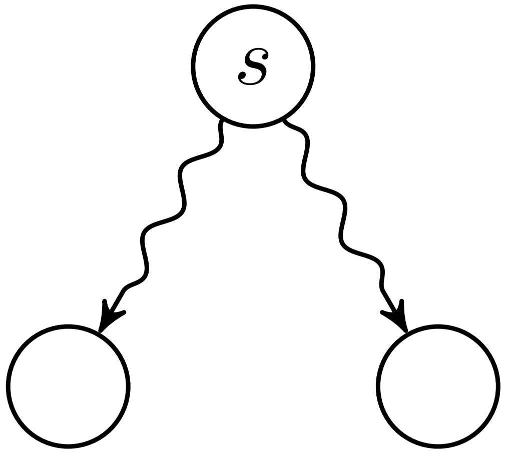
Forelesning 10

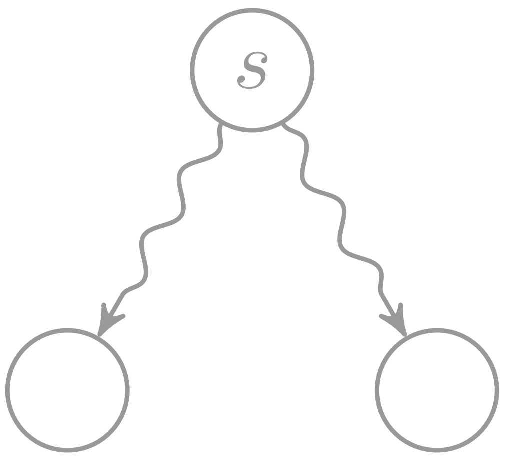
Korteste vei fra én til alle

1. **Dekomponering**
2. **DAG-Shortest-Path**
3. **Kantslakking**
4. **Bellman-Ford**
5. **Dijkstras algoritme**

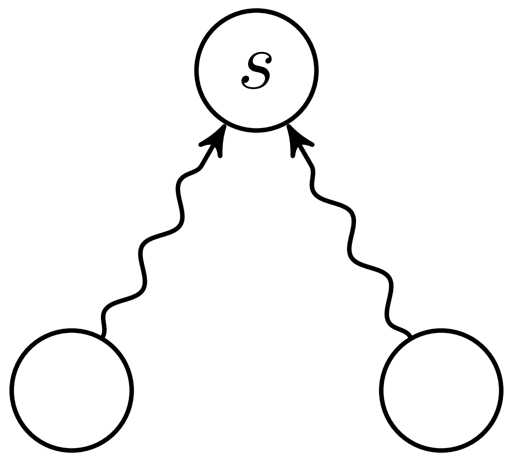


SSSP

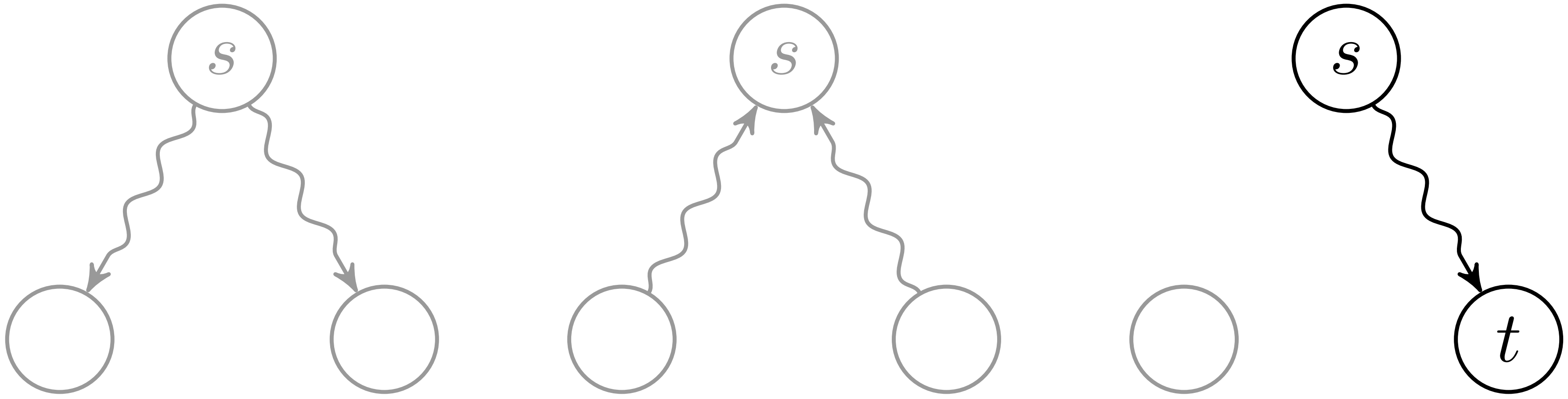
Single source shortest path: Én til alle



SSSP

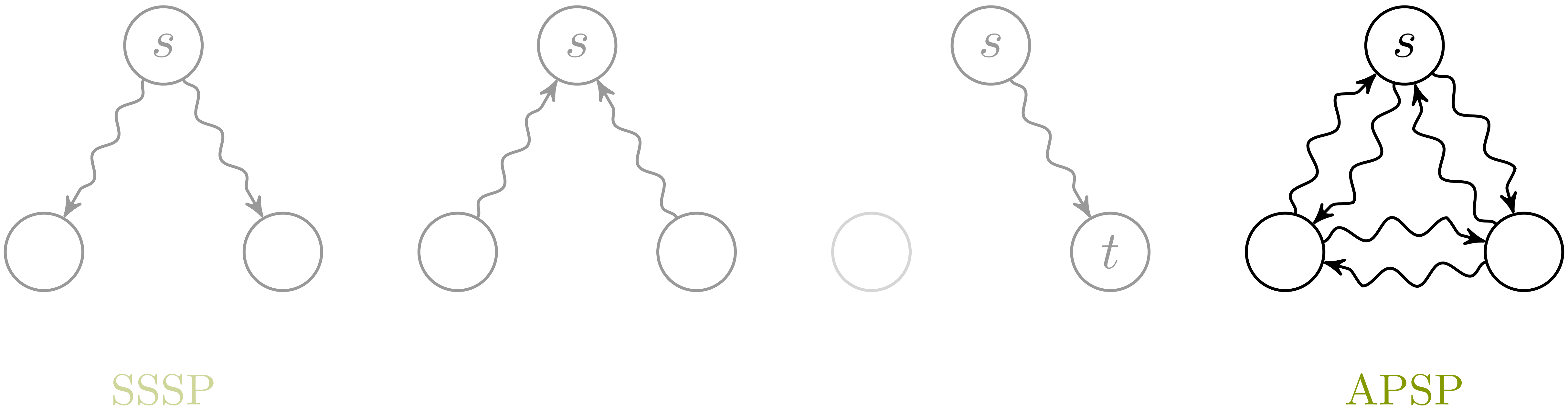


Alle til én: Løses som SSSP i omvendt graf



SSSP

Én til én: Har ikke noe bedre enn SSSP



All pairs shortest path: Alle til alle! (Neste gang)

Input: En rettet graf $G = (V, E)$, vektfunksjon $w : E \to \mathbb{R}$ og node $s \in V$.

Output: For hver node $v \in V$, en sti $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ med $v_0 = s$ og $v_k = v$, som har minimal vektsum

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)\,.$$

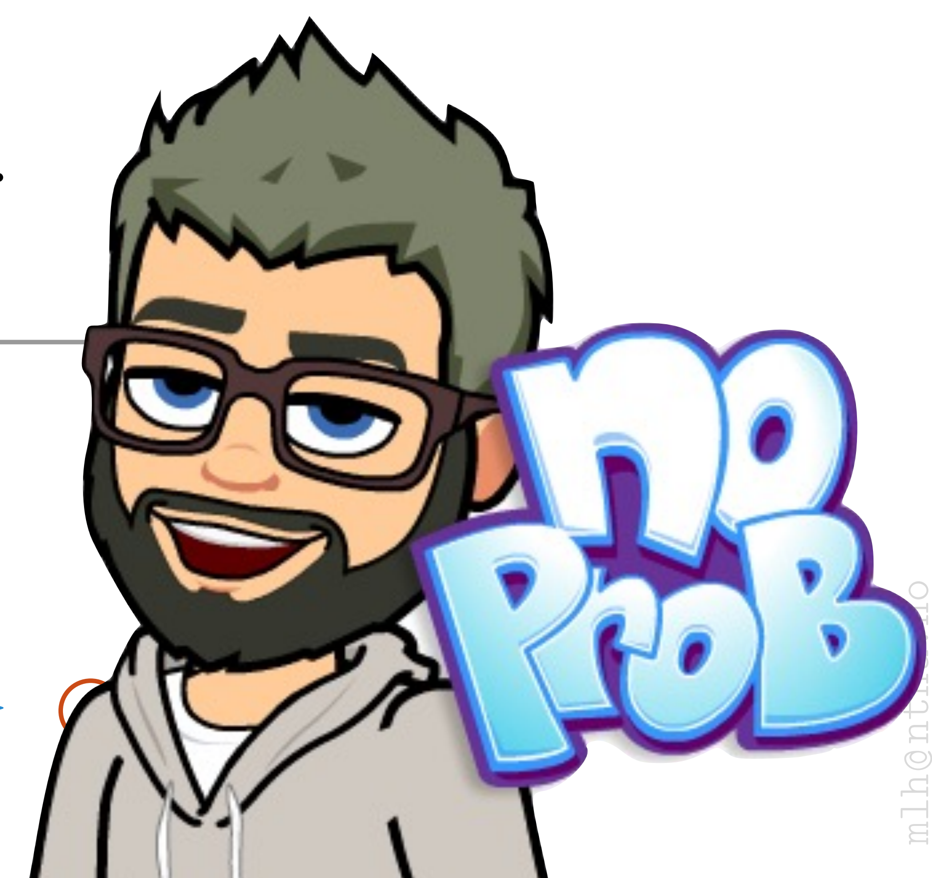
Vi kaller også w lengde; $\delta(s, v) = w(p)$ er avstanden fra s til v

Input: En rettet graf $G = (V, E)$, vektfunksjon $w : E \to \mathbb{R}$ og node $s \in V$.

Output: For hver node $v \in V$, en sti $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ med $v_0 = s$ og $v_k = v$, som har minimal vektsum

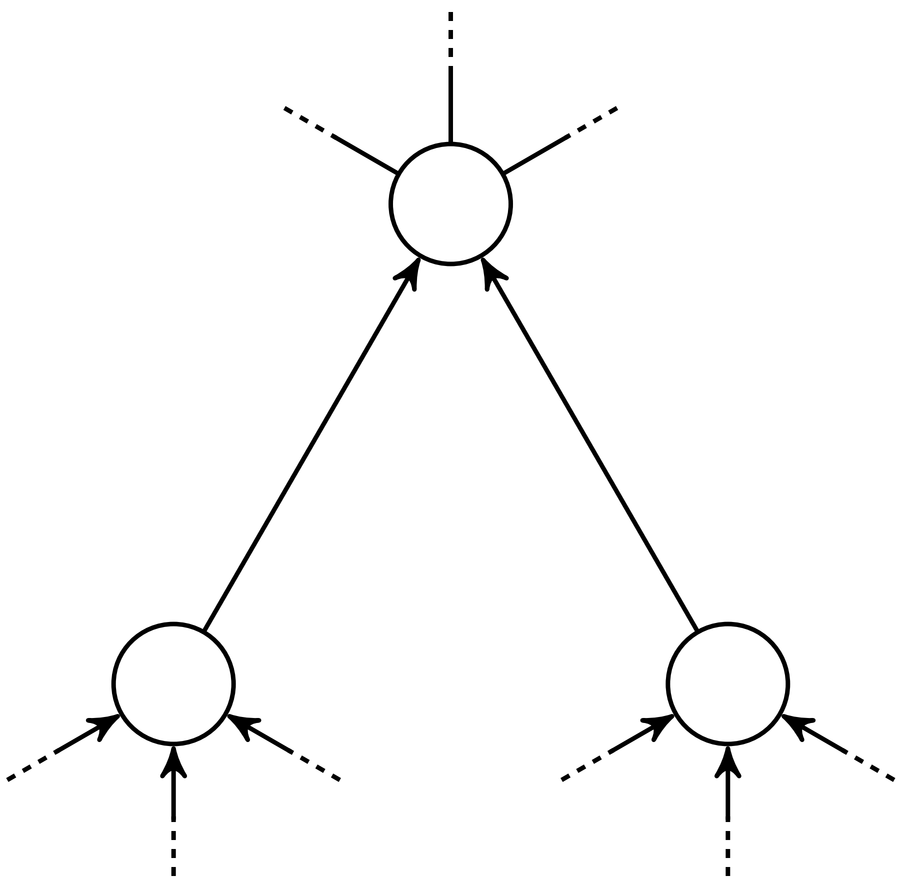
$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)\,.$$

Urettede grafer: 

