<u>Теория вероятности и математическая статистика</u>

Учебно-методическое пособие. Практикум

Тарасенко Е.О., Гладков А.В.

Содержание

Раздел 1. КТ 1. Элементы теории вероятностей

Занятие 1. Операции над множествами и событиями

Учебные вопросы занятия:

1. Основные операции над множествами и событиями
2. Аксиоматика теории вероятностей

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Вступительная часть

На сегодняшнем практическом занятии Вам предлагается выполнить практические задания, связанные с выполнением основных операций над множествами и событиями.

Проверка готовности студентов к занятию

1. Записать основные формулы комбинаторики.
2. Дать классическое определение вероятности.
3. Основные свойства вероятности.
4. Сумма, произведение, разность событий.

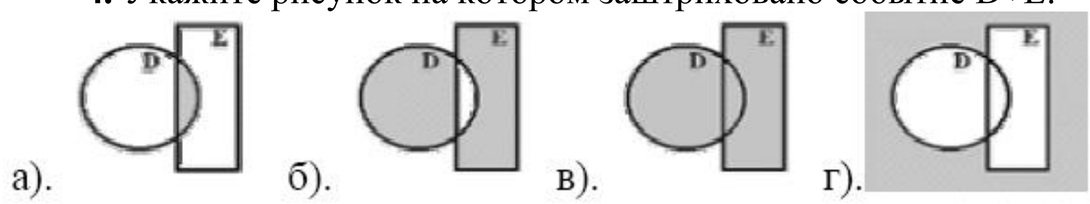
1. Основные операции над множествами и событиями

1. Изобразить графически множество AB.

2. Изобразить графически множество $A(A+B)$.

3. Судно имеет одно рулевое устройство, четыре котла и две турбины. Событие А означает исправность рулевого устройства, B_j (j = 1, 2, 3, 4) – исправность j-го котла, а C_k (k = 1, 2) – исправность k-ой турбины. Событие F – судно управляемое – имеет место в том случае, когда исправны рулевое устройство, хотя бы один котёл и хотя бы одна турбина. Выразить события F_i через А, B_j и C_k.

4. Укажите рисунок на котором заштриховано событие D+E:



5. Пусть А, В, С – три произвольно выбранных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из А, В, С:

а) произошло только событие А;

б) произошло А и В, но С не произошло;

в) все три события произошли;

г) произошло хотя бы одно из этих событий;

д) произошло хотя бы два события;

е) произошло одно и только одно из этих событий;

ж) произошли два и только два события;

з) не произошло ни одно из этих событий;

и) произошло не более двух событий.

2. Аксиоматика теории вероятностей

1. В городе n светофоров. Каждый может находиться в одном из трех состояний: гореть красным, желтым или зеленым светом. Сколькими способами можно зажечь все светофоры?

2. В классе изучают десять предметов. Во вторник пять уроков, причем уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на вторник?

3. В распоряжении сигнальщика есть четыре различных флага. На флагштоке поднимается сигнал, состоящий не менее чем из двух флагов. Сколько различных сигналов можно поднять на флагштоке, если порядок флагов в сигнале учитывается?

4. Студенту необходимо сдать три (различных) экзамена в течение шести дней. В день разрешается сдавать не более одного экзамена. Сколькими способами можно организовать сдачу экзаменов?

5. Абонент забыл последнюю цифру телефонного номера и вынужден набирать её наудачу. Найти вероятность того, что ему придётся звонить не более чем по трём номерам. Каким образом изменится вероятность, если абонент помнит, последняя цифра номера – чётная?

6. В урне находятся 10 белых, 15 черных, 20 красных шаров. Из урны наудачу берутся 9 шаров. Найти:

а) сколькими различными способами можно вынуть 9 шаров?

б) сколькими различными способами можно взять 9 шаров, среди которых 6 белых и 3 черных?

в) сколькими различными способами можно взять 9 шаров, среди которых 2 белых, 3 черных и 4 красных шара?

Отчетность за занятие

Результаты работы должны быть отражены в рабочей тетради и защищены устно каждым студентом. При подготовке к защите основное внимание уделить пониманию физического смысла каждого пункта задания и обоснованию полученных результатов.

Заключение

Проводится собеседование по результатам работы с каждым студентом. Студентам, успешно завершившим расчет всех практических заданий выставляется оценка.

Занятие 2. Вероятностные пространства

Учебные вопросы занятия:

1. Вероятностное пространство с геометрическим типом вероятности
2. Условная вероятность

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Вступительная часть

На сегодняшнем практическом занятии Вам предлагается выполнить практические задания, связанные с выполнением основных операций в вероятностных пространствах с геометрическим типом вероятности.

Проверка готовности студентов к занятию

1. Дать определение алгебры событий.
2. Дать определение σ-алгебры.
3. Дать определение борелевской алгебры.
4. Дать определение вероятности на измеримом пространстве.
5. Дать определение вероятностного пространства.
6. Свойства вероятности.

1. Вероятностное пространство с геометрическим типом вероятности

1. Задан район поиска парашютиста, представляющий собой квадрат со стороной 5 км. В районе поиска находится озеро, поверхность которого можно приближенно считать совпадающей с поверхностью круга радиуса R = 1 км. Предполагая, что парашютист мог приземлиться в любой точке рассматриваемого квадрата, найти вероятность того, что парашютист приводнился на поверхность озера.

2. На телефонной линии, соединяющей пункты А и В, расстояние между которыми 100 км, произошел обрыв провода. Определить вероятность того, что точка обрыва С находится от пункта А на расстоянии, не менее 20 км, предполагая, что положение обрыва С на телефонной линии равновозможно любое.

3. В любые моменты интервала времени T равновозможны поступления в приемник двух независимых сигналов. Сигналы искажаются, если разность между моментами их поступления меньше τ. Определить вероятность того, что сигналы будут искажены.

4. Стержень длиной l ломают на три части, причем точки разлома выбирают наудачу. Найдите вероятность того, что из получившихся частей можно составить треугольник.

5. Два приятеля условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи приятелей, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти в любое время?

2. Условная вероятность

1. На занятии присутствует две группы студентов. В одной группе 20 студентов, причем, 5 среди них – отличники; во второй группе – 25 студентов, причем, 6 из них – отличники. Для решения примера был вызван к доске один отличник. Найти вероятность того, что к доске вызван студент из первой группы.

2. Пусть событие B – выпадение 4 или 6 очков на игральной кости, событие A_1 – выпадение четного числа очков, событие A_2 – выпадение 3, 4 или 5 очков, событие A_3 – выпадение нечетного числа очков. Найти условные вероятности событий A_1, A_2 *и* A_3 при условии события B.

