j_q 也是同理，各需进行 p 次交换。所以总共是 $p \cdot q$ 次两两交换。因此，

$$\text{sgn } \tau = (-1)^{pq}. \quad (2.98)$$

回到式 (2.94) 的推导，有

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Phi \otimes \Psi) &= \frac{\text{sgn } \tau}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_{\sigma \circ \tau^{-1}}(\Phi \otimes \Psi) \\ &= \frac{(-1)^{pq}}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{p+q}} \text{sgn } \sigma \cdot \mathbf{I}_\sigma(\Psi \otimes \Phi) \\ &= (-1)^{pq} \cdot \mathcal{A}(\Psi \otimes \Phi). \end{aligned} \quad (2.99)$$

□

① 矩阵中的 i_p 和 j_q 等未必是对齐的，这里的写法只是为了表示方便。

第三章 微分同胚（曲线坐标系）

3.1 微分同胚

3.1.1 双射

设 f 是集合 A 到 B 的映照. 如果 A 中不同的元素有不同的像, 则称 f 为**单射** (也叫 “一对一”); 如果 B 中每个元素都是 A 中元素的像, 则称 f 为**满射**; 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为**双射** (也叫 “一一对应”). 三种情况的示意图见 [图 3.1](#).

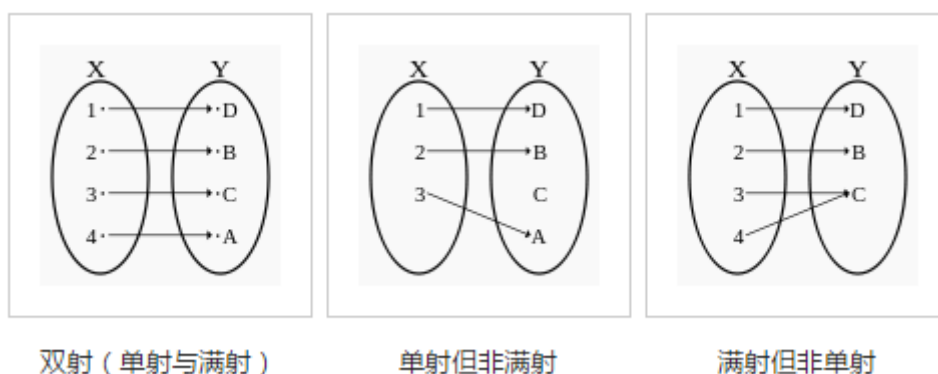


图 3.1: 单射、满射与双射

设开集 $\mathfrak{D}_X, \mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$, 它们之间存在双射, 即一一对应关系:

$$X(x) : \mathfrak{D}_x \ni x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \mapsto X(x) = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} (x) \in \mathfrak{D}_X. \quad (3.1)$$

由于该映照实现了 \mathfrak{D}_x 到 \mathfrak{D}_X 之间的双射, 因此它存在逆映照:

$$x(X) : \mathfrak{D}_X \ni X = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} \mapsto x(X) = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} (X) \in \mathfrak{D}_x. \quad (3.2)$$

我们把 \mathfrak{D}_X 称为**物理域**, 它是实际物理事件发生的区域; \mathfrak{D}_x 则称为**参数域**. 由于物理域通常较为复杂, 因此我们常把参数域取为规整的形状, 以便之后的处理.

设物理量 $f(\mathbf{X})$ 定义在物理域 $\mathfrak{D}_X \subset \mathbb{R}^m$ 上^①，则 f 就定义了一个场：

$$f : \mathfrak{D}_X \ni \mathbf{X} \mapsto f(\mathbf{X}). \quad (3.3)$$

所谓的“场”，就是自变量用位置刻画的映照。它可以是**标量场**，如温度、压强、密度等，此时 $f(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}$ ；也可以是**向量场**，如速度、加速度、力等，此时 $f(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^m$ ；对于更深入的物理、力学研究，往往还需引入**张量场**，此时 $f(\mathbf{X}) \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m)$ 。

\mathbf{X} 存在于物理域 \mathfrak{D}_X 中，我们称它为**物理坐标**。由于上文已经定义了 \mathfrak{D}_x 到 \mathfrak{D}_X 之间的双射（不是 f ！），因此 \mathfrak{D}_x 中就有唯一的 \mathbf{x} 与 \mathbf{X} 相对应，它称为**参数坐标**（也叫**曲线坐标**）。又因为物理域 \mathfrak{D}_X 上已经定义了场 $f(\mathbf{X})$ ，参数域中必然唯一存在场 $\tilde{f}(\mathbf{x})$ 与之对应：

$$\tilde{f} : \mathfrak{D}_x \ni \mathbf{x} \mapsto \tilde{f}(\mathbf{x}) = f \circ \mathbf{X}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{X}(\mathbf{x})). \quad (3.4)$$

\mathbf{x} 与 \mathbf{X} 是完全等价的，因而 \tilde{f} 与 f 也是完全等价的，所以同样有

$$f(\mathbf{X}) = \tilde{f}(\mathbf{x}(\mathbf{X})). \quad (3.5)$$

物理域中的场要满足守恒定律，如质量守恒、动量守恒、能量守恒等。从数学上看，这些守恒定律就是 $f(\mathbf{X})$ 需要满足的一系列偏微分方程。将场变换到参数域后，它仍要满足这些方程。但我们已经设法将参数域取得较为规整，故在其上进行数值求解就会相当方便。

3.1.2 参数域方程

上文已经提到，物理域中的场 $f(\mathbf{X})$ 需满足守恒定律，这等价于一系列偏微分方程（PDE）。在物理学和力学中，用到的 PDE 通常是二阶的，它们可以写成

$$\forall \mathbf{X} \in \mathfrak{D}_X, \quad \sum_{\alpha=1}^m A_{\alpha}(\mathbf{X}) \frac{\partial f}{\partial X^{\alpha}}(\mathbf{X}) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m B_{\alpha\beta}(\mathbf{X}) \frac{\partial^2 f}{\partial X^{\beta} \partial X^{\alpha}}(\mathbf{X}) = 0 \quad (3.6)$$

的形式。我们的目标是把该物理域方程转化为参数域方程，即关于 $\tilde{f}(\mathbf{x})$ 的 PDE。多元微积分中已经提供了解决方案：**链式求导法则**。

考虑到

$$f(\mathbf{X}) = \tilde{f}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) = \tilde{f}(x^1(\mathbf{X}), \dots, x^m(\mathbf{X})), \quad (3.7)$$

于是有

$$\frac{\partial f}{\partial X^{\alpha}}(\mathbf{X}) = \sum_{s=1}^m \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \cdot \frac{\partial x^s}{\partial X^{\alpha}}(\mathbf{X}). \quad (3.8)$$

这里用到的链式法则，由复合映照可微性定理驱动，它要求 \tilde{f} 关于 \mathbf{x} 可微，同时 \mathbf{x} 关于 \mathbf{X} 可微。

对于更高阶的项，往往需要更强的条件。一般地，我们要求

$$\begin{cases} \mathbf{X}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_x; \mathbb{R}^m); \\ \mathbf{x}(\mathbf{X}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_X; \mathbb{R}^m). \end{cases} \quad (3.9-a)$$

$$(3.9-b)$$

这里的 \mathcal{C}^p 指直至 p 阶偏导数存在且连续的映照全体； $p=1$ 时，它就等价于可微。至于 p 的具体取值，则由 PDE 的阶数所决定。

^① 实际的物理事件当然只会发生在三维 Euclid 空间中（只就“空间”而言），但在数学上也可以推广到 m 维。

通常情况下，已知条件所给定的往往都是 \mathfrak{D}_x 到 \mathfrak{D}_X 的映照

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) : \mathfrak{D}_x \ni \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \mapsto \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} (\mathbf{x}) \in \mathfrak{D}_X, \quad (3.10)$$

用它不好直接得到式 (3.8) 中的 $\partial x^s / \partial X^\alpha$ 项，但获得它的“倒数” $\partial X^\alpha / \partial x^s$ 却很容易，只需利用 **Jacobi** 矩阵：

$$\mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{bmatrix} (\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (3.11)$$

它是一个方阵。

有了 **Jacobi** 矩阵，施加一些手法就可以得到所需要的 $\partial x^s / \partial X^\alpha$ 项。考虑到

$$\forall \mathbf{X} \in \mathfrak{D}_X, \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) = \mathbf{X}, \quad (3.12)$$

并且其中的 $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{x}(\mathbf{X})$ 均可微，可以得到

$$\mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \cdot \mathbf{D}\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}_m, \quad (3.13)$$

其中的 \mathbf{I}_m 是单位阵。因此

$$\mathbf{D}\mathbf{x}(\mathbf{X}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial X^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^m}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial X^m} \end{bmatrix} (\mathbf{X}) = (\mathbf{D}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{bmatrix}^{-1} (\mathbf{x}). \quad (3.14)$$

用代数的方法总可以求出

$$\varphi_\alpha^s := \frac{\partial x^s}{\partial X^\alpha}, \quad (3.15)$$

它是通过求逆运算确定的函数，即位于矩阵 $\mathbf{D}\mathbf{x}$ 第 s 行第 α 列的元素。这样就有

$$\frac{\partial f}{\partial X^\alpha}(\mathbf{X}) = \sum_{s=1}^m \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \cdot \varphi_\alpha^s(\mathbf{x}(\mathbf{X})). \quad (3.16)$$

接下来处理二阶偏导数。由上式，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial X^\beta \partial X^\alpha}(\mathbf{X}) &= \sum_{s=1}^m \left[\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^k \partial x^s}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \cdot \frac{\partial x^s}{\partial X^\beta}(\mathbf{X}) \right) \cdot \varphi_\alpha^s(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \cdot \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_\alpha^s}{\partial x^k}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \cdot \frac{\partial x^k}{\partial X^\beta}(\mathbf{X}) \right) \right] \end{aligned}$$

继续利用式 (3.15)，有

$$\begin{aligned} &= \sum_{s=1}^m \left[\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^k \partial x^s}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \cdot \varphi_\beta^k(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \right) \cdot \varphi_\alpha^s(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^s}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \cdot \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_\alpha^s}{\partial x^k}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \cdot \varphi_\beta^k(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \right) \right]. \quad (3.17) \end{aligned}$$

这样，就把一阶和二阶偏导数项全部用关于 \mathbf{x} 的函数^①表达了出来。换句话说，我们已经把物理域中 f 关于 \mathbf{X} 的 PDE，转化成了参数域中 \tilde{f} 关于 \mathbf{x} 的 PDE。这就是上文要实现的目标。

3.1.3 微分同胚的定义

上文已经指出了 \mathfrak{D}_x 到 \mathfrak{D}_X 的映照 $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ 所需满足的一些条件。这里再次罗列如下：

1. $\mathfrak{D}_X, \mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$ 均为开集^②；
2. 存在 \mathfrak{D}_x 同 \mathfrak{D}_X 之间的双射 $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ ，即存在一一对应关系；
3. $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ 和它的逆映照 $\mathbf{x}(\mathbf{X})$ 满足一定的正则性要求。

对第 3 点要稍作说明。

如果满足这三点，则称 $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ 为 \mathfrak{D}_x 与 \mathfrak{D}_X 之间的 \mathcal{C}^p -微分同胚，记为 $\mathbf{X}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_x; \mathfrak{D}_X)$ 。把物理域中的一个部分对应到参数域上的一个部分，需要的仅仅是双射这一条件；而要使得物理域中所满足的 PDE 能够转换到参数域上，就需要“过去”和“回来”都满足 p 阶偏导数连续的条件（即正则性要求）。

有了微分同胚，物理域中的位置就可用参数域中的位置等价地进行刻画。因此我们也把微分同胚称为曲线坐标系。

3.2 向量值映照的可微性

3.2.1 可微性的定义

设 \mathbf{x}_0 是参数域 \mathfrak{D}_x 中的一个内点。在映照 $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ 的作用下，它对应到物理域 \mathfrak{D}_X 中的点 $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)$ 。参数域是一个开集。根据开集的定义，必然存在一个实数 $\lambda > 0$ ，使得以 \mathbf{x}_0 为球心、 λ 为半径的球能够完全落在定义域 \mathfrak{D}_x 内，即

$$\mathfrak{B}_\lambda(\mathbf{x}_0) \subset \mathfrak{D}_x, \quad (3.18)$$

其中的 $\mathfrak{B}_\lambda(\mathbf{x}_0)$ 表示 \mathbf{x}_0 的 λ 邻域。

如果 $\exists \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ^③，满足

$$\forall \mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in \mathfrak{B}_\lambda(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + o(|\mathbf{h}|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.19)$$

则称向量值映照 $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 点可微。其中， $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 表示从 \mathbb{R}^m 到 \mathbb{R}^n 的线性变换全体。

根据这个定义，所谓可微性，指由自变量变化所引起的因变量变化，可以用一个线性变换近似，而误差为一阶无穷小量。自变量可见到因变量空间最简单的映照形式就是线性映照（线性变换），因而具有可微性的向量值映照具有至关重要的作用。

① 当然它仍然是 \mathbf{X} 的隐函数： $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$ 。

② 用形象化的语言来说，如果在区域中的任意一点都可以吹出一个球，并能使球上的每个点都落在区域内，那么这个区域就是开集。这是复合映照可微性定理的一个要求。

③ 正如之前已经定义的， \mathbf{DX} 已经用来表示 Jacobi 矩阵。这里还是请先暂时将它视为一种记号，其具体形式将在下一小节给出。

3.2.2 Jacobi 矩阵

下面我们研究 $\mathbf{DX}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ 的表达形式. 由于 $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, 所以

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix} = h^1 \mathbf{e}_1 + \cdots + h^i \mathbf{e}_i + \cdots + h^m \mathbf{e}_m. \quad (3.20)$$

另一方面, $\mathbf{DX}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ 具有线性性:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ 和 } \tilde{\mathbf{h}}, \hat{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\alpha \tilde{\mathbf{h}} + \beta \hat{\mathbf{h}}) = \alpha \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\tilde{\mathbf{h}}) + \beta \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{h}}). \quad (3.21)$$

这样就有

$$\begin{aligned} \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) &= \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(h^1 \mathbf{e}_1 + \cdots + h^i \mathbf{e}_i + \cdots + h^m \mathbf{e}_m) \\ &= h^1 \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_1) + \cdots + h^i \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i) + \cdots + h^m \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_m) \end{aligned} \quad (3.22)$$

注意到 $h^i \in \mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i) \in \mathbb{R}^m$, 因而该式可以用矩阵形式表述:

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_1), \cdots, \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

最后一步要用到分块矩阵的思想: 左侧的矩阵为 1 “行” m 列, 每一 “行” 是一个 m 维列向量; 右侧的矩阵 (向量) 则为 m 行 1 列. 两者相乘, 得到 1 “行” 1 列的矩阵 (当然实际为 m 行), 即之前的 (3.22) 式. 在线性代数中, $m \times m$ 的矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_1) & \cdots & \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_m) \end{bmatrix}$ 通常称为变换矩阵 (也叫过渡矩阵).