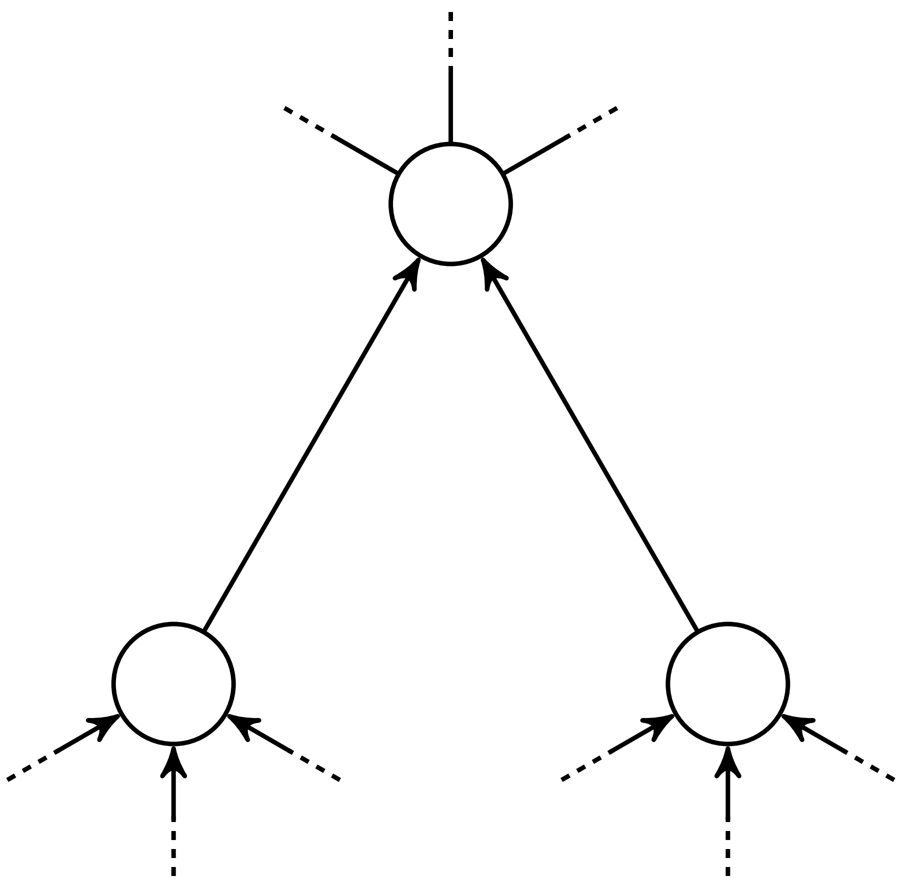


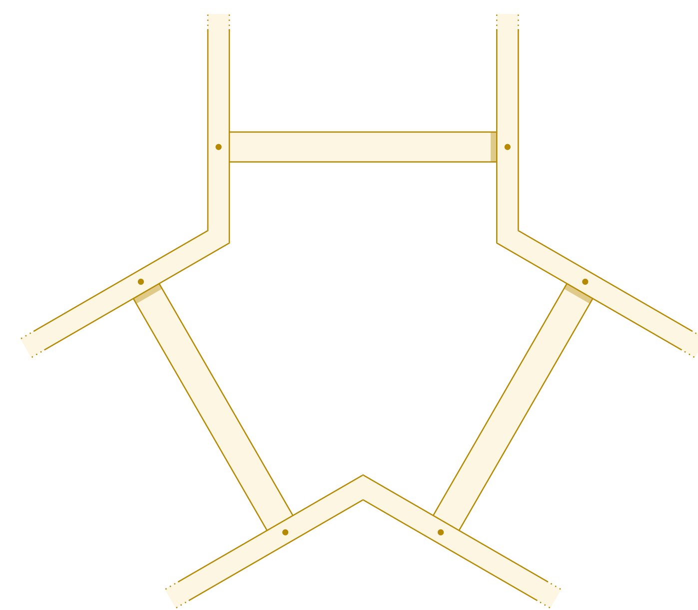
1:5

Dekomponering

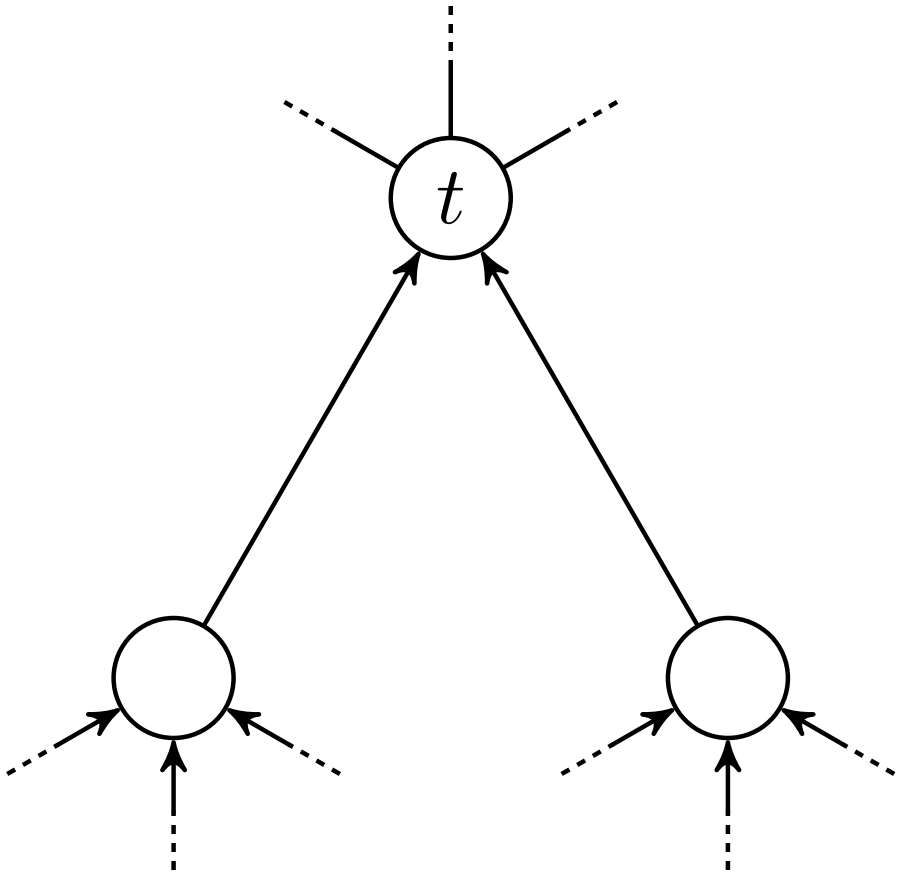


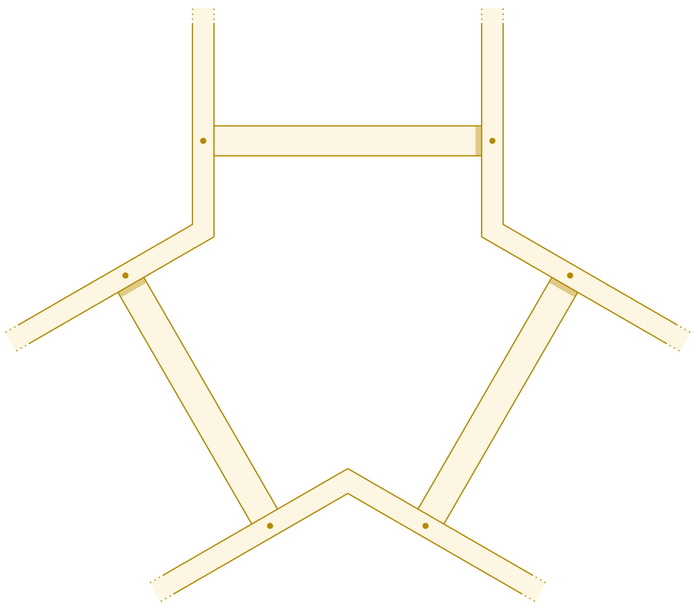
Vi begynner med å anta en asyklisk graf



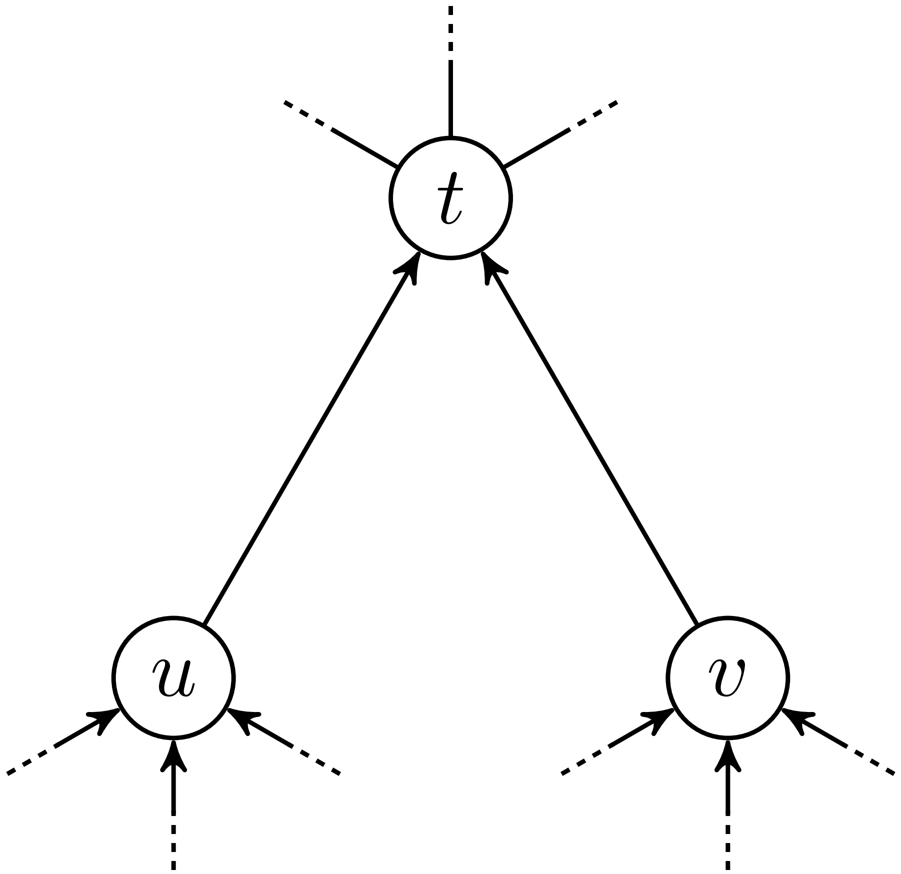


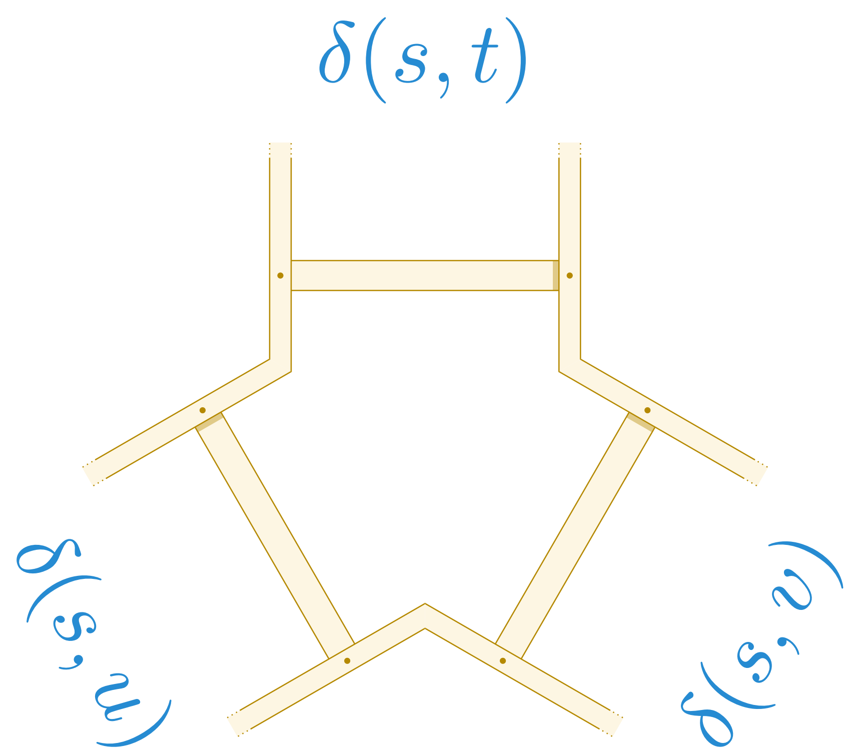
Vi kan da la grafen være sin egen delinstansgraf!



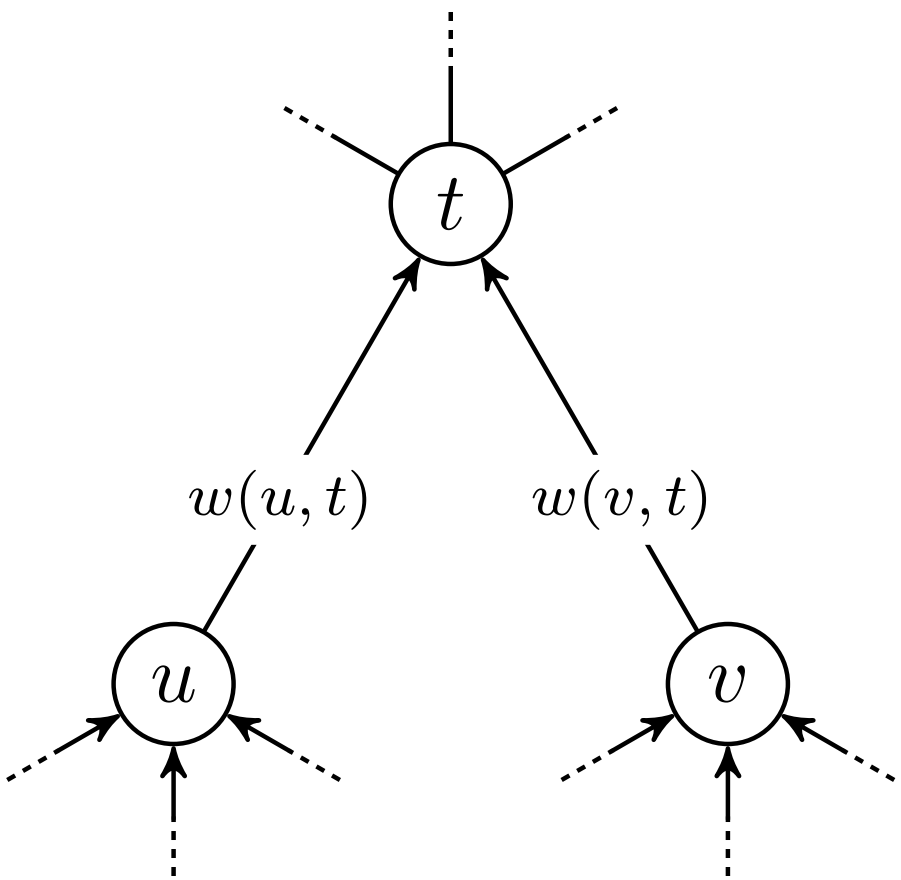


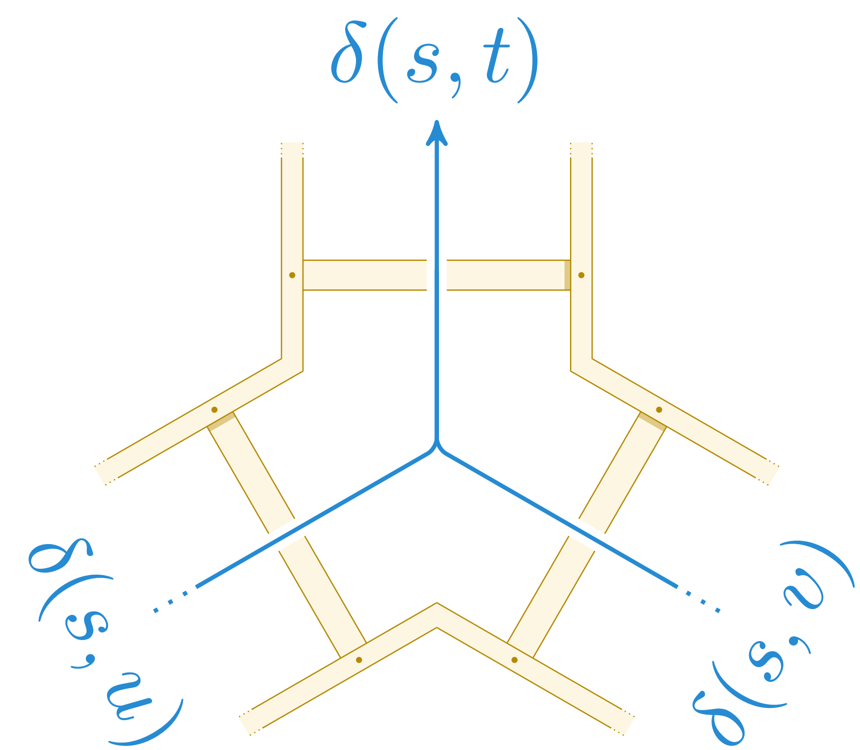
Vi vil finne avstand $\delta(s,t)$ fra startnoden s



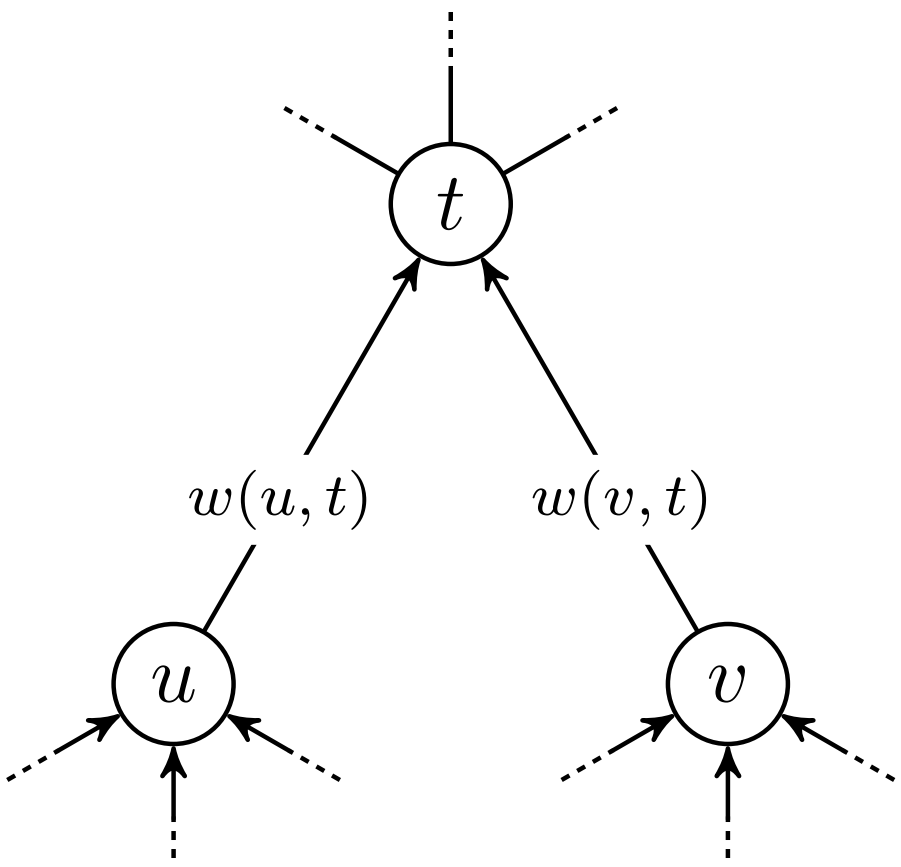


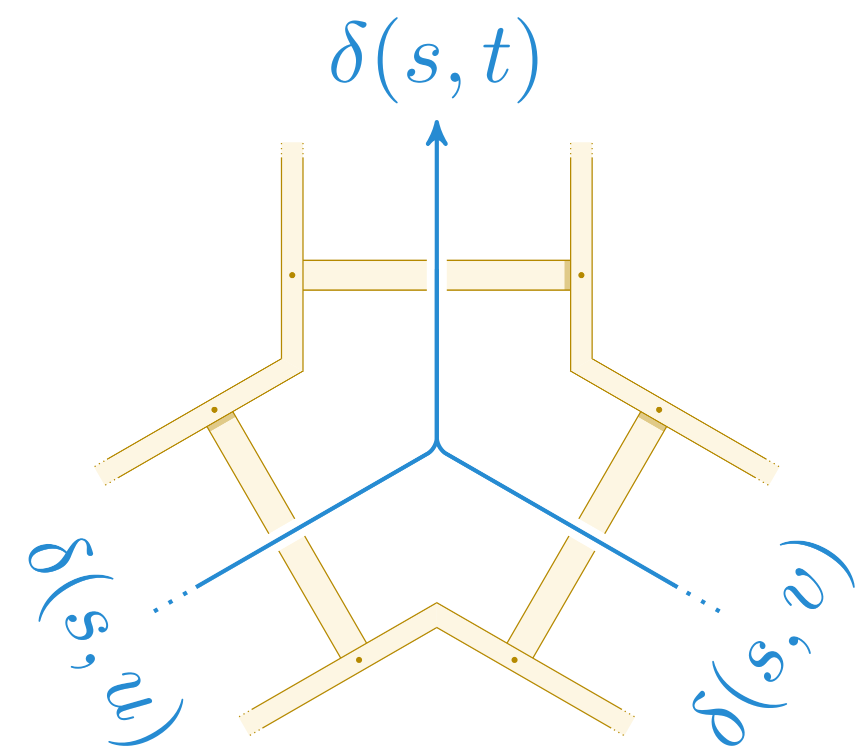
Vi antar induktivt at vi har funnet $\delta(s,-)$ for inn-naboer





Inn-nabo x gir mulig stilengde $\delta(s, x) + w(x, t)$; velg minimum!





Vi får her $\delta(s,t) = \min\{\, \delta(s,u) + w(u,t),\ \delta(s,v) + w(v,t)\,\}$

```
min = A[1]
for i = 2 to A.length
    if min > A[i]
        min = A[i]
```

Helt vanlig algoritme for å finne minimum (s. 213)

```
min = A[1]
for i = 2 to A.length
    if min > A[i]
        min = A[i]
```

```
min = ∞
for i = 1 to A.length
    if min > A[i]
        min = A[i]
```

Hvis vi har tilgang til ∞, trenger vi ikke ha A[1] i starten

```
min = A[1]
for i = 2 to A.length
        if min > A[i]
                min = A[i]
```

```
min = ∞
for each x ∈ A
        if min > x
                min = x
```

Hvis vi har tilgang til ∞, trenger vi ikke ha A[1] i starten

mlh@ntnu.no

```
min = A[1]
for i = 2 to A.length
    if min > A[i]
        min = A[i]
```

```
min = ∞
for each x ∈ A
    if min > x
        min = x
```

Vi vil ha $t.d$ = minimum av $\delta(s, u) + w(u, t)$ for inn-naboer u

$t.d = \infty$
for each edge $(u, t) \in \mathrm{E}$
    if $t.d > \delta(s, u) + w(u, t)$
        $t.d = \delta(s, u) + w(u, t)$

Vi vil ha $t.d =$ minimum av $\delta(s, u) + w(u, t)$ for inn-naboer u

mlh@ntnu.no

$t.d = \infty$
for each edge $(u, t) \in \mathrm{E}$
  if $t.d > \delta(s, u) + w(u, t)$
    $t.d = \delta(s, u) + w(u, t)$

Anta at vi allerede har funnet $u.d = \delta(s, u)$

$t.d = \infty$
for each edge $(u, t) \in \mathrm{E}$
    if $t.d > u.d + w(u, t)$
        $t.d = u.d + w(u, t)$

Anta at vi allerede har funnet $u.d = \delta(s, u)$

$t.d = \infty$
for each edge $(u, t) \in \mathrm{E}$
    if $t.d > u.d + w(u, t)$
        $t.d = u.d + w(u, t)$

For å løse problemet må vi gjøre dette for <u>alle</u> noder

for each vertex $v \in \mathrm{V}$
    $v.d = \infty$
    for each edge $(u, v) \in \mathrm{E}$
        if $v.d > u.d + w(u, v)$
            $v.d = u.d + w(u, v)$

For å løse problemet må vi gjøre dette for alle noder

```
for each vertex v ∈ V
    v.d = ∞
    for each edge (u, v) ∈ E
        if v.d > u.d + w(u, v)
            v.d = u.d + w(u, v)
```

Husk: $v.d$ er minimum av $u.d + w(u, v)$ for inn-naboer u

mlh@ntnu.no

```
for each vertex v ∈ V
    v.d = ∞
    for each edge (u, v) ∈ E
        if v.d > u.d + w(u, v)
            v.d = u.d + w(u, v)
```

Grunntilfelle: $s.d = 0$. Induktiv hypotese: $u.d$ er rett

for each vertex $v \in \mathrm{V}$
  $v.d = \infty$
  for each edge $(u, v) \in \mathrm{E}$
    if $v.d > u.d + w(u, v)$
      $v.d = u.d + w(u, v)$

Induksjonen krever at $u.d$ beregnes før $v.d$

```
for each vertex v ∈ V
    v.d = ∞
    for each edge (u, v) ∈ E
        if v.d > u.d + w(u, v)
            v.d = u.d + w(u, v)
```

Hvis $s.d = 0$ (grunntilfelle) og G er sortert topologisk . . .

topologically sort G
$s.d = 0$
for each vertex $v \in V$
    $v.d = \infty$
    for each edge $(u, v) \in E$
        if $v.d > u.d + w(u, v)$
            $v.d = u.d + w(u, v)$

Hvis $s.d = 0$ (grunntilfelle) og G er sortert topologisk . . .

topologically sort G
$s.d = 0$
for each vertex $v \in \mathrm{V}$
    $v.d = \infty$
    for each edge $(u, v) \in \mathrm{E}$
        if $v.d > u.d + w(u, v)$
            $v.d = u.d + w(u, v)$

…så følger $\delta(s, v) = v.d$ (for alle $v \in \mathrm{V}$), ved induksjon!

topologically sort G
$s.d = 0$
for each vertex $v \in V$
    $v.d = \infty$
    for each edge $(u, v) \in E$
        if $v.d > u.d + w(u, v)$
            $v.d = u.d + w(u, v)$

$$v.d = \min u.d + w(u, v)$$

Samme dekomponering fortsatt. Klassisk dynamisk programmering!

2:5

DAG-Shortest-Path

```
topologically sort G
s.d = 0
for each vertex v ∈ V
    v.d = ∞
    for each edge (u, v) ∈ E
        if v.d > u.d + w(u, v)
            v.d = u.d + w(u, v)
```

Vi drar med oss info fra forgjengere, såkalt «pulling»

topologically sort G
$s.d = 0$
for each vertex $v \in V$
    $v.d = \infty$
    for each edge $(u, v) \in E$
        if $v.d > u.d + w(u, v)$
            $v.d = u.d + w(u, v)$

Vi har ofte enklere tilgang til ut-naboer enn inn-naboer

mlh@ntnu.no

topologically sort G
$s.d = 0$
for each vertex $v \in V$
    $v.d = \infty$
    for each edge $(u, v) \in E$
        if $v.d > u.d + w(u, v)$
            $v.d = u.d + w(u, v)$

Hvis vi skiller ut initialiseringen . . .

```
topologically sort G
for each vertex v ∈ V
        v.d = ∞
s.d = 0
for each vertex v ∈ V
        for each edge (u, v) ∈ E
                if v.d > u.d + w(u, v)
                        v.d = u.d + w(u, v)
```

Hvis vi skiller ut initialiseringen . . .

```
topologically sort G
for each vertex v ∈ V
    v.d = ∞
s.d = 0
for each vertex v ∈ V
    for each edge (u, v) ∈ E
        if v.d > u.d + w(u, v)
            v.d = u.d + w(u, v)
```

…kan vi kjøre Minimum for flere noder, flettet sammen!

```
1  topologically sort G
2  for each vertex v ∈ V
3        v.d = ∞
4  s.d = 0
5  for each vertex v ∈ V
7        for each edge (u, v) ∈ E
8              if v.d > u.d + w(u, v)
9                    v.d = u.d + w(u, v)
```

Så lenge $u.d$ er rett, kan vi trygt utføre linje 8 og 9

```
topologically sort G
for each vertex v ∈ V
        v.d = ∞
s.d = 0
for each vertex v ∈ V
        for each edge (u, v) ∈ E
                if v.d > u.d + w(u, v)
                        v.d = u.d + w(u, v)
```

Med andre ord, vi kan oppdatere (f.eks.) langs <u>ut-kanter</u> også!

```
topologically sort G
for each vertex v ∈ V
    v.d = ∞
s.d = 0
for each vertex u ∈ V
    for each edge (u, v) ∈ E
        if v.d > u.d + w(u, v)
            v.d = u.d + w(u, v)
```

Med andre ord, vi kan oppdatere (f.eks.) langs ut-kanter også!

```
topologically sort G
for each vertex v ∈ V
        v.d = ∞
s.d = 0
for each vertex u ∈ V
        for each edge (u, v) ∈ E
                if v.d > u.d + w(u, v)
                        v.d = u.d + w(u, v)
```

Vi sprer da informasjon fra u til ut-naboene («reaching»)

```
topologically sort G
for each vertex v ∈ V
        v.d = ∞
s.d = 0
for each vertex u ∈ V
        for each edge (u, v) ∈ E
                if v.d > u.d + w(u, v)
                        v.d = u.d + w(u, v)
```

Kravet fortsatt overholdt: (u, v) oppdateres når $u.d$ er korrekt

```
topologically sort G
for each vertex v ∈ V
    v.d = ∞
s.d = 0
for each vertex u ∈ V
    for each edge (u, v) ∈ E
        if v.d > u.d + w(u, v)
            v.d = u.d + w(u, v)
```

Som vanlig i dynamisk programmering: Husk hvilket valg som tas

```
topologically sort G
for each vertex v ∈ V
        v.d = ∞
s.d = 0
for each vertex u ∈ V
        for each edge (u, v) ∈ E
                if v.d > u.d + w(u, v)
                        v.d = u.d + w(u, v)
```

I dette tilfellet: Hvilken forgjenger $v.\pi$ ga oss minimum, $v.d$?

```
topologically sort G
for each vertex v ∈ V
        v.d = ∞
        v.π = nil
s.d = 0
for each vertex u ∈ V
        for each edge (u, v) ∈ E
                if v.d > u.d + w(u, v)
                        v.d = u.d + w(u, v)
                        v.π = u
```

I dette tilfellet: Hvilken forgjenger $v.\pi$ ga oss minimum, $v.d$?

```
topologically sort G
for each vertex v ∈ V
    v.d = ∞
    v.π = nil
s.d = 0
for each vertex u ∈ V
    for each edge (u, v) ∈ E
        if v.d > u.d + w(u, v)
            v.d = u.d + w(u, v)
            v.π = u
```

Refaktorering: Trekk ut funksjoner!

topologically sort G
for each vertex $v \in V$
    $v.d = \infty$
    $v.\pi = nil$
$s.d = 0$
for each vertex $u \in V$
    for each edge $(u, v) \in E$
        if $v.d > u.d + w(u, v)$
            $v.d = u.d + w(u, v)$
            $v.\pi = u$

La oss kalle dette INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)

topologically sort G
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for each vertex $u \in \mathrm{V}$
    for each edge $(u, v) \in \mathrm{E}$
        if $v.d > u.d + w(u, v)$
            $v.d = u.d + w(u, v)$
            $v.\pi = u$

La oss kalle dette INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)

topologically sort G
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for each vertex $u \in V$
    for each edge $(u, v) \in E$
        if $v.d > u.d + w(u, v)$
            $v.d = u.d + w(u, v)$
            $v.\pi = u$

La oss kalle dette RELAX(u, v, w)

```
topologically sort G
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for each vertex u ∈ V
    for each edge (u, v) ∈ E
        RELAX(u, v, w)
```

La oss kalle dette RELAX(u, v, w)

mlh@ntnu.no

```
topologically sort G
Initialize-Single-Source(G, s)
for each vertex u ∈ V
    for each edge (u, v) ∈ E
        Relax(u, v, w)
```

Vi skal straks bruke «kantslakking» i en mer generell setting

DAG-SHORTEST-PATH(G, w, s)

G graf
w vekting
s startnode

Erke-eksempel på DP! Grafen <u>er</u> delproblemgrafen!