3. На семи карточках написаны буквы, образующие слово «СОЛОВЕЙ». Карточки перемешивают и из них наугад последовательно извлекают и выкладывают слева направо три карточки. Найти вероятность того, что получится слово «ВОЛ» (событие *А).*

4. Каждая буква слова «МАТЕМАТИКА» написана на отдельной карточке. Карточки тщательно перемешаны. Последовательно извлекают четыре карточки. Найти *вероятность события А* – получить слово «ТЕМА»?

Отчетность за занятие

Результаты работы должны быть отражены в рабочей тетради и защищены устно каждым студентом. При подготовке к защите основное внимание уделить пониманию физического смысла каждого пункта задания и обоснованию полученных результатов.

Заключение

Проводится собеседование по результатам работы с каждым студентом. Студентам, успешно завершившим расчет всех практических заданий выставляется оценка.

Занятие 3. Формулы полной вероятности, Байеса, Бернулли

Учебные вопросы занятия:

1. Формула полной вероятности. Формула Байеса
2. Формула Бернулли

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Вступительная часть

На сегодняшнем практическом занятии Вам предлагается выполнить практические задания, связанные с использованием формул полной вероятности, Байеса и формулы Бернулли.

Проверка готовности студентов к занятию

1. Каким образом вычисляется вероятность суммы и произведения событий.
2. Пояснить формулу полной вероятности.
3. Пояснить формулу Байеса.
4. Пояснить формулу Бернулли.

1. Формула полной вероятности. Формула Байеса

1. В тире имеется пять винтовок (№1, №2, №3, №4, №5), вероятности попадания из которых для данного стрелка равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9.

а) Определить вероятность попадания в мишень при одном выстреле, если стрелок берет одну из винтовок наудачу.

б) Стрелок берет одну из винтовок наудачу, производит выстрел и попадает в мишень. Найти вероятность того, что стрелок стрелял из винтовки №3.

2. Две из трех (№1, №2, №3) независимо работающих ламп прибора отказали. Найти вероятность того, что отказала лампа №1, если вероятности отказа ламп №1, №2, №3 соответственно равны: $p_1=0{,}1$; $p_2=0{,}2$; $p_3=0{,}3$.

3. Врач после осмотра больного считает, что возможно одно из двух заболеваний, которые зашифрованы номерами 1 и 2, причем степень своей уверенности в отношении правильности диагноза он оценивает как 0,4 и 0,6 соответственно. Для уточнения диагноза больного направляют на анализ, исход которого дает положительную реакцию при заболевании 1 – в 90% случаев и при заболевании 2 – в 20% случаев. Анализ дал положительную реакцию. Как изменится мнение врача после проведенного анализа?

4. Электролампы изготавливаются на трёх заводах. Первый завод производит 30% общего количества электроламп, второй - 25%, а третий - остальную часть. Продукция первого завода содержит 1% бракованных электроламп, второго - 1,5%, третьего - 2%. В магазин поступает продукция всех трёх заводов. Купленная в магазине лампа оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она произведена первым заводом?

5. Два из трёх независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}3$.

6. На трех дочерей - Юлю, Марину и Лену - в семье возложена обязанность мыть посуду. Поскольку Юля старшая, ей приходится выполнять 40 % всей работы. Остальные 60 % работы приходятся поровну на Марину и Лену. Вероятности разбить что-нибудь из посуды (в течение одного мытья) для Юли, Марины и Лены равны соответственно: 0,02; 0,03; 0,04. Родители не знают, кто дежурил вечером, но они слышали звон разбитой посуды. Какова вероятность того, что посуду мыла: а) Юля; б) Марина; в) Лена?

2. Формула Бернулли

1. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене:

1. Не будут проданы 5 пакетов.
2. Будет продано:

а) менее 2 пакетов;

б) не более 2 пакетов;

в) хотя бы 2 пакета;

г) наивероятнейшее число пакетов.

2. По цели производят 6 независимых выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,75. Найти:

а) вероятность ровно 5 попаданий;

б) вероятность не менее 5 попаданий;

в) вероятность менее 3 попаданий.

3. В коробке лежит 200 конденсаторов, причем 2 из них нужной емкости. Случайным образом из коробки вынимают 1 конденсатор и после определения его емкости возвращают обратно в коробку. Выяснить сколько раз нужно осуществить указанную операцию, чтобы вероятность встретить хотя бы один конденсатор нужной емкости была не меньше 0,95.

4. Устройство состоит из 3 независимо работающих основных элементов. Устройство отказывает если откажет хотя бы один элемент. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0,1. Найти вероятность безотказной работы устройства за время t, если:

а) работают только основные элементы;

б) включен один резервный элемент;

в) включены 2 резервных элемента.

Предполагается, что резервные элементы работают в том же режиме, что и основные, вероятность отказа каждого резервного элемента равна 0,1 и устройство отказывает менее 3 элементов.

5. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных.

Отчетность за занятие

Результаты работы должны быть отражены в рабочей тетради и защищены устно каждым студентом. При подготовке к защите основное внимание уделить пониманию физического смысла каждого пункта задания и обоснованию полученных результатов.

Заключение

Проводится собеседование по результатам работы с каждым студентом. Студентам, успешно завершившим расчет всех практических заданий выставляется оценка.

Занятие 4. Дискретные случайные величины

Учебные вопросы занятия:

1. Закон распределения дискретной случайной величины
2. Функция распределения дискретной случайной величины

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Вступительная часть

На сегодняшнем практическом занятии Вам предлагается выполнить практические задания, связанные с дискретными случайными величинами.

Проверка готовности студентов к занятию

1. Дать определение случайной величины.
2. Какая случайная величина называется дискретной?
3. Какая случайная величина называется непрерывной?
4. Что такое закон распределение случайной величины? Способы задания.
5. Что понимается под функцией распределения случайной величины? Способы задания.

1. Закон распределения дискретной случайной величины

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

а)

X	1	3	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,3

б)

X	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

в)

X	10	15	20
p	0,1	0,7	0,2

Построить многоугольник распределения.

2. Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

3. В партии 10 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырёх отобранных и построить многоугольник распределения.

4. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа появления «герба» при двух бросаниях монеты.

5. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задаёт студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает знание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой дополнительный заданный вопрос, равна 0,9. Требуется составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа дополнительных вопросов, которые преподаватель задаст студенту, найти наивероятнейшее число заданных студенту дополнительных вопросов.

6. Из двух орудий поочерёдно ведётся стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием составляет 0,3, вторым – 0,7. Начинает стрельбу первое орудие. Составить закон распределения дискретной случайной величины X и Y – числа израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудием.

7. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

8. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

2. Функция распределения дискретной случайной величины

1. Для всех заданий п.1 построить функцию распределения случайной величины X.

Отчетность за занятие

Результаты работы должны быть отражены в рабочей тетради и защищены устно каждым студентом. При подготовке к защите основное внимание уделить пониманию физического смысла каждого пункта задания и обоснованию полученных результатов.