接下来要搞清楚变换矩阵的具体形式. 取

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0, \cdots, \lambda, \cdots, 0 \end{bmatrix}^T = \lambda \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^m, \quad (3.24)$$

即除了 \mathbf{h} 的第 i 个元素为 λ 外, 其余元素均为 0 ($\lambda \neq 0$). 因而有 $|\mathbf{h}|_{\mathbb{R}^m} = \lambda$. 代入可微性的定义 (3.19) 式, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_1), \cdots, \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i), \cdots, \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, \cdots, \lambda, \cdots, 0 \end{bmatrix}^T + o(\lambda) \\ &= \lambda \cdot \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i) + o(\lambda). \end{aligned} \quad (3.25)$$

由于 λ 是非零实数, 故可以在等式两边同时除以 λ 并取极限:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = \mathbf{DX}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i), \quad (3.26)$$

这里的 $o(\lambda)$ 根据其定义自然趋于 0. 该式左侧极限中的分子部分, 是自变量 \mathbf{x} 第 i 个分量的变化所引起因变量的变化; 而分母, 则是自变量第 i 个分量的变化大小. 我们引入下面的记号:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \quad (3.27)$$

它表示因变量 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ 作为一个整体, 相对于自变量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ 第 i 个分量 $x^i \in \mathbb{R}$ 的“变化率”, 即 \mathbf{X} 关于 x^i (在 \mathbf{x}_0 处) 的偏导数. 由于我们没有定义向量的除法, 因此自变量作为整体所引起因变量的变化, 是没有意义的. 利用偏导数的定义, 可有

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_1), \dots, \mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i), \dots, \mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_m) \right] \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^m}(\mathbf{x}_0) \right] \in \mathbb{R}^{m \times m}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

下面给出 $\partial \mathbf{X} / \partial x^i (\mathbf{x}_0)$ 的计算式. 根据定义, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) &:= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \in \mathbb{R}^m \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix}(\mathbf{x}_0) \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \frac{X^1(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - X^1(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{X^m(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - X^m(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

向量极限存在的充要条件是各分量极限均存在, 即存在

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{X^\alpha(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - X^\alpha(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \in \mathbb{R}, \quad (3.30)$$

其中的 $\alpha = 1, \dots, m$. 这其实就是我们熟知的多元函数偏导数的定义. 用它来表示向量值映照的偏导数, 可有

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial X^m}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) \mathbf{e}_\alpha. \quad (3.31)$$

向量值映照 \mathbf{X} 关于 x^i 的偏导数, 从代数的角度来看, 是 Jacobi 矩阵的第 i 列; 从几何的角度来看, 则是物理域中 x^i 线的切向量; 从计算的角度来看, 又是 (该映照) 每个分量偏导数的组合.

现在我们重新回到 Jacobi 矩阵. 情况已经十分明了: 只需把之前获得的各列并起来, 就可以得到完整的 Jacobi 矩阵. 于是

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) &= \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^m} \right](\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial X^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{bmatrix}(\mathbf{x}_0) \cdot \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

这与 3.1.2 小节中 (3.11) 式给出的定义是完全一致的.

3.2.3 偏导数的几何意义

这一小节中，我们要回过头来，澄清向量值映照偏导数的几何意义。

如图 3.2, $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ 是定义域空间 $\mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$ 到值域空间 $\mathfrak{D}_X \subset \mathbb{R}^n$ 的向量值映照. 在定义域空间 \mathfrak{D}_x 中, 过点 \mathbf{x}_0 作一条平行于 x^i 轴的直线, 称为 x^i -线. x^i 轴定义了向量 \mathbf{e}_i , 因而 x^i -线上的任意一点均可表示为 $\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$.

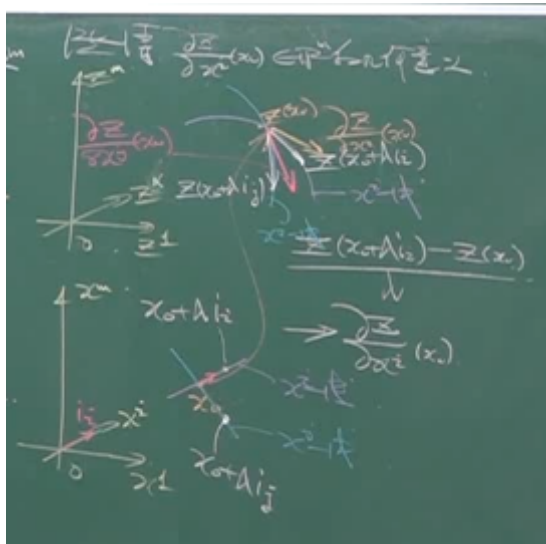


图 3.2: 向量值映照偏导数的几何意义

在 $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ 的作用下, 点 \mathbf{x}_0 被映照到 $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)$, 而 $\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i$ 则被映照到了 $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i)$. 这样一来, x^i -线也就被映照到了值域空间 \mathfrak{D}_X 中, 成为一条曲线.

根据前面的定义, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0). \quad (3.33)$$

对应到图 3.2 中, 就是 x^i -线 (值域空间中) 在 $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)$ 处的切向量.

完全类似, 在定义域空间 \mathfrak{D}_x 中, 过点 \mathbf{x}_0 作出 x^j -线 (自然是平行于 x^j 轴), 其上的点可以表示为 $\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_j$. 映射到值域空间 \mathfrak{D}_X 上, 则成为 $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_j)$. 很显然,

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_j) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \quad (3.34)$$

就是 x^j -线在 $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)$ 处的切向量. 在定义域空间中, x^i -线作为直线共有 m 条, 它们之间互相垂直. 作用到值域空间后, 这样的 x^i -线尽管变为了曲线, 但仍为 m 条. 相应的切向量, 自然也有 m 个.

3.3 局部基

这里的讨论基于曲线坐标系 (即微分同胚) $\mathbf{X}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_x; \mathfrak{D}_X)$.

3.3.1 局部协变基

我们已经知道， $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ 的 Jacobi 矩阵可以表示为

$$\mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}, \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^m} \right](\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (3.35)$$

式中的

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_i) - \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\lambda}. \quad (3.36)$$

在参数域 \mathfrak{D}_x 中作出 x^i -线. 映照到物理域后, 它变成一条曲线, 我们仍称之为 x^i -线. 3.2.3 小节已经说明, (3.36) 式表示物理域中 x^i -线的切向量. 在张量分析中, 我们通常把它记作 $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$.

由于微分同胚要求是双射, 因而 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_i, \dots, \mathbf{g}_m \right](\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (3.37)$$

必须是非奇异的. 这等价于

$$\left\{ \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \right\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \quad (3.38)$$

线性无关. 由此, 它们可以构成 \mathbb{R}^m 上的一组基.

用任意的 $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}_x$ 均可构建一组基. 但选取不同的 \mathbf{x} , 将会使所得基的取向有所不同. 因而这种基称为局部协变基. 和之前一样, 我们用“协变”表示指标在下方.

3.3.2 局部逆变基; 对偶关系

有了局部协变基 $\{\mathbf{g}_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^m$, 根据 1.1.1 小节中的讨论, 必然唯一存在与之对应的局部逆变基 $\{\mathbf{g}^i(\mathbf{x})\}_{i=1}^m$, 满足

$$\left[\mathbf{g}^1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}^m(\mathbf{x}) \right]^\top \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \right] = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^1)^\top \\ \vdots \\ (\mathbf{g}^m)^\top \end{bmatrix}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_m. \quad (3.39)$$

下面我们来寻找逆变基 $\{\mathbf{g}^i(\mathbf{x})\}_{i=1}^m$ 的具体表示. 考虑到^①

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) = \mathbf{X} \in \mathbb{R}^m, \quad (3.40)$$

并利用复合映照可微性定理, 可知

$$\mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \cdot \mathbf{D}\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}_m, \quad (3.41)$$

即有

$$\mathbf{D}\mathbf{x}(\mathbf{X}) = (\mathbf{D}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{x}(\mathbf{X})). \quad (3.42)$$

于是

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{g}^1)^\top \\ \vdots \\ (\mathbf{g}^m)^\top \end{bmatrix}(\mathbf{x}) = (\mathbf{D}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial X^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^m}{\partial X^1} & \dots & \frac{\partial x^m}{\partial X^m} \end{bmatrix}(\mathbf{X}). \quad (3.43)$$

^① 这里的几步推导在 3.1.2 小节中也有所涉及.

这样我们就得到了局部逆变基的具体表示（注意转置）：

$$\mathbf{g}^i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial X^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^i}{\partial X^m} \end{bmatrix}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial x^i}{\partial X^\alpha}(\mathbf{X}) \mathbf{e}_\alpha. \quad (3.44)$$

定义标量场 $f(\mathbf{x})$ 的梯度为

$$\nabla f(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\alpha, \quad (3.45)$$

则局部逆变基又可以表示成

$$\mathbf{g}^i(\mathbf{x}) = \nabla x^i(\mathbf{X}). \quad (3.46)$$

此处的梯度实际上就是我们熟知的三维情况在 m 维下的推广。

在 3.2.3 小节中已经指出，局部协变基的几何意义是 x^i -线的切向量。现在，我们来讨论局部逆变基的几何意义。

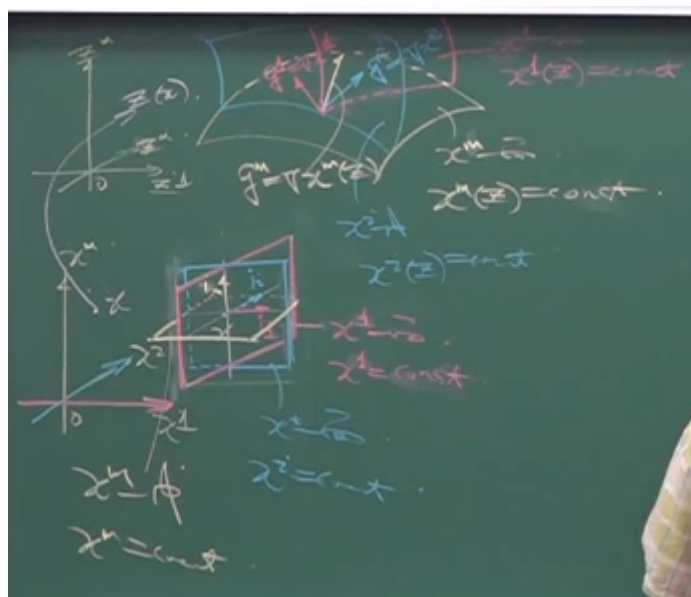


图 3.3: 局部逆变基的几何意义

如图 3.3 所示，在参数空间中，过点 \mathbf{x} 作垂直于 x^i 轴的平面，记为 x^i -面。在 x^i -面上，自然有 $x^i = \text{const}$ 。映照到物理空间后， x^i -面变为一个曲面，其上仍有 $x^i(\mathbf{X}) = \text{const}$ ，即它是一个等值面。等值面的梯度方向显然与该曲面的法向相同。因此，局部逆变基 $\mathbf{g}^i(\mathbf{x})$ 的几何意义就是 x^i -面的法向量。

现在来验证一下对偶关系。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}), \nabla x^j(\mathbf{X}) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\alpha, \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}(\mathbf{X}) \mathbf{e}_\beta \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

利用内积的线性性，有

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}(\mathbf{X}) \cdot \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle_{\mathbb{R}^m} \\
&= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}(\mathbf{X}) \cdot \delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

合并掉指标 β ，可得

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \frac{\partial x^j}{\partial X^\alpha}(\mathbf{X}) \\
&= \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial x^j}{\partial X^\alpha}(\mathbf{X}) \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

最后一步求和号中的第一项位于 Jacobi 矩阵 $\mathbf{D}\mathbf{x}(\mathbf{X})$ 的第 j 行第 α 列，而第二项位于 $\mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x})$ 的第 α 行第 i 列，因此关于 α 的求和结果便是乘积矩阵的第 j 行第 i 列。根据式 (3.41)，这两个 Jacobi 矩阵的乘积为单位阵，所以有

$$\langle \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \tag{3.48}$$

总结一下我们得到的结果。对于体积形态的连续介质，存在着

$$\begin{cases} \text{局部协变基:} & \left\{ \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \triangleq \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \right\}_{i=1}^m, \\ \text{局部逆变基:} & \left\{ \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) \triangleq \nabla x^i(\mathbf{X}) \right\}_{i=1}^m, \end{cases}$$

它们满足对偶关系

$$\langle \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_i^j. \tag{3.50}$$

这样，在研究连续介质中的一个点时，我们就有三种基可以使用：局部协变基、局部逆变基，当然还有典则基 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^m$ 。

3.4 标架运动方程

3.4.1 向量在局部基下的表示

对于 \mathbb{R}^m 空间中的任意一个向量 \mathbf{b} ，它可以用典则基表示：

$$\mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^m b_\alpha \mathbf{e}_\alpha = b_\alpha \mathbf{e}_\alpha. \tag{3.51}$$

第二步省略掉了求和号，这是根据 **Einstein 求和约定**：指标出现两次，则表示对它求和。^① 根据之前一小节的结论， \mathbf{b} 还可以用局部协变基和局部逆变基来表示：

$$\mathbf{b} = b^i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = b_j \mathbf{g}^j(\mathbf{x}), \tag{3.52}$$

^① 在 1.1.2 小节中，还要求重复指标一上一下。典则基不分协变、逆变，标号均在下方，可以视为一个特例。

式中,

$$b^i = \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad (3.53-a)$$

和

$$b_j = \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad (3.53-b)$$

分别称为向量 \mathbf{b} 的**逆变分量**和**协变分量**. 注意, 这里同样用到了 Einstein 求和约定.

将 $\mathbf{b} = b^i \mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ 的两边分别与 $\mathbf{g}^j(\mathbf{x})$ 作内积, 可有

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle b^i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

利用内积的线性性, 提出系数:

$$= b^i \langle \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

利用对偶关系 (3.50) 式, 可有

$$= b^i \delta_i^j = b^j, \quad (3.54)$$

这就得到了逆变分量的表示式 (3.53-a). 同理, 将 $\mathbf{b} = b_j \mathbf{g}^j(\mathbf{x})$ 的两边分别与 $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ 作内积, 就有

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle b_j \mathbf{g}^j(\mathbf{x}), \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} = b_j \langle \mathbf{g}^j(\mathbf{x}), \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^m} = b_j \delta_i^j = b_i, \quad (3.55)$$

这便是协变分量的表示 (3.53-b) 式.

3.4.2 局部基的偏导数

所谓局部基 (或曰“活动标架”), 顾名思义, 它在不同的点上往往是不同的. 根据之前的定义, 我们有

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) : \mathfrak{D}_x \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial X^m}{\partial x^i} \end{bmatrix} (\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m, \quad (3.56-a)$$

$$\mathbf{g}^i(\mathbf{x}) : \mathfrak{D}_x \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial X^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^i}{\partial X^m} \end{bmatrix} (\mathbf{X}(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^m. \quad (3.56-b)$$

从映照的角度来看, 局部基定义了新的向量值映照, 其定义域仍为参数域, 而值域则为 \mathbb{R}^m 空间. 这样一来, 我们在 3.2 节中所引入的操作均可完全类似地应用在局部基上. 例如, 我们可以来求局部基的 Jacobi 矩阵:

$$\begin{cases} D\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^m} \right] (\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \end{cases} \quad (3.57-a)$$

$$\begin{cases} D\mathbf{g}^i(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^m} \right] (\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}. \end{cases} \quad (3.57-b)$$

Jacobi 矩阵中的每一列都是局部基作为整体相对自变量第 j 个分量的变化率，即偏导数：

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) \triangleq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{g}_i(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_j) - \mathbf{g}_i(\mathbf{x})}{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \quad (3.58-a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) \triangleq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{g}^i(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_j) - \mathbf{g}^i(\mathbf{x})}{\lambda} \in \mathbb{R}^m. \quad (3.58-b)$$

下面澄清局部基偏导数的几何意义. 如图 3.4 所示, 在参数空间中, 过点 \mathbf{x} 作出 x^j -线, 并在其上取点 $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_j$. 分别过点 \mathbf{x} 和 $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_j$ 作出 x^i -线, 于是 $\partial \mathbf{g}_i / \partial x^j(\mathbf{x})$ 就表示 $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ (即 x^i -线的切向量) 沿 x^j -线的变化率. 同理, 过点 \mathbf{x} 和 $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_j$ 作出 x^i -面, 则 $\partial \mathbf{g}^i / \partial x^j(\mathbf{x})$ 就表示 $\mathbf{g}^i(\mathbf{x})$ (即 x^i -面的法向量) 沿 x^j -线的变化率.