DAG-SHORTEST-PATH(G, w, s)
1 topologically sort the vertices of G

G graf
w vekting
s startnode

Alle noder v er avhengig av havner før v

DAG-SHORTEST-PATH(G, w, s)
1 topologically sort the vertices of G
2 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)

G graf
w vekting
s startnode

DAG-SHORTEST-PATH(G, w, s)
1 topologically sort the vertices of G
2 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
3 **for** each vertex u, in topsort order

G	graf
w	vekting
s	startnode
u	fra-node

«Bottom-up»-løsning

DAG-SHORTEST-PATH(G, w, s)
1 topologically sort the vertices of G
2 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
3 **for** each vertex u, in topsort order
4 **for** each vertex $v \in G.Adj[u]$

G graf
w vekting
s startnode
u fra-node
v til-node

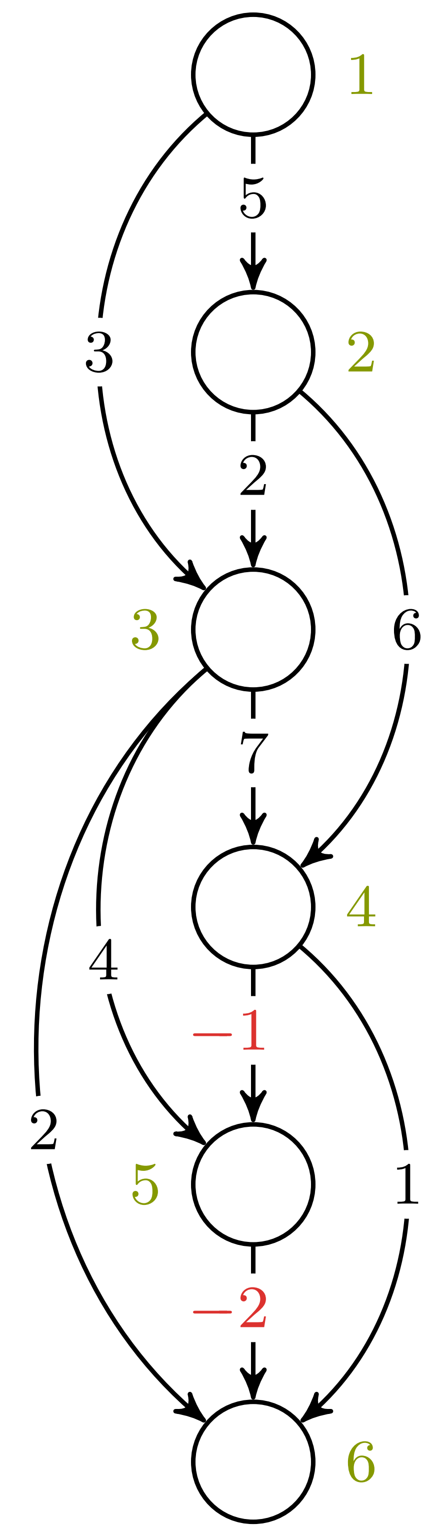
```
DAG-SHORTEST-PATH(G, w, s)
topologically sort the vertices of G
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for each vertex u, in topsort order
    for each vertex v ∈ G.Adj[u]
        RELAX(u, v, w)
```

G	graf
w	vekting
s	startnode
u	fra-node
v	til-node

Må alt ha slakket inn-kanter; slakk alle ut-kanter

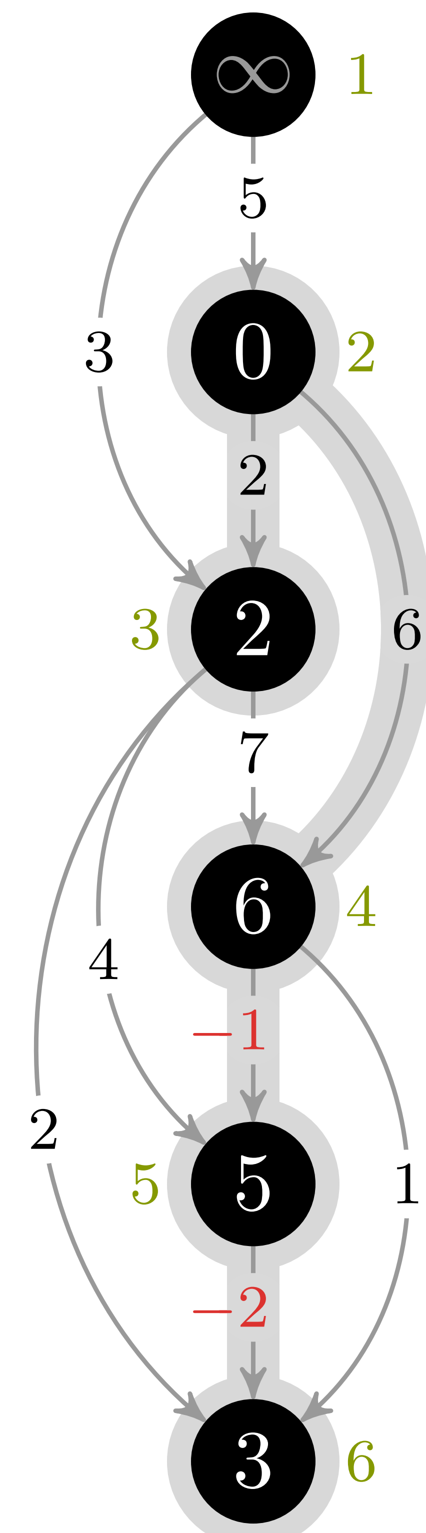
DAG-SHORTEST-PATH(G, w, s)

```
topologically sort the vertices of G
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for each vertex u, in topsort order
    for each vertex v ∈ G.Adj[u]
        RELAX(u, v, w)
```



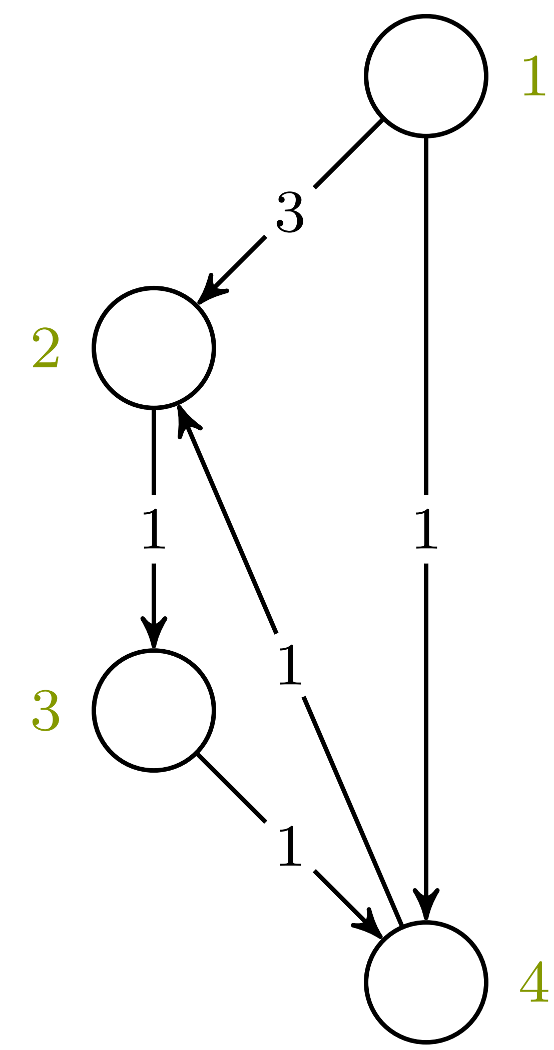
$s, u, v \;=\; 2, \text{-}, \text{-}$

DAG-SHORTEST-PATH(G, w, s)
topologically sort the vertices of G
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for each vertex u, in topsort order
    for each vertex $v \in$ G.$Adj[u]$
        RELAX(u, v, w)



$s, u, v \ = \ 2, \text{-}, \text{-}$

Dag-Shortest-Path(G, w, s)
1 topologically sort the vertices of G
2 Initialize-Single-Source(G, s)
3 **for** each vertex u, in topsort order
4 **for** each vertex $v \in G.Adj[u]$
5 Relax(u, v, w)



$s, u, v \ = \ 1, \text{-}, \text{-}$

DAG-SHORTEST-PATH ... $, s)$

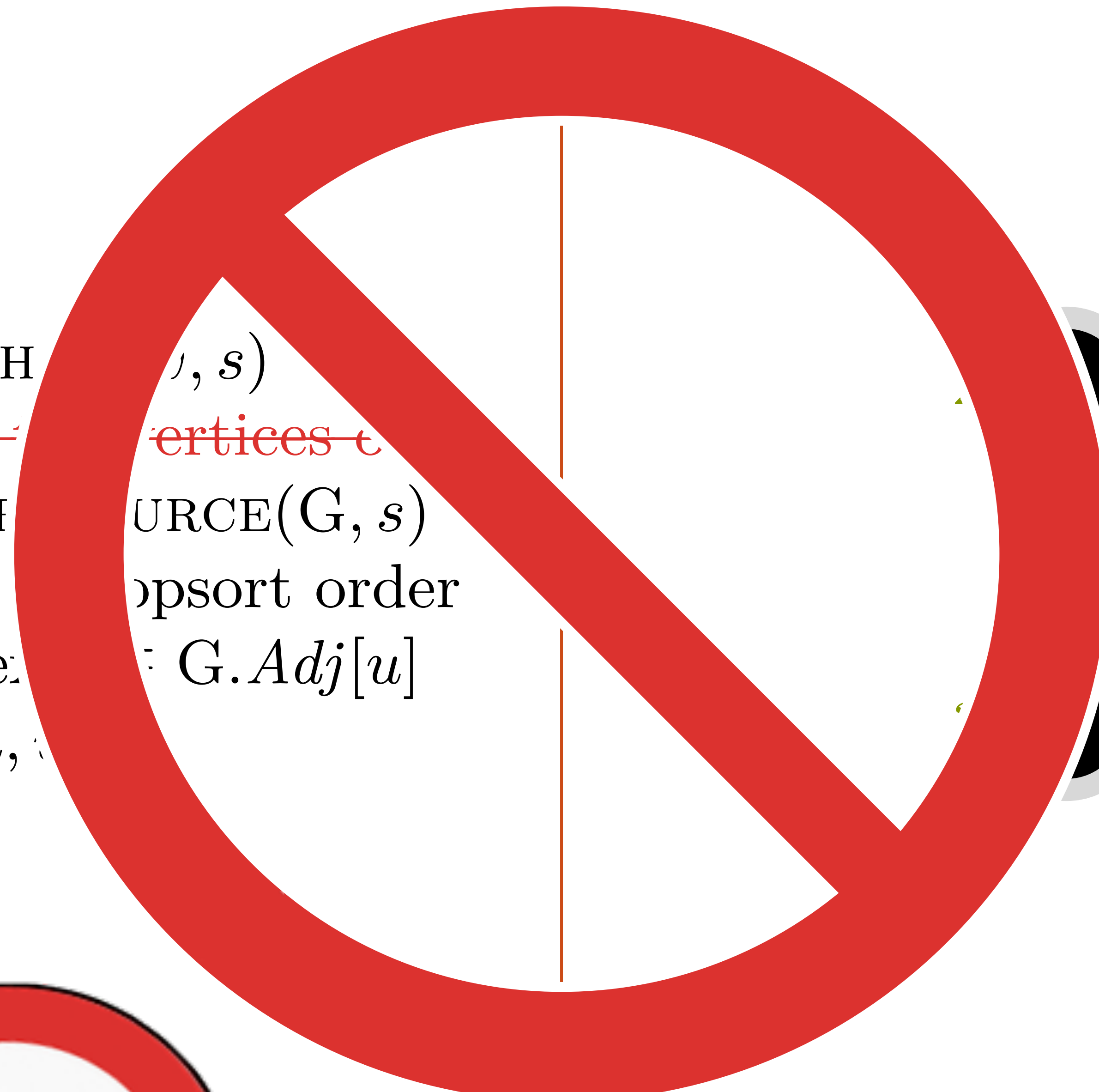
~~topologically sort t~~ ... ~~ertices c~~

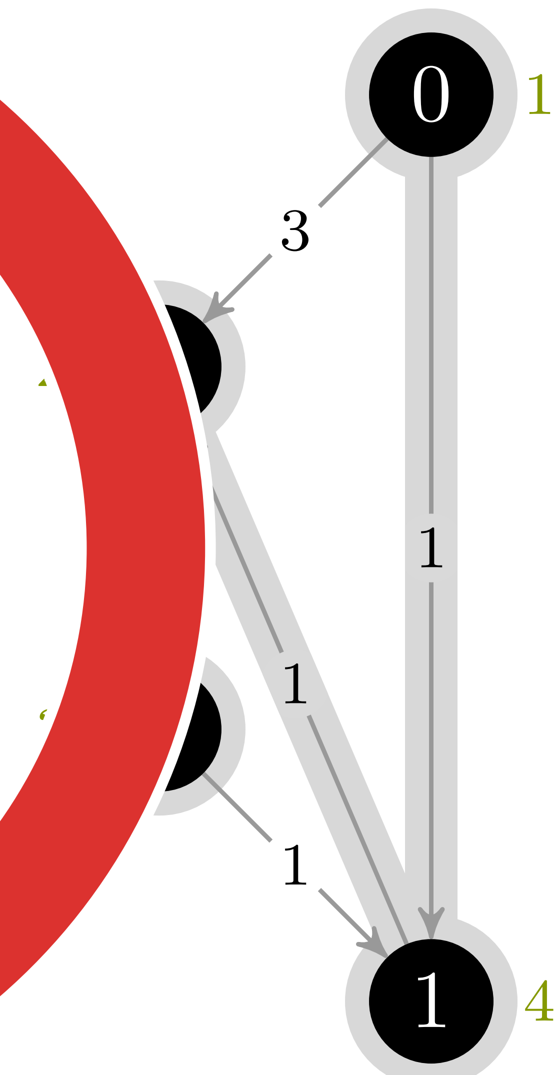
INITIALIZE-SINGLE ... URCE(G, s)

for each vertex u, ... opsort order

  for each verte ... $G.Adj[u]$

    RELAX$(u,$ ...





Sykler forbudt!

3.d er nå feil

- God mental modell for dynamisk programmering; erkeeksempel
- Delproblemer er avstander fra s til inn-naboer; velg den som gir deg best resultat
- Bottom-up: Kantslakking av inn-kanter i topologisk sortert rekkefølge (såkalt pulling)
- Gir samme svar: Kantslakking av ut-kanter i topologisk sortert rekkefølge (såkalt reaching)

DAG-SP › Kjøretid

Operasjon	**Antall**	**Kjøretid**
Topologisk sortering	1	$\Theta(V + E)$
Initialisering	1	$\Theta(V)$
Relax	E	$\Theta(1)$

Totalt: $\Theta(V + E)$

Kantslakking er altså en oppspalting av minimums-operasjonen fra dekomponeringen. Vi har foreløpig ikke vært så kreative med hvordan vi har brukt det – la oss studere teknikken litt mer i detalj.

3:5

Kantslakking

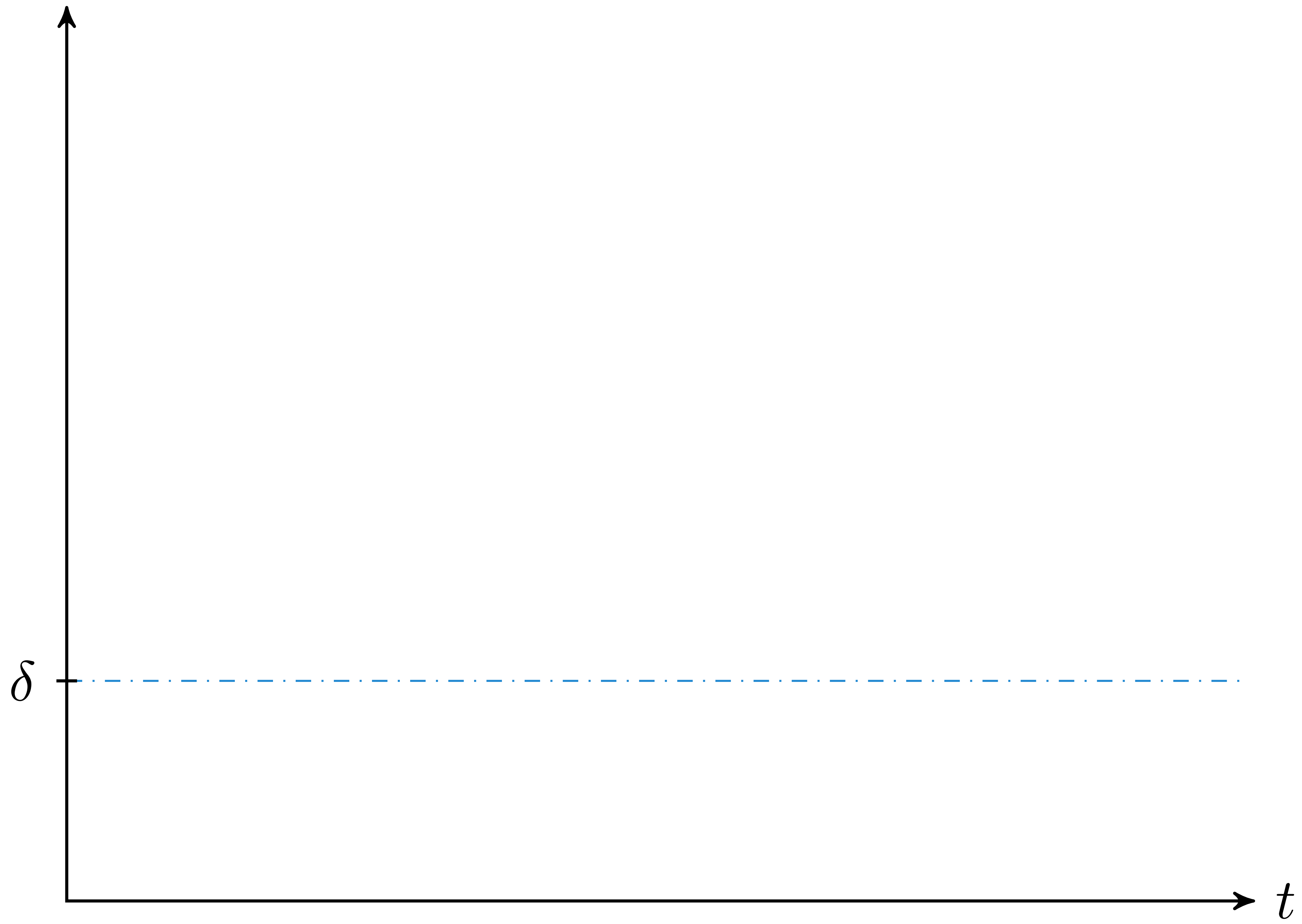
Se fotnote på side 648 i boka for mer om navnet.

