S T Q Q S S D ___/___/___

③ Temos o seguinte problema transiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em} \quad (x,t) \in [0,2] \times [0,1.25]$$

$$u(0,t) = \alpha_1(t)$$
$$u(2,t) = \alpha_2(t)$$
$$u(x,0) = \varphi(x)$$

Formulação Variacional com Euler Implícito no Tempo

Para simplificar a obtenção da forma variacional do problema, vamos reescrevê-lo como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

A função u é desconhecida, e é uma função tanto do tempo quanto de espaço.

Primeiramente, multiplicamos ambos os lados por uma função de peso "w":

$$w\frac{\partial u}{\partial t} + wk\frac{\partial u}{\partial x} - w\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = wf$$

Após isso, integra-se por partes o termo difusivo, obtendo:

$$\int_{\Omega}\left(w\frac{\partial u}{\partial t} + wk\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx = \int_{\Omega^e} wf\,dx + T.C.$$

Onde T.C. significa o termo da integral no contorno.

Buscamos uma solução aproximada, no elemento, que segue a segue a equação

$$u^e(x,t) = \sum_{j=1}^{NEN} u_j(t) \cdot S_j(x)$$

onde, para evitar confusões com a condição inicial, $S_j(x)$ denota a função de forma que é dependente apenas do espaço, enquanto a dependência da solução com o tempo é associada apenas as variáveis nodais $(u_j(t))$.

Substituindo essa equação na equação da forma fraca, obtém-se

$$\int_{\Omega^e} \left[w \left(\sum \frac{du_j}{dt} S_j \right) + wk \left(\sum u_j \frac{dS_j}{dx} \right) + \varepsilon \frac{dw}{dx} \left(\sum u_j \frac{dS_j}{dx} \right) \right] dx =$$

$$= \int_{\Omega^e} wf \, dx + T.C.$$

Usando $w = S_i(x)$, tem-se a i-ésima equação do sistema elemental como

$$\int_{\Omega^e} \left[S_i \left(\sum \frac{du_j}{dt} S_j \right) + S_i k \left(\sum u_j \frac{dS_j}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{dS_i}{dx} \left(\sum u_j \frac{dS_j}{dx} \right) \right] dx =$$

$$= \int_{\Omega^e} S_i f \, dx + T.C.$$

Usando propriedades de integrais, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{NEN}\left[\int_{\Omega^e} S_i S_j \, dx\right]\cdot\frac{dM_j}{dt}+\sum_{j=1}^{NEN}\left[\int_{\Omega^e}\left(S_i\,\kappa\,\frac{dS_j}{dx}+\varepsilon\,\frac{dS_i}{dx}\frac{dS_j}{dx}\right)dx\right]u_j=$$

$$=\int_{\Omega^e} S_i f \, dx + T.C.$$

Fazendo as seguintes notações:

$$M^e=\int_{\Omega^e} S_i S_j \, dx \qquad \dot{U}^e=\frac{dM_j}{dt}$$

$$K^e=\int_{\Omega^e}\left(S_i\,\kappa\,\frac{dS_j}{dx}+\varepsilon\,\frac{dS_j}{dx}\frac{dS_i}{dx}\right)dx \qquad F^e=\int_{\Omega^e} S_i f \, dx + T.C.$$

chega-se na equação compacta:

$$[M^e]\{\dot{U}^e\}+[K^e]\{U^e\}=\{F^e\}$$

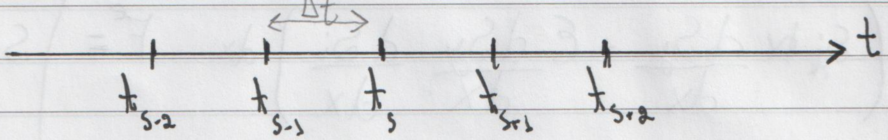
Onde $\{U^e\}$ é o vetor de variáveis nodais desconhecidas, $\{\dot{U}\}$ denota as derivadas em relação ao tempo das variáveis nodais desconhecidas e $[M^e]$, $[K^e]$ e $\{F^e\}$ são a matriz elemental de massa, a matriz elemental de rigidez e o vetor elemental de força.

Juntando os sistemas elementais em um sistema global, obtemos:

$$[M]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}$$

Discretização temporal

A equação global obtida inclui variáveis nodais e suas derivadas no tempo. Assim, passa a ser agora um sistema de EDOs. Para discretizar no tempo introduz-se o seguinte domínio discreto temporal, onde o subscrito "s" denota os níveis de tempo.



Solução em t_s é dada e chamada de condição inicial, e com seu auxílio obtém-se a solução em cada um dos outros níveis do tempo. Durante qualquer nível de tempo t_s denota o tempo atual, e t_{s+1} é o próximo nível de tempo a ser determinado.

No Euler Implícito, tem-se que o termo temporal será discretizado como:

$$\{\dot{U}\}_{s+1} = \frac{\{U\}_{s+1} - \{U\}_s}{\Delta t} + O(h^2)$$

Substituindo no sistema global, obtêm-se:

$$[M]\frac{\{U\}_{s+1}-\{U\}_{s}}{\Delta t}+[K]_{s+1}\{U\}_{s+1}=\{F\}_{s+1}$$

onde $\{U\}_{s+1}$ pode ser resolvido como

$$\{U\}_{s+1}=\left([M]+\Delta t[K]_{s+1}\right)^{-1}\left([M]\{U\}_{s}+\Delta t\{F\}_{s+1}\right)$$