Заключение

Проводится собеседование по результатам работы с каждым студентом. Студентам, успешно завершившим расчет всех практических заданий выставляется оценка.

Раздел 2. КТ 2. Числовые характеристики случайных величин. Основы математической статистики

Занятие 5. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Учебные вопросы занятия:

1. Математическое ожидание дискретной случайной величины
2. Дисперсия дискретной случайной величины

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Вступительная часть

На сегодняшнем практическом занятии Вам предлагается выполнить практические задания, связанные с нахождением числовых характеристик дискретных случайных величин.

Проверка готовности студентов к занятию

1. Дать определение случайной величины.
2. Какая случайная величина называется дискретной?
3. Что называется математическим ожиданием? Свойства.
4. Дать определение дисперсии дискретной случайной величины? Свойства.
5. Дать определение среднего квадратического отклонения?

1. Математическое ожидание дискретной случайной величины

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

А)

X	1	3	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Б)

X	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

В)

X	10	15	20
p	0,1	0,7	0,2

Вычислить математическое ожидание.

2. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины Z, если известны математические ожидания X и Y: а) Z=X+2Y, M(X)=5, M(Y)=3; б) Z=3X+4Y, M(X)=2, M(Y)=6.

3. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения $x_1=4$ с вероятностью $p_1=0.5$; $x_2=6$ с вероятностью $p_2=0.3$; x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что $M(X)=8$.

4. Контрольная работа состоит из трёх вопросов. На каждый вопрос приведено по 4 ответа. Составить и изобразить графически закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

5. В билете 3 задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй – 0,8, третьей – 0,7. Составить и изобразить графически закон распределения числа правильного решения задач в билете и вычислить математическое ожидание этой случайной величины.

6. Сделано два высокорисковых вклада: 10 тыс. рублей в компанию А и 15 тыс. рублей в компанию В. Компания А обещает 50% годовых, но может лопнуть с вероятностью 0,2. Компания В – 40% годовых, но может лопнуть с вероятностью 0,15. Составить закон распределения случайной величины – общей суммы прибыли (убытка), полученной от двух компаний через год. Найти её математическое ожидание.

7. Найти математическое ожидание лотерейных билетов, на которых выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причём вероятность выигрыша по одному билету составляет 0,3.

8. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, распределённой по закону Пуассона:

9.

X	*0*	*1*	*2*	…	*k*
p	$exp(-\lambda)$	$\frac{\lambda \exp(-\lambda)}{1!}$	$\frac{\lambda^2 \exp(-\lambda)}{2!}$	…	$\frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}$

Учитывать, что $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \exp(\lambda)$

2. Дисперсия дискретной случайной величины

1. Для заданий №1, 3, 4, 5 п. 1 вычислить дисперсию распределения случайной величины X.

2. Случайная величина X задана законом распределения

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратичное отклонение σ(X).

3. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появления события А в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления событий А в каждом испытании равна 0,2.

4. Брошены n игральных костей. Найти дисперсию суммы числа очков, которые могут появиться на всех выпавших гранях.

Отчетность за занятие

Результаты работы должны быть отражены в рабочей тетради и защищены устно каждым студентом. При подготовке к защите основное внимание уделить пониманию физического смысла каждого пункта задания и обоснованию полученных результатов.

Заключение

Проводится собеседование по результатам работы с каждым студентом. Студентам, успешно завершившим расчет всех практических заданий выставляется оценка.

Занятие 6. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Учебные вопросы занятия:

1. Математическое ожидание непрерывной случайной величины
2. Дисперсия непрерывной случайной величины

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Вступительная часть

На сегодняшнем практическом занятии Вам предлагается выполнить практические задания, связанные с нахождением числовых характеристик непрерывных случайных величин.

Проверка готовности студентов к занятию

1. Какая случайная величина называется непрерывной?
2. Что называется плотностью распределения вероятностей?
3. Что называется математическим ожиданием непрерывной случайной величины?
4. Дать определение дисперсии непрерывной случайной величины?
5. Дать определение начального теоретического момента порядка k?
6. Дать определение центрального теоретического момента порядка k?

1. Математическое ожидание непрерывной случайной величины

1. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=x/2 в интервале (0, 2); вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание величины X.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = x + 0.5$ в интервале (0;1); вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание функции $Y = X^3$ (не находя предварительно плотности распределения Y).

3. Найти математическое ожидание случайной величины X, заданной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & , 0 < x \le 4 \\ 1 & , x > 4 \end{cases}$$

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x)=$C(x^2+2x)$ в интервале (0;1). Вне этого интервала f(x)=0. Найти параметр C.

5. Случайная величина X на интервале (2, 4) задана плотностью распределения *f(x)= -(3/4)*x^2 *+(9/2)x-6;* вне этого интервала *f(x)=0.* Найти моду, математическое ожидание и медиану величины X.

6. Функция $\varphi(x)$ задана в виде:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 1\\ \dfrac{A}{x^4} & ,x>1\end{cases}$$

Найти:

а) значение постоянной A, при которой функция будет плотностью вероятности некоторой случайной величины X;

б) выражение функции распределения F(x);

в) вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значение на отрезке [2;3];

г) найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

2. Дисперсия непрерывной случайной величины

1. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=1/($\pi\sqrt{c^2-x^2}$) в интервале (-c; c); вне этого интервала *f(x)=0.* Найти дисперсию величины X.

2. Случайная величина X на интервале (0, π); задана плотностью распределения f(x)=(1/2)sin x; вне этого интервала *f(x)=0.* Найти дисперсию величины X.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=0.5x в интервале (0, 2); вне этого интервала *f(x)=0.* Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвёртого порядков.

Отчетность за занятие

Результаты работы должны быть отражены в рабочей тетради и защищены устно каждым студентом. При подготовке к защите основное внимание уделить пониманию физического смысла каждого пункта задания и обоснованию полученных результатов.

Заключение

Проводится собеседование по результатам работы с каждым студентом. Студентам, успешно завершившим расчет всех практических заданий выставляется оценка.

Занятие 7. Первичная статическая обработка случайной выборки

Учебные вопросы занятия:

1. Расчет основных характеристик выборок. Вариационный и статистический ряды
2. Оценивание генеральных числовых характеристик с помощью группированного статистического ряда

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Вступительная часть

На сегодняшнем практическом занятии Вам предлагается выполнить практические задания, связанные с определением характеристик выборок.

Проверка готовности студентов к занятию

1. Что такое генеральная совокупность, выборка, выбор?
2. Сформулируйте определение простого случайного выбора.
3. Какие виды реальных выборов вы знаете?
4. Какая выборка называется репрезентативной, однородной?
5. Что такое вариационный, статистический ряд?
6. Дайте определение крайних элементов вариационного ряда, размаха, медианы, квартилей.
7. Что такое полигон частот?
8. Дайте определение выборочной функции распределения.
9. Что такое оценка генеральной числовой характеристики?