$$\delta(s, v) \leqslant v.d$$

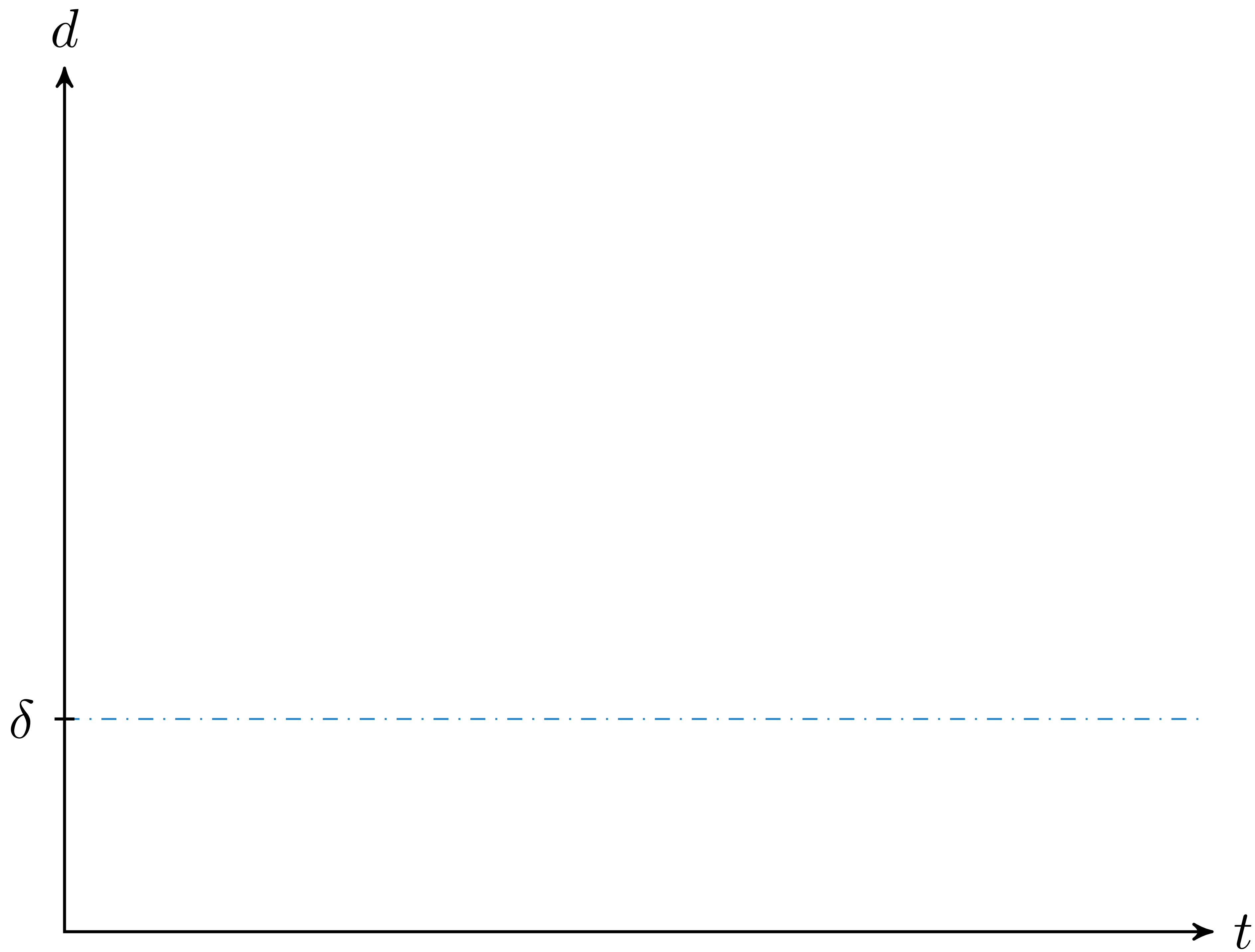
Avstanden fra s til v: Lengden til korteste vei

$$\delta(s, v) \leqslant v.d$$

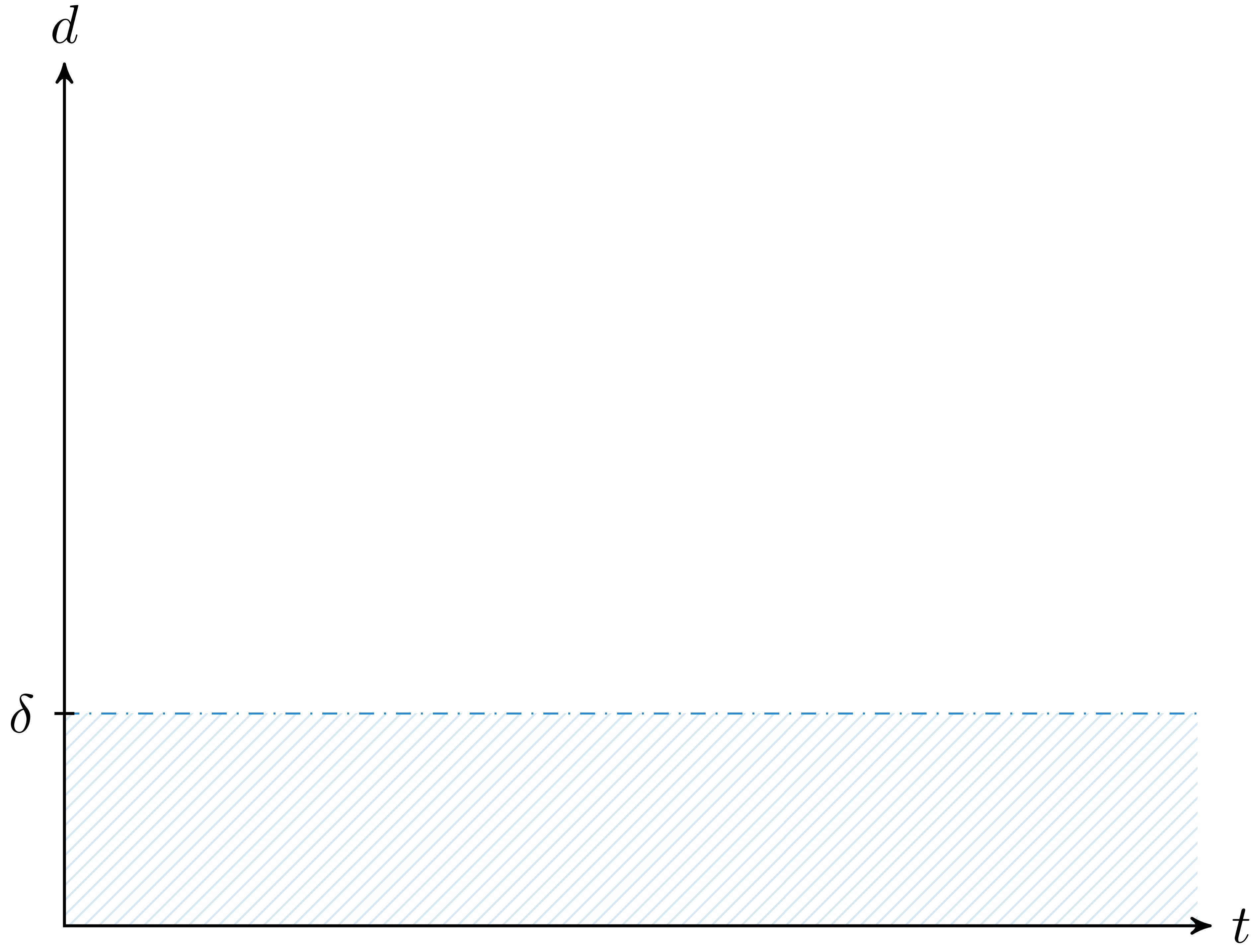
Et overestimat: Det beste vi har funnet så langt!



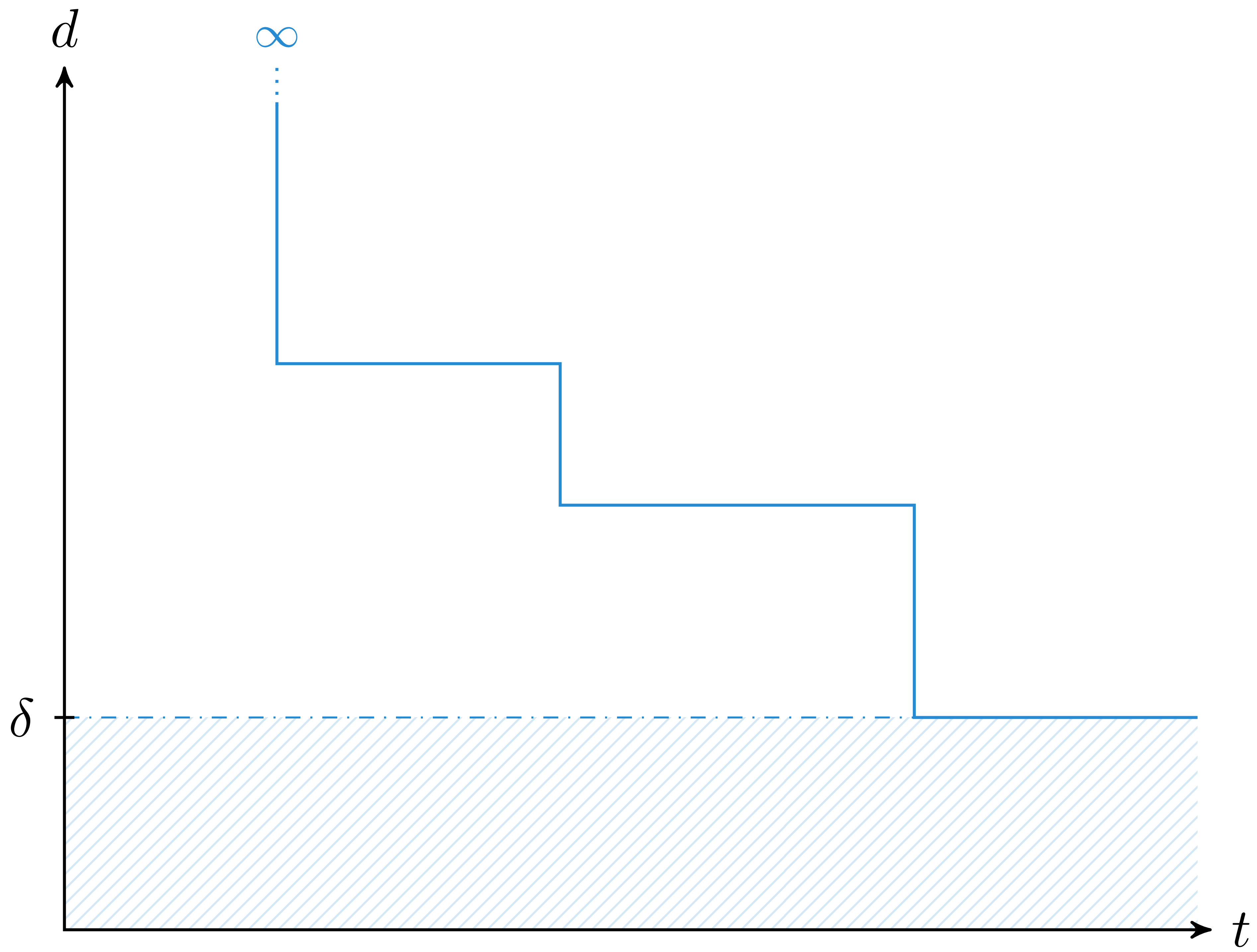
Avstanden $\delta(s, v)$ er ukjent til å begynne med



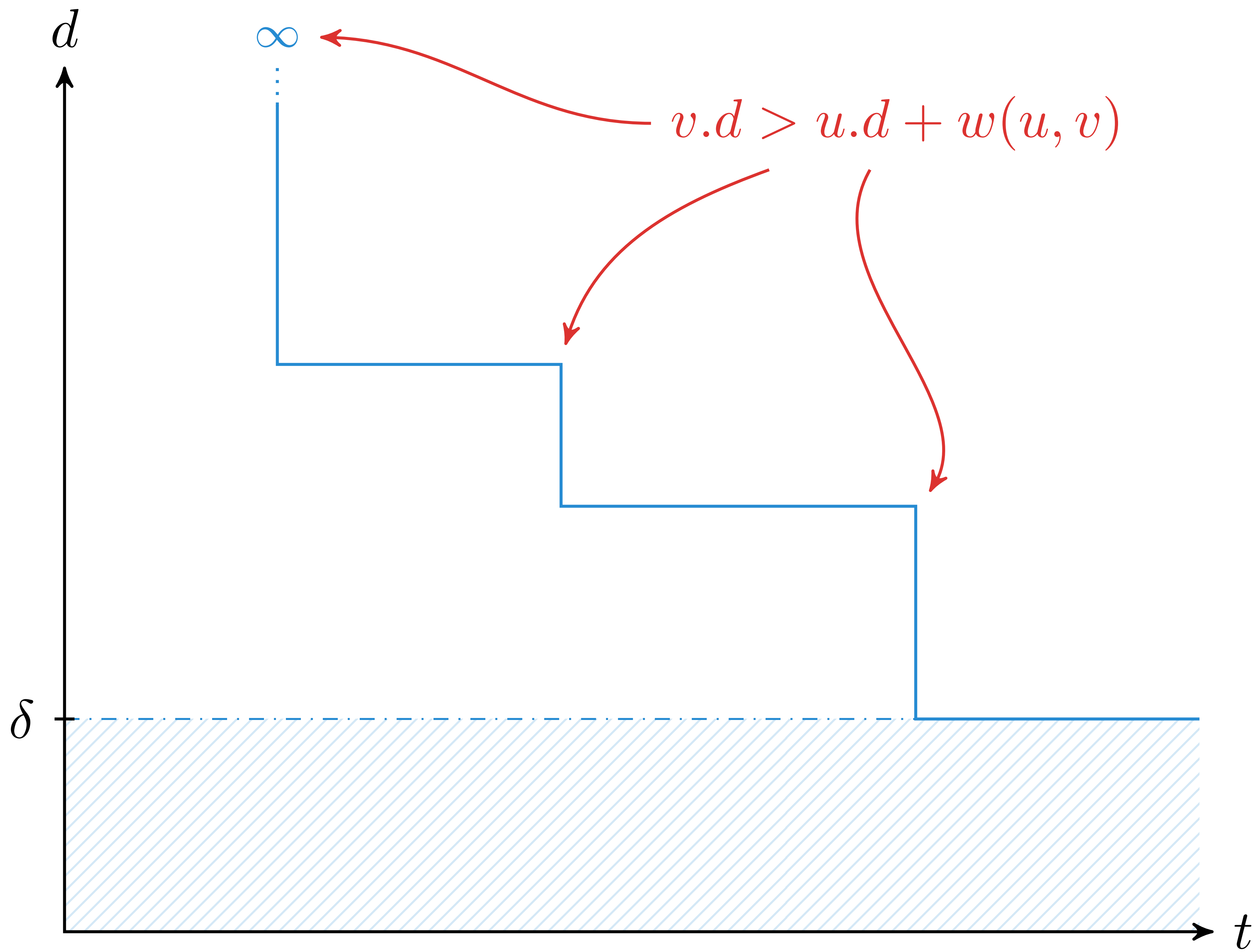
Vi leter etter bedre veier; $v.d$ er best så langt



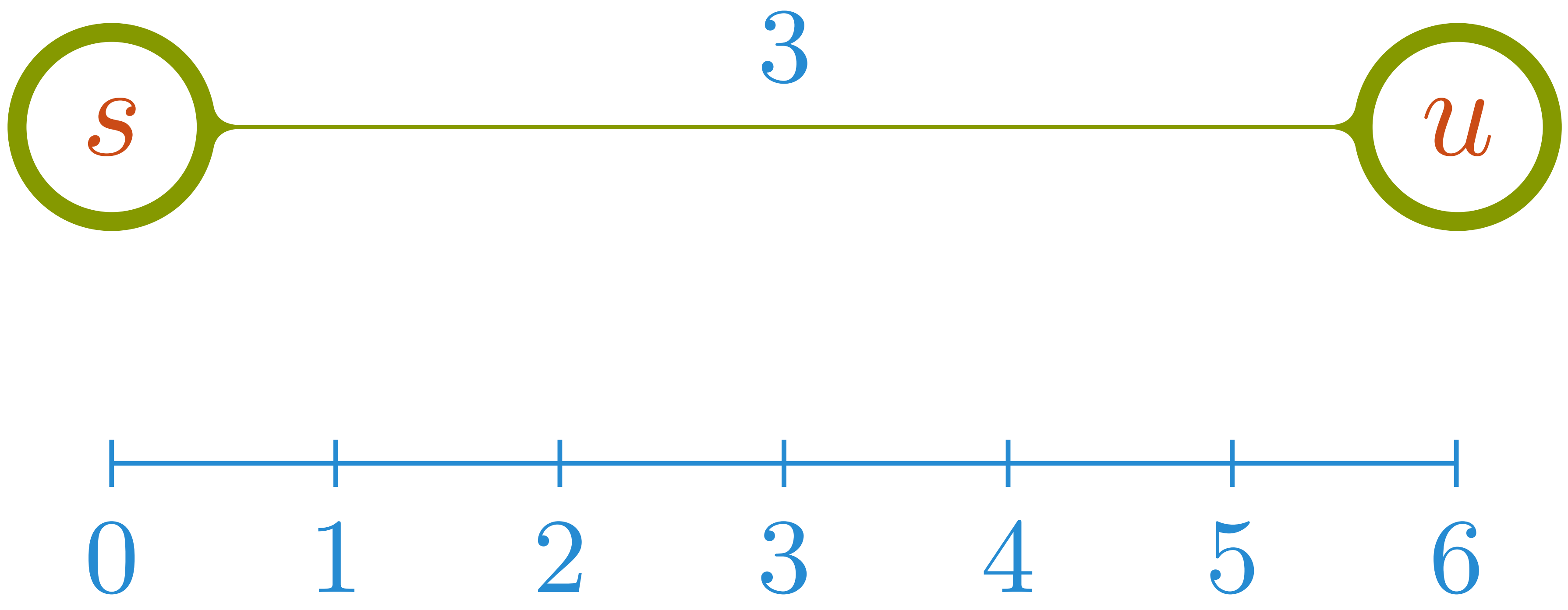
Vi kan naturligvis aldri få $v.d$ mindre enn $\delta(s, v)$



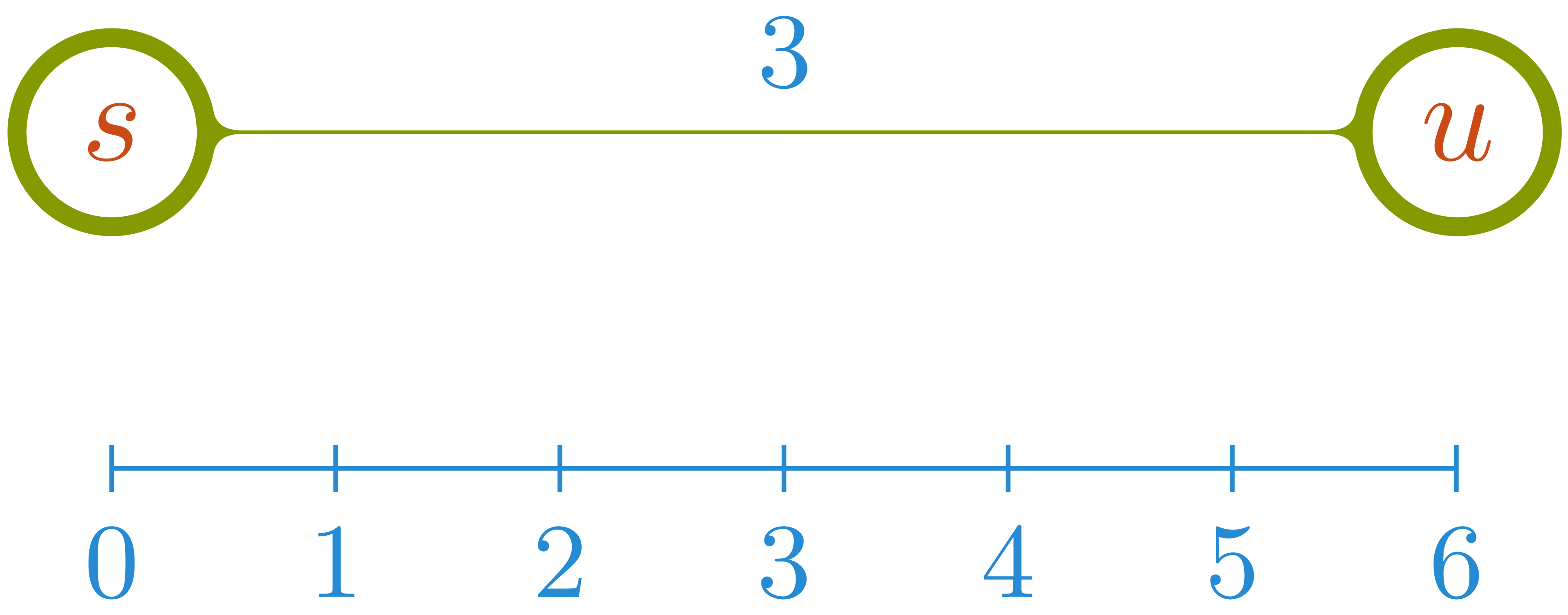
Hver gang vi finner en snarvei $s \rightsquigarrow u \rightarrow v$, synker estimatet



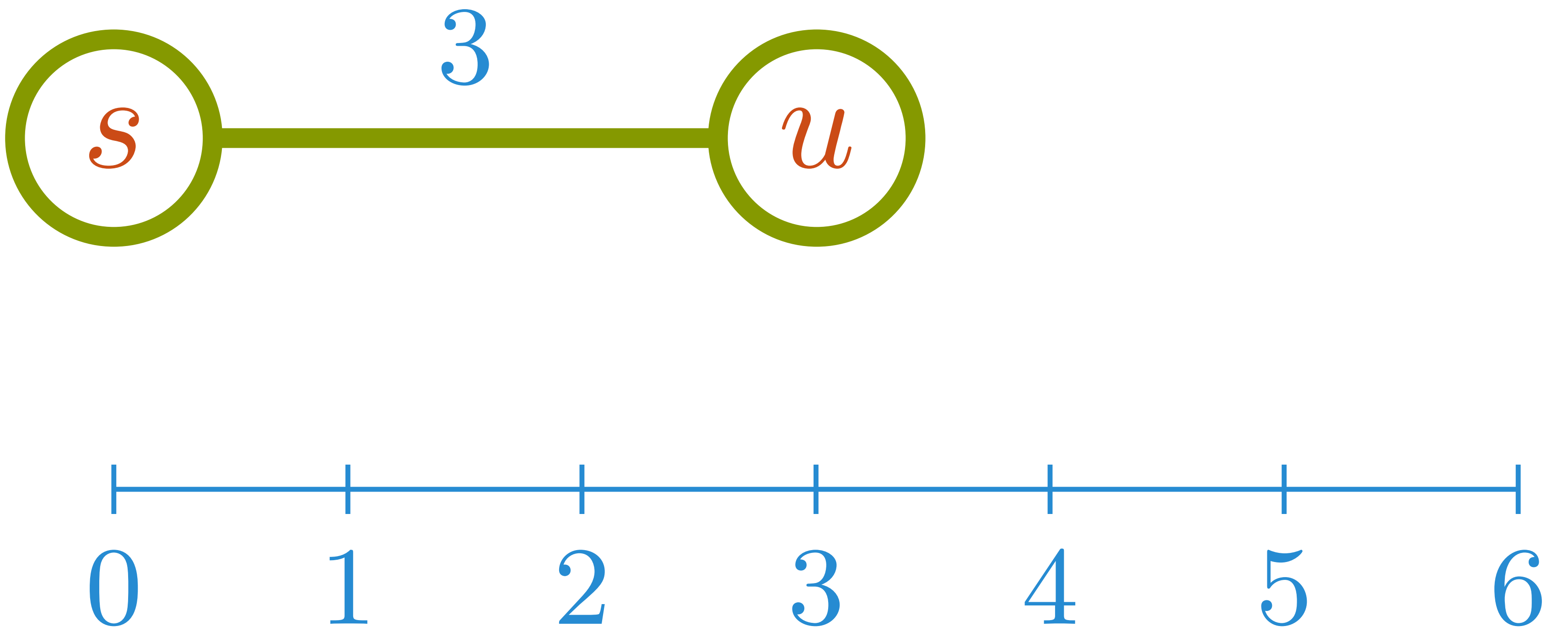
Hver gang vi finner en snarvei $s \rightsquigarrow u \to v$, synker estimatet