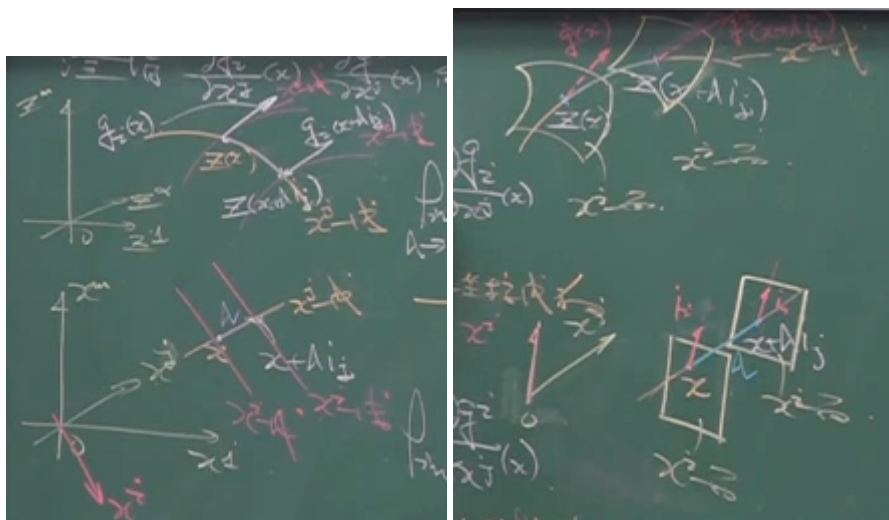


图 3.4: 局部基偏导数的几何意义

3.4.3 Christoffel 符号

考察 $\partial \mathbf{g}_i / \partial x^j(\mathbf{x})$, 即协变基的偏导数^①. 它是 \mathbb{R}^m 空间中的一个向量, 因而可以用协变基或逆变基来表示:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}, \mathbf{g}^k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k, & (3.59-a) \\ \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}, \mathbf{g}_k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k. & (3.59-b) \end{cases}$$

引入第一类 Christoffel 符号

$$\Gamma_{ji,k} \triangleq \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}, \mathbf{g}_k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \quad (3.60)$$

和第二类 Christoffel 符号

$$\Gamma^k_{ji} \triangleq \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}, \mathbf{g}^k \right\rangle_{\mathbb{R}^m}, \quad (3.61)$$

① 以下在不引起歧义之处, 将省略局部协变基、局部逆变基的“局部”二字. 为了方便, $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{g}^i(\mathbf{x})$ 中的“(x)”有时也会省略.

则式 (3.59) 可以写成

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \Gamma_{ji}^k \mathbf{g}_k, \\ \Gamma_{ji,k} \mathbf{g}^k. \end{cases} \quad (3.62-a)$$

$$(3.62-b)$$

下面我们来探讨 Christoffel 符号的基本性质——指标 i, j 可以交换：

$$\begin{cases} \Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k, \\ \Gamma_{ji,k} = \Gamma_{ij,k}. \end{cases} \quad (3.63-a)$$

$$(3.63-b)$$

证明： 根据定义 (3.60) 和 (3.61) 式，指标 i, j 来源于协变基的偏导数 $\partial \mathbf{g}_i / \partial x^j(\mathbf{x})$ 。只要偏导数中的 i, j 可以交换，Christoffel 符号中的指标 i, j 自然也可以。回顾协变基的定义 (3.56-a) 式：

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial X^m}{\partial x^i} \end{bmatrix}(\mathbf{x}). \quad (3.64)$$

其偏导数为

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X^1}{\partial x^j \partial x^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 X^m}{\partial x^j \partial x^i} \end{bmatrix}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X^1}{\partial x^i \partial x^j} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j} \end{bmatrix}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}(\mathbf{x}). \quad (3.65)$$

注意第二个等号处交换了偏导数的次序，其条件是二阶偏导数均存在且连续。只要微分同胚达到了 \mathcal{C}^2 ，就可以满足该要求，在一般的物理情境这都是成立的。于是我们便完成了证明。 \square

现在再来看逆变基的偏导数 $\partial \mathbf{g}^i / \partial x^j(\mathbf{x})$ 。它也是 \mathbb{R}^m 空间中的向量，因此

$$\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}, \mathbf{g}^k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}_k, \\ \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}, \mathbf{g}_k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{g}^k. \end{cases} \quad (3.66-a)$$

$$(3.66-b)$$

利用 Christoffel 符号，可以表示出 $\langle \partial \mathbf{g}^i / \partial x^j, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m}$ 。根据对偶关系，

$$\langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}) = \delta_k^i. \quad (3.67)$$

两边对 x^j 求偏导，用一下内积的求导公式，同时注意到 δ_k^i 是与 \mathbf{x} 无关的常数，因而

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}, \mathbf{g}_k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} + \left\langle \mathbf{g}^i, \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^j} \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = \frac{\partial \delta_k^i}{\partial x^j} = 0. \quad (3.68)$$

所以

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}, \mathbf{g}_k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = - \left\langle \mathbf{g}^i, \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^j} \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = - \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^j}, \mathbf{g}^i \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = -\Gamma_{jk}^i. \quad (3.69)$$

至于 $\langle \partial \mathbf{g}^i / \partial x^j, \mathbf{g}^k \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，将在以后讨论。你想在什么时候？

3.4.4 指标升降

首先引入度量：

$$\begin{cases} g_{ij}(\mathbf{x}) \triangleq \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}), \\ g^{ij}(\mathbf{x}) \triangleq \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.70\text{-a}) \\ (3.70\text{-b}) \end{matrix}$$

由此可以获得基向量的指标升降

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = g_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{g}^j(\mathbf{x}), \\ \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) = g^{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_j(\mathbf{x}). \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.71\text{-a}) \\ (3.71\text{-b}) \end{matrix}$$

如前所述，对于任意的 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ，它可以表示成

$$\mathbf{b} = b^i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = b_j \mathbf{g}^j(\mathbf{x}). \quad (3.72)$$

利用度量，同样可以获得向量分量的指标升降

$$\begin{cases} b^i = \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}^i \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \mathbf{b}, g^{ik} \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g^{ik} b_k, \\ b_j = \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \mathbf{b}, g_{jk} \mathbf{g}^k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g_{jk} \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}^k \rangle_{\mathbb{R}^m} = g_{jk} b^k. \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.73\text{-a}) \\ (3.73\text{-b}) \end{matrix}$$

关于度量，再多说一句。由于内积的交换律，显然有

$$g_{ij}(\mathbf{x}) = g_{ji}(\mathbf{x}), \quad g^{ij} = g^{ji}. \quad (3.74)$$

3.4.5 度量的性质；Christoffel 符号的计算

首先，我们来澄清度量的两条性质。

1. 矩阵 $[g_{ik}]$ 与 $[g^{kj}]$ 互逆，即

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j. \quad (3.75)$$

证明见 1.1.2 小节（尽管省略了“(x)”，但请不要忘记这里的基是局部基）。

2. 第一类 Christoffel 符号满足

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) (\mathbf{x}). \quad (3.76)$$

证明：根据式 (3.60)，第一类 Christoffel 符号的定义为

$$\Gamma_{ij,k} \triangleq \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}, \mathbf{g}_k \right\rangle_{\mathbb{R}^m}. \quad (3.77)$$

考虑度量的定义

$$g_{ij}(\mathbf{x}) \triangleq \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}). \quad (3.78)$$

两边对 x^k 求偏导，可得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^k}, \mathbf{g}_j \right\rangle_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}) + \left\langle \mathbf{g}_i, \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^k} \right\rangle_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x})$$

利用上面 Christoffel 符号的定义，有

$$= \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}. \quad (3.79)$$

这样就获得了度量偏导数用 Christoffel 符号的表示。但我们需要的却是 Christoffel 符号用度量偏导数的表示。下面的工作就是完成这一“调转”。

利用指标轮换

$$i \rightarrow j, \quad j \rightarrow k, \quad k \rightarrow i,$$

可有

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j}. \quad (3.80)$$

再进行一次指标轮换：

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = \Gamma_{jk,i} + \Gamma_{ji,k}. \quad (3.81)$$

以上三式联立，就有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \left[(\Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j}) + (\Gamma_{jk,i} + \Gamma_{ji,k}) - (\Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}) \right] \end{aligned}$$

利用 (3.63-b) 式所指出的 Christoffel 符号的指标交换性：

$$= \frac{1}{2} \left[(\Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ki,j}) + (\Gamma_{jk,i} + \Gamma_{ij,k}) - (\Gamma_{ki,j} + \Gamma_{jk,i}) \right]$$

高亮部分相互抵消，于是可得

$$= \Gamma_{ij,k}. \quad (3.82)$$

□

有了这两条性质，我们就能够很容易地获取 Christoffel 符号的计算方法。

第一步从度量开始。根据 3.3.1 小节，在曲线坐标系（即微分同胚） $\mathbf{X}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_{\mathbf{x}}; \mathfrak{D}_{\mathbf{X}})$ 中，Jacobi 矩阵可以用协变基表示为

$$\mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_i, \dots, \mathbf{g}_m](\mathbf{x}). \quad (3.83)$$

因此协变形式的度量（矩阵形式）就可以写成

$$[g_{ij}] \triangleq [\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}] = \mathbf{D}\mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{x}). \quad (3.84)$$

两种形式的度量是互逆的，于是 g^{ij} 实际上也已经算出来了。

第二步，将求得的度量代入式 (3.76)

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)(\mathbf{x}), \quad (3.85)$$

就得到了第一类 Christoffel 符号。至于第二类 Christoffel 符号，它可以表示成

$$\Gamma^k_{ij} \triangleq \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}, \mathbf{g}^k \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}, g^{kl} \mathbf{g}_l \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = g^{kl} \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}, \mathbf{g}_l \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = g^{kl} \Gamma_{ij,l}. \quad (3.86)$$

这样一来，它的表示也就明确了。

3.5 度量张量与 Eddington 张量

3.5.1 度量张量的定义

在曲线坐标系（即微分同胚） $X(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_x; \mathfrak{D}_X)$ 中，可以引入度量张量

$$\mathbf{G} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^m). \quad (3.87)$$

这是用协变形式表达的。当然也可以切换成其他形式：

$$\mathbf{G} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$$

利用指标升降，有

$$= g_{ij} (g^{ik} \mathbf{g}_k) \otimes \mathbf{g}^j$$

再根据线性性提出系数：

$$\begin{aligned} &= g_{ij} g^{ik} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^j \\ &= \delta_j^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^j. \end{aligned} \quad (3.88)$$

类似地，还可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \delta_j^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^j \\ &= \delta_j^k \mathbf{g}_k \otimes (g^{jl} \mathbf{g}_l) \\ &= \delta_j^k g^{jl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \\ &= g^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l. \end{aligned} \quad (3.89)$$

综上，度量张量有三种表示：

$$\mathbf{G} = \begin{cases} g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j, & (3.90\text{-a}) \\ g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, & (3.90\text{-b}) \\ \delta_j^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, & (3.90\text{-c}) \end{cases}$$

式中，协变分量 $g_{ij} = \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，逆变分量 $g^{ij} = \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，混合分量 $\delta_j^i = \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}$ 。

3.5.2 Eddington 张量的定义

接下来引入 **Eddington 张量**

$$\epsilon = \epsilon_{ijk} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^3), \quad (3.91)$$

式中的 $\epsilon_{ijk} = \det[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k]$ 。和之前一样，仍是利用指标升降来获得等价定义：

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_{ijk} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k \\ &= \epsilon_{ijk} \mathbf{g}^i \otimes (g^{jl} \mathbf{g}_l) \otimes \mathbf{g}^k \end{aligned}$$

$$= \epsilon_{ijk} g^{jl} g^i \otimes g_l \otimes g^k$$

根据张量分量之间的关系（回顾 1.2.2 小节），我们有

$$= \epsilon_{i \ k}^l g^i \otimes g_l \otimes g^k. \quad (3.92)$$

当然，这里的 $\epsilon_{i \ k}^l$ 只是一个形式。要将其显式地表达出来，需要利用行列式的线性性：

$$\begin{aligned} \forall \xi, \hat{\eta}, \tilde{\eta}, \zeta \in \mathbb{R}^3 \text{ 以及 } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \det[\xi, \alpha \hat{\eta} + \beta \tilde{\eta}, \zeta] \\ = \alpha \det[\xi, \hat{\eta}, \zeta] + \beta \det[\xi, \tilde{\eta}, \zeta]. \end{aligned} \quad (3.93)$$

由此可知

$$\begin{aligned} \epsilon_{i \ k}^l &= \epsilon_{ijk} g^{jl} \\ &= g^{jl} \det[g_i, g_j, g_k] \\ &= \det[g_i, g^{jl} g_j, g_k] \\ &= \det[g_i, g^l, g_k]. \end{aligned} \quad (3.94)$$

一般来说，张量在定义时，只需给出其分量的一种形式。而其他的形式，则都可以通过度量来获得。说得直白一些，这其实就是一套“指标升降游戏”。

顺带一说，在 Descartes 坐标系下， \mathbb{R}^3 空间中的叉乘可以用 Eddington 张量表示为

$$g_i \times g^j = \begin{cases} \epsilon_i^{jk} g_k, & (3.95\text{-a}) \\ \epsilon_{i \ k}^j g^k. & (3.95\text{-b}) \end{cases}$$

证明： 利用对偶关系可以很容易地获得这一结果。 $g_i \times g^j$ 仍然得到一个 \mathbb{R}^3 空间中的向量，它自然可以用协变基来表示：

$$g_i \times g^j = \langle g_i \times g^j, g^k \rangle_{\mathbb{R}^m} g_k$$

这里的内积也就是点积。根据向量三重积的知识，可以把 $A \times B \cdot C$ 表示成行列式：

$$= \det[g_i, g^j, g^k] g_k$$

根据 Eddington 张量的定义即得到

$$= \epsilon_i^{jk} g_k. \quad (3.96)$$

同理，若用逆变基表示，则为

$$\begin{aligned} g_i \times g^j &= \langle g_i \times g^j, g_k \rangle_{\mathbb{R}^m} g^k \\ &= \det[g_i, g^j, g_k] g^k \\ &= \epsilon_{i \ k}^j g^k. \end{aligned} \quad (3.97)$$

□

3.5.3 两种度量的关系

两个 Eddington 张量的分量之积可以用一个由度量张量分量所组成的行列式来表示：

$$\epsilon_j^i \epsilon_{pq}^r = \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_q^i & g^{ir} \\ g_{jp} & g_{jq} & \delta_j^r \\ \delta_p^k & \delta_q^k & g^{kr} \end{vmatrix}. \quad (3.98)$$

类似矩阵乘法，行列式中第 m 行 n 列的元素，由第一个 Eddington 张量的第 m 个指标与第二个 Eddington 张量的第 n 个指标组合而成。两个指标均在上面，则获得度量张量的逆变分量；两个指标均在下面，则获得协变分量；若是一上一下，则将得到混合分量（即 Kronecker δ ）。

这里的 i, j, k 和 p, q, r 都不是哑标，无需考虑求和的限制，可以任意选取。至于它们的上下位置，同样是由实际问题来确定的。

证明： 证明思路就是化为矩阵乘法。根据定义，

$$\epsilon_j^i \epsilon_{pq}^r = \det \left[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k \right] \det \left[\mathbf{g}_p, \mathbf{g}_q, \mathbf{g}^r \right]$$