1. Расчет основных характеристик выборок. Вариационный и статистический ряды

1. В результате эксперимента получена выборка объема $n = 79$:

2; 4; 2; 4; 3; 3; 3; 2; 0; 6; 1; 2; 3; 2; 2;
4; 3; 3; 5; 1; 0; 2; 4; 3; 2; 2; 3; 3; 1; 3;
3; 3; 1; 1; 2; 3; 1; 4; 3; 1; 7; 4; 3; 4; 2;
3; 2; 3; 3; 1; 4; 3; 1; 4; 5; 3; 4; 2; 4; 5;
3; 6; 4; 1; 3; 2; 4; 1; 3; 1; 0; 0; 4; 6; 4;
7; 4; 1; 3.

Построить вариационный и статистический ряд, изобразить полигон частот, определить крайние элементы, размах выборки, медиану выборки, нижний и верхний квартили, найти и построить выборочную функцию распределения. Вычислить основные выборочные оценки: выборочное среднее, выборочный начальный и центральный моменты 2-го порядка, выборочную дисперсию, а также выборочное среднеквадратическое отклонение.

2. Оценивание генеральных числовых характеристик с помощью группированного статистического ряда

1. Измерена максимальная ёмкость 20 подстроечных конденсаторов, и результаты измерений (в пикофарадах) приведены в таблице:

Номер конденсатора	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Емкость, пкФ	4,40	4,31	4,40	4,40	4,65	4,56	4,71	4,54	4,36	4,56
Номер конденсатора	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Емкость, пкФ	4,31	4,42	4,60	4,35	4,50	4,40	4,43	4,48	4,42	4,45

Построить группированный статистический ряд и изобразить его в виде гистограммы. Оценить генеральные числовые характеристики с помощью группированного статистического ряда.

Отчетность за занятие

Результаты работы должны быть отражены в рабочей тетради и защищены устно каждым студентом. При подготовке к защите основное внимание уделить пониманию физического смысла каждого пункта задания и обоснованию полученных результатов.

Заключение

Проводится собеседование по результатам работы с каждым студентом. Студентам, успешно завершившим расчет всех практических заданий выставляется оценка.

Занятие 8. Точечное оценивание числовых характеристик и параметров распределения генеральной совокупности

Учебные вопросы занятия:

1. Расчет точечных оценок генеральной средней
2. Расчет точечных оценок генеральной дисперсии генеральной совокупности

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Вступительная часть

На сегодняшнем практическом занятии Вам предлагается выполнить практические задания, связанные с определением точечных оценок числовых характеристик генеральной совокупности.

Проверка готовности студентов к занятию:

1. Что такое генеральная совокупность, выборка, выбор?
2. Сформулируйте определение простого случайного выбора.
3. Какие виды реальных выборов вы знаете?
4. Какая выборка называется репрезентативной, однородной?
5. Что такое вариационный, статистический ряд?
6. Дайте определение крайних элементов вариационного ряда, размаха, медианы, квартилей.
7. Что такое полигон частот?
8. Дайте определение выборочной функции распределения.
9. Что такое оценка генеральной числовой характеристики?

1. Расчет точечных оценок генеральной средней

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n=50:

элементы	x_i	2	5	7	10
частота	n_i	16	12	8	14

Найти несмещенную оценку генеральной средней. Является ли медиана несмещенной оценкой? Почему?

2. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n=60:

элементы	x_i	1	3	6	26
частота	n_i	8	40	10	2

Найти несмещенную оценку генеральной средней. Является ли полусумма интерквартильной широты несмещенной оценкой?

3. Найти выборочное среднее по данному распределению выборки объема n=10, воспользовавшись переходом к условным вариантам:

элементы	x_i	1250	1270	1280
частота	n_i	2	5	3

4. Найти выборочное среднее по данному распределению выборки объема n=20, воспользовавшись переходом к условным вариантам:

элементы	x_i	2560	2600	2620	2650	2700
частота	n_i	2	3	10	4	1

5. Имеется случайная выборка (X_1,... X_5) объема n=5 из генеральной совокупности X, распределенная по показательному закону:

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, \ x\geq 0;\\ 0, \ x<0.\end{cases}$$

В качестве точечной оценки математического ожидания взято среднее арифметическое крайних членов вариационного ряда. Является ли оценка смещенной?

2. Расчет точечных оценок генеральной дисперсии генеральной совокупности

1. По выборке объема n=41 найдена смещенная оценка равная 3 генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

2. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106. Найти: а) выборочную длину стержня; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

3. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n=10:

элементы	x_i	186	192	194
частота	n_i	2	5	3

4. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n=10, воспользовавшись переходом к условным вариантам:

элементы	x_i	0,01	0,04	0,08
частота	n_i	5	3	2

5. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n=50, воспользовавшись переходом к условным вариантам:

элементы	x_i	18,4	18,9	19,3	19,6
частота	n_i	5	10	20	15

6. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n=10, воспользовавшись переходом к условным вариантам:

элементы	x_i	23,5	26,1	28,2	30,4
частота	n_i	2	3	4	1

Отчетность за занятие

Результаты работы должны быть отражены в рабочей тетради и защищены устно каждым студентом. При подготовке к защите основное внимание уделить пониманию физического смысла каждого пункта задания и обоснованию полученных результатов.

Заключение

Проводится собеседование по результатам работы с каждым студентом. Студентам, успешно завершившим расчет всех практических заданий, выставляется оценка.

Раздел 3. КТ 3. Оценки статистических числовых характеристик и параметров

Занятие 9. Получение оценок параметров генерального распределения методами моментов и максимального правдоподобия

Учебные вопросы занятия:

1. Получение оценок параметров генерального распределения методом моментов
2. Получение оценок параметров генерального распределения методом максимального правдоподобия

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Вступительная часть

На сегодняшнем практическом занятии Вам предлагается выполнить практические задания, связанные с определением точечных оценок числовых характеристик генеральной совокупности.

Проверка готовности студентов к занятию:

1. Что такое генеральная совокупность, выборка, выбор?
2. Сформулируйте определение простого случайного выбора.
3. Какие виды реальных выборов вы знаете?
4. Какая выборка называется репрезентативной, однородной?
5. Что такое вариационный, статистический ряд?
6. Дайте определение крайних элементов вариационного ряда, размаха, медианы, квартилей.
7. Что такое полигон частот?
8. Дайте определение выборочной функции распределения.
9. Что такое оценка генеральной числовой характеристики?
10. Какая оценка называется состоятельной, несмещенной, робастной, эффективной.

1. Получение оценок параметров генерального распределения методом моментов

1. Случайная величина X имеет распределение Пуассона.