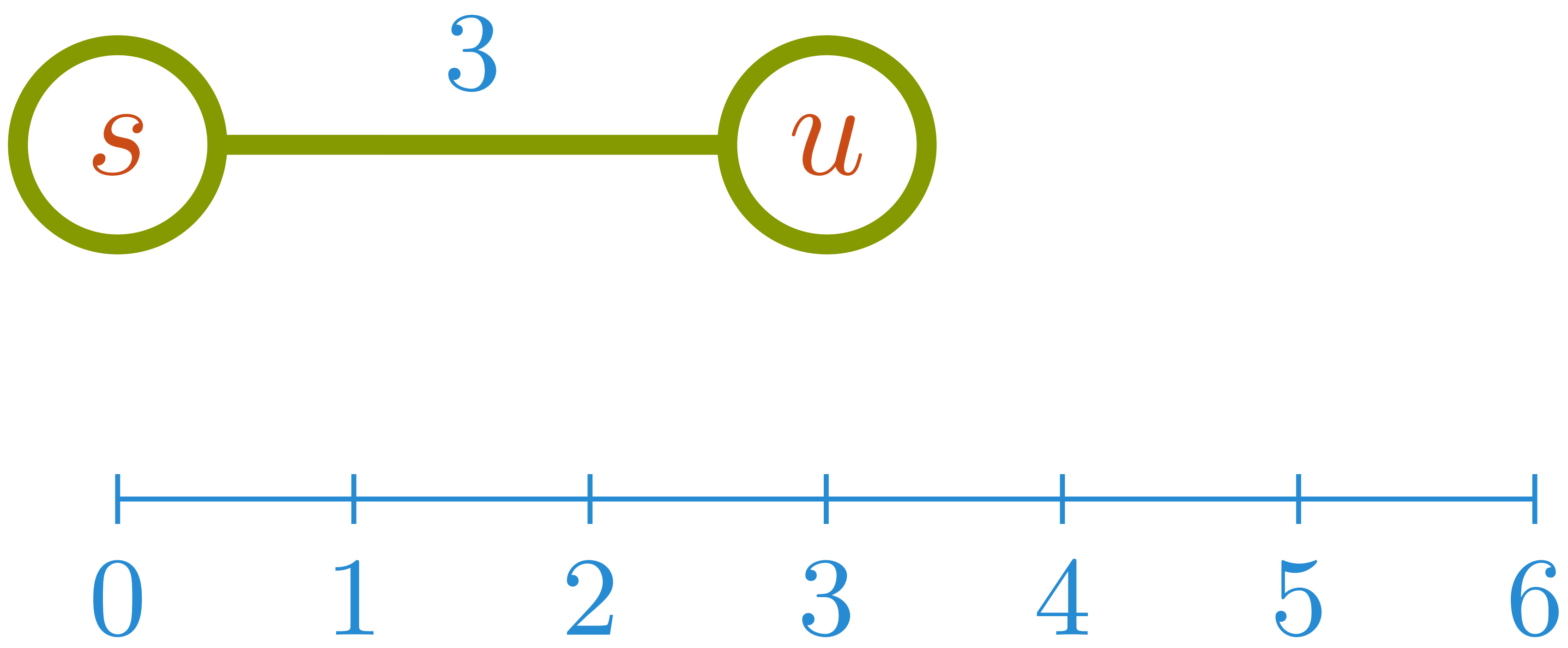
Her er s startnoden, og avstans-overestimatet $u.d$ er 6



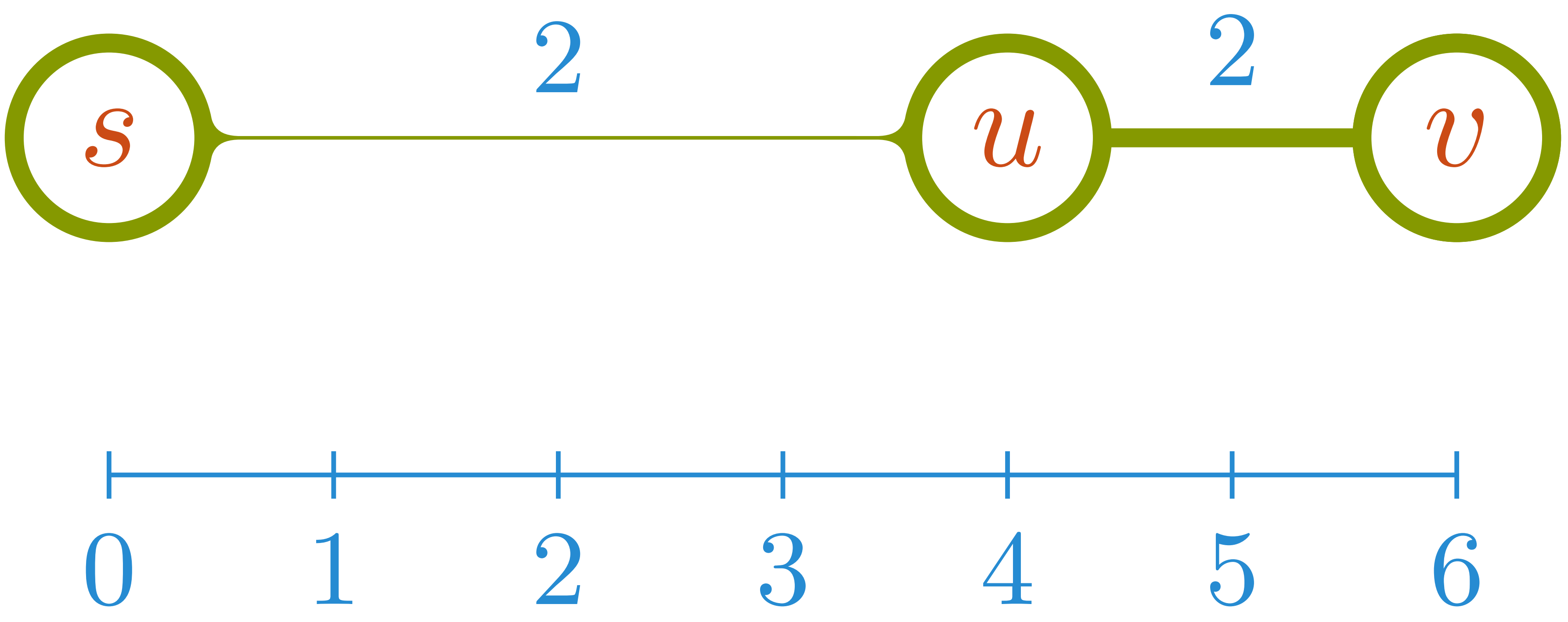
Men esimtatet her trenger ikke være mer enn 3



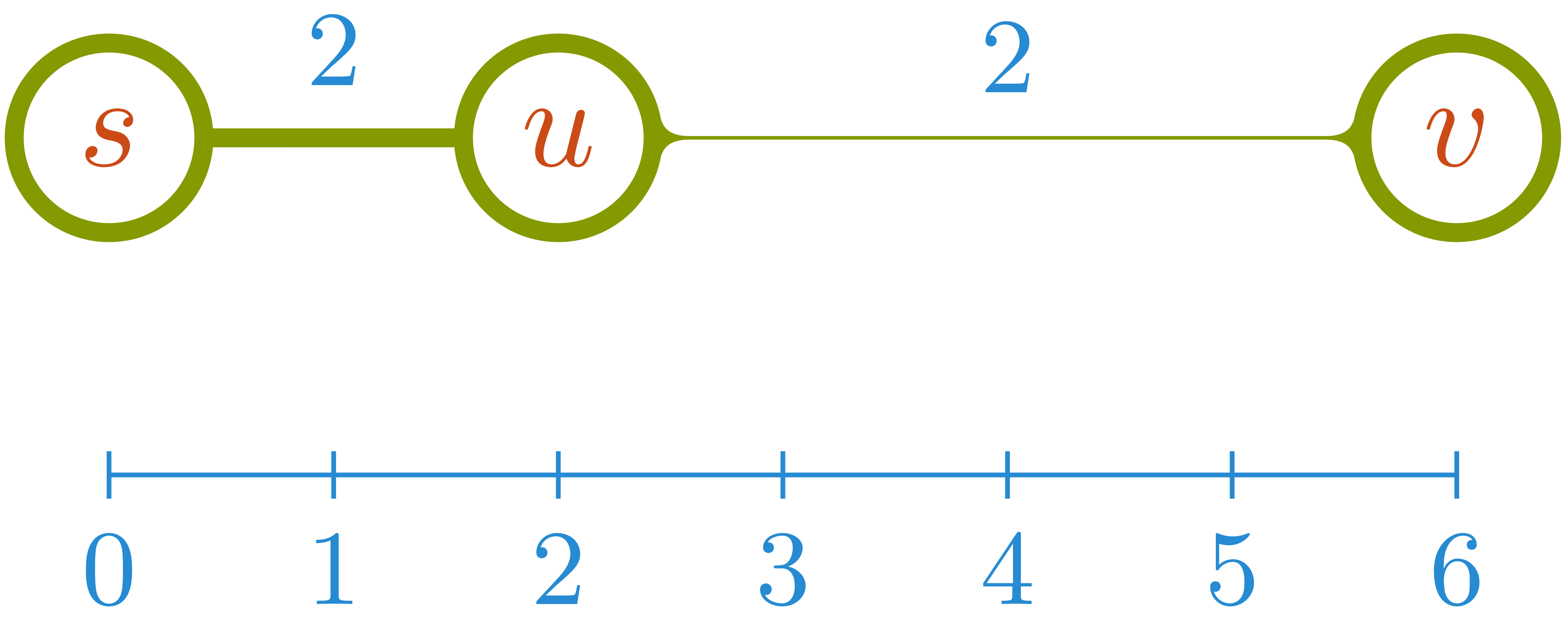
Men esimtatet her trenger ikke være mer enn 3



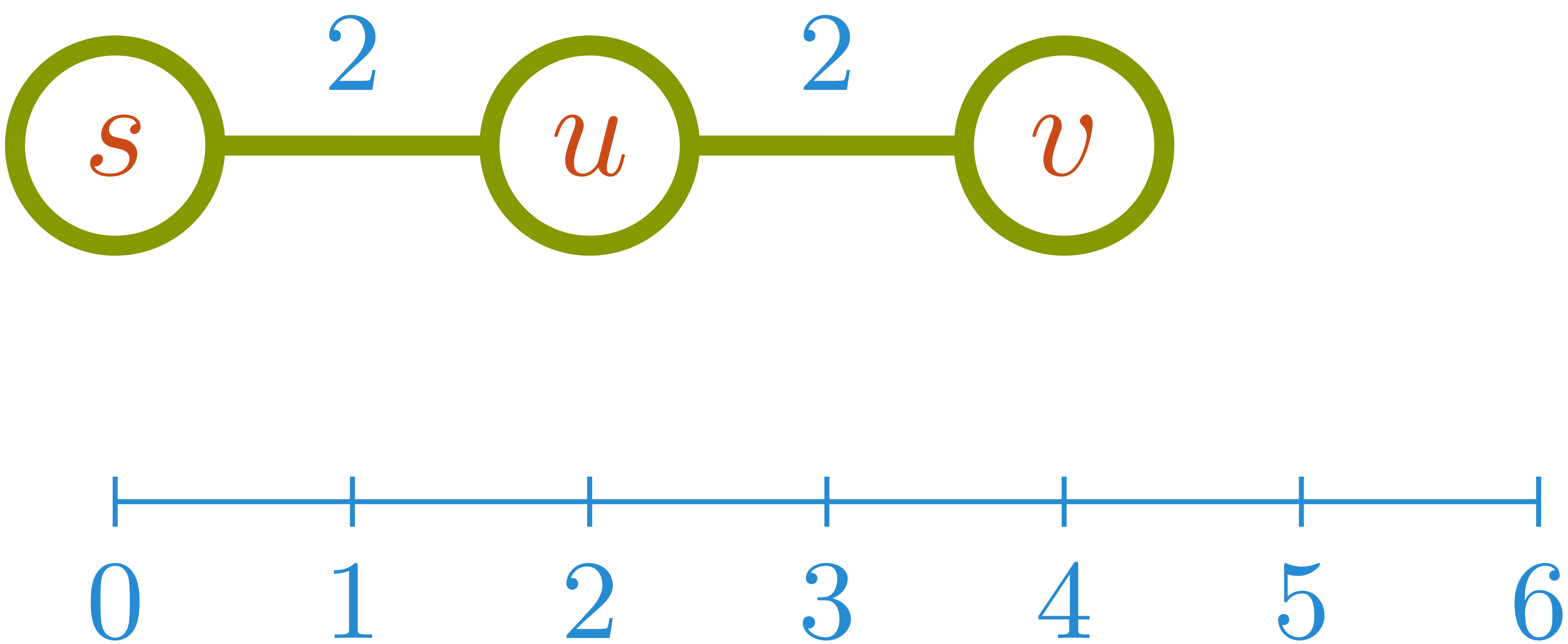
Kanskje det finnes en kortere vei, men avstanden er maks 3



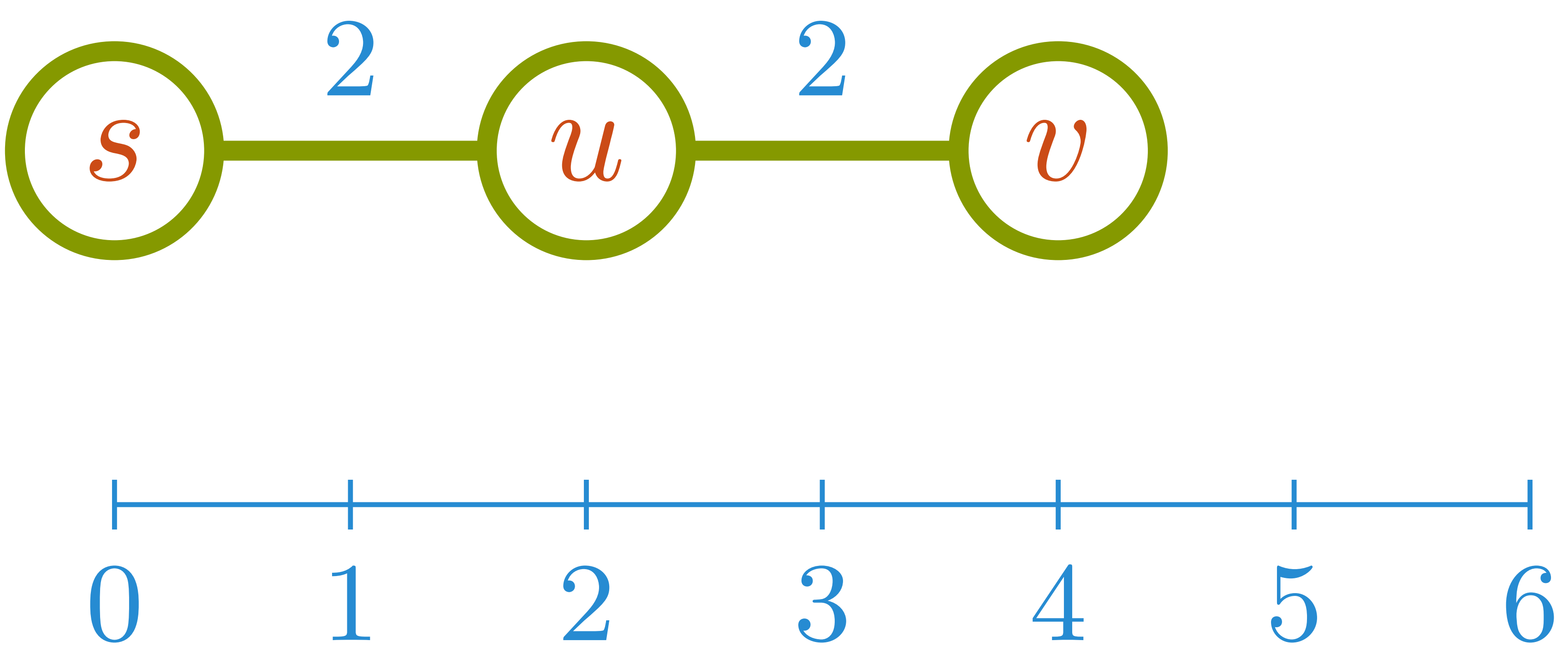
Her er $u.d$ for stor; trenger maks være 2



Men nå ser vi at $v.d$ er for stor; trenger maks være $d.u + 2 = 4$

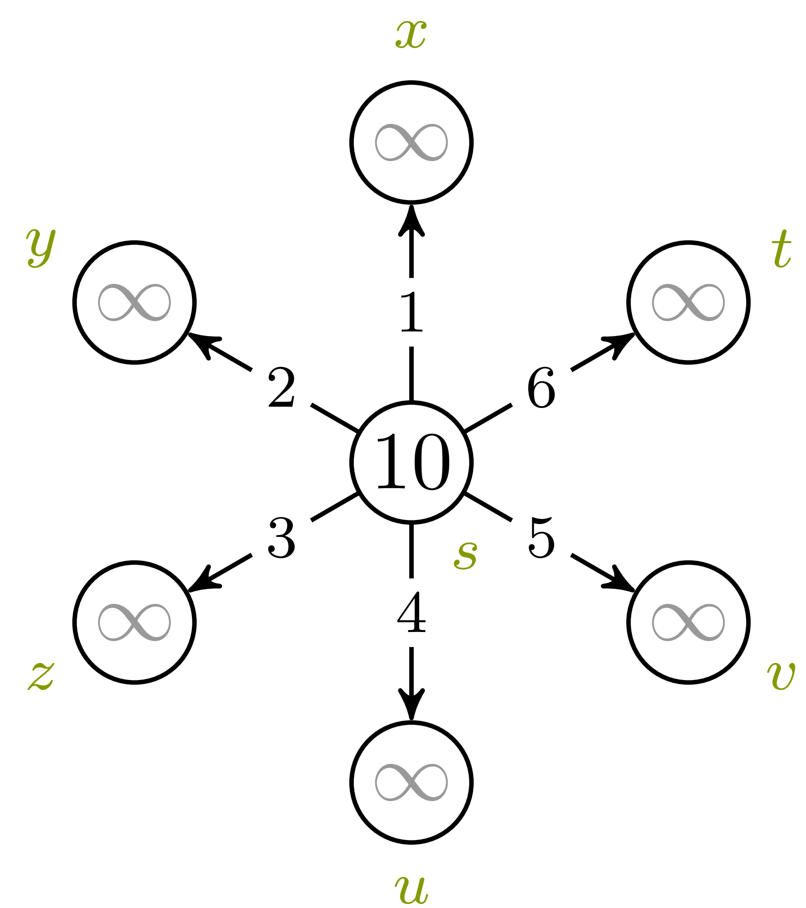


Finnes andre kanter, så kan veien være kortere; ikke lengre!

