1. Seja o problema forte:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= g \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_D \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= h \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_N \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ e $\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \emptyset$.

a) Reescreva o problema forte (1) em uma dimensão supondo $\Omega = [0, 1.5]$ e determine os parâmetros f, g e h sabendo que a solução exata é dada por $u = \sin(\pi x)$, $\partial\Omega_N = 0$ e $\partial\Omega_D = 1.5$.

b) Apresente uma formulação variacional para o problema do item anterior e os espaços $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$.

c) Utilizando a formulação do item (b), apresente gráficos comparando a solução exata com a aproximado para diferentes refinamentos de malha.

d) Utilizando a formulação do item (b), apresente um gráfico da taxa de convergência comparando o erro entre a solução exata e a aproximada para malhas formadas por 4^i elementos, com $i = 2, 3, 4, 5$, e comprove numericamente a taxa de convergência $O(h^{k+1})$ na norma $L^2(\Omega)$ para $k = 2, 3, 4$.

e) Repita o item (d), porém calcule o erro entre a derivada da solução exata e da aproximada e comprove numericamente a taxa de convergência $O(h^k)$ na norma $L^2(\Omega)$ para $k = 2, 3, 4$.

2. Seja o problema com coeficientes variáveis

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + x^2 u = x^5 - x^3 - 8x^2 + 1,$$

sujeito as condições

$$\begin{aligned} u(0) &= 1 \\ 2\frac{du}{dx}(1) + u(1) &= 5 \end{aligned}$$

cuja solução exata é dada por

$$u(x) = x^3 - x + 1.$$

Neste contexto:

a) apresente a formulação fraca do problema.

b) apresente gráficos comparando as soluções exata e aproximada.

c) faça um estudo de convergência para diferentes graus polinomiais e comente os resultados.

3. Seja o problema de difusão-reação:

$$-\varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + u = 1, \quad x \in \Omega = [0,1] \tag{2}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{3}$$

A solução exata para o problema (2)-(3) é

$$u(x) = c_1 e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + c_2 e^{\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + 1 \tag{4}$$

onde $c_1 = -1 - c_2$ e $c_2 = \dfrac{e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - 1}{e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}}$.

A partir de uma aproximação do problema (2)-(3) pelo método de elementos finitos, faça:

a) Compare a solução exata e a aproximado para:
   - $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;
   - $\varepsilon = 10^{-4}$ com 16 e 32 elementos;

   utilizando polinômios de primeira ordem ($k = 1$).

b) Realizando uma análise da discretização gerada pelo método de elementos finitos do item (a) obtém-se a seguinte relação de estabilidade $h < \sqrt{6\varepsilon}$. Valide graficamente esta relação para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\varepsilon = 10^{-4}$.

c) Repita o item (a) utilizando polinômios de ordem $k = 2, 3, 4$.

d) Apresente um gráfico da taxa de convergência comparando o erro entre a solução exata e a aproximada tomando $\varepsilon = 10^{-3}$ para malhas formadas por 4^i elementos, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$, utilizando a norma L^2 para aproximações por elementos finitos de ordem $k = 1, 2, 3, 4$ (apresente todos os resultados no mesmo gráfico).

e) Usando a base exponencial

$$\phi_1^{PG} = -\frac{e^{(x-x_2^e)/\sqrt{\varepsilon}} - e^{(x_2^e-x)/\sqrt{\varepsilon}}}{e^{(x_2^e-x_1^e)/\sqrt{\varepsilon}} - e^{(x_1^e-x_2^e)/\sqrt{\varepsilon}}}, \quad \forall x \in [x_1^e, x_2^e]$$

$$\phi_2^{PG} = \frac{e^{(x-x_1^e)/\sqrt{\varepsilon}} - e^{(x_1^e-x)/\sqrt{\varepsilon}}}{e^{(x_2^e-x_1^e)/\sqrt{\varepsilon}} - e^{(x_1^e-x_2^e)/\sqrt{\varepsilon}}}, \quad \forall x \in [x_1^e, x_2^e]$$

$$\phi_i^{PG} = 0, \quad i = 1, 2 \quad \forall x \notin [x_1^e, x_2^e]$$

   refaça o item (a) e apresente um gráfico com a taxa de convergência neste caso.
   (**Sugestão:** utilize neste item o maior número possível de pontos de integração.)

O trabalho deve ser escrito em LaTeX e enviado por e-mail dentro do prazo determinado.