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0,1...$$

где λ – неизвестный параметр. В результате независимых наблюдений получена случайная выборка $(X_1,...X_n)$. Найти методом моментов точечную оценку $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ параметра λ и убедиться, что эта оценка является несмещенной и состоятельной.

2. Пусть дана случайная выборка $(X_1,...X_n)$ объема n из генеральной совокупности X, имеющей равномерный закон распределения

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in (a,b) \\ 0, x \notin (a,b) \end{cases}$$

с неизвестными параметрами a и b. Найти методом моментов точечные оценки этих параметров.

2. Получение оценок параметров генерального распределения методом максимального правдоподобия

1. Пусть дана случайная выборка $(X_1,...X_n)$объема n из генеральной совокупности X, распределенной по биномиальному закону

$$P_k(j) = C_k^j \theta^j (1-\theta)^{k-j}, \quad j = \overline{0,k}$$

с неизвестным параметром θ (вероятностью появления события в одном испытании). Методом максимального правдоподобия найти точечную оценку параметра θ.

2. Методом максимального правдоподобия по случайной выборке $(X_1,...X_n)$ найти оценку параметра α в распределения Парето$(\theta > 0, \alpha > 0)$:

$$p(x;\theta) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\alpha+1} & x \geq 0; \\ o, x < 0; \end{cases}$$

Отчетность за занятие

Результаты работы должны быть отражены в рабочей тетради и защищены устно каждым студентом. При подготовке к защите основное внимание уделить пониманию физического смысла каждого пункта задания и обоснованию полученных результатов.

Заключение

Проводится собеседование по результатам работы с каждым студентом. Студентам, успешно завершившим расчет всех практических заданий выставляется оценка.

Занятие 10. Интервальное оценивание числовых характеристик

Учебные вопросы занятия:

1. Построение доверительного интервала для выборочной средней нормальной генеральной совокупности
2. Оценка доверительного интервала для математического ожидания

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Вступительная часть

На сегодняшнем практическом занятии Вам предлагается выполнить практические задания, связанные с определением точечных оценок числовых характеристик генеральной совокупности.

Проверка готовности студентов к занятию:

1. Дайте определение доверительного интервала.
2. Что такое точность и надежность оценки?
3. Как определяется точность и надежность оценки вероятности события по относительной частоте?

4.Постройте доверительный интервал для математического ожидания m нормальной генеральной совокупности

5.Постройте доверительный интервал для математического ожидания m любой генеральной совокупности при большом объёме выборки.

6.Найдите квантили распределения Стьюдента (по таблице III) порядка 0.9 и 0.99 с 10 степенями свободы.

1. Построение доверительного интервала для выборочной средней нормальной генеральной совокупности

1. При помощи вольтметра, точность которого характеризуется средним квадратичным отклонением 0,2В, проведено 10 измерений напряжения бортовой батареи. Найти доверительный интервал для истинного значения батареи с коэффициентом γ=0,95, если среднее арифметическое результатов наблюдений $\bar{x}$=50,2В. Контролируемый признак имеет нормальное распределение.

2. Из большой партии электроламп было отобрано случайным образом 400 шт. для определения средней продолжительности горения. Выборочная средняя продолжительность горения ламп оказалась равной 1220 час. Найти с коэффициентом доверия γ=0,997 доверительный интервал для средней продолжительности горения электролампы по всей партии, если среднее квадратичное отклонение продолжительности горения равно 35 ч.

2. Оценка доверительного интервала для математического ожидания

1. В результате пусков 10 ракет получены (в условных единицах) значения боковых отклонений точек попадания от точек прицеливания (см. табл.)

Номер ракеты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отклонение	1,0	2,0	1,0	-0,1	-0,5	5,0	-1,0	3,0	0,5	1,0

Полагая, что случайная величина X (случайное боковое отклонение точек попадания от точек прицеливания) имеет нормальное распределение. Построить доверительный интервал для её математического ожидания с коэффициентом доверия $\gamma = 0{,}99$.

Отчетность за занятие

Результаты работы должны быть отражены в рабочей тетради и защищены устно каждым студентом. При подготовке к защите основное внимание уделить пониманию физического смысла каждого пункта задания и обоснованию полученных результатов.

Заключение

Проводится собеседование по результатам работы с каждым студентом. Студентам, успешно завершившим расчет всех практических заданий, выставляется оценка.

Занятие 11. Методы расчета сводных характеристик выборки

Учебные вопросы занятия:

1. Вычисление выборочного среднего и выборочной дисперсии методом произведений
2. Вычисление выборочного среднего и выборочной дисперсии методом сумм

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Вступительная часть

На сегодняшнем практическом занятии Вам предлагается выполнить практические задания, связанные с вычислением выборочного среднего и выборочной дисперсии методами произведений и сумм.

Проверка готовности студентов к занятию:

1. Дайте определение доверительного интервала.
2. Что такое точность и надежность оценки?
3. Как определяется точность и надежность оценки вероятности события по относительной частоте?
4. Постройте доверительный интервал для математического ожидания m нормальной генеральной совокупности
5. Постройте доверительный интервал для математического ожидания m любой генеральной совокупности при большом объёме выборки.
6. Найдите квантили распределения Стьюдента (по таблице III) порядка 0.9 и 0.99 с 10 степенями свободы.

Основные теоретические сведения

1. Вычисление выборочного среднего и выборочной дисперсии методом произведений

А. Равноотстоящие варианты.

Пусть задана выборка в виде распределения равноотстоящих элементов (вариант) и соответствующих им частот. В этом случае удобно находить выборочные среднее и дисперсию методом произведений по формулам

$$\bar{x}_в = M_1^* h + C, \quad D_в = \left[M_2^* - (M_1^*)^2\right] h^2,$$

где h - шаг (разность между соседними элементами); C − ложный нуль (элемент, который расположен примерно в середине вариационного ряда); $u_i = (x_i - C)/h$ – условная варианта; $M_1^* = \left(\sum n_i u_i\right)/n$ − условный момент первого порядка; $M_2^* = (\sum n_i u_i^2)/n$ − условный момент второго порядка.

Пример.

Пусть требуется найти методом произведений выборочное среднее и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема *n=100*:

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

Решение.