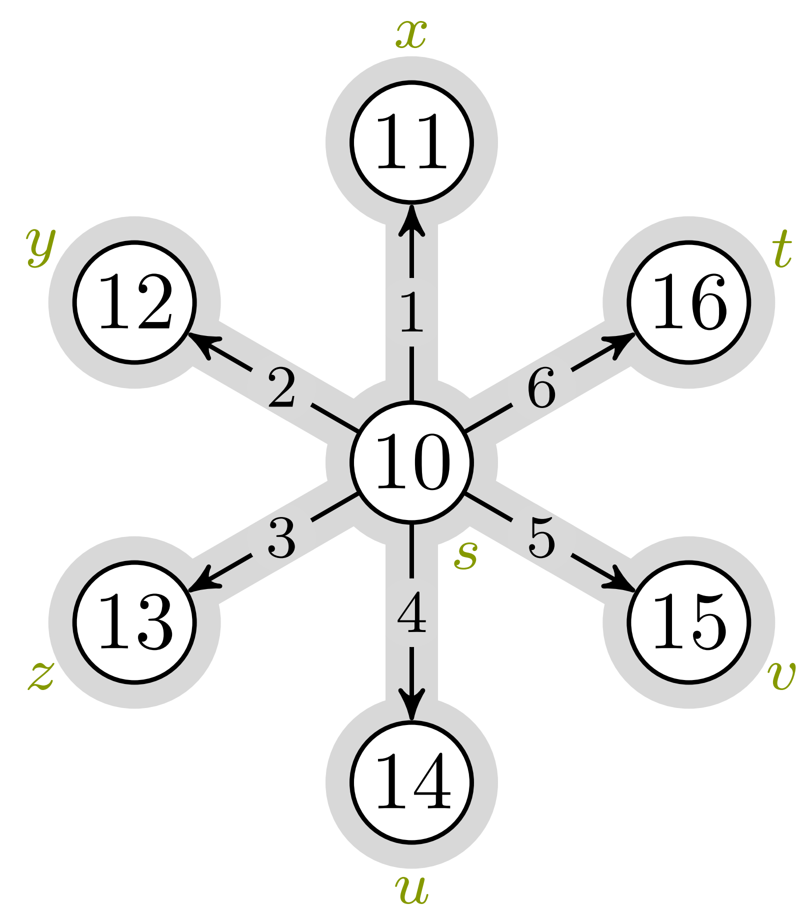


Er dette den korteste stien, så er $u.d$ og $v.d$ nå korrekte

```
Relax(s, x)
Relax(s, y)
Relax(s, z)
Relax(s, u)
Relax(s, v)
Relax(s, t)
```

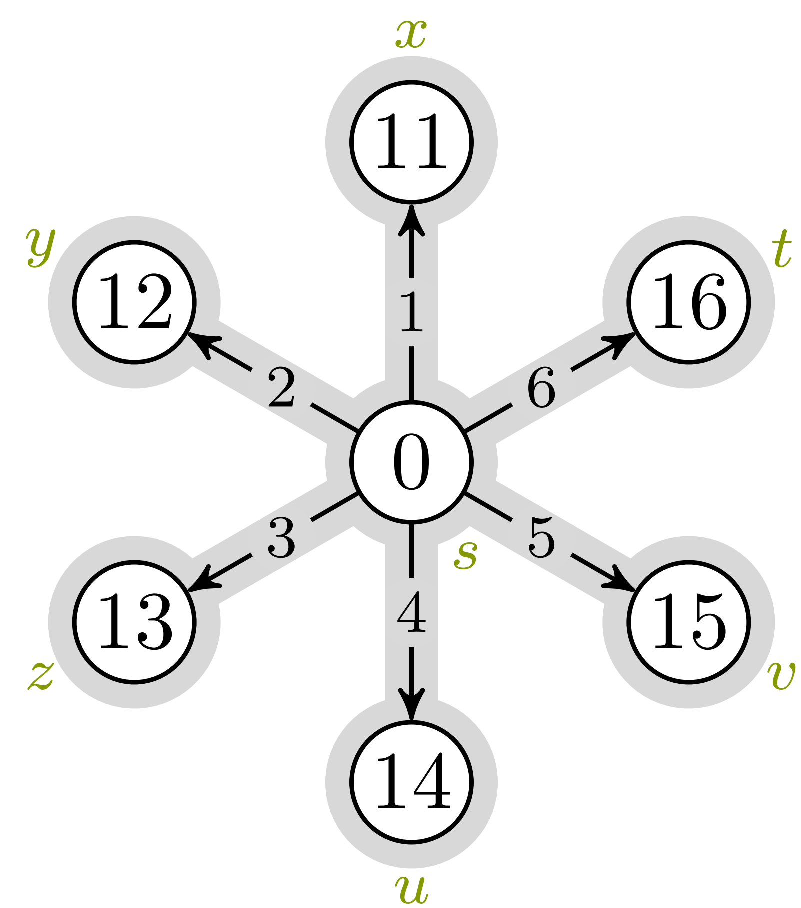


Relax(s, x)
Relax(s, y)
Relax(s, z)
Relax(s, u)
Relax(s, v)
Relax(s, t)



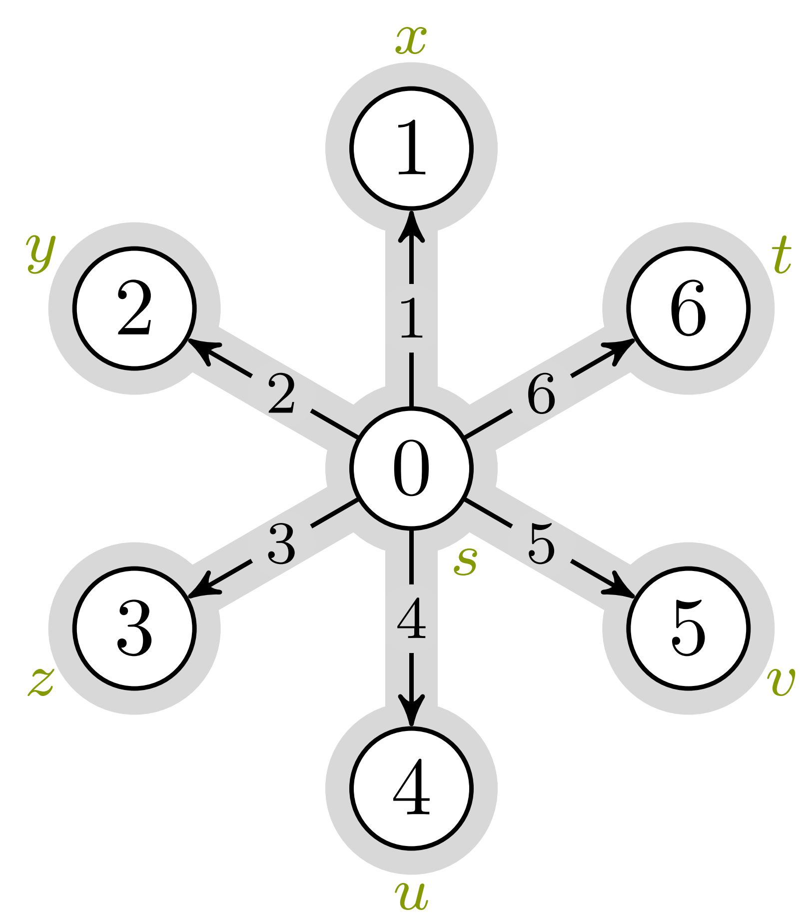
Ferdig . . .

RELAX(s, x)
RELAX(s, y)
RELAX(s, z)
RELAX(s, u)
RELAX(s, v)
RELAX(s, t)

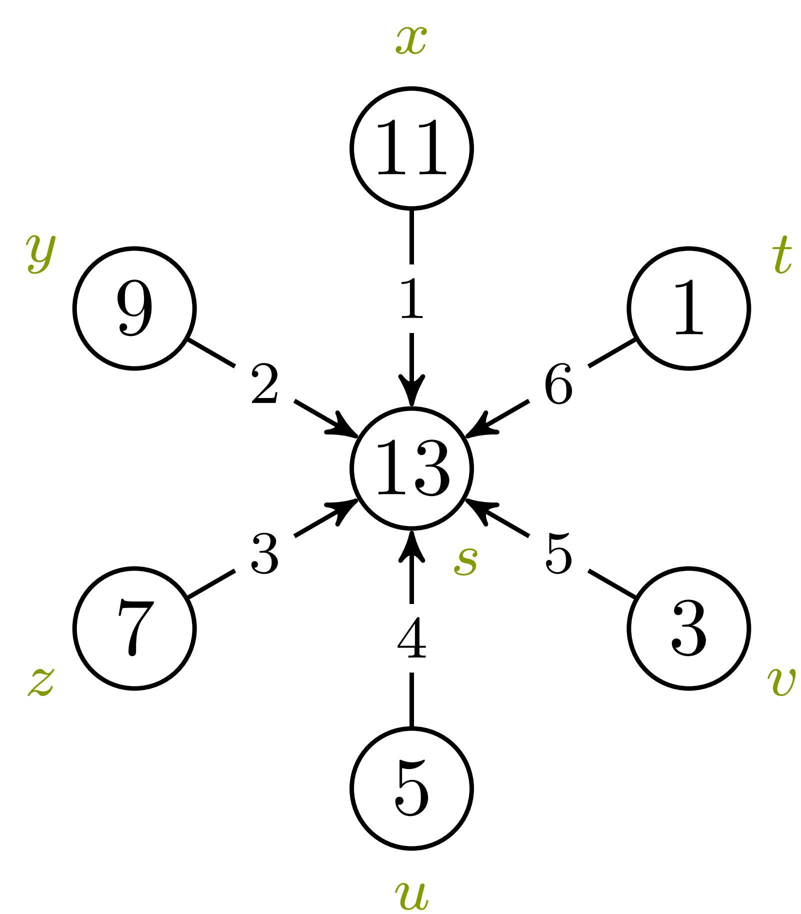


. . . med mindre $s.d$ endres!

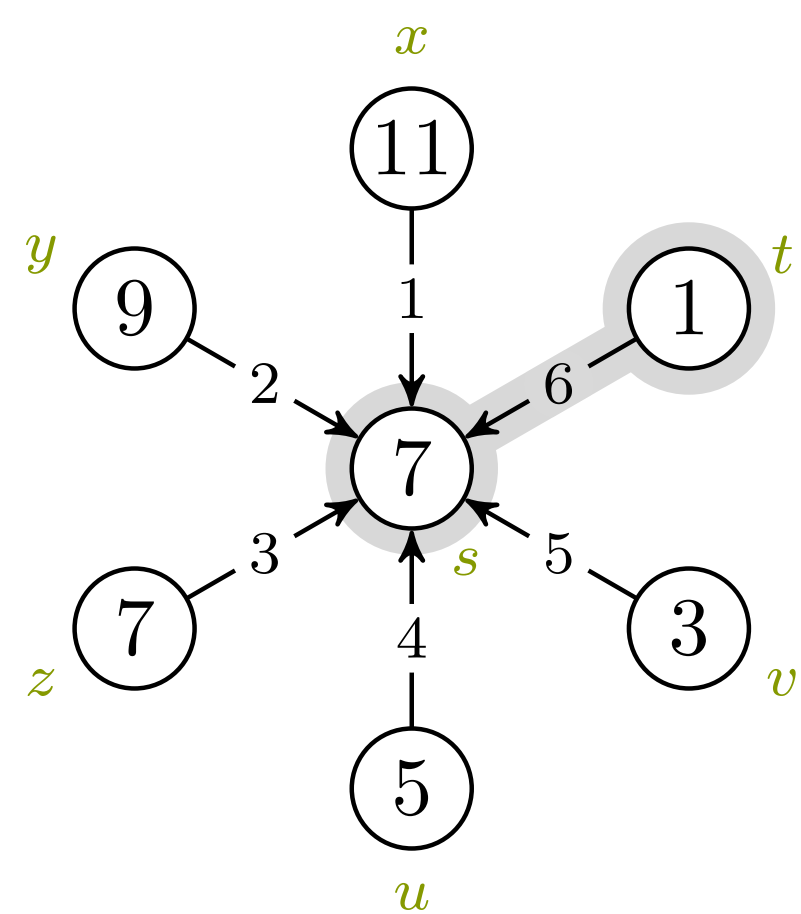
1 $\text{Relax}(s, x)$
2 $\text{Relax}(s, y)$
3 $\text{Relax}(s, z)$
4 $\text{Relax}(s, u)$
5 $\text{Relax}(s, v)$
6 $\text{Relax}(s, t)$



```
Relax(x, s)
Relax(y, s)
Relax(z, s)
Relax(u, s)
Relax(v, s)
Relax(t, s)
```

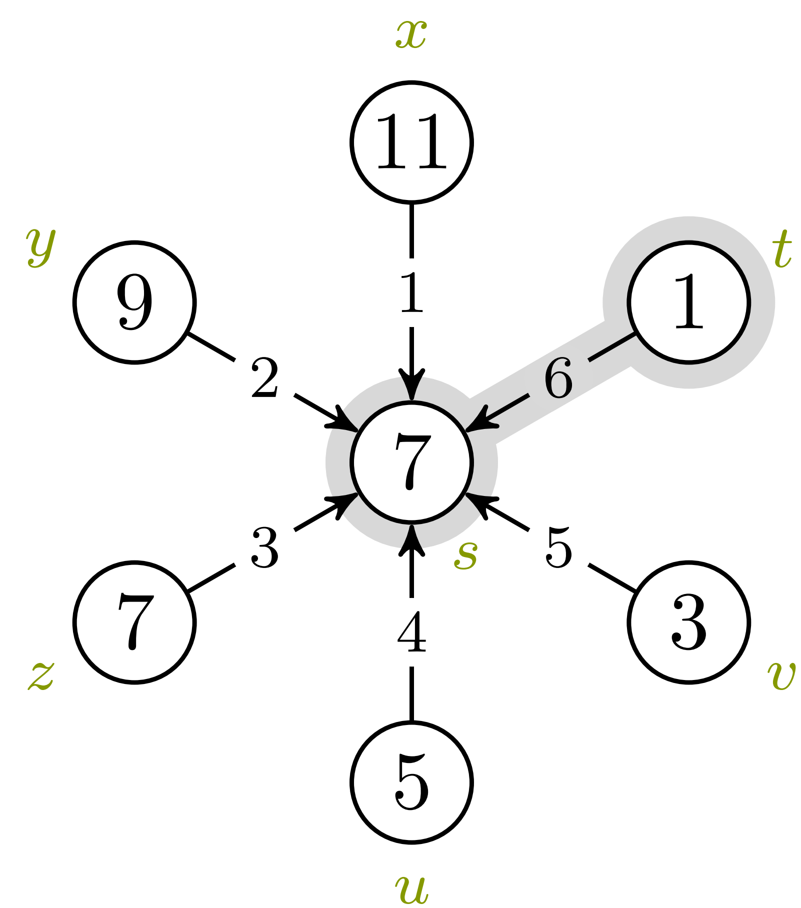


Relax(x, s)
Relax(y, s)
Relax(z, s)
Relax(u, s)
Relax(v, s)
Relax(t, s)

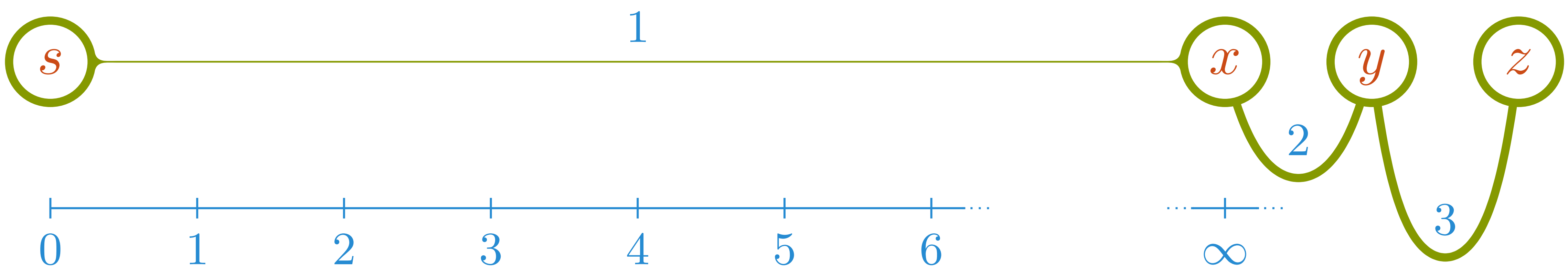


$s.d$ er min. over inn-kanter

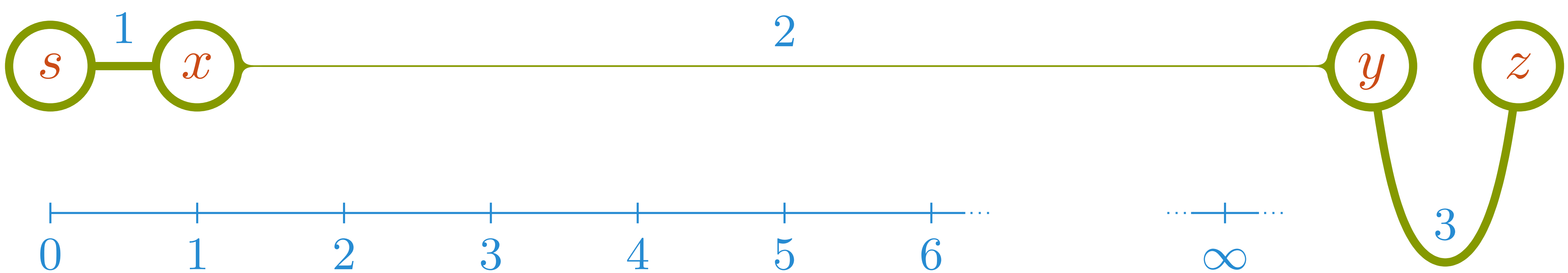
```
Relax(x, s)
Relax(y, s)
Relax(z, s)
Relax(u, s)
Relax(v, s)
Relax(t, s)
```



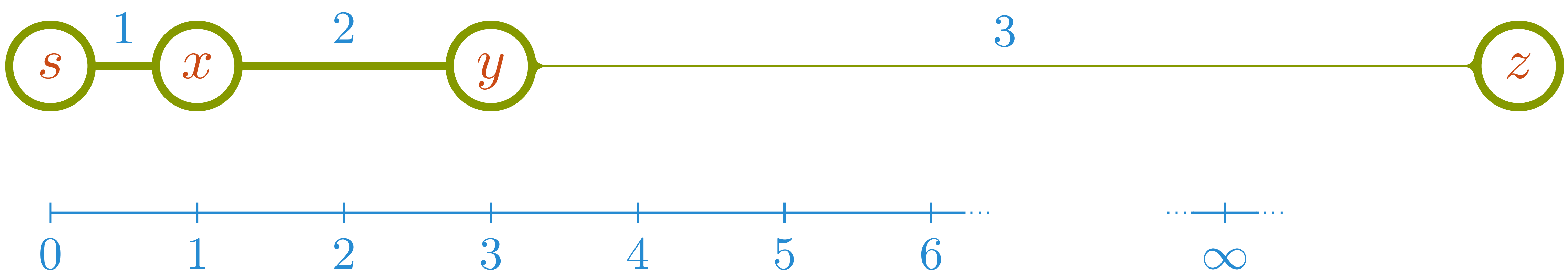
$x.d, y.d \ldots$ rett $\implies$ $s.d$ rett



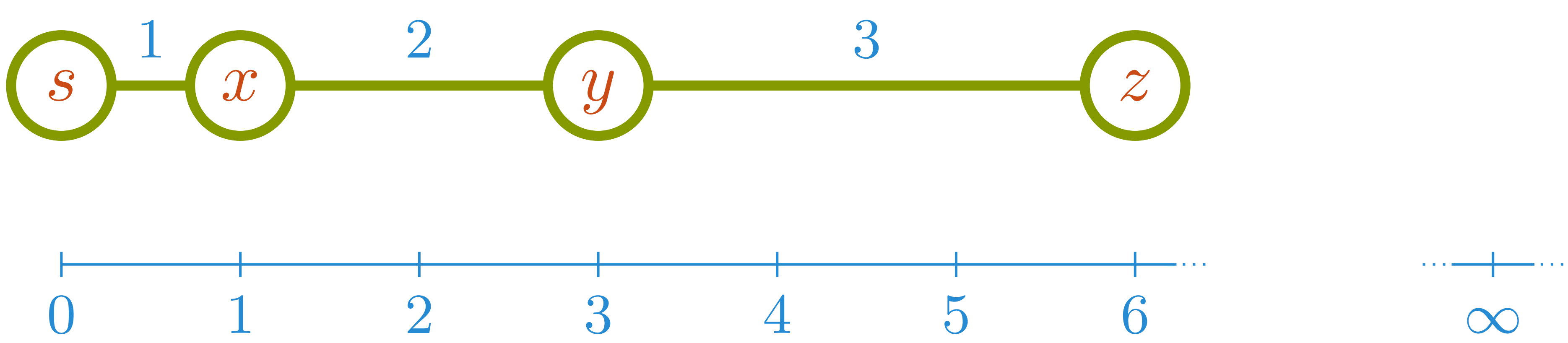
For å sikre oss mot «juks» starter vi med uendelige estimater



Vi «reparerer» så ett og ett estimat . . .



1
2
3
s
x
y
z
0
1
2
3
4
5
6
∞



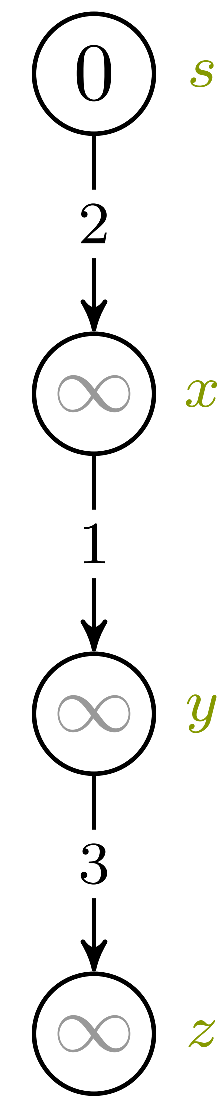
... helt til alle er korrekte

Sti-slakkings-egenskapen

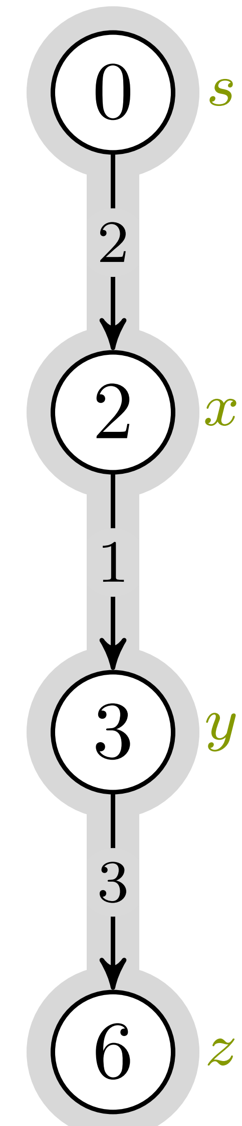
Om p er en kortest vei fra s til v og vi slakker kantene til p i rekkefølge, så vil v få riktig avstandsestimat. Det gjelder uavhengig av om andre slakkinger forekommer, selv om de kommer innimellom.