考虑行列式的性质 $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$ 和 $\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A})$ ，则有

$$= \det \left(\begin{bmatrix} (\mathbf{g}^i)^\top \\ (\mathbf{g}_j)^\top \\ (\mathbf{g}^k)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_p, \mathbf{g}_q, \mathbf{g}^r \end{bmatrix} \right). \quad (3.99)$$

这个矩阵可以直接算出。 □

如果 Eddington 张量中存在哑标，情况就会有所不同：

$$\epsilon_j^i \epsilon_{qs}^p = \sum_{s=1}^3 \begin{vmatrix} g^{ip} & \delta_q^i & \delta_s^i \\ \delta_j^p & g_{jq} & g_{js} \\ g^{sp} & \delta_q^s & \delta_s^s \end{vmatrix}. \quad (3.100)$$

由于式中的 k 是哑标，因此需要对它求和。行列式按第一行展开，可得（下面仍将根据 Einstein 约定省略求和号）

$$\begin{aligned} \epsilon_j^i \epsilon_{qs}^p &= g^{ip} (g_{jq} \delta_s^s - g_{js} \delta_q^s) - \delta_q^i (\delta_j^p \delta_s^s - g_{js} g^{sp}) + \delta_s^i (\delta_j^p \delta_q^s - g_{jq} g^{sp}) \\ &= g^{ip} (3g_{jq} - g_{jq}) - \delta_q^i (3\delta_j^p - \delta_j^p) + (\delta_j^p \delta_q^i - g_{jq} g^{ip}) \\ &= g^{ip} g_{jq} - \delta_j^p \delta_q^i. \end{aligned} \quad (3.101)$$

这一串稍显复杂的表达式，可以用口诀“前前后后，里里外外”来记忆。具体操作如图 3.5 所示。

下面再举两个例子来说明：

$$\epsilon^{ij}_s \epsilon_{pq}^s = \delta_p^i \delta_q^j - \delta_p^j \delta_q^i; \quad (3.102)$$

$$\epsilon^{ij}_s \epsilon_q^{ps} = g^{ip} \delta_q^j - g^{jp} \delta_q^i. \quad (3.103)$$

以后将会看到，这是一个相当重要的基本结构。

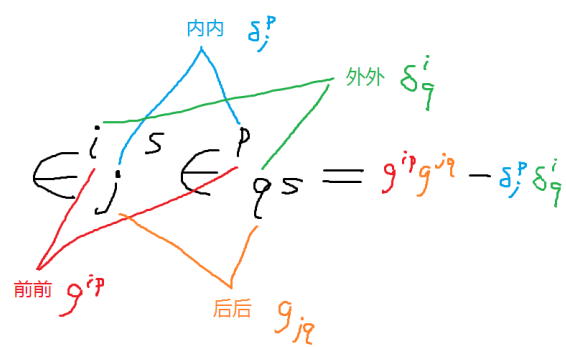


图 3.5: Eddington 张量乘积口诀“前前后后，里里外外”的示意图

第四章 张量场可微性

4.1 张量的范数

4.1.1 赋范线性空间

对于一个线性空间 \mathcal{V} ，它总是定义了线性结构：

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V} \text{ 和 } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in \mathcal{V}. \quad (4.1)$$

为了进一步研究的需要，我们还要引入范数的概念。所谓“范数”，就是对线性空间中任意元素大小的一种刻画。举个我们熟悉的例子， m 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^m 中某个向量的范数，就定义为该向量在 Descartes 坐标下各分量的平方和的平方根。

一般而言，线性空间 \mathcal{V} 中的范数 $|\cdot|_{\mathcal{V}}$ 是从 \mathcal{V} 到 \mathbb{R} 的一个映照，并且需要满足以下三个条件：

1. 非负性

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad |\mathbf{x}|_{\mathcal{V}} \geq 0 \quad (4.2)$$

以及非退化性

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad |\mathbf{x}|_{\mathcal{V}} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathcal{V}, \quad (4.3)$$

这里的 $\mathbf{0}$ 是线性空间 \mathcal{V} 中的零元素，它是唯一存在的。

2. 零元是唯一的，线性空间中的元素 \mathbf{x} 与从 $\mathbf{0}$ 指向它的向量一一对应。因此，线性空间中的元素也常被称为“向量”。

考虑线性空间中的数乘运算。从几何上看， \mathbf{x} 乘上 λ ，就是将 \mathbf{x} 沿着原来的指向进行伸缩。显然有

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \text{ 和 } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda \mathbf{x}|_{\mathcal{V}} = |\lambda| \cdot |\mathbf{x}|_{\mathcal{V}}, \quad (4.4)$$

这称为正齐次性。

想要图吗？

3. 线性空间中的加法满足平行四边形法则。直观地看，就有

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}, \quad |\mathbf{x} + \mathbf{y}|_{\mathcal{V}} \leq |\mathbf{x}|_{\mathcal{V}} + |\mathbf{y}|_{\mathcal{V}}, \quad (4.5)$$

这称为三角不等式。

定义了范数的线性空间称为赋范线性空间。

4.1.2 张量范数的定义

考虑 p 阶张量 $\Phi \in \mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)$ ，它可以用逆变分量或协变分量来表示：

$$\Phi = \begin{cases} \Phi^{i_1 \dots i_p} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_p}, & (4.6-a) \\ \Phi_{i_1 \dots i_p} g^{i_1} \otimes \dots \otimes g^{i_p}, & (4.6-b) \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \Phi^{i_1 \dots i_p} = \Phi(g^{i_1}, \dots, g^{i_p}). & (4.7-a) \\ \Phi_{i_1 \dots i_p} = \Phi(g_{i_1}, \dots, g_{i_p}), & (4.7-b) \end{cases}$$

张量的范数定义为

$$|\Phi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} \triangleq \sqrt{\Phi^{i_1 \dots i_p} \Phi_{i_1 \dots i_p}} \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

$i_1 \dots i_p$ 可独立取值，每个又有 m 种取法，所以根号下共有 m^p 项。注意 $\Phi^{i_1 \dots i_p}$ 与 $\Phi_{i_1 \dots i_p}$ 未必相等，因而根号下的部分未必是平方和，这与 Euclid 空间中向量的模是不同的。

复习一下 1.2.3 小节，我们可以用另一组（带括号的）基表示张量 Φ ：

$$\begin{cases} \Phi^{i_1 \dots i_p} = c_{(\xi_1)}^{i_1} \dots c_{(\xi_p)}^{i_p} \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)}, & (4.9-a) \\ \Phi_{i_1 \dots i_p} = c_{(\eta_1)}^{i_1} \dots c_{(\eta_p)}^{i_p} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)}, & (4.9-b) \end{cases}$$

其中的 $c_{(\xi)}^i = \langle g_{(\xi)}, g^i \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ， $c_i^{(\eta)} = \langle g^{(\eta)}, g_i \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ，它们满足

$$c_{(\xi)}^i c_i^{(\eta)} = \delta_{(\xi)}^{(\eta)}. \quad (4.10)$$

于是

$$\begin{aligned} & \Phi^{i_1 \dots i_p} \Phi_{i_1 \dots i_p} \\ &= \left(c_{(\xi_1)}^{i_1} \dots c_{(\xi_p)}^{i_p} \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \right) \left(c_{(\eta_1)}^{i_1} \dots c_{(\eta_p)}^{i_p} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)} \right) \\ &= \left(c_{(\xi_1)}^{i_1} c_{(\eta_1)}^{i_1} \right) \dots \left(c_{(\xi_p)}^{i_p} c_{(\eta_p)}^{i_p} \right) \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)} \\ &= \delta_{(\xi_1)}^{(\eta_1)} \dots \delta_{(\xi_p)}^{(\eta_p)} \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \Phi_{(\eta_1) \dots (\eta_p)} \\ &= \Phi^{(\xi_1) \dots (\xi_p)} \Phi_{(\xi_1) \dots (\xi_p)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

它是 Φ 在另一组基下的逆变分量与协变分量乘积之和。

以上结果说明，张量的范数不依赖于基的选取，这就好比用不同的秤来称同一个人的体重，都将获得相同的结果。既然如此，不妨采用单位正交基来表示张量的范数：

$$\begin{aligned} |\Phi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} &\triangleq \sqrt{\Phi^{i_1 \dots i_p} \Phi_{i_1 \dots i_p}} \\ &= \sqrt{\Phi^{(i_1) \dots (i_p)} \Phi_{(i_1) \dots (i_p)}} \\ &=: \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\Phi_{(i_1, \dots, i_p)})^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

这里的 $\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle}$ 表示张量 Φ 在单位正交基下的分量，它的指标不区分上下。

有了这样的表示，很容易就可以验证张量范数符合之前的三个要求。一组数的平方和开根号，必然是非负的。至于非退化性，若范数为零，则所有分量均为零，自然成为零张量；反之，对于零张量，所有分量为零，范数也为零。将 Φ 乘上 λ ，则有

$$\begin{aligned}
 |\lambda \Phi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} &= \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\lambda \Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \\
 &= \sqrt{\lambda^2 \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \\
 &= |\lambda| \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \\
 &= |\lambda| \cdot |\Phi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)},
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

于是正齐次性也得以验证。最后，利用 Cauchy–Schwarz 不等式，可有

$$\begin{aligned}
 &|\Phi + \Psi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\
 &= \sum \left(\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} + \Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} \right)^2 \\
 &= \sum \left[(\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 + 2\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle}\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} + (\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 \right] \\
 &= \sum (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 + 2 \sum \Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle}\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle} + \sum (\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2 \\
 &\leq |\Phi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 + 2\sqrt{\sum (\Phi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} \sqrt{\sum (\Psi_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle})^2} + |\Psi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\
 &= |\Phi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 + 2|\Phi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} \cdot |\Psi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} + |\Psi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)}^2 \\
 &= \left(|\Phi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} + |\Psi|_{\mathcal{T}^p(\mathbb{R}^m)} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

两边开方，即为三角不等式。

由此，我们就完整地给出了张量大小的刻画手段。可以看出，它实际上就是 Euclid 空间中向量模的直接推广。

4.1.3 简单张量的范数

根据 1.2.1 小节中的定义，简单张量是形如 $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$ 的张量，其中的 $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^m$ ，它是三个向量的张量积。简单张量的范数为

$$|\xi \otimes \eta \otimes \zeta|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)} = |\xi|_{\mathbb{R}^m} \cdot |\eta|_{\mathbb{R}^m} \cdot |\zeta|_{\mathbb{R}^m}. \tag{4.15}$$

证明： $\xi \otimes \eta \otimes \zeta$ 的逆变分量为

$$(\xi \otimes \eta \otimes \zeta)^{ijk} \triangleq \xi \otimes \eta \otimes \zeta(g^i, g^j, g^k) = \xi^i \eta^j \zeta^k. \tag{4.16}$$

同理，它的协变分量为

$$(\xi \otimes \eta \otimes \zeta)_{ijk} \triangleq \xi \otimes \eta \otimes \zeta(g_i, g_j, g_k) = \xi_i \eta_j \zeta_k. \tag{4.17}$$

二者相乘，有

$$\begin{aligned}
 & (\xi \otimes \eta \otimes \zeta)^{ijk} \cdot (\xi \otimes \eta \otimes \zeta)_{ijk} \\
 &= (\xi^i \eta^j \zeta^k) \cdot (\xi_i \eta_j \zeta_k) \\
 &= (\xi^i \xi_i) \cdot (\eta^j \eta_j) \cdot (\zeta^k \zeta_k).
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

注意到

$$|\xi|_{\mathbb{R}^m}^2 = \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

分别把二者用协变和逆变分量表示：

$$\begin{aligned}
 &= \langle \xi^i g_i, \xi_j g^j \rangle_{\mathbb{R}^m} \\
 &= \xi^i \xi_j \langle g_i, g^j \rangle_{\mathbb{R}^m} \\
 &= \xi^i \xi_j \delta_i^j = \xi^i \xi_i,
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

于是

$$(\xi \otimes \eta \otimes \zeta)^{ijk} \cdot (\xi \otimes \eta \otimes \zeta)_{ijk} = |\xi|_{\mathbb{R}^m}^2 \cdot |\eta|_{\mathbb{R}^m}^2 \cdot |\zeta|_{\mathbb{R}^m}^2. \tag{4.20}$$

两边开方，即得 (4.15) 式. \square

4.2 张量场的偏导数；协变导数

在区域 $\mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$ 上，若存在一个自变量用位置刻画的映照

$$\Phi : \mathfrak{D}_x \ni x \mapsto \Phi(x) \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^m), \tag{4.21}$$

则称张量 $\Phi(x)$ ^① 是定义在 \mathfrak{D}_x 上的一个张量场。

下面我们以三阶张量为例。设在物理域 $\mathfrak{D}_X \subset \mathbb{R}^m$ 和参数域 $\mathfrak{D}_x \subset \mathbb{R}^m$ 之间已经建立了微分同胚 $X(x) \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{D}_x; \mathfrak{D}_X)$ 。在 $X(x)$ 处，张量场 $\Phi(x)$ 可以用分量形式表示为

$$\Phi(x) = \Phi_j^{i\ k}(x) g_i(x) \otimes g^j(x) \otimes g_k(x) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m), \tag{4.22}$$

其中的 $g_i(x), g^j(x), g_k(x)$ 都是局部基，而张量分量则定义为^②

$$\Phi_j^{i\ k}(x) \triangleq \Phi(x)[g_i(x), g^j(x), g_k(x)] \in \mathbb{R}. \tag{4.23}$$

类似地，当点沿着 x^μ -线运动到 $X(x + \lambda e_\mu)$ 处时，有

$$\Phi(x + \lambda e_\mu) = \Phi_j^{i\ k}(x + \lambda e_\mu) g_i(x + \lambda e_\mu) \otimes g^j(x + \lambda e_\mu) \otimes g_k(x + \lambda e_\mu). \tag{4.24}$$

现在研究 $\lambda \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$ 时的极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \lambda e_\mu) - \Phi(x)}{\lambda} =: \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m). \tag{4.25}$$

① 类似“ $\Phi(x)$ ”的记号在前文也表示张量 Φ 作用在向量 x 上（“吃掉”了 x ），此时有 $\Phi(x) \in \mathbb{R}$ ，注意不要混淆。符号有限，难免如此，还望诸位体谅。

② 请注意，下式 Φ 之后的第一个圆括号表示位于 x 处；而后面的方括号则表示作用在这几个向量上。

与之前的向量值映照类似，该极限表示张量场 $\Phi(\mathbf{x})$ 作为一个整体，相对于自变量第 μ 个分量的变化率，即 Φ 关于 x^μ （在 \mathbf{x} 处）的偏导数。式中， $\Phi(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu)$ 已由 (4.24) 式给出。注意到张量分量实际上就是一个多元函数，于是

$$\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) = \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \cdot \lambda + \mathcal{O}_j^{i\ k}(\lambda) \in \mathbb{R}. \quad (4.26)$$

另外，三个基向量作为向量值映照，同样可以展开：

$$\begin{cases} g_i(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) = g_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial g_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \cdot \lambda + \mathcal{O}_i(\lambda) \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (4.27-a)$$

$$\begin{cases} g^j(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) = g^j(\mathbf{x}) + \frac{\partial g^j}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \cdot \lambda + \mathcal{O}^j(\lambda) \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (4.27-b)$$

$$\begin{cases} g_k(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) = g_k(\mathbf{x}) + \frac{\partial g_k}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \cdot \lambda + \mathcal{O}_k(\lambda) \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (4.27-c)$$

如果直接展开，一共有 81 项，显然过于繁杂，不便操作。我们将按 λ 的次数逐次展开。首先看 λ 的零次项：

$$\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}), \quad (4.28)$$

这就是 $\Phi(\mathbf{x})$ 。然后是 λ 的一次项：

$$\begin{aligned} \lambda \cdot & \left[\frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}) + \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \frac{\partial g_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}) \right. \\ & \left. + \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) \otimes \frac{\partial g^j}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}) + \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes \frac{\partial g_k}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