Составим расчетную таблицу 1, для этого:

1) запишем варианты в первый столбец;

2) запишем частоты во второй столбец; сумму частот (100) поместим в нижнюю клетку столбца;

3) в качестве ложного нуля С выберем элемент (16), который имеет наибольшую частоту (в качестве С можно взять любой элемент, расположенный примерно в середине столбца); в клетке третьего столбца, которая принадлежит строке, содержащей ложный нуль, пишем 0; над нулем последовательно записываем -1, -2, а под нулем 1; 2; 3;

4) произведения частот n_i на условные элементы u_i запишем в четвертый столбец; отдельно находим сумму (-25) отрицательных чисел и отдельно сумму (48) положительных чисел; сложив эти числа, их сумму (23) помещаем в нижнюю клетку четвертого столбца;

5) произведения частот на квадраты условных элементов, т.е. $n_i u_i^2$, запишем в пятый столбец (удобнее перемножить числа каждой строки третьего и четвертого столбцов); сумму чисел столбца (127) помещаем в нижнюю клетку пятого столбца;

6) произведения частот на квадраты условных элементов, увеличенных на единицу, т.е. $n_i(u_i+1)^2$, запишем в шестой контрольный столбец; сумму числе столбца (273) помещаем в нижнюю клетку шестого столбца. В итоге получим расчетную таблицу 1.

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$,
12	5	-2	-10	20	5
14	15	-1	-15	15	-
16	50	0	-25	-	50
18	16	1	16	16	64
20	10	2	20	40	90
22	4	3	12	36	64
			48		
	n=100		$\sum n_i u_i = 23$	$\sum n_i u_i^2 = 127$	$\sum n_i(u_i+1)^2 = 273$

Для контроля вычислений пользуются тождеством

$$\sum n_i(u_i+1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n$$

Контроль:

$\sum n_i(u_i+1)^2 = 273$. $\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n = 127 + 2\cdot 23 + 100 = 273$.

Совпадение контрольных сумм свидетельствует о правильности вычислений. Вычислим условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1^* = (\sum n_i u_i)/n = 23/100 = 0.23; \quad M_2^*(n_i u_i^2)/n = 127/100 = 1.27.$$

Найдем шаг (разность между любыми двумя соседними элементами): $h = 14 - 12 = 2$. Вычислим искомые выборочные среднее и дисперсию, учитывая, что ложный нуль, (элемент, который имеет наибольшую частоту) *C=16*.

$$\bar{x}_в = M_1^* h + C = 0.23 \cdot 2 + 16 = 16.48;$$
$$D_в = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2 = [1.27 - 0.23^2] \cdot 2^2 = 4.87$$

Б. Неравноотстоящие варианты.

Если первоначальные элементы не являются равноотстоящими, то интервал, в котором заключены все элементы выборки, делят на несколько равных, длины h, частичных интервалов (каждый частичный интервал должен содержать не менее 8-10 элементов). Затем находят середины частичных интервалов, которые и образуют последовательность равноотстоящих элементов. В качестве частоты каждой середины интервала принимают сумму частот элементов, которые попали в соответствующий частичный интервал.

При вычислении выборочной дисперсии для уменьшения ошибки, вызванной группировкой (особенно при малом числе интервалов), делают поправку Шеппарда, а именно вычитают из вычисленной дисперсии 1/12 квадрата длины частичного интервала.

Таким образом, с учетом поправки Шеппарда дисперсию вычисляют по формуле

$$D'_B = D_B - (1/12)h^2.$$

Пример.

Требуется найти методом произведений выборочное среднее и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема $n = 100$:

x_i	2	3	7	9	11	12,5	16	18	23	25	26
n_i	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9

Решение.

Разобьем интервал 2-26 на следующие четыре частичных интервала длины h=6: 2-8; 8-14; 14-20; 20-26. Приняв середины частичных интервалов в качестве новых элементов y_i, получим равноотстоящие элементы: $y_1 = 5,\quad y_2 = 11,\quad y_3 = 17,\quad y_4 = 23$. В качестве частоты n_1 элемента $y_1 = 5$, примем сумму частот элементов, попавших в первый интервал: $n_1 = 3 + 5 + 10 = 18$.

Вычислив аналогично частоты остальных элементов, получим распределение равноотстоящих элементов:

y_i	5	11	17	23
n_i	18	20	25	37

Пользуясь методом произведений, найдем $\bar{y}_в = 15{,}86$, $D_B = 45{,}14$.

Принимая во внимание, что число частичных интервалов (4) мало, учтем поправку Шеппарда $D'_B = D_B - (1/12)h^2 = 45.14 - 6^2/12 = 42.14$.

2. Вычисление выборочного среднего и выборочной дисперсии методом сумм

Пусть задана выборка в виде распределения равноотстоящих элементов (вариант) и соответствующих им частот. В этом случае, как было показано выше, выборочные среднее и дисперсию можно вычислить по формулам

$$\bar{x}_в = M_1^* h + C, \quad D_в = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2.$$

При использовании метода сумм условные моменты первого и второго порядков находят по формулам:

$$M_1^* = d_1/n, \quad M_2^* = (s_1 + 2s_2)/n,$$

где $d_1 = a_1 - b_1$, $s_1 = a_1 + b_1$, $s_2 = a_2 + b_2$. Таким образом, в конечном счете надо вычислить числа $a_1, b_1 \quad a_2, b_2$.

<u>Пример.</u>

Пусть требуется найти методом сумм выборочное среднее и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема $n = 100$:

x_i	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84
n_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

<u>Решение.</u>

Составим расчетную таблицу 2, для этого:

1) запишем элементы в первый столбец;
2) запишем частоты во второй столбец;
3) сумму частот (100) поместим в нижнюю клетку столбца;
4) в качестве ложного нуля C выберем элемент (68), который имеет наибольшую частоту (в качестве C можно взять любой элемент, расположенный примерно в середине столбца); в клетках строки, содержащей ложный нуль, запишем нули; в четвертом столбце над и под уже помещенным нулем запишем еще по одному нулю;
5) в оставшихся незаполненными над нулем клетках третьего столбца (исключая самую верхнюю) запишем последовательно накопленные частоты: 2; 2+4=6; 6+6=12; 12+8=20; 20+12=32; сложив все накопленные частоты, получим число $b_1 = 72$, которое поместим в верхнюю клетку третьего столбца. В оставшихся незаполненными под нулем клетках третьего столбца (исключая самую нижнюю) запишем последовательно накопленные частоты: 5; 5+7=12; 12+8=20; 20+18=38; сложив все накопленные частоты, получим число $a_1 = 75$, которое поместим в нижнюю клетку третьего столбца;
6) аналогично заполняется четвертый столбец, причем суммируют частоты третьего столбца; сложив все накопленные частоты, расположенные над нулем, получим число $b_2 = 70$, которое поместим в верхнюю клетку

четвертого столбца; сумма накопленных частот, расположенных под нулем равна числу a_2, которое поместим в нижнюю клетку четвертого столбца.

В итоге получим расчетную таблицу 2.