«The path-relaxation property»; flere slektninger på s. 650

1 $\textsc{Relax}(y, z)$
2 $\textsc{Relax}(x, y)$
3 $\textsc{Relax}(s, x)$
4 $\textsc{Relax}(y, z)$
5 $\textsc{Relax}(x, y)$
6 $\textsc{Relax}(y, z)$
7 $\textsc{Relax}(s, x)$

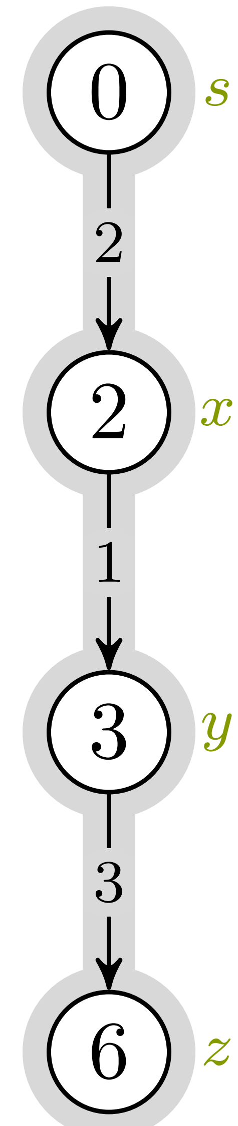


```
Relax(y, z)
Relax(x, y)
Relax(s, x)
Relax(y, z)
Relax(x, y)
Relax(y, z)
Relax(s, x)
```



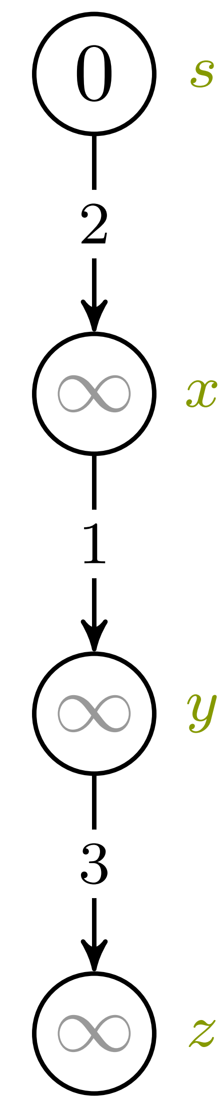
Flere kall var bortkastet

$\textsc{Relax}(y, z)$
$\textsc{Relax}(x, y)$
$\textsc{Relax}(s, x)$
$\textsc{Relax}(y, z)$
$\textsc{Relax}(x, y)$
$\textsc{Relax}(y, z)$
$\textsc{Relax}(s, x)$

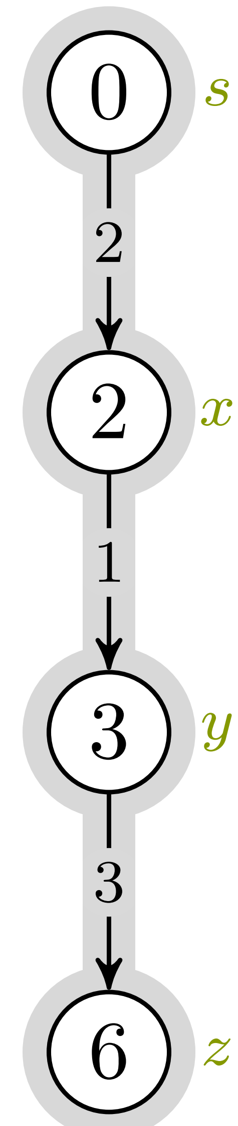


La oss droppe dem!

1. ~~Relax(y, z)~~
2. ~~Relax(x, y)~~
3. Relax(s, x)
4. ~~Relax(y, z)~~
5. Relax(x, y)
6. Relax(y, z)
7. ~~Relax(s, x)~~

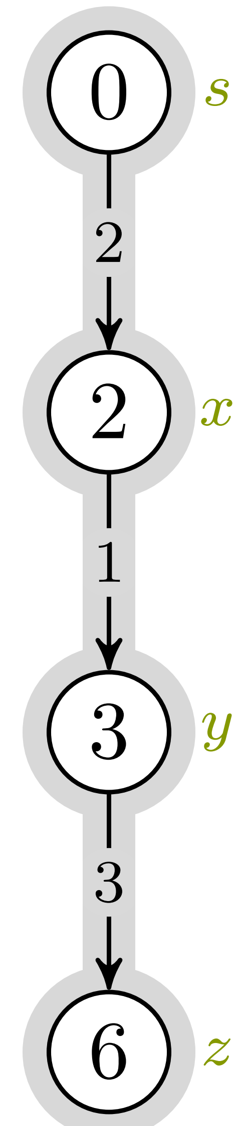


1. ~~Relax(y, z)~~
2. ~~Relax(x, y)~~
3. Relax(s, x)
4. ~~Relax(y, z)~~
5. Relax(x, y)
6. Relax(y, z)
7. ~~Relax(s, x)~~



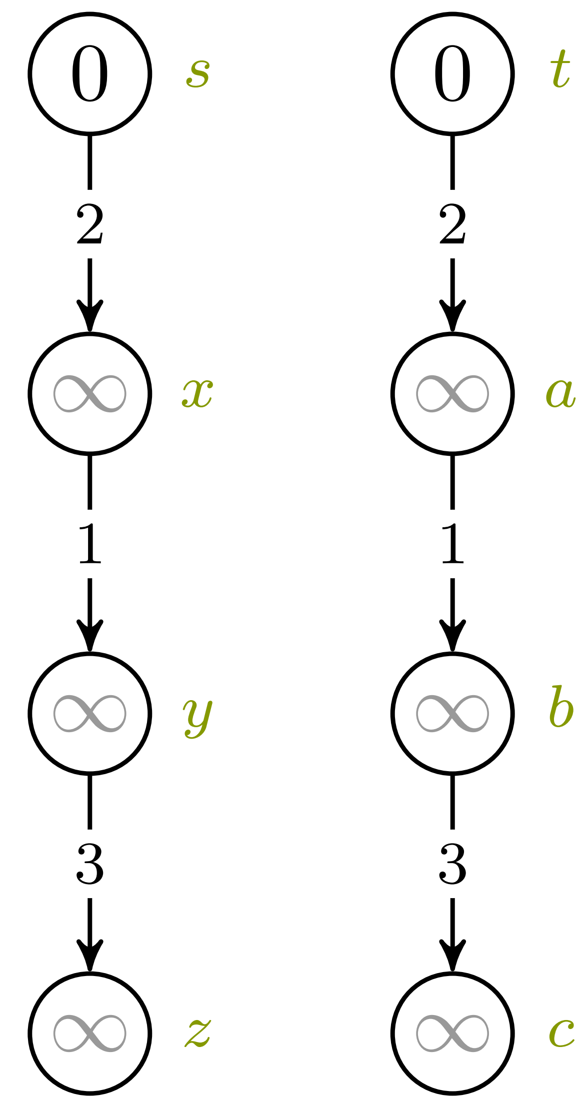
Samme utvikling; samme svar

1 ~~RELAX(y, z)~~
2 ~~RELAX(x, y)~~
3 RELAX(s, x)
4 ~~RELAX(y, z)~~
5 RELAX(x, y)
6 RELAX(y, z)
7 ~~RELAX(s, x)~~



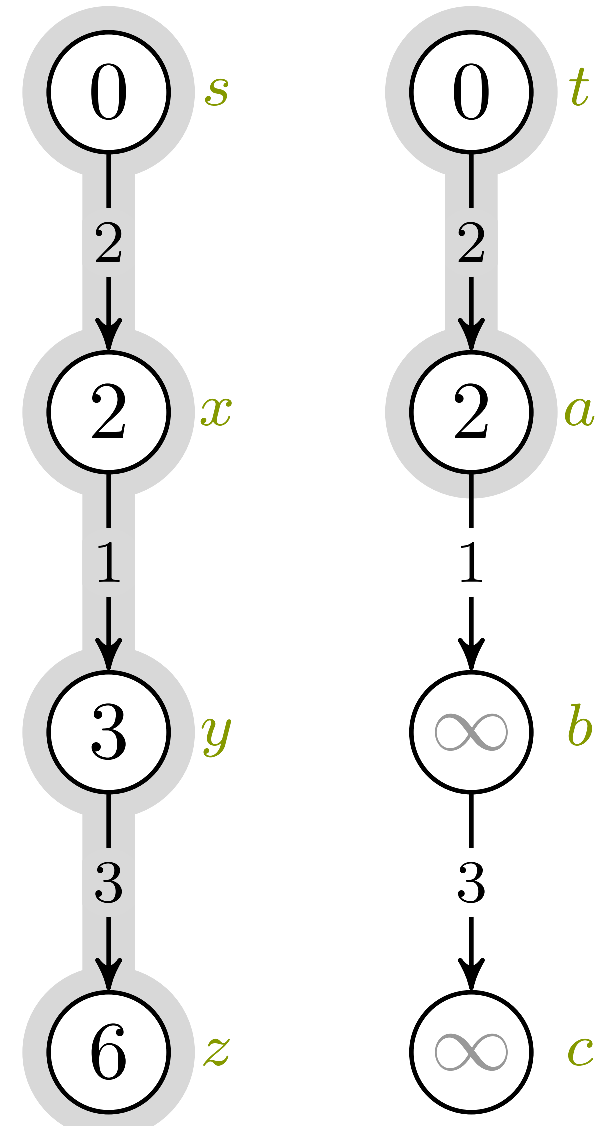
Følger rekkefølgen langs stien!

$\textsc{Relax}(s, x)$
$\textsc{Relax}(x, y)$
$\textsc{Relax}(y, z)$
$\textsc{Relax}(b, c)$
$\textsc{Relax}(a, b)$
$\textsc{Relax}(t, a)$



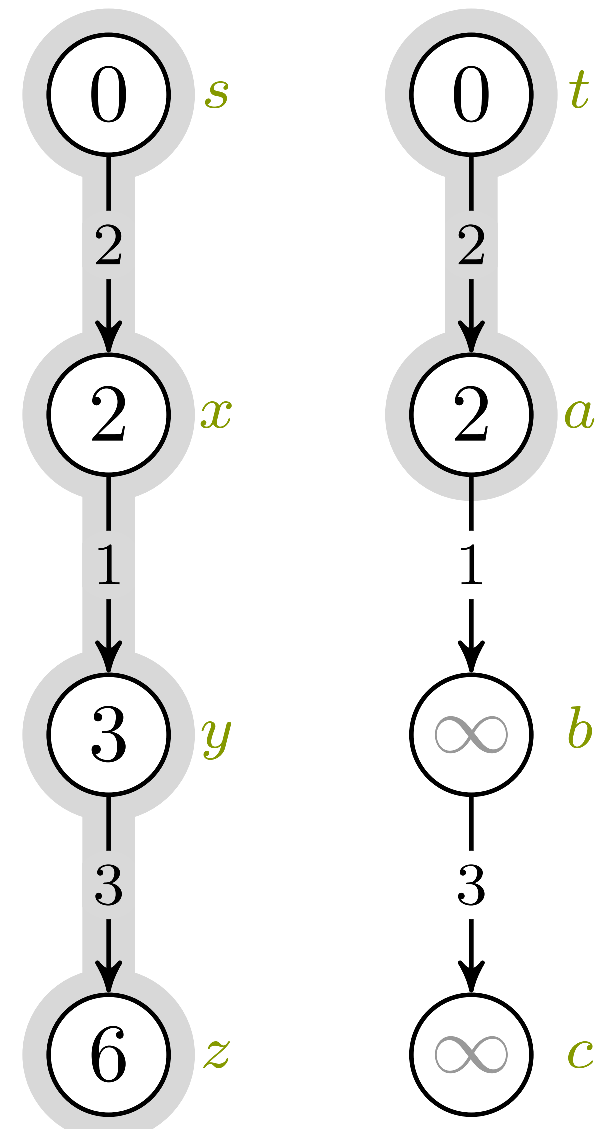
Slakk alle kanter én gang

```
Relax(s, x)
Relax(x, y)
Relax(y, z)
Relax(b, c)
Relax(a, b)
Relax(t, a)
```



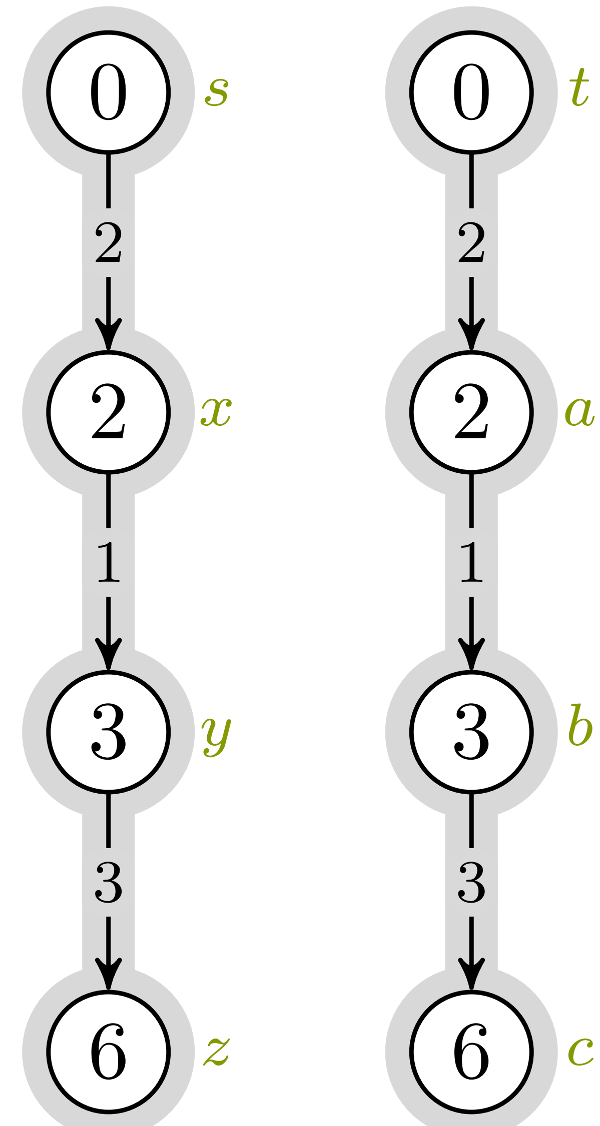
Flaks? Ferdig!

$\textsc{Relax}(s, x)$
$\textsc{Relax}(x, y)$
$\textsc{Relax}(y, z)$
$\textsc{Relax}(b, c)$
$\textsc{Relax}(a, b)$
$\textsc{Relax}(t, a)$



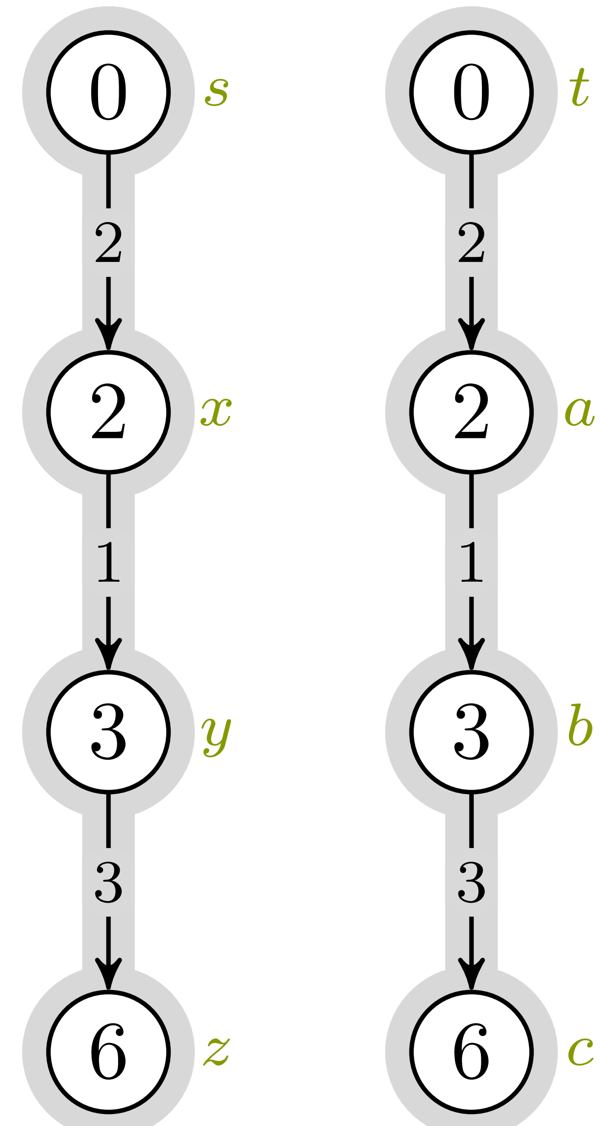
Uflaks? Ett hakk videre

```
Relax(s, x)
Relax(x, y)
Relax(y, z)
Relax(b, c)
Relax(a, b)
Relax(t, a)
```



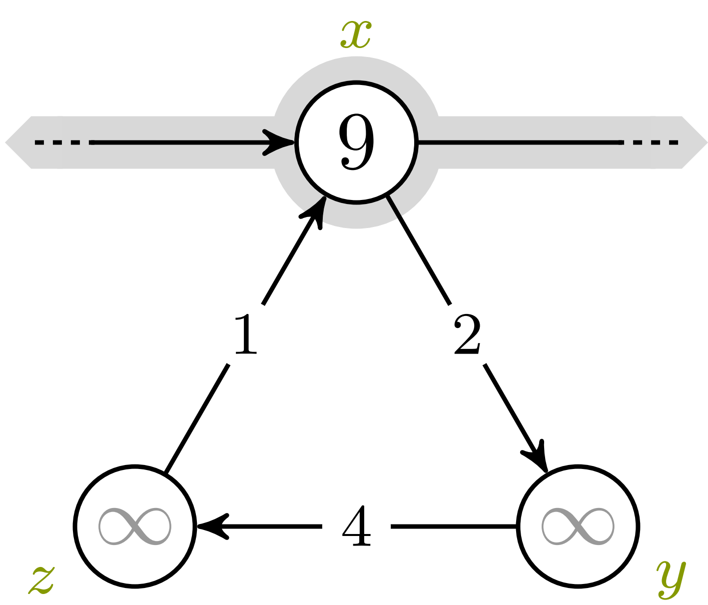
Tre pass: Garantert ferdig

RELAX(s, x)
RELAX(x, y)
RELAX(y, z)
RELAX(b, c)
RELAX(a, b)
RELAX(t, a)



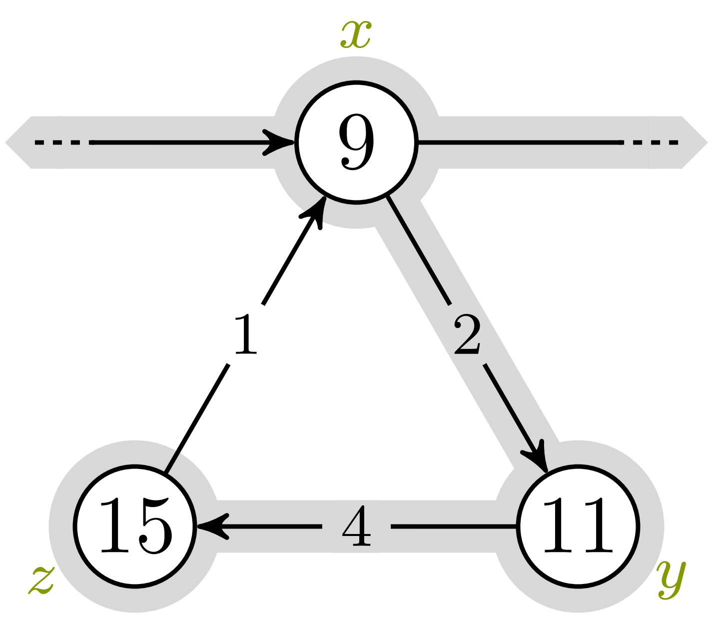
Hvorfor akkurat tre?

1 $\textsc{Relax}(x, y)$
2 $\textsc{Relax}(y, z)$
3 $\textsc{Relax}(z, x)$



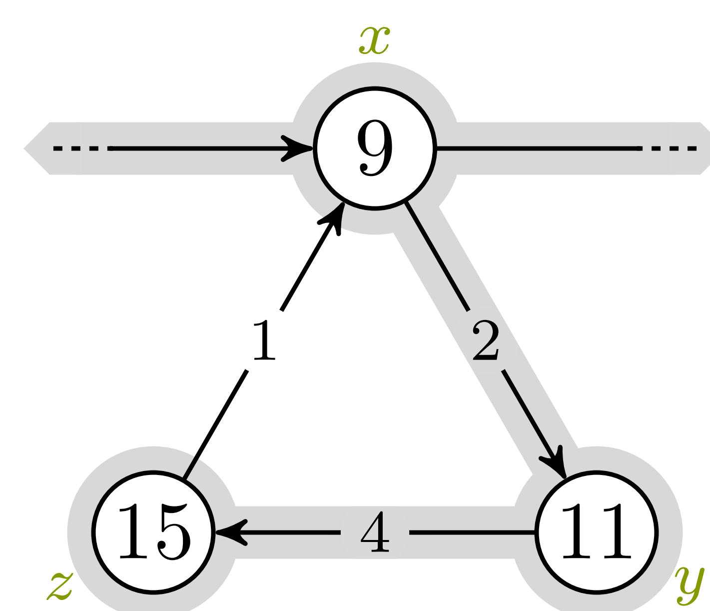
Positiv sykel

1 Relax(x, y)
2 Relax(y, z)
3 Relax(z, x)



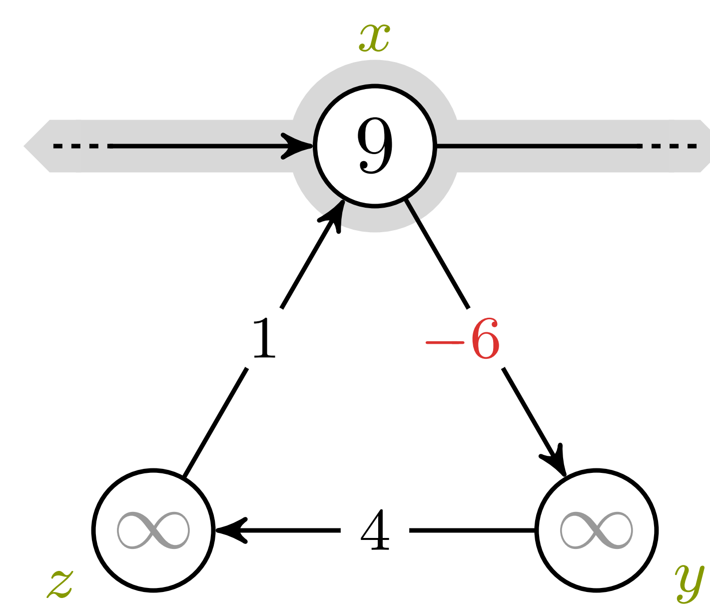
Unødvendig ekstrakostnad

1 $\textsc{Relax}(x, y)$
2 $\textsc{Relax}(y, z)$
3 $\textsc{Relax}(z, x)$



Vil ikke bli del av kortest vei

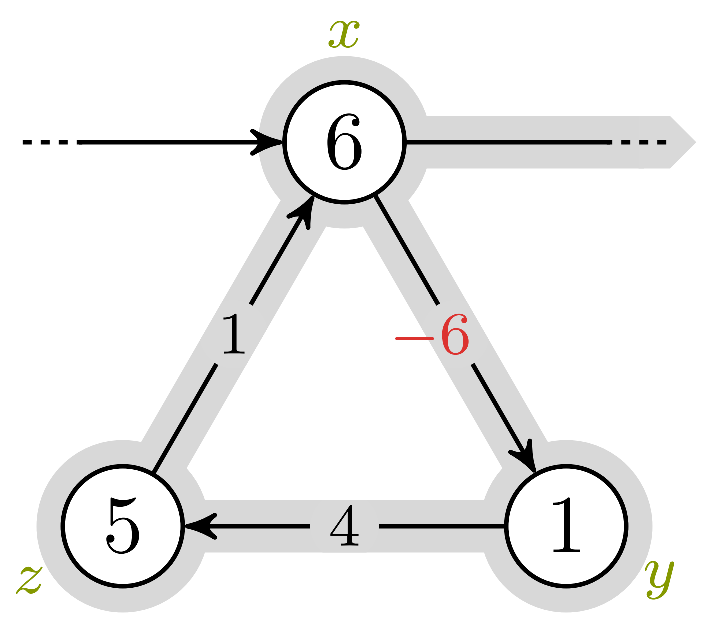
Relax(x, y)
Relax(y, z)
Relax(z, x)
Relax(x, y)
Relax(y, z)
Relax(z, x)
Relax(x, y)
Relax(y, z)
Relax(z, x)



Negativ sykel

1 Relax(x, y)
2 Relax(y, z)
3 Relax(z, x)
4 Relax(x, y)
5 Relax(y, z)
6 Relax(z, x)
7 Relax(x, y)
8 Relax(y, z)
9 Relax(z, x)

Etc.