剩下的至少是 λ 的二次项，我们将其统一写作“res.”（余项）。

现在回头看之前的极限 (4.25) 式。 λ 的零次项与 $\Phi(\mathbf{x})$ 相互抵消，而一次项就只剩下了系数部分。至于余项 res.，则要证明它趋于零。以

$$\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathcal{O}_i(\lambda) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}) \quad (4.30)$$

为例，我们需要证明它等于 $\mathcal{O}(\lambda) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$ ，即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathcal{O}_i(\lambda) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x})|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}}{\lambda} = 0 \in \mathbb{R}. \quad (4.31)$$

证明： 这里为了叙述方便，我们将暂时不使用 Einstein 求和约定，而是把求和号显式地写出来。于是分子部分可以写成

$$\left| \sum_{i,j,k=1}^m \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathcal{O}_i(\lambda) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x}) \right|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

根据范数的三角不等式，有

$$\leq \sum_{i,j,k=1}^m |\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathcal{O}_i(\lambda) \otimes g^j(\mathbf{x}) \otimes g_k(\mathbf{x})|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

再利用正齐次性，可得

$$= \sum_{i,j,k=1}^m |\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x})| \cdot |\phi_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x})|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}$$

代入简单张量的范数，便有

$$= \sum_{i,j,k=1}^m |\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x})| \cdot |\phi_i(\lambda)|_{\mathbb{R}^m} \cdot |\mathbf{g}^j(\mathbf{x})|_{\mathbb{R}^m} \cdot |\mathbf{g}_k(\mathbf{x})|_{\mathbb{R}^m}. \quad (4.32)$$

这几项中只有 $|\phi_i(\lambda)|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}$ 与 λ 有关。于是

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \phi_i(\lambda) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x})|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}}{\lambda} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^m |\Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x})| \cdot |\mathbf{g}^j(\mathbf{x})|_{\mathbb{R}^m} \cdot |\mathbf{g}_k(\mathbf{x})|_{\mathbb{R}^m} \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|\phi_i(\lambda)|_{\mathbb{R}^m}}{\lambda} \end{aligned}$$

根据定义，最后的极限为零，因此

$$= 0. \quad (4.33)$$

□

类似地，其他七十多项也都是 λ 的一阶无穷小量。而有限个无穷小量之和仍为无穷小量，于是 $\text{res.} \rightarrow 0$ 。

综上，我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) &:= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) - \Phi(\mathbf{x})}{\lambda} \\ &= \left(\frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k + \Phi_j^{i\ k} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^\mu} \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k + \Phi_j^{i\ k} \mathbf{g}_i \otimes \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial x^\mu} \otimes \mathbf{g}_k + \Phi_j^{i\ k} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^\mu} \right)(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.34)$$

式中， $\partial \mathbf{g}_i / \partial x^\mu(\mathbf{x})$ 可以用 Christoffel 符号表示：

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) = \Gamma_{\mu i}^s \mathbf{g}_s(\mathbf{x}). \quad (4.35)$$

因此 (4.34) 式的第二项

$$\begin{aligned} & \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \\ &= \Gamma_{\mu i}^s \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_s(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

i 和 s 都是哑标，不妨进行一下交换：

$$= \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}). \quad (4.36)$$

同样，后面的两项也可进行类似的处理。这样便有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\mu) - \Phi(\mathbf{x})}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^{s\ k} - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^{i\ k} + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^{i\ s} \right) g_i \otimes g^j \otimes g_k \right] (x) \\
&=: \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(x) g_i(x) \otimes g^j(x) \otimes g_k(x),
\end{aligned} \tag{4.37}$$

式中，我们称 $\nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(x) \in \mathbb{R}$ 为张量分量 $\Phi_j^{i\ k}(x)$ 相对于 x^μ 的协变导数，其定义为：

$$\nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}(x) \triangleq \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu}(x) + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^{s\ k}(x) - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^{i\ k}(x) + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^{i\ s}(x). \tag{4.38}$$

4.3 张量场的梯度

4.3.1 梯度；可微性

我们在参数域中的内点 \mathbf{x}_0 处取一个半径为 δ 的邻域 $\mathfrak{B}_\delta(\mathbf{x}_0)$ 。若使自变量变化到 $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ ，则在物理域中，对应的点就将从 $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)$ 变化到 $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$ 。考察定义在参数域 \mathfrak{D}_x 上的张量场 $\Phi(\mathbf{x})$ ，它的变化为

$$\begin{aligned}
&\Phi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}_0) \\
&= \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) g_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \otimes g^j(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \otimes g_k(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \\
&\quad - \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0) g_i(\mathbf{x}_0) \otimes g^j(\mathbf{x}_0) \otimes g_k(\mathbf{x}_0).
\end{aligned} \tag{4.39}$$

与之前一样将第一部分逐项展开，有

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= \Phi_j^{i\ k}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}_j^{i\ k}(|\mathbf{h}|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}, \end{aligned} \right. \tag{4.40-a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} g_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= g_i(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial g_i}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}_i(|\mathbf{h}|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \right. \tag{4.40-b}$$

$$\left\{ \begin{aligned} g^j(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= g^j(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial g^j}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}^j(|\mathbf{h}|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \right. \tag{4.40-c}$$

$$\left\{ \begin{aligned} g_k(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= g_k(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial g_k}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}_k(|\mathbf{h}|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \right. \tag{4.40-d}$$

不要忘记对哑标 μ 进行求和。

不显含 \mathbf{h} 的只有每行的第一项；它们组合起来，与式 (4.39) 的第二部分相互抵消。再看 \mathbf{h} 的一次项：^①

$$\left[\frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} g_i \otimes g^j \otimes g_k + \Phi_j^{i\ k} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^\mu} \otimes g^j \otimes g_k + g_i \otimes \frac{\partial g^j}{\partial x^\mu} \otimes g_k + g_i \otimes g^j \otimes \frac{\partial g_k}{\partial x^\mu} \right) \right] (\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu. \tag{4.41}$$

利用 Christoffel 符号又可以把它写成

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial \Phi_j^{i\ k}}{\partial x^\mu} g_i \otimes g^j \otimes g_k + \Phi_j^{i\ k} \left(\Gamma_{\mu i}^s g_s \right) \otimes g^j \otimes g_k \right. \\
&\quad \left. - \Phi_j^{i\ k} g_i \otimes \left(\Gamma_{\mu s}^j g^s \right) \otimes g_k + \Phi_j^{i\ k} g_i \otimes g^j \otimes \left(\Gamma_{\mu k}^s g_s \right) \right] (\mathbf{x}_0) \cdot h^\mu
\end{aligned}$$

^① 实际是 h^μ 的一次项。别忘了求和。

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial \Phi_j^i}{\partial x^\mu} g_i \otimes g^j \otimes g_k + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s g_i \otimes g^j \otimes g_k \right. \\
&\quad \left. - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i g_i \otimes g^j \otimes g_k + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s g_i \otimes g^j \otimes g_k \right) (x_0) \cdot h^\mu \\
&= \left[\left(\frac{\partial \Phi_j^i}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \right) g_i \otimes g^j \otimes g_k \right] (x_0) \cdot h^\mu. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

至于高阶项，它们都等于 $\mathcal{O}(|h|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$ ，并且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^m} \frac{|\mathcal{O}(|h|_{\mathbb{R}^m})|_{\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)}}{|h|_{\mathbb{R}^m}} = 0 \in \mathbb{R}. \tag{4.43}$$

证明与 (4.31) 式类似。

整理一下，我们有

$$\begin{aligned}
&\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) \\
&= \left[\left(\frac{\partial \Phi_j^i}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \right) g_i \otimes g^j \otimes g_k \right] (x_0) \cdot h^\mu + \mathcal{O}(|h|_{\mathbb{R}^m})
\end{aligned}$$

利用协变导数，有

$$= \left[\nabla_\mu \Phi_j^i(x_0) g_i(x_0) \otimes g^j(x_0) \otimes g_k(x_0) \right] h^\mu + \mathcal{O}(|h|_{\mathbb{R}^m}). \tag{4.44}$$

至此，从微分学的角度来看，任务已经完成。但对于张量分析而言，我们还需要再做一点微小的工作。简单张量部分再并上一个 g^μ ，从而使张量升一阶；后面则改成 $h^\nu g_\nu(x_0)$ ，并利用点乘保持总阶数不变：

$$\begin{aligned}
&\left[\nabla_\mu \Phi_j^i(x_0) g_i(x_0) \otimes g^j(x_0) \otimes g_k(x_0) \right] h^\mu \\
&= \left[\nabla_\mu \Phi_j^i(x_0) g_i(x_0) \otimes g^j(x_0) \otimes g_k(x_0) \otimes g^\mu(x_0) \right] \cdot \left[h^\nu g_\nu(x_0) \right]. \tag{4.45}
\end{aligned}$$

所谓“点乘”，其实就是 e 点积在 $e = 1$ 时的情况。实际上，

$$g^\mu(x_0) \cdot \left[h^\nu g_\nu(x_0) \right] = h^\nu \delta_\nu^\mu = h^\mu. \tag{4.46}$$

这里用到了局部基的对偶关系 (3.50) 式。

此时，我们获得了一个四阶张量与 $h^\nu g_\nu(x_0)$ 的点积。接下来讨论该项的意义。参数域中 x_0 发生 $h = h^i e_i$ 的变化时，根据向量值映照 $X(x)$ 的可微性，对应物理域中的变化为

$$\begin{aligned}
X(x_0 + h) - X(x_0) &= DX(x_0)(h) + \mathcal{O}(|h|_{\mathbb{R}^m}) \\
&= \frac{\partial X}{\partial x^\nu}(x_0) h^\nu + \mathcal{O}(|h|_{\mathbb{R}^m})
\end{aligned}$$

代入 3.3.1 小节中局部协变基的定义，可有

$$= h^\nu g_\nu(x_0) + \mathcal{O}(|h|_{\mathbb{R}^m}). \tag{4.47}$$

代入式 (4.44), 有

$$\begin{aligned} & \Phi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}_0) \\ &= \left[\nabla_\mu \Phi_j^i(\mathbf{x}_0) g_i(\mathbf{x}_0) \otimes g^j(\mathbf{x}_0) \otimes g_k(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0) \right] \\ & \quad \cdot \left[X(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0) + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|_{\mathbb{R}^m}) \right] + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|_{\mathbb{R}^m}) \end{aligned}$$

合并掉一阶无穷小量^①, 可得

$$\begin{aligned} &= \left[\nabla_\mu \Phi_j^i(\mathbf{x}_0) g_i(\mathbf{x}_0) \otimes g^j(\mathbf{x}_0) \otimes g_k(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0) \right] \\ & \quad \cdot \left[X(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0) \right] + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|_{\mathbb{R}^m}) \\ &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0) \right] \cdot \left[X(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0) \right] + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m). \end{aligned} \quad (4.48)$$

引入记号

$$\Phi(\mathbf{x}_0) \otimes \left[g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \right] := \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0), \quad (4.49)$$

再引入梯度算子

$$\nabla := g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0), \quad (4.50)$$

我们得到的结论就可以表述为

$$\Phi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}_0) = (\Phi \otimes \nabla)(\mathbf{x}_0) \cdot \left[X(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0) \right] + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|_{\mathbb{R}^m}) \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m), \quad (4.51)$$

式中的“ \cdot ”表示点乘. 以上结果称之为张量场的可微性, 它表明, 由一点处的位置移动所引起张量场的变化, 可以用该点处张量场的梯度 (即 $\Phi \otimes \nabla$) 点乘物理空间中的位置差别来近似, 误差为一阶无穷小量. 以上分析基于三阶张量. 但显然, 对于 p 阶张量, 将会有完全一致的结果.

4.3.2 方向导数

现在来研究张量场沿 \mathbf{e} 方向的变化率 (设 $|\mathbf{e}|_{\mathbb{R}^m} = 1$). 取一个与 \mathbf{e} 平行的向量 $\lambda \mathbf{e}$. 注意到 $\lambda \mathbf{e}$ 其实就是物理空间中的位置变化, 于是根据张量场的可微性, 我们有

$$\Phi(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}) - \Phi(\mathbf{x}_0) = (\Phi \otimes \nabla)(\mathbf{x}_0) \cdot (\lambda \mathbf{e}) + \mathcal{O}(\lambda), \quad (4.52)$$

该式等价于

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}) - \Phi(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = (\Phi \otimes \nabla)(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}. \quad (4.53)$$

我们把它定义为张量场 $\Phi(\mathbf{x})$ 沿 \mathbf{e} 方向的方向导数:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{x}_0) \triangleq (\Phi \otimes \nabla)(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}. \quad (4.54)$$

^① 式中的两个 $\mathcal{O}(|\mathbf{h}|_{\mathbb{R}^m})$ 是不同的, 前者属于 \mathbb{R}^m , 后者属于 $\mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m)$.

4.3.3 左梯度与右梯度

我们已经知道，利用梯度算子

$$\nabla := g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0), \quad (4.55)$$

可以把张量场的梯度表示为

$$(\Phi \otimes \nabla)(\mathbf{x}_0) = \Phi(\mathbf{x}_0) \otimes \left[g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \right] := \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \otimes g^\mu(\mathbf{x}_0). \quad (4.56)$$

“ ∇ ”在右边，故称之为**右梯度**（简称**梯度**）。相应地，自然会有**左梯度**：

$$(\nabla \otimes \Phi)(\mathbf{x}_0) = \left[g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0) \right] \otimes \Phi(\mathbf{x}_0) := g^\mu(\mathbf{x}_0) \otimes \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}_0). \quad (4.57)$$

张量积不存在交换律，因而这两者是不同的。注意，梯度运算将使张量的阶数增加一阶。

张量场的可微性可以用左梯度来等价表述：

$$\Phi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}_0) = \left[\mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0) \right] \cdot (\nabla \otimes \Phi)(\mathbf{x}_0) + o(|\mathbf{h}|_{\mathbb{R}^m}). \quad (4.58)$$

类似地，还有方向导数：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{x}_0) \triangleq (\Phi \otimes \nabla)(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot (\nabla \otimes \Phi)(\mathbf{x}_0). \quad (4.59)$$

4.4 场论恒等式（一）

为了给下一节做好铺垫，本节将证明几个重要引理。

4.4.1 Ricci 引理

首先来证明两个结论：

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^m), \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (4.60\text{-a})$$

$$(4.60\text{-b})$$

其中的 \mathbf{G} 和 ϵ 分别是度量张量和 Eddington 张量。

证明： 为方便起见，证明中我们将省去 “ (\mathbf{x}) ”。

先考察度量张量的偏导数：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) \\ &= \nabla_\mu g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j, \end{aligned} \quad (4.61)$$

式中，协变导数定义为

$$\nabla_\mu g_{ij} \triangleq \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu i}^s g_{sj} - \Gamma_{\mu j}^s g_{is}. \quad (4.62)$$

以下有两种方法证明 $\nabla_\mu g_{ij} = 0$ 。

方法一利用度量的定义：

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} \triangleq \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

$$= \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^\mu}, \mathbf{g}_j \right\rangle_{\mathbb{R}^m} + \left\langle \mathbf{g}_i, \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^\mu} \right\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

根据 Christoffel 符号的定义（见 3.4.3 小节），有

$$= \Gamma_{\mu i, j} + \Gamma_{\mu j, i}. \quad (4.63)$$

另一方面，回忆 (3.86) 式：

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij, l} g^{kl}, \quad (4.64)$$