Найдем $d_1,\ s_1,\ s_2$:

$$d_1 = a_1 - b_1 = 75 - 72 = 3;\ s_1 = a_1 + b_1 = 75 + 72 = 147,\ s_2 = a_2 + b_2 = 59 + 70 = 129.$$

1	2	3	4
x_i	n_i	$b_1 = 72$	$b_2 = 70$
48	2	2	2
52	4	6	8
56	6	12	20
60	8	20	40
64	12	32	0
68	30	0	0
72	18	38	0
76	8	20	37
80	7	12	17
84	5	5	5
	$n = 100$	$a_1 = 75$	$a_2 = 59$

Найдем условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1^* = d_1 / n = 3/100 = 0.03,\ M_2^* = (s_1 + 2s_2)/n = (147 + 2\cdot 129)/100 = 4.05.$$

Вычислим искомые выборочное среднее и выборочную дисперсию, учитывая, что шаг $h = 4$ и ложный нуль $C = 68$:

$$\bar{x}_в = M_1^* h + C = 0.03\cdot 4 + 68 = 68.12;\ D_в = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2 = [4.05 - 0.03^2]\cdot 4^2 = 64.78.$$

Практическая часть

1. Вычисление выборочного среднего и выборочной дисперсии методом произведений

1. Найти методом произведений выборочное среднее и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки:

а)

x_i	18,6	19,0	19,4	19,8	20,2	20,6
n_i	4	6	30	40	18	2

б)

x_i	65	70	75	80	8
n_i	2	5	25	15	3

2. При вычислении дисперсии распределения неравноотстоящих элементов выборка была разбита на интервалов длины $h = 12$. Выборочная дисперсия равноотстоящих элементов $D_в = 52{,}4$. Найти выборочную дисперсию, учитывая поправку Шеппарда.

3. Найти методом произведений выборочное среднее и выборочную дисперсию по заданному распределению неравноотстоящих элементов выборки объема $n = 50$:

x_i	6	8	11	13	13,5	17,5	20	23,5	24,5	26
n_i	1	9	6	6	4	6	8	5	4	1

Найти выборочную дисперсию с учетом поправки Шеппарда. (разбить интервал 6-26 на пять частичных интервалов длины $h = 4$).

4. Найти методом произведений выборочное среднее и выборочную дисперсию по заданному распределению неравноотстоящих элементов выборки объема $n = 100$:

x_i	10	13	15	17	19	23	24	26	28	32	34	35
n_i	2	4	6	8	9	6	20	15	10	8	7	5

Найти выборочную дисперсию с учетом поправки Шеппарда. (разбить интервал 10-35 на пять частичных интервалов длины $h = 5$. Частоту элемента $x = 15$, т.е. частоту 6, распределить поровну между первым и вторым частичными интервалами).

2. Вычисление выборочного среднего и выборочной дисперсии методом сумм

1. Найти методом сумм выборочное среднее и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема $n = 100$:

а)

x_i	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
n_i	4	6	8	15	25	20	8	7	5	2

б)

x_i	122	128	134	140	146	152	158	164	170	176
n_i	7	8	12	16	4	20	13	10	7	3

в)

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

г)

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Отчетность за занятие

Результаты работы должны быть отражены в рабочей тетради и защищены устно каждым студентом. При подготовке к защите основное внимание уделить пониманию физического смысла каждого пункта задания и обоснованию полученных результатов.

Заключение

Проводится собеседование по результатам работы с каждым студентом. Студентам, успешно завершившим расчет всех практических заданий, выставляется оценка.

Занятие 12. Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения

Учебные вопросы занятия:

1. Вычисление коэффициента асимметрии и коэффициента эксцесса методом произведений
2. Вычисление коэффициента асимметрии и коэффициента эксцесса методом сумм

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Вступительная часть

На сегодняшнем практическом занятии Вам предлагается выполнить практические задания, связанные с вычислением выборочного среднего и выборочной дисперсии методами произведений и сумм

Проверка готовности студентов к занятию:

1. Дайте определение доверительного интервала.
2. Что такое точность и надежность оценки?
3. Как определяется точность и надежность оценки вероятности события по относительной частоте?
4. Постройте доверительный интервал для математического ожидания m нормальной генеральной совокупности
5. Постройте доверительный интервал для математического ожидания m любой генеральной совокупности при большом объёме выборки.
6. Найдите квантили распределения Стьюдента (по таблице III) порядка 0.9 и 0.99 с 10 степенями свободы.

Основные теоретические сведения

Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения

Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения определяются соответственно равенствами:

$$a_s = m_3 / \sigma_в^3, \quad e_k = m_4 / \sigma_в^4 - 3\,;$$

где σ_B - выборочное среднее квадратическое отклонение; m_3 и m_4 - центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков:

$$m_3 = \left(\sum n_i (x_i - \bar{x}_e)^3\right)/n, \quad m_4 = \left(\sum n_i (x_i - \bar{x}_e)^4\right)/n.$$

Эти моменты в случае равноотстоящих элементов выборки с шагом h удобно вычислять по формулам:

$$m_3 = \left[M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2(M_1^*)^3\right]h^3,$$

$$m_4 = \left[M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6(M_1^*)^2 M_2^* - 3(M_1^*)^4\right]h^4,$$

где $M_k^* = (\sum n_i u_i^{\,k})/n$ - условные моменты k-то порядка; $u_i = (x_i - C)/h$ - условные элементы выборки. Здесь x_i - первоначальные элементы; C - ложный нуль, т.е.

элемент имеющий наибольшую частоту, либо расположенный примерно в середине вариационного ряда.

Итак, для отыскания коэффициента асимметрии и коэффициента эксцесса необходимо вычислить условные моменты, что можно сделать методом произведений или методом сумм.

1. Вычисление коэффициента асимметрии и коэффициента эксцесса методом произведений

Пусть требуется найти методом произведений асимметрию и эксцесс по заданному распределению выборки объема n=100:

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

Решение.

Составим расчетную таблицу 1, для этого:

1. Заполним столбцы 1-5 расчетной таблицы согласно примерам предыдущего занятия;
2. Для заполнения столбца 6 перемножим числа каждой строки столбцов 3 и 5;
3. Для заполнения столбца 7 перемножим числа каждой строки столбцов 3 и 6;
4. Столбец 8 служит для контроля вычислений с помощью тождества:

$$\sum n_i(u_i+1)^4=\sum n_iu_i^4+4\sum n_iu_i^3+6\sum n_iu_i^2+4\sum n_iu_i+n$$

таблица 1.