可有

$$\begin{cases} \Gamma_{\mu i}^s g_{sj} = \Gamma_{\mu i, k} g^{sk} g_{sj} = \Gamma_{\mu i, k} \delta_j^k = \Gamma_{\mu i, j}, \\ \Gamma_{\mu j}^s g_{is} = \Gamma_{\mu j, k} g^{sk} g_{is} = \Gamma_{\mu j, k} \delta_i^k = \Gamma_{\mu j, i}. \end{cases} \quad (4.65-a)$$

$$(4.65-b)$$

于是

$$\nabla_\mu g_{ij} = \Gamma_{\mu i, j} + \Gamma_{\mu j, i} - \Gamma_{\mu i, j} - \Gamma_{\mu j, i} = 0. \quad (4.66)$$

方法二则利用第一类 Christoffel 符号的性质 (3.76) 式：

$$\Gamma_{ij, k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \quad (4.67)$$

因而

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\mu i}^s g_{sj} + \Gamma_{\mu j}^s g_{is} \\ &= \Gamma_{\mu i, j} + \Gamma_{\mu j, i} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x^j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

显然，立刻就有

$$\nabla_\mu g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (4.69)$$

综上，因为 $\nabla_\mu g_{ij} = 0 \in \mathbb{R}$ ，所以

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^m). \quad (4.70)$$

如果用其他形式的分量来表述这一结果，我们便有

$$\nabla_\mu g_{ij} = \nabla_\mu g^{ij} = \nabla_\mu \delta_j^i = 0. \quad (4.71)$$

此结论称为 **Ricci 引理**。

再来看 Eddington 张量的偏导数：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\epsilon^i_j{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k) \\ &= \nabla_\mu \epsilon^i_j{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k, \end{aligned} \quad (4.72)$$

式中,

$$\nabla_{\mu} \epsilon_j^i{}^k \triangleq \frac{\partial \epsilon_j^i{}^k}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu s}^i \epsilon_j^s{}^k - \Gamma_{\mu j}^s \epsilon_s^i{}^k + \Gamma_{\mu s}^k \epsilon_j^i{}^s. \quad (4.73)$$

根据定义, $\epsilon_j^i{}^k = \det[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k]$. 因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_j^i{}^k}{\partial x^{\mu}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\det[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k] \right) \\ &= \det \left[\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^{\mu}}, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k \right] + \det \left[\mathbf{g}^i, \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^{\mu}}, \mathbf{g}^k \right] + \det \left[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \frac{\partial \mathbf{g}^k}{\partial x^{\mu}} \right] \end{aligned}$$

利用标架运动方程, 有

$$= \det[-\Gamma_{\mu s}^i \mathbf{g}^s, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k] + \det[\mathbf{g}^i, \Gamma_{\mu j}^s \mathbf{g}_s, \mathbf{g}^k] + \det[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, -\Gamma_{\mu s}^k \mathbf{g}^s]$$

再利用行列式的线性性, 提出系数:

$$= -\Gamma_{\mu s}^i \det[\mathbf{g}^s, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^k] + \Gamma_{\mu j}^s \det[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_s, \mathbf{g}^k] - \Gamma_{\mu s}^k \det[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^s]$$

代回 Eddington 张量的定义, 可得

$$= -\Gamma_{\mu s}^i \epsilon_j^s{}^k + \Gamma_{\mu j}^s \epsilon_s^i{}^k - \Gamma_{\mu s}^k \epsilon_j^i{}^s. \quad (4.74)$$

这与式 (4.73) 的后三项恰好抵消. 于是便有 $\nabla_{\mu} \epsilon_j^i{}^k = 0$. 进而

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x^{\mu}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^3). \quad (4.75)$$

和度量张量类似, Eddington 张量其他分量的偏导数, 如 $\nabla_{\mu} \epsilon_{ijk}$ 、 $\nabla_{\mu} \epsilon^{ijk}$ 等, 也都等于零. 此结论同样称为 **Ricci 引理**. \square

4.4.2 Leibniz 法则

协变导数满足 **Leibniz 法则**:

$$\nabla_{\mu} (\Phi_j^i{}^k \Psi_p^q) = (\nabla_{\mu} \Phi_j^i{}^k) \Psi_p^q + \Phi_j^i{}^k (\nabla_{\mu} \Psi_p^q). \quad (4.76)$$

式中, 张量分量的形式可以是任意的.

证明: 显然, $\Phi_j^i{}^k \Psi_p^q \in \mathcal{T}^5(\mathbb{R}^m)$. 不妨令

$$\Omega_j^i{}^k{}^q = \Phi_j^i{}^k \Psi_p^q. \quad (4.77)$$

则

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} (\Phi_j^i{}^k \Psi_p^q) &= \nabla_{\mu} \Omega_j^i{}^k{}^q \\ &\triangleq \frac{\partial \Omega_j^i{}^k{}^q}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu s}^i \Omega_j^s{}^k{}^q - \Gamma_{\mu j}^s \Omega_s^i{}^k{}^q + \Gamma_{\mu s}^k \Omega_j^i{}^s{}^q - \Gamma_{\mu p}^s \Omega_j^i{}^k{}^s + \Gamma_{\mu s}^q \Omega_j^i{}^k{}^s \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\Phi_j^i{}^k \Psi_p^q) + (\Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s{}^k - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i{}^k + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^i{}^s) \Psi_p^q + \Phi_j^i{}^k (-\Gamma_{\mu p}^s \Psi_s^q + \Gamma_{\mu s}^q \Psi_p^s). \end{aligned} \quad (4.78)$$

第一项偏导数自然满足乘积法则：

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Phi_j^i \Psi_p^q) = \frac{\partial \Phi_j^i}{\partial x^\mu} \Psi_p^q + \Phi_j^i \frac{\partial \Psi_p^q}{\partial x^\mu}. \quad (4.79)$$

代回前一式，即有

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\Phi_j^i \Psi_p^q) &= \left(\frac{\partial \Phi_j^i}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \right) \Psi_p^q + \Phi_j^i \left(\frac{\partial \Psi_p^q}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu p}^s \Psi_s^q + \Gamma_{\mu s}^q \Psi_p^s \right) \\ &\triangleq (\nabla_\mu \Phi_j^i) \Psi_p^q + \Phi_j^i (\nabla_\mu \Psi_p^q). \end{aligned} \quad (4.80)$$

□

现在来考虑 $\nabla_\mu (\Phi_j^i \Psi_k^q)$ ，注意其中的 k 是哑标。若按照 Leibniz 法则，似乎有

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\Phi_j^i \Psi_k^q) &= (\nabla_\mu \Phi_j^i) \Psi_k^q + \Phi_j^i (\nabla_\mu \Psi_k^q) \\ &= \left(\frac{\partial \Phi_j^i}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \right) \Psi_k^q + \Phi_j^i \left(\frac{\partial \Psi_k^q}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu k}^s \Psi_s^q + \Gamma_{\mu s}^q \Psi_k^s \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Phi_j^i \Psi_k^q) + (\Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i) \Psi_k^q + \Phi_j^i (\Gamma_{\mu s}^q \Psi_k^s) \\ &\quad + \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \Psi_k^q - \Gamma_{\mu k}^s \Phi_j^i \Psi_s^q. \end{aligned} \quad (4.81)$$

而根据定义，则

$$\nabla_\mu (\Phi_j^i \Psi_k^q) \triangleq \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Phi_j^i \Psi_k^q) + (\Gamma_{\mu s}^i \Phi_j^s - \Gamma_{\mu j}^s \Phi_s^i) \Psi_k^q + \Phi_j^i (\Gamma_{\mu s}^q \Psi_k^s). \quad (4.82)$$

很明显，式 (4.81) 中多了两项。不过稍作计算，就可知道

$$\Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \Psi_k^q - \Gamma_{\mu k}^s \Phi_j^i \Psi_s^q$$

k 和 s 都是哑标，不妨在第二项中将二者交换：

$$= \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^s \Psi_k^q - \Gamma_{\mu s}^k \Phi_j^i \Psi_s^q = 0. \quad (4.83)$$

可见，Leibniz 法则经受住了考验。

把 Ricci 引理和 Leibniz 法则联合起来，便有

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla_\mu (g_{ij} \Psi_q^p) &= (\nabla_\mu g_{ij}) \Psi_q^p + g_{ij} (\nabla_\mu \Psi_q^p) = g_{ij} \nabla_\mu \Psi_q^p, \\ \nabla_\mu (\epsilon_j^i \Psi_q^p) &= (\nabla_\mu \epsilon_j^i) \Psi_q^p + \epsilon_j^i (\nabla_\mu \Psi_q^p) = \epsilon_j^i \nabla_\mu \Psi_q^p. \end{aligned} \right. \quad (4.84-a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla_\mu (g_{ij} \Psi_q^p) &= (\nabla_\mu g_{ij}) \Psi_q^p + g_{ij} (\nabla_\mu \Psi_q^p) = g_{ij} \nabla_\mu \Psi_q^p, \\ \nabla_\mu (\epsilon_j^i \Psi_q^p) &= (\nabla_\mu \epsilon_j^i) \Psi_q^p + \epsilon_j^i (\nabla_\mu \Psi_q^p) = \epsilon_j^i \nabla_\mu \Psi_q^p. \end{aligned} \right. \quad (4.84-b)$$

这说明度量张量和 Eddington 张量类似常数，可以提到协变导数的外面。

4.4.3 混合协变导数

与混合偏导数定理类似，协变导数满足

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^i = \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi_j^i. \quad (4.85)$$

不必多说，张量分量依然可以任意选取。只是需要注意，该定理只在 **体积上张量场论** 成立。

证明：首先计算张量场整体的一阶偏导数：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Phi_j^i{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k) = \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^m). \quad (4.86)$$

再求一次偏导数，可有

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\nu \partial x^\mu} := \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k). \quad (4.87)$$

请注意，括号里的张量带有一个独立指标 μ 。按照极限分析，有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) g_i \otimes g^j \otimes g_k + \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^\nu} \otimes g^j \otimes g_k + g_i \otimes \frac{\partial g^j}{\partial x^\nu} \otimes g_k + g_i \otimes g^j \otimes \frac{\partial g_k}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) g_i \otimes g^j \otimes g_k + \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k \left(\Gamma_{\nu i}^s g_s \otimes g^j \otimes g_k - \Gamma_{\nu j}^s g_i \otimes g^s \otimes g_k + \Gamma_{\nu k}^s g_i \otimes g^j \otimes g_s \right) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) + \Gamma_{\nu s}^i \nabla_\mu \Phi_j^s{}^k - \Gamma_{\nu j}^s \nabla_\mu \Phi_s^i{}^k + \Gamma_{\nu s}^k \nabla_\mu \Phi_j^i{}^s \right] g_i \otimes g^j \otimes g_k. \end{aligned} \quad (4.88)$$

但是 $\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k$ 本身带有 4 个指标，因而

$$\nabla_\nu (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) \triangleq \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) + \Gamma_{\nu s}^i \nabla_\mu \Phi_j^s{}^k - \Gamma_{\nu j}^s \nabla_\mu \Phi_s^i{}^k + \Gamma_{\nu s}^k \nabla_\mu \Phi_j^i{}^s - \Gamma_{\nu \mu}^s \nabla_s \Phi_j^i{}^k. \quad (4.89)$$

代入 (4.88) 式，可得

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k) = (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k + \Gamma_{\nu \mu}^s \nabla_s \Phi_j^i{}^k) g_i \otimes g^j \otimes g_k. \quad (4.90)$$

同理，

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi_j^i{}^k + \Gamma_{\mu \nu}^s \nabla_s \Phi_j^i{}^k) g_i \otimes g^j \otimes g_k. \quad (4.91)$$

根据 Christoffel 符号的性质，

$$\Gamma_{\nu \mu}^s = \Gamma_{\mu \nu}^s; \quad (4.92)$$

而按照一般赋范线性空间上的微分学，当张量场具有足够正则性时，成立

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (4.93)$$

这样就可得到

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k = \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi_j^i{}^k. \quad (4.94)$$

□

4.5 场论恒等式 (二)

本节将给出微分形式张量场场论中的若干恒等式，以及它们的推演过程。

4.5.1 微分算子

在 4.3.3 小节中，我们已经定义了左梯度

$$(\nabla \otimes \Phi)(x) \triangleq \left[g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \right] \otimes \Phi(x) := g^\mu(x) \otimes \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \quad (4.95-a)$$

和 (右) 梯度

$$(\Phi \otimes \nabla)(x) \triangleq \Phi(x) \otimes \left[g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \right] := \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \otimes g^\mu(x). \quad (4.95-b)$$

如果 $\Phi(x)$ 是 r 阶张量，则左右梯度都是 $r+1$ 阶张量。

类似地，我们还可以定义左散度

$$(\nabla \cdot \Phi)(x) \triangleq \left[g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \right] \cdot \Phi(x) := g^\mu(x) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \quad (4.96-a)$$

和右散度

$$(\Phi \cdot \nabla)(x) \triangleq \Phi(x) \cdot \left[g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \right] := \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \cdot g^\mu(x). \quad (4.96-b)$$

如果 $\Phi(x)$ 是 r 阶张量，则左右散度都是 $r-1$ 阶张量。

当然，如果底空间是 \mathbb{R}^3 ，即 $\Phi(x) \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^3)$ ，还不能忘了定义左旋度

$$(\nabla \times \Phi)(x) \triangleq \left[g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \right] \times \Phi(x) := g^\mu(x) \times \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \quad (4.97-a)$$

和右旋度

$$(\Phi \times \nabla)(x) \triangleq \Phi(x) \times \left[g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \right] := \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}(x) \times g^\mu(x). \quad (4.97-b)$$

旋度不改变张量的阶数，即左右旋度仍属于 $\mathcal{T}^r(\mathbb{R}^3)$ 。

左右梯度、散度和梯度都是张量场中常用的微分算子。向量微积分中的梯度、散度和梯度，其实就是一阶张量的特殊情况。

4.5.2 推演举例

首先是为人熟知的“梯度场无旋，旋度场无源”：

$$\forall \Phi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^3), \quad \text{有} \quad \begin{cases} \nabla \times (\nabla \otimes \Phi) = \mathbf{0} \in \mathcal{T}^{r+1}(\mathbb{R}^3), \\ \nabla \cdot (\nabla \times \Phi) = \mathbf{0} \in \mathcal{T}^{r-1}(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (4.98-a)$$

$$(4.98-b)$$

证明：不失一般性，我们设 Φ 是一个三阶张量。代入上一小节中梯度和旋度的定义，可有

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \otimes \Phi) &= \left(g^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \times \left(g^\mu \otimes \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right) \\ &= \left(g^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \times \left(\nabla_\mu \Phi_j^i g^\mu \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k \right) \\ &= g^\nu \times \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\nabla_\mu \Phi_j^i g^\mu \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k \right) \end{aligned}$$

与 (4.88) 式不同, 第二个括号中的 μ 、 i 、 j 、 k 都是哑标, 所以偏导数可以直接用协变导数表示, 而不会出现多余的 Christoffel 符号:

$$= g^\nu \times \left[(\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}) g^\mu \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k \right]$$

按照叉乘的定义 (见 2.3 节), g^ν 将与构成简单张量的第一个基向量相乘, 即

$$= (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}) (g^\nu \times g^\mu) \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k$$

利用 Levi-Civita 记号展开叉乘项, 有

$$= \epsilon^{\mu\nu s} (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}) g_s \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k. \quad (4.99)$$

考虑交换哑标 μ 、 ν , 结果必然保持不变. 但是 Eddington 张量关于指标 $\mu\nu$ 反对称^①, 即 $\epsilon^{\mu\nu s} = -\epsilon^{\nu\mu s}$; 另一方面, 混合协变导数却又满足 $\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} = \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi_j^{i\ k}$, 因此总的结果将变为其相反数. 这样, 结果只可能为零, 即

$$\nabla \times (\nabla \otimes \Phi) = 0. \quad (4.100)$$

同理, 也可证明 “旋度场无源”:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \Phi) &= \left(g^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \cdot \left(g^\mu \times \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right) \\ &= \left(g^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \cdot \left[g^\mu \times (\nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} g_i \otimes g^j \otimes g_k) \right] \\ &= g^\nu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[g^\mu \times (\nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} g_i \otimes g^j \otimes g_k) \right] \\ &= g^\nu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} (g^\mu \times g_i) \otimes g^j \otimes g_k \right] \\ &= g^\nu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} \epsilon_i^{\mu\ s} g_s \otimes g^j \otimes g_k \right) \end{aligned}$$

μ 、 s 、 i 、 j 、 k 全部是哑标, 因此

$$= g^\nu \cdot \left[(\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} \epsilon_i^{\mu\ s}) g_s \otimes g^j \otimes g_k \right]$$

点乘之后出来 Kronecker δ :

$$\begin{aligned} &= (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} \epsilon_i^{\mu\ s}) \delta_s^\nu g^j \otimes g_k \\ &= \epsilon_i^{\mu\ \nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k}) g^j \otimes g_k. \end{aligned} \quad (4.101)$$

交换哑标 μ 、 ν , 仿上, 便有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \Phi) = 0. \quad (4.102)$$

□

接下来回忆一下向量场旋度的复合

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \in \mathbb{R}^3, \quad (4.103)$$

① 根据式 (2.9), Levi-Civita 记号由行列式定义, 而行列式交换两列将改变符号.