1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_iu_i^3$	$n_iu_i^4$	$n_i(u_i+1)^4$
12	5	-2	-10	20	-40	80	5
14	15	-1	-15	15	-15	15	-
16	50	0	-25	-	-55	-	50
18	16	1	16	16	16	16	64
20	10	2	20	40	80	160	90
22	4	3	12	36	108	324	64
			48		204		
	n=100		$\sum n_iu_i=23$	$\sum n_iu_i^2=127$	$\sum n_iu_i^3=149$	$\sum n_iu_i^4=595$	$\sum n_i(u_i+1)^4=2145$

Совпадение контрольных сумм свидетельствует о правильности вычислений. Вычислим условные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков:

$$M_1^*=(\sum n_iu_i)/n=23/100=0.23;\ \ M_2^*=(\sum n_iu_i^2)/n=127/100=1.27;$$

$$M_3^*=(\sum n_iu_i^3)/n=1.49;\ \ M_4^*=(\sum n_iu_i^4)/n=5.95.$$

Найдем центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков:

$$m_3=\left[M_3^*-3M_1^*M_2^*+2(M_1^*)^3\right]h^3=5.104;$$

$$m_4=\left[M_4^*-4M_1^*M_3^*+6(M_1^*)^2M_2^*-3(M_1^*)^4\right]h^4=79.582.$$

Учитывая, что $D_e=\left[M_2^*-(M_1^*)^2\right]h^2=[1.27-0.23^2]\cdot 2^2=4.87$, вычислим искомые асимметрию и эксцесс:

$$a_s=m_3/\sigma_e^3=0.47;\quad e_k=m_4/\sigma_e^4-3=0.36\,.$$

2. Вычисление коэффициента асимметрии и коэффициента эксцесса методом сумм

Пусть требуется найти методом сумм асимметрию и эксцесс по заданному распределению выборки объема n=100:

x_i	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84
n_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

Решение.

Составим расчетную таблицу 2, для этого:

1. Заполним столбцы 1-4 расчетной таблицы согласно примера предыдущего занятия;

2. Для заполнения столбца 5 запишем нуль в клетке строки, содержащей ложный нуль (68); над этим нулем и под ним поставим еще по два нуля;

1. В клетках над нулями запишем накопленные частоты, для чего просуммируем частоты столбца 4 сверху вниз; в итоге будем иметь следующие накопленные частоты: 2; 2+8=10; 2+8+20=30. Сложив накопленные частоты, получим число b_3=2+10+30=42, которое поместим в верхнюю клетку пятого столбца;

4. В клетках под нулями запишем накопленные частоты, для чего просуммируем частоты столбца 4 снизу вверх; в итоге; в итоге будем иметь следующие накопленные частоты: 5; 5+17=22. Сложив накопленные частоты, получим число a_3=5+22=27, которое поместим в нижнюю клетку пятого столбца;

5. Аналогично заполним столбец 6, причем будем суммировать частоты столбца

6. Сложив накопленные частоты, расположенные над нулями, получим число b_4=2+12=14, которое запишем в верхнюю клетку шестого столбца;

7. Сложив числа, расположенные под нулями, получим число a_4=5, которое поместим в нижнюю клетку шестого столбца.

В итоге получим расчетную **таблицу 2**.

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	$b_1 = 72$	$b_2 = 70$	$b_3 = 42$	$b_4 = 14$
48	2	2	2	2	2
52	4	6	8	10	12
56	6	12	20	30	0
160	8	20	40	0	0
64	12	32	0	0	0
68	30	0	0	0	0
72	18	38	0	0	0
76	8	20	37	0	0
80	7	12	17	22	0
84	5	5	5	5	5
	n=100	a_1=75	a_2=59	a_3=27	a_4=5

Контроль: сумма чисел, расположенных непосредственно над нулем третьего столбца, слева от него и под ним, должна быть равна объему выборки

(32+30+38=100). Сумма двух чисел, расположенных над двумя ступеньками ступенчатой линии (обведены жирными отрезками), должна быть равна соответственно числам b_i, стоящим над предшествующей ступенькой (при движении по «лесенке» вверх): 32+40=72=b_1; 40+30=70=b_2; 30+12=42=b_3. Аналогично проверяется совпадение сумм двух чисел, стоящих под «ступеньками лесенки», ведущей вниз: 38+37=75=a_1; 37+22=59=a_2, 22+5=27=a_3. При несовпадении хотя бы одной из указанных сумм следует искать ошибку в расчете.

Найдем $d_i\,(i=1,2,3)$ и $s_i\,(i=1,2,3,4)$:

$$d_1 = a_1 - b_1 = 75 - 72 = 3;\ d_2 = a_2 - b_2 = 59 - 70 = -11;\ d_3 = a_3 - b_3 = 27 - 42 = -15;$$

$$s_1 = a_1 + b_1 = 75 + 72 = 147;\ s_2 = a_2 + b_2 = 59 + 70 = 129;\ s_3 = a_3 + b_3 = 27 + 42 = 69;$$

$$s_4 = a_4 + b_4 = 5 + 14 = 19;$$

Найдем условные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков:

$$M_1^* = d_1 / n = 0.03;\ M_2^* = (s_1 + 2s_2)/n = 4.05;$$

$$M_3^* = (d_1 + 6d_2 + 6d_3)/n = -1.53;\ M_4^* = (s_1 + 14s_2 + 36s_3 + 24s_4 / n = 48.93;$$

Найдем центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков:

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2(M_1^*)^3]h^4 = -121.245;$$

$$m_4 = [M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6(M_1^*)^2 M_2^* - 3(M_1^*)]h^4 = 12578.679.$$

Учитывая, что $D_e = \left[M_2^* - (M_1^*)^2\right]h^2 = 64.78$ и $\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{64.78}$, вычислим искомые асимметрию и эксцесс:

$$a_s = m_3 / \sigma_e^3 = -0.25;\ \ e_k = m_4 / \sigma_e^4 - 3 = 26.97\,.$$

Практическая часть

1. Вычисление коэффициента асимметрии и коэффициента эксцесса методом произведений

1. Найти методом произведений асимметрию и эксцесс по заданному распределению выборки объема n=100:

а)

x_i	2,6	3,0	3,4	3,8	4,2
n_i	8	20	45	15	12

б)

x_i	1	6	11	16	21
n_i	5	25	40	20	10

2. Вычисление коэффициента асимметрии и коэффициента эксцесса методом сумм

1. Найти методом сумм асимметрию и эксцесс по заданному распределению выборки объема n=100:

а)

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

б)

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	2	15	50	16	10	4

Отчетность за занятие

Результаты работы должны быть отражены в рабочей тетради и защищены устно каждым студентом. При подготовке к защите основное внимание уделить пониманию физического смысла каждого пункта задания и обоснованию полученных результатов.

Заключение

Проводится собеседование по результатам работы с каждым студентом. Студентам, успешно завершившим расчет всех практических заданий, выставляется оценка.

Приложения. Таблицы квантилей

Таблица 1. Квантили u_p нормального распределения $N(0,1)$

p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
u_ν	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Таблица 2. Квантили $t_p(k)$ распределения Стьюдента $T(k)$, k- число степеней свободы распределения; p – порядок квантилей.

$$f_T(x) = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)(\pi k)^{-1/2}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-(k+2)/2}$$

p	**0,750**	**0,900**	**0,950**	**0,975**	**0,990**	**0,995**	**0,999**
n							
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,3
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,2
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090