式中， ∇^2 称为 **Laplace 算子**，其定义为

$$\nabla^2 \mathbf{A} \triangleq \nabla \cdot (\nabla \otimes \mathbf{A}). \quad (4.104)$$

推广到张量场上，我们有如下两式：

$$\forall \Phi \in \mathcal{T}^r(\mathbb{R}^3), \quad \begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \Phi) = \nabla \otimes (\nabla \cdot \Phi) - \nabla^2 \Phi, \\ (\Phi \times \nabla) \times \nabla = (\Phi \cdot \nabla) \otimes \nabla - \Phi \nabla^2, \end{cases} \quad (4.105\text{-a})$$

$$(4.105\text{-b})$$

其中，Laplace 算子的定义为

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi \triangleq \nabla \cdot (\nabla \otimes \Phi), \\ \Phi \nabla^2 \triangleq (\Phi \otimes \nabla) \cdot \nabla. \end{cases} \quad (4.106\text{-a})$$

$$(4.106\text{-b})$$

证明： 同样，我们以三阶张量为例进行计算。代入旋度的定义，有

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \Phi) &= \left(g^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \times \left(g^\mu \times \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right) \\ &= g^\nu \times \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[g^\mu \times (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k) \right] \\ &= g^\nu \times \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k \epsilon_i^{\mu s} g_s \otimes g^j \otimes g_k \right) \\ &= g^\nu \times \left[(\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k \epsilon_i^{\mu s}) g_s \otimes g^j \otimes g_k \right] \\ &= \epsilon_i^{\mu s} \epsilon_s^{\nu t} (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) g_t \otimes g^j \otimes g_k \end{aligned}$$

为了使用“前前后后，里里外外”之法则（见 3.5.3 小节），需要交换第二个 Eddington 张量的指标 s 挪到最后，不要忘了添上负号：

$$= -\epsilon_i^{\mu s} \epsilon_s^{\nu t} (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) g_t \otimes g^j \otimes g_k$$

这样就可以顺利用上口决：

$$= -(g^{\mu\nu} \delta_i^t - \delta_i^\nu g^{\mu t}) (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) g_t \otimes g^j \otimes g_k. \quad (4.107)$$

接下来，形式上引入**逆变导数**

$$\nabla^\mu := g^{\mu\nu} \nabla_\nu, \quad (4.108)$$

则上式可化为

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \Phi) &= \delta_i^\nu g^{\mu t} (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) g_t \otimes g^j \otimes g_k - g^{\mu\nu} \delta_i^t (\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) g_t \otimes g^j \otimes g_k \\ &= (\nabla_i \nabla^t \Phi_j^i{}^k) g_t \otimes g^j \otimes g_k - (\nabla^\mu \nabla_\mu \Phi_j^i{}^k) g_i \otimes g^j \otimes g_k. \end{aligned} \quad (4.109)$$

等式右边的第一项为

$$\begin{aligned} \nabla \otimes (\nabla \cdot \Phi) &= \left(g^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \otimes \left(g^\mu \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right) \\ &= g^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[g^\mu \cdot (\nabla_\mu \Phi_j^i{}^k g_i \otimes g^j \otimes g_k) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{g}^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} \delta_i^\mu \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \right) \\
&= \mathbf{g}^\nu \otimes \left[\left(\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} \delta_i^\mu \right) \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \right] \\
&= \delta_i^\mu \mathbf{g}^{\nu t} \left(\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} \right) \mathbf{g}_t \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \\
&= \left(\nabla^t \nabla_i \Phi_j^{i\ k} \right) \mathbf{g}_t \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k
\end{aligned}$$

根据式 (4.85)，协变导数可以交换顺序；而逆变导数无非就是利用度量玩了下“指标升降游戏”，理应可以交换：

$$= \left(\nabla_i \nabla^t \Phi_j^{i\ k} \right) \mathbf{g}_t \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k, \quad (4.110)$$

而第二项为

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \Phi &\triangleq \nabla \cdot (\nabla \otimes \Phi) = \left(\mathbf{g}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \cdot \left(\mathbf{g}^\mu \otimes \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right) \\
&= \mathbf{g}^\nu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\mathbf{g}^\mu \otimes \left(\nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \right) \right] \\
&= \mathbf{g}^\nu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} \mathbf{g}^\mu \otimes \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \right) \\
&= \mathbf{g}^\nu \cdot \left[\left(\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} \right) \mathbf{g}^\mu \otimes \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \right] \\
&= \mathbf{g}^{\mu\nu} \left(\nabla_\nu \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} \right) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \\
&= \left(\nabla^\mu \nabla_\mu \Phi_j^{i\ k} \right) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k. \quad (4.111)
\end{aligned}$$

将它们与 (4.109) 式比较，可得

$$\nabla \times (\nabla \times \Phi) = \nabla \otimes (\nabla \cdot \Phi) - \nabla^2 \Phi. \quad (4.112)$$

式 (4.105-b) 可以完全类似地证明，此处不再赘述。□

第五章 非完整基理论

5.1 完整基与非完整基的概念

第六章 曲线上的标架及其运动方程

6.1 Frenet 标架 (弧长参数)

6.1.1 \mathbb{R}^m 空间中曲线的表示

\mathbb{R}^m 空间中的曲线, 就是一个单参数的向量值映照:

$$\mathbf{X}(t) : [\alpha, \beta] \ni t \mapsto \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X^1(t) \\ \vdots \\ X^m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m. \quad (6.1)$$

考虑该向量值映照关于参数 t 的变化率

$$\dot{\mathbf{X}}(t) := \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(t + \Delta t) - \mathbf{X}(t)}{\Delta t} =: \begin{bmatrix} \dot{X}^1(t) \\ \vdots \\ \dot{X}^m(t) \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

按照物理上的习惯, 我们用点表示对 t 的导数. 若该极限存在, 则称 $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^m$ 在点 t 处可微. 此时, $\dot{\mathbf{X}}(t)$ 称为曲线 $\mathbf{X}(t)$ 的切向量. 上述极限可以等价地表述为

$$\mathbf{X}(t + \Delta t) = \mathbf{X}(t) + \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t). \quad (6.3)$$

在 t_0 处, 则可以写成

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t_0) + \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0) + o(t - t_0). \quad (6.4)$$

该方程表示一条直线, 称为曲线 $\mathbf{X}(t)$ 在 t_0 处的切线.

在物理域中, 弧长 s 可以表示为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) \right|_{\mathbb{R}^m} dt, \quad (6.5)$$

两边对 t 求导, 可有

$$\frac{ds}{dt}(t) = \left| \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) \right|_{\mathbb{R}^m}. \quad (6.6)$$

在本节中, 我们将采用弧长作为曲线的参数, 即

$$\mathbf{r}(s) : [0, L] \ni s \mapsto \mathbf{r}(s) \in \mathbb{R}^m. \quad (6.7)$$

对应的切向量为

$$\dot{\mathbf{r}}(s) := \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s}. \quad (6.8)$$

根据链式法则,

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \cdot \frac{dt}{ds}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) / \frac{ds}{dt}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) / \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right|_{\mathbb{R}^m}, \quad (6.9)$$

因而 $\dot{\mathbf{r}}(s)$ 是一个单位向量, 即

$$|\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m} = 1. \quad (6.10)$$

接下来继续对 $\dot{\mathbf{r}}(s)$ 求导:

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) := \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{ds}(s). \quad (6.11)$$

由于 $|\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m} = 1$, 因此

$$1 = |\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^m}^2 = \langle \dot{\mathbf{r}}(s), \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle_{\mathbb{R}^m}, \quad (6.12)$$

两边求导, 则有

$$0 = \langle \ddot{\mathbf{r}}(s), \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle_{\mathbb{R}^m} + \langle \dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s) \rangle_{\mathbb{R}^m} = 2 \cdot \langle \ddot{\mathbf{r}}(s), \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle_{\mathbb{R}^m}. \quad (6.13)$$

内积为零, 就意味着正交:

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) \perp \dot{\mathbf{r}}(s). \quad (6.14)$$

采用一般参数时, (6.10) 式和 (6.14) 未必成立. 解决方案见 6.2 节.

现在我们把目光限定在 \mathbb{R}^3 空间中. 如前所述, $\dot{\mathbf{r}}(s)$ 已经是单位向量, 我们将其记为 $\mathbf{T}(s)$; 而 $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ 仍需作单位化处理, 其结果记作 $\mathbf{N}(s)$, 即

$$\mathbf{N}(s) := \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}/ds}{|d\dot{\mathbf{r}}/ds|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{\dot{\mathbf{T}}(s)}{|\dot{\mathbf{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (6.15)$$

最后, 只要再令

$$\mathbf{B}(s) := \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s), \quad (6.16)$$

我们便有了 \mathbb{R}^3 空间中的一组单位正交基:

$$\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\} \subset \mathbb{R}^3, \quad (6.17)$$

它们称为 **Frenet 标架**. 其中, $\mathbf{T}(s)$ 、 $\mathbf{N}(s)$ 、 $\mathbf{B}(s)$, 分别叫做单位切向量、主单位法向量和副单位法向量.

6.1.2 标架运动方程

考虑 Frenet 标架关于弧长参数 s 的变化率, 即标架运动方程:

$$\{\dot{\mathbf{T}}(s), \dot{\mathbf{N}}(s), \dot{\mathbf{B}}(s)\} \subset \mathbb{R}^3. \quad (6.18)$$

为此, 我们需要先给出一个引理: 设 $\{\mathbf{e}_i(t)\}_{i=1}^m$ 是 \mathbb{R}^m 空间中的一组活动单位正交基, 它们满足

$$\langle \mathbf{e}_i(t), \mathbf{e}_j(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij}. \quad (6.19)$$

这组基的导数仍位于 \mathbb{R}^m 空间, 用自身展开, 可有

$$\left[\dot{\mathbf{e}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{e}}_m(t) \right] = \left[\mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_m(t) \right] \mathbf{P}(t). \quad (6.20)$$

此时, 我们有

$$\mathbf{P}(t) \in \text{Skw}, \quad (6.21)$$

即 $\mathbf{P}(t)$ 是一个反对称矩阵.

证明：对式 (6.19) 两边求导，得

$$\langle \dot{e}_i(t), e_j(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} + \langle e_i(t), \dot{e}_j(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} = 0 \in \mathbb{R}, \quad (6.22)$$

写成矩阵形式，为

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1^\top(t) \\ \vdots \\ \dot{e}_m^\top(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t), \dots, e_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1^\top(t) \\ \vdots \\ e_m^\top(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_1(t), \dots, \dot{e}_m(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times m}. \quad (6.23)$$

引入矩阵 $E = [e_1(t), \dots, e_m(t)]$ ，则上式与 (6.20) 式可以分别表示成

$$\dot{E}^\top E + E^\top \dot{E} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (6.24)$$

和

$$\dot{E} = EP \in \mathbb{R}^{m \times m}. \quad (6.25)$$

两式联立，可有

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \dot{E}^\top E + E^\top \dot{E} \\ &= (EP)^\top E + E^\top (EP) \\ &= P^\top (E^\top E) + (E^\top E)P = P^\top + P, \end{aligned} \quad (6.26)$$

即 $P^\top = -P$. 按照定义，便知 $P(t) \in \text{Skw}$. □

根据这一引理，便可有

$$\begin{bmatrix} \dot{T}(s), \dot{N}(s), \dot{B}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s), N(s), B(s) \end{bmatrix} P(s), \quad (6.27)$$

其中的 $P(s)$ 是一个三阶反对称矩阵. 显然，它的对角元均为零：

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

这里，我们用 “*” 表示待定元素. 由 (6.15) 式，可知

$$\dot{T}(s) = \left| \dot{T}(s) \right|_{\mathbb{R}^3} N(s) =: \kappa(s) N(s). \quad (6.29)$$

式中的 $\kappa(s) := \left| \dot{T}(s) \right|_{\mathbb{R}^3}$. 于是，矩阵 $P(s)$ 的第一列就成为了 $[0, \kappa(s), 0]^\top$. 利用反对称性，可有

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

我们“强行”引入了 $\tau(s)$ ，用来取代占位符 *. 当然，它的具体形式仍然待定.

6.1.3 曲率和挠率

利用矩阵 $\mathbf{P}(s)$ ，可以看出

$$\dot{\mathbf{B}}(s) = -\tau(s) \mathbf{N}(s). \quad (6.31)$$

再与 $\mathbf{N}(s)$ 做内积^①，便有

$$\dot{\mathbf{B}}(s) \cdot \mathbf{N}(s) = -\tau(s). \quad (6.32)$$

根据定义 (6.16) 式，

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s), \quad (6.33)$$

于是

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}(s) &= \frac{d}{ds} [\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)] = \frac{d}{ds} \left[\dot{\mathbf{r}}(s) \times \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \ddot{\mathbf{r}}(s) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(s)}{|\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} + \dot{\mathbf{r}}(s) \times \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s). \end{aligned} \quad (6.34)$$

显然，该式中的第一项为零。考虑 $\dot{\mathbf{B}}(s) \cdot \mathbf{N}(s)$ ，注意到 $\mathbf{N}(s)$ 与 $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ 平行，因此与 $\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)$ 垂直，所以第三项在点乘 $\mathbf{N}(s)$ 后也为零。这样便有

$$\begin{aligned} \tau(s) &= -\dot{\mathbf{B}}(s) \cdot \mathbf{N}(s) \\ &= -\dot{\mathbf{r}}(s) \times \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \cdot \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} \\ &= -\frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}^2} [\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(s)] \end{aligned}$$

利用向量三重积的性质，再把负号移进来，可得

$$= \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det [\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s)]. \quad (6.35)$$

至此，我们就得到了 \mathbb{R}^3 空间中以弧长为参数的 *Frenet* 标架：

$$\begin{cases} \mathbf{T}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s), \end{cases} \quad (6.36-a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{N}(s) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(s)}{|\dot{\mathbf{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}, \end{cases} \quad (6.36-b)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}}. \end{cases} \quad (6.36-c)$$

以及对应的标架运动方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}}(s) = \kappa(s) \mathbf{N}(s), \end{cases} \quad (6.37-a)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{N}}(s) = -\kappa(s) \mathbf{T}(s) + \tau(s) \mathbf{B}(s), \end{cases} \quad (6.37-b)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{B}}(s) = -\tau(s) \mathbf{N}(s), \end{cases} \quad (6.37-c)$$

其中，

$$\kappa(s) \triangleq |\dot{\mathbf{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3} \quad (6.38)$$

^① 为了表述的清晰，本小节中用 “ \cdot ” 来表示内积。

称为曲率,

$$\tau(s) \triangleq \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \dddot{\mathbf{r}}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa^2(s)} \det \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \dddot{\mathbf{r}}(s) \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

称为挠率.

6.1.4 Frenet 标架的几何意义

利用 Taylor 公式, 把 $\mathbf{r}(s_0 + \Delta s)$ 展开至三阶, 可得

$$\mathbf{r}(s_0 + \Delta s) = \mathbf{r}(s_0) + \dot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot (\Delta s) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot (\Delta s)^2 + \frac{1}{6} \dddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot (\Delta s)^3 + \mathcal{O}((\Delta s)^3). \quad (6.40)$$

其中的一阶和二阶导数, 根据式 (6.36), 可以分别表示为

$$\dot{\mathbf{r}}(s_0) = \mathbf{T}(s_0) \quad (6.41)$$

和

$$\ddot{\mathbf{r}}(s_0) = \left| \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \right|_{\mathbb{R}^3} \mathbf{N}(s_0) = \kappa(s_0) \mathbf{N}(s_0). \quad (6.42)$$

至于三阶导数, 可用一组单位正交基 (此处当然要用 Frenet 标架) 展开:

$$\dddot{\mathbf{r}}(s_0) = [\ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{T}(s_0)] \mathbf{T}(s_0) + [\ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{N}(s_0)] \mathbf{N}(s_0) + [\ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{B}(s_0)] \mathbf{B}(s_0). \quad (6.43)$$

关于 $\mathbf{T}(s_0)$ 、 $\mathbf{N}(s_0)$ 、 $\mathbf{B}(s_0)$ 合并同类项, 可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}(s_0 + \Delta s) \\ &= \mathbf{r}(s_0) + \left[\Delta s + \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{T}(s_0) (\Delta s)^3 \right] \mathbf{T}(s_0) \\ & \quad + \left[\frac{1}{2} \kappa(s_0) (\Delta s)^2 + \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{N}(s_0) (\Delta s)^3 \right] \mathbf{N}(s_0) \\ & \quad + \left[\frac{1}{6} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{B}(s_0) (\Delta s)^3 \right] \mathbf{B}(s_0) + \mathcal{O}((\Delta s)^3) \\ &= \mathbf{r}(s_0) + [\mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s_0), \mathbf{B}(s_0)] \begin{bmatrix} \Delta s + \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{T}(s_0) (\Delta s)^3 + \mathcal{O}((\Delta s)^3) \\ \frac{1}{2} \kappa(s_0) (\Delta s)^2 + \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{N}(s_0) (\Delta s)^3 + \mathcal{O}((\Delta s)^3) \\ \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \cdot \mathbf{B}(s_0) (\Delta s)^3 + \mathcal{O}((\Delta s)^3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.44-a)$$

若只精确到二阶无穷小量, 则为

$$= \mathbf{r}(s_0) + [\mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s_0), \mathbf{B}(s_0)] \begin{bmatrix} \Delta s + \mathcal{O}((\Delta s)^2) \\ \frac{1}{2} \kappa(s_0) (\Delta s)^2 + \mathcal{O}((\Delta s)^2) \\ \mathcal{O}((\Delta s)^3) \end{bmatrix}. \quad (6.44-b)$$

以上推导说明, 当误差限制在二阶无穷小量时, \mathbf{B} 方向分量为零. 这样, 我们就可以认为曲线只在 \mathbf{T} 和 \mathbf{N} 张成的平面中运动, 此平面称为密切平面. 设其横纵坐标分别为 \tilde{x} 、 \tilde{y} , 则有

$$\begin{cases} \tilde{x} = \Delta s, \end{cases} \quad (6.45-a)$$

$$\begin{cases} \tilde{y} = \frac{1}{2} \kappa(s_0) (\Delta s)^2 = \frac{1}{2} \kappa(s_0) \tilde{x}^2. \end{cases} \quad (6.45-b)$$

如图所示. 该抛物线与圆心位于 $(0, \kappa^{-1}(s_0))$, 半径等于 $\kappa^{-1}(s_0)$ 的圆也是密切的.

密切圆, 图见“曲线上标架-Part 02” 20 min.

只有考虑三阶无穷小量时, 才可以看出曲线偏离密切平面. 显然, 这一偏离的“速率”将由挠率刻画.

6.1.5 应用：速度与加速度

三维空间中, 质点的运动轨迹可以用 \mathbb{R}^3 中的曲线 $\mathbf{r}(t)$ 来表示, 其中的参数 t 为时间. 质点运动的速度 $\mathbf{v}(t)$, 定义为

$$\mathbf{v}(t) \triangleq \dot{\mathbf{r}}(t) := \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = \dot{\mathbf{r}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t). \quad (6.46)$$

由式 (6.5), 弧长的定义为

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}(\xi)|_{\mathbb{R}^m} d\xi, \quad (6.47)$$

求导, 可得

$$\frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}. \quad (6.48)$$

再代入 Frenet 标架的定义 (6.36-a) 式, 便有

$$\mathbf{v}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \mathbf{T}(s). \quad (6.49)$$

可见, 速度 $\mathbf{v}(t)$ 的方向与 $\mathbf{T}(t)$ 平行. 另外由于 $\mathbf{T}(t)$ 是单位向量, 因此速度的大小

$$|\mathbf{v}(t)|_{\mathbb{R}^m} = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}, \quad (6.50)$$

我们称之为速率.

速度相对时间的变化率称为加速度:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) \triangleq \dot{\mathbf{v}}(t) &= \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \mathbf{T}(s) + |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt}(s) \\ &= \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \mathbf{T}(s) + |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \dot{\mathbf{T}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) \end{aligned}$$

代入标架运动方程 (6.37-a) 式以及弧长的导数 (6.48) 式, 可有

$$= \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \mathbf{T}(s) + |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \kappa(s) \mathbf{N}(s) \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^m}$$

换成速率, 则为

$$= \frac{d}{dt} |\mathbf{v}(t)|_{\mathbb{R}^m} \cdot \mathbf{T}(s) + |\mathbf{v}(t)|_{\mathbb{R}^m}^2 \kappa(s) \mathbf{N}(s). \quad (6.51)$$

由此可知, 加速度只有 \mathbf{T} 分量和 \mathbf{N} 分量; 当质点做匀变速运动时, 则只有 \mathbf{N} 分量.

6.2 Frenet 标架 (一般参数)

本节我们重回一般参数下的映照形式, 即

$$\mathbf{r}(t) : [\alpha, \beta] \ni t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3, \quad (6.52)$$

其中的参数 t 与弧长 s 的关系同式 (6.6):

$$\frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}. \quad (6.53)$$

后文的推导需要用到向量的内蕴正交分解: $\forall \xi, \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ 且满足 $|\mathbf{e}|_{\mathbb{R}^3} = 1$, 有

$$\xi = (\xi \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} - (\xi \times \mathbf{e}) \times \mathbf{e}. \quad (6.54)$$

证明见 **内蕴正交分解**.

6.2.1 标架的形式

首先来处理单位切向量: ^①

$$\mathbf{T}(s) \triangleq \dot{\mathbf{r}}(s) = \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{dt}{ds}(s) = \dot{\mathbf{r}}(t) / \frac{ds}{dt}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (6.55)$$

接下来计算它的导数 $\dot{\mathbf{T}}(s)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}(s) &= \frac{d}{ds} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \cdot \frac{dt}{ds}(s) \end{aligned}$$

代入 (6.53) 式, 得

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \left[\ddot{\mathbf{r}}(t) - \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \cdot \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \right]. \end{aligned} \quad (6.56)$$

此处涉及到了模的导数. 考虑

$$\frac{d}{dt} \left[|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2 \right] = 2 |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}; \quad (6.57)$$

另一方面,

$$\frac{d}{dt} \left[|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2 \right] = \frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)] = 2 \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t). \quad (6.58)$$

联立两式, 便有

$$\frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (6.59)$$

代回 (6.56) 式, 继续推导:

$$\dot{\mathbf{T}}(s) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \left[\ddot{\mathbf{r}}(t) - \left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

式中的 $\dot{\mathbf{r}}(t)/|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}$ 是一个单位向量, 它相当于式 (6.54) 中的 \mathbf{e} , 而 $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ 则相当于 ξ . 因此, 利用向量的内蕴正交分解, 有

$$= -\frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \left[\left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

^① 此时我们把 s 作为参数, 只不过 $s = s(t)$. 所以 $\mathbf{T}(s)$ 实际上和 $\mathbf{T}(t)$ 相等.

$$= -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}. \quad (6.60)$$

根据曲率的定义 (6.38) 式,

$$\kappa(s) \triangleq |\dot{\mathbf{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3} = \frac{|(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}. \quad (6.61)$$

注意到 $(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \perp \dot{\mathbf{r}}(t)$, 所以

$$|(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}. \quad (6.62)$$

这样, 曲率就能够写成

$$\kappa(s) = \frac{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3}. \quad (6.63)$$

利用定义 (6.36-b) 式, $\mathbf{N}(s)$ 也便可以易如反掌地写出来了:

$$\mathbf{N}(s) \triangleq \frac{\dot{\mathbf{T}}(s)}{|\dot{\mathbf{T}}(s)|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{\dot{\mathbf{T}}(s)}{\kappa(s)} = -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (6.64)$$

最后轮到 $\mathbf{B}(s)$ 了:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(s) &= \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \times \left[-\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \times \left[-\left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \end{aligned}$$

这样处理是为了倒过来应用内蕴正交分解:

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \times \left[\ddot{\mathbf{r}}(t) - \left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

由于 $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$, 因而方括号中的第二项可以略去, 使得结果大为简化:

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (6.65)$$

6.2.2 曲率和挠率

曲率在计算 \mathbf{N} 的时候已经顺带求过了, 我们现在来求挠率. 根据式 (6.39), 有

$$\tau(s) = \frac{1}{\kappa^2(s)} \det[\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \dddot{\mathbf{r}}(s)]. \quad (6.66)$$

因此首先需要知道 \mathbf{r} 关于 s 的一至三阶导数. 由 (6.55) 式, 可知

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{T}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}; \quad (6.67)$$

二阶导数则要利用式 (6.60):

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) = \dot{\mathbf{T}}(s) = -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4}; \quad (6.68)$$

进而又可得到三阶导数：

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{ds}(s) = -\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}(s) \cdot \frac{dt}{ds} = -\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}(s) \Big/ \frac{ds}{dt}(t) = -\frac{d}{dt} \left[\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4} \right] \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (6.69)$$

最后一步仍然利用了 (6.53) 式。我们知道，

$$\det \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s) \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(s).$$

首先考察叉乘项：

$$\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \times \left[-\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4} \right]$$

注意到该式的结构与 (6.65) 式的第二步非常相似，因此我们采用同样的办法处理，即先调整系数，再反向运用内蕴正交分解：

$$\begin{aligned} &= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3} \times \left[-\left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \\ &= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3} \times \left[\ddot{\mathbf{r}}(t) - \left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right] \end{aligned}$$

同样，因为 $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ ，所以又只剩下了第一项，即

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3}. \quad (6.70)$$

再来看 $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ 。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) &= -\frac{d}{dt} \left[\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4} \right] \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \\ &= -\frac{\frac{d}{dt} [(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)] \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4 + [(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)] \cdot \frac{d}{dt} [|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4]}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^8} \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \\ &= -\frac{\frac{d}{dt} (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5} - \frac{\frac{d}{dt} [|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4]}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^9} \cdot [(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)] \\ &= -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5} - \frac{\frac{d}{dt} [|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4]}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^9} \cdot [(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)] \end{aligned}$$

第一项中， $\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = 0$ 。所以

$$= -\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5} - \frac{\frac{d}{dt} [|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^4]}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^9} \cdot [(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)]. \quad (6.71)$$

式中的高亮部分与另一个向量做叉乘后，垂直于 $\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)$ ；而另一方面， $\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)$ 又平行于 $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)$ 。因此二者做点乘后即为零。这样，我们就有

$$\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3} \cdot \left[-\frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^5} \right]$$

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \cdot \left[- \left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

照例，使用内蕴正交分解：

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \cdot \left[\ddot{\mathbf{r}}(t) - \left(\ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}} \right]$$

第二项点乘后为零：

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6}. \quad (6.72)$$

此即

$$\det \left[\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s) \right] = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \det \left[\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right]. \quad (6.73)$$

再代入一般参数下曲率的表达式 (6.63)，就可得到挠率：

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \frac{1}{\kappa^2(s)} \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \det \left[\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right] \\ &= \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^6} \det \left[\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right] \\ &= \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det \left[\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right]. \end{aligned} \quad (6.74)$$

现在来总结一下一般参数下的 Frenet 标架：

$$\begin{cases} \mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}, \end{cases} \quad (6.75-a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{N}(t) = - \frac{(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}, \end{cases} \quad (6.75-b)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}. \end{cases} \quad (6.75-c)$$

曲率和挠率分别为

$$\kappa(t) = \frac{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^3} \quad (6.76)$$

和

$$\tau(t) = \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}^2} \det \left[\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \right]. \quad (6.77)$$

注意我们把参数全部换成了 t . ^①

至于标架运动方程，则可直接利用 (6.37) 式：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}}(t) = \dot{\mathbf{T}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot [\kappa(t) \mathbf{N}(t)], \end{cases} \quad (6.78-a)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{N}}(t) = \dot{\mathbf{N}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot [-\kappa(t) \mathbf{T}(t) + \tau(t) \mathbf{B}(t)], \end{cases} \quad (6.78-b)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{B}}(t) = \dot{\mathbf{B}}(s) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot [-\tau(t) \mathbf{N}(t)]. \end{cases} \quad (6.78-c)$$

^① 根据第 70 页的脚注 ①， $\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}(t)$ 。类似地，还有 $\kappa(s) = \kappa(t)$ 等。实际上，它们是同一个量在不同参数下的表示。但 $\dot{\mathbf{T}}(s) \neq \dot{\mathbf{T}}(t)$ 。这是因为前者是对 s 求导，而后者则是对 t 求导。不要被符号迷惑。

若 t 取为 s , 有

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3} = 1. \quad (6.79)$$

根据式 (6.14), $\ddot{\mathbf{r}}(s) \perp \dot{\mathbf{r}}(s)$, 因此

$$|\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(s) \times \dot{\mathbf{r}}(s)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3}. \quad (6.80)$$

利用内蕴正交分解, 稍做计算, 还可知

$$(\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = -\ddot{\mathbf{r}}(t) + (\ddot{\mathbf{r}}(t) \bullet \dot{\mathbf{r}}(t)) \dot{\mathbf{r}}(t) = -\ddot{\mathbf{r}}(t). \quad (6.81)$$

此时, 把 (6.75) ~ (6.78) 式与 (6.36) ~ (6.39) 式进行比较, 可以发现它们是完全一样的.

索引

B

标架运动方程, 65, 67

D

单位切向量, 65

F

Frenet 标架, 65, 67

一般参数下的 \sim , 73

副单位法向量, 65

H

弧长, 64

J

加速度, 69

K

可微, 64

M

密切平面, 68

N

挠率

弧长参数下的 \sim , 68

一般参数下的 \sim , 73

推导过程, 71–73

内蕴正交分解, 70

Q

切线, 64

切向量, 64

曲率

弧长参数下的 \sim , 68

一般参数下的 \sim , 73

推导过程, 71

曲线, 64

S

速度, 69

速率, 69

Z

质点的运动, 69

主单位法向量, 65