Ingen sti er kortest!

- **En enkel sti er en sti uten sykler**
- **En kortest sti er alltid enkel**
- **Negativ sykel? Ingen sti er kortest!**
- **Det finnes fortsatt en kortest enkel sti**
- **Å finne den effektivt: Uløst (NP-hardt)**

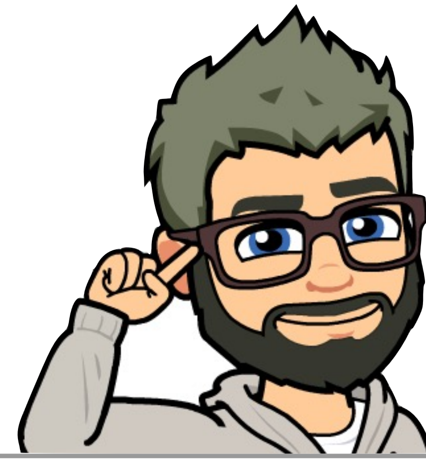
La $\langle v_1, v_2 \ldots, v_k \rangle$ være korteste vei til z.

Vi vil slakke kantene langs stien, men kjenner ikke rekkefølgen.

Løsning:

Slakk absolutt alle kanter $k - 1$ ganger!

Iterasjon i slakker alle, og dermed også (v_i, v_{i+1})



La $\langle v_1, v_2 \ldots, v_k \rangle$ være korteste vei til z.

Vi vil slakke kantene langs stien, men kjenner ikke rekkefølgen.

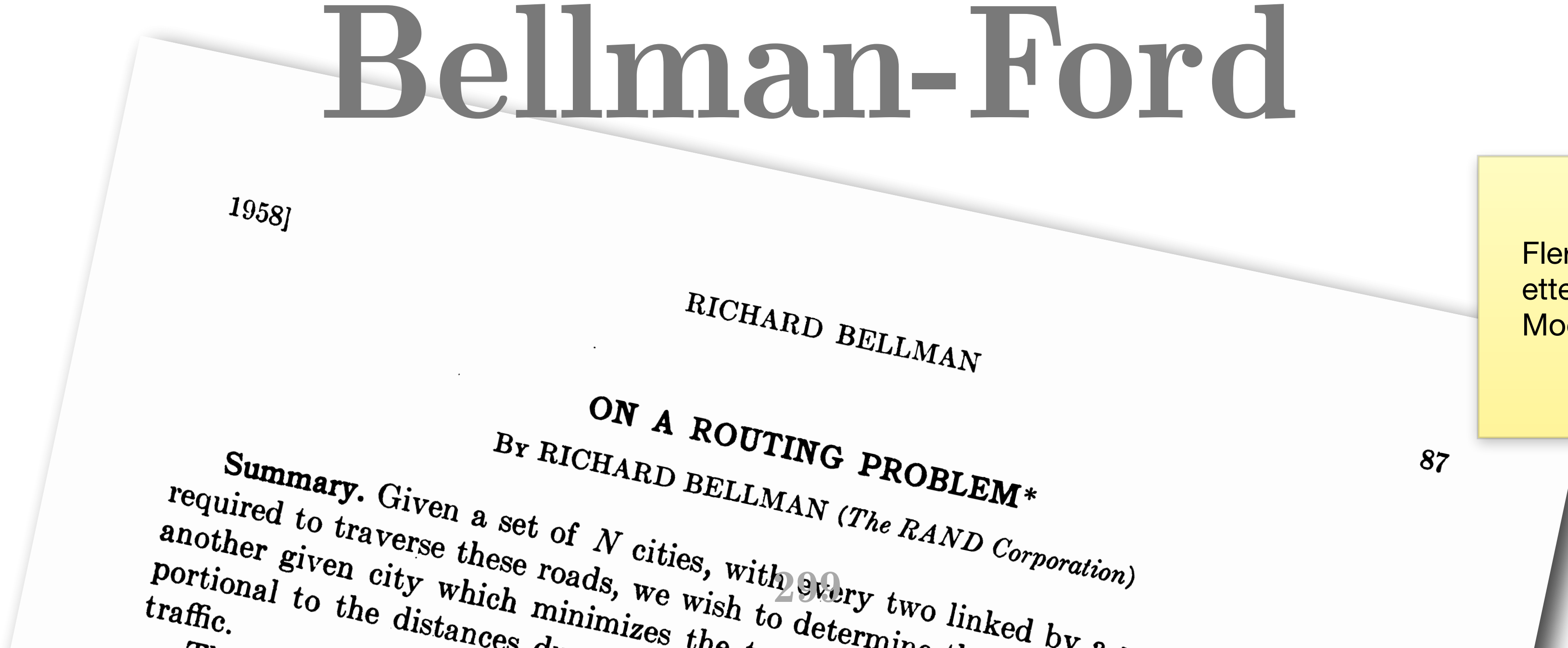
Løsning:

Slakk absolutt alle kanter $k - 1$ ganger!

Hvis vi lar $k = |V|$ så får alle noder rett estimat

4:5

Bellman-Ford


1958]

RICHARD BELLMAN

87

ON A ROUTING PROBLEM*

By RICHARD BELLMAN (*The RAND Corporation*)

Summary. Given a set of N cities, with every two linked by a
required to traverse these roads, we wish to determine the
another given city which minimizes the
portional to the distances
traffic.

Flere har publisert metoden før/etter, inkl. Shimbel, Ford og Moore.

$\textsc{Bellman-Ford}(G, w, s)$

G	graf
w	vekting
s	startnode

Slakk alle kantene til det bare må bli rett!

Bellman-Ford(G, w, s)
1 Initialize-Single-Source(G, s)

G graf
w vekting
s startnode

$\textsc{Bellman-Ford}(G, w, s)$
1 $\textsc{Initialize-Single-Source}(G, s)$
2 **for** $i = 1$ **to** $|G.V| - 1$

G graf
w vekting
s startnode
i teller

Ingen stier har flere enn $|V| - 1$ kanter

Bellman-Ford(G, w, s)
1 Initialize-Single-Source(G, s)
2 **for** $i = 1$ **to** $|G.V| - 1$
3 **for** each edge $(u, v) \in G.E$

G	graf
w	vekting
s	startnode
i	teller
u	fra-node
v	til-node

Gå gjennom alle $|V| - 1$ ganger

BELLMAN-FORD(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for $i = 1$ **to** $|\mathrm{G.V}| - 1$
    for each edge $(u, v) \in \mathrm{G.E}$
        RELAX(u, v, w)

G	graf
w	vekting
s	startnode
i	teller
u	fra-node
v	til-node

Alle stier må nå ha fått kantene slakket i rekkefølge!

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for i = 1 to |G.V| − 1
      for each edge (u, v) ∈ G.E
          RELAX(u, v, w)
  for each edge (u, v) ∈ G.E
```

G	graf
w	vekting
s	startnode
i	teller
u	fra-node
v	til-node

Vi kjører én iterasjon til…

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for i = 1 to |G.V| − 1
      for each edge (u, v) ∈ G.E
          RELAX(u, v, w)
  for each edge (u, v) ∈ G.E
      if v.d > u.d + w(u, v)
```

G	graf
w	vekting
s	startnode
i	teller
u	fra-node
v	til-node

Men bare sjekker om det fortsatt finnes snarveier

Bellman-Ford(G, w, s)

Initialize-Single-Source(G, s)
for $i = 1$ **to** $|\text{G.V}| - 1$
    for each edge $(u, v) \in \text{G.E}$
        Relax(u, v, w)
for each edge $(u, v) \in \text{G.E}$
    if $v.d > u.d + w(u, v)$
        return FALSE

G	graf
w	vekting
s	startnode
i	teller
u	fra-node
v	til-node

I så fall: Vi må ha kommet borti en negativ sykel

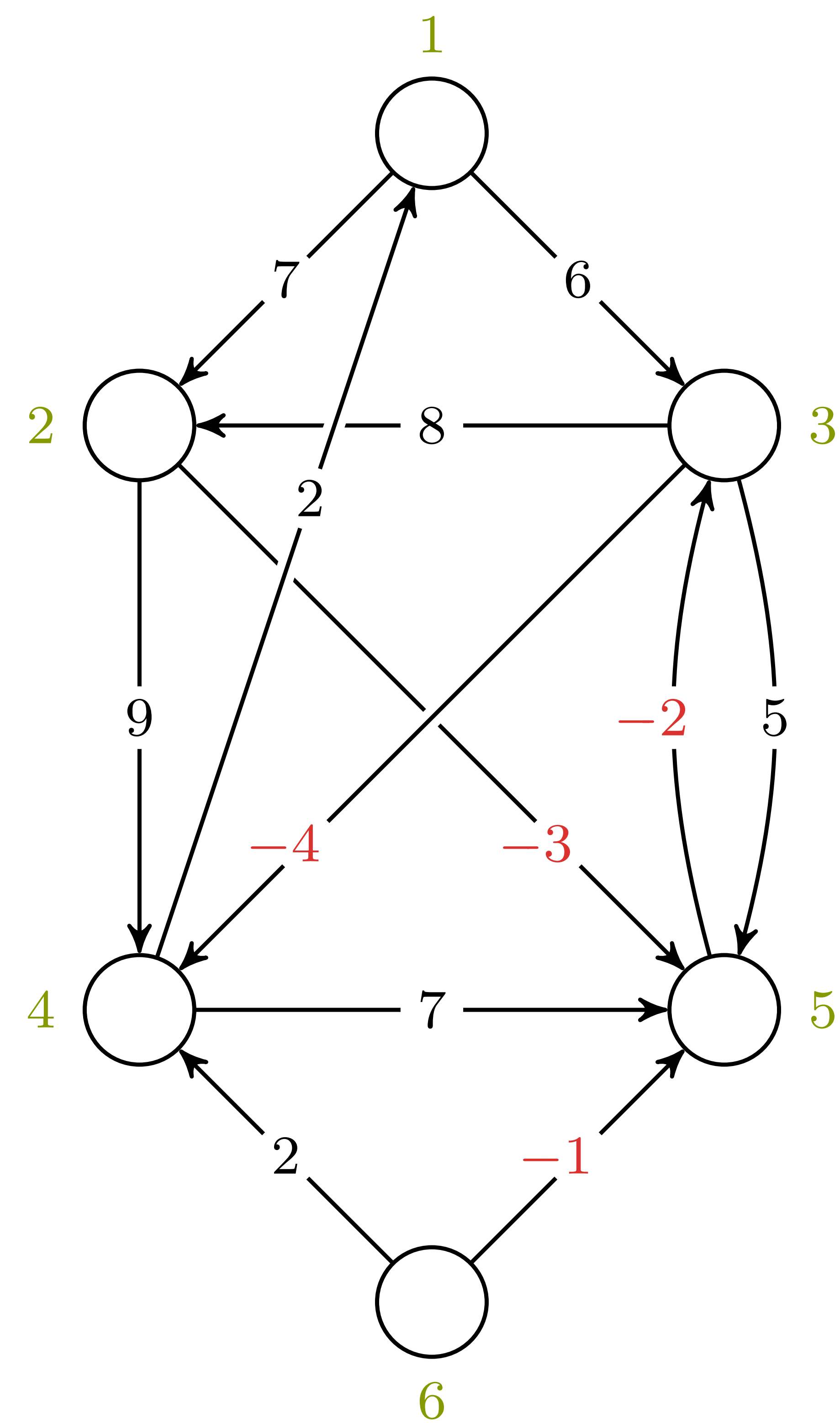
```
Bellman-Ford(G, w, s)
    Initialize-Single-Source(G, s)
    for i = 1 to |G.V| − 1
        for each edge (u, v) ∈ G.E
            Relax(u, v, w)
    for each edge (u, v) ∈ G.E
        if v.d > u.d + w(u, v)
            return FALSE
    return TRUE
```

G	graf
w	vekting
s	startnode
i	teller
u	fra-node
v	til-node

Ellers: Svaret vi fant må være rett!

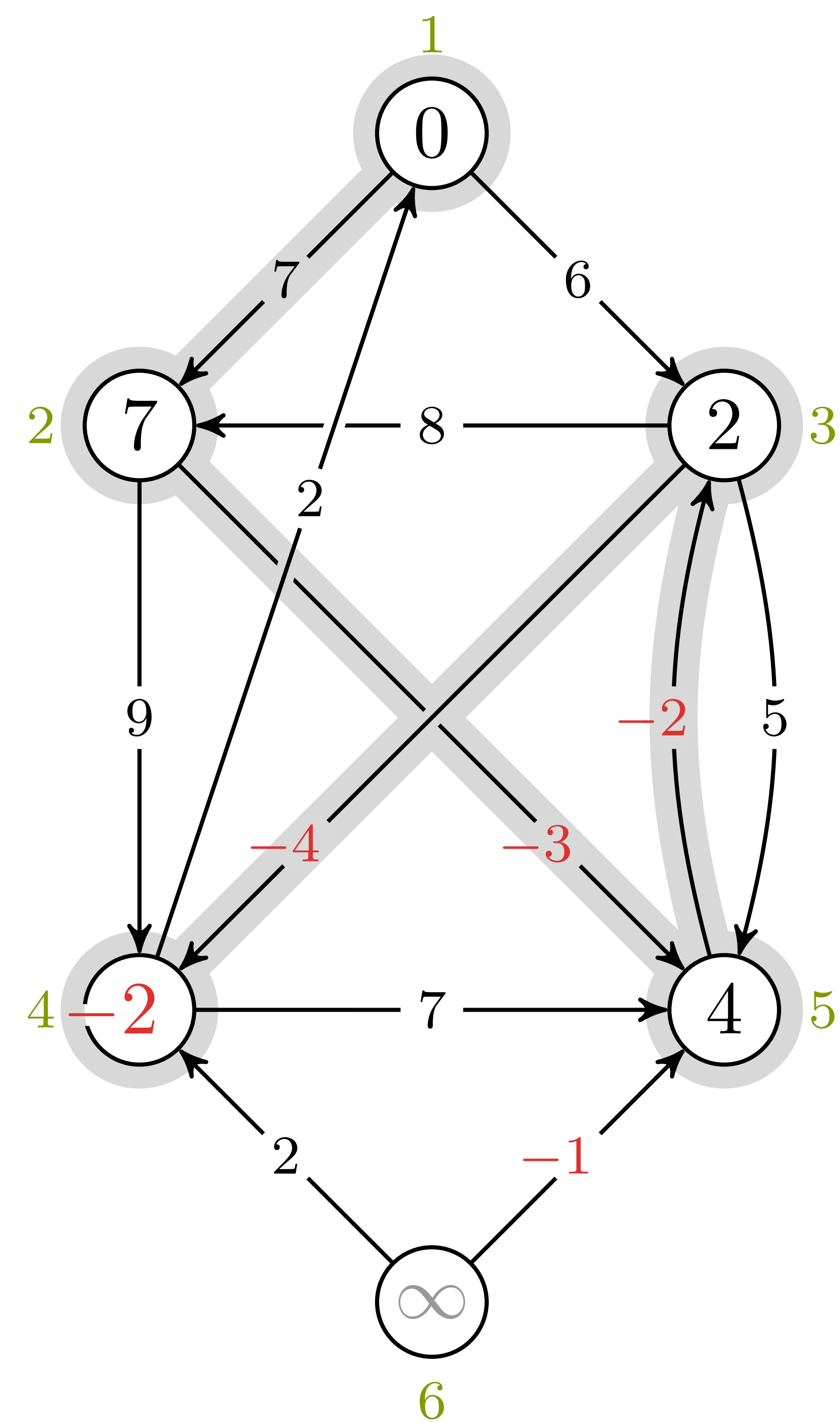
```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for i = 1 to |G.V| − 1
    for each edge (u, v) ∈ G.E
        RELAX(u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ G.E
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return FALSE
return TRUE
```

$i, u, v \; = \; \text{-}, \text{-}, \text{-}$



```
Bellman-Ford(G, w, s)
Initialize-Single-Source(G, s)
for i = 1 to |G.V| − 1
    for each edge (u, v) ∈ G.E
        Relax(u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ G.E
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return false
return true
```

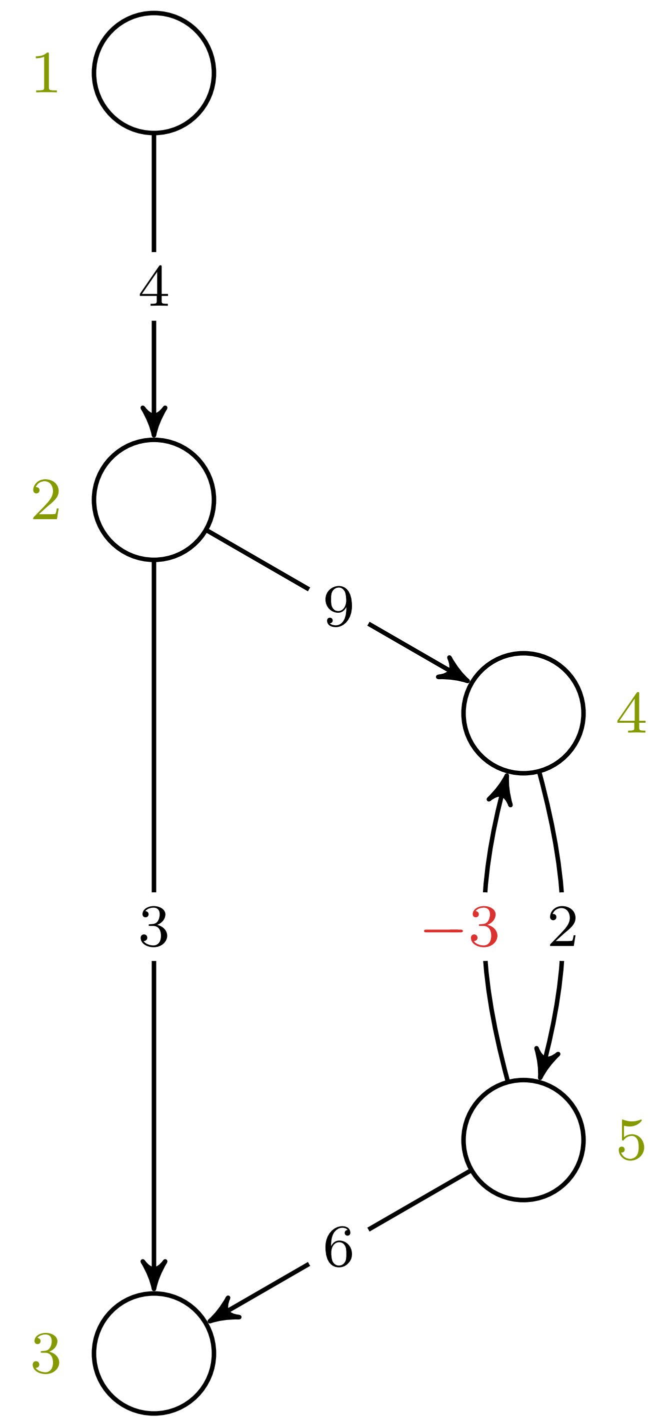
→ TRUE



$i, u, v \;=\; \text{-}, \text{-}, \text{-}$

Negative sykler skaper trøbbel … det finnes fortsatt en kortest enkel sti, men vi klarer ikke finne den med denne fremgangsmåten.

```
Bellman-Ford(G, w, s)
Initialize-Single-Source(G, s)
for i = 1 to |G.V| − 1
    for each edge (u, v) ∈ G.E
        Relax(u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ G.E
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return false
return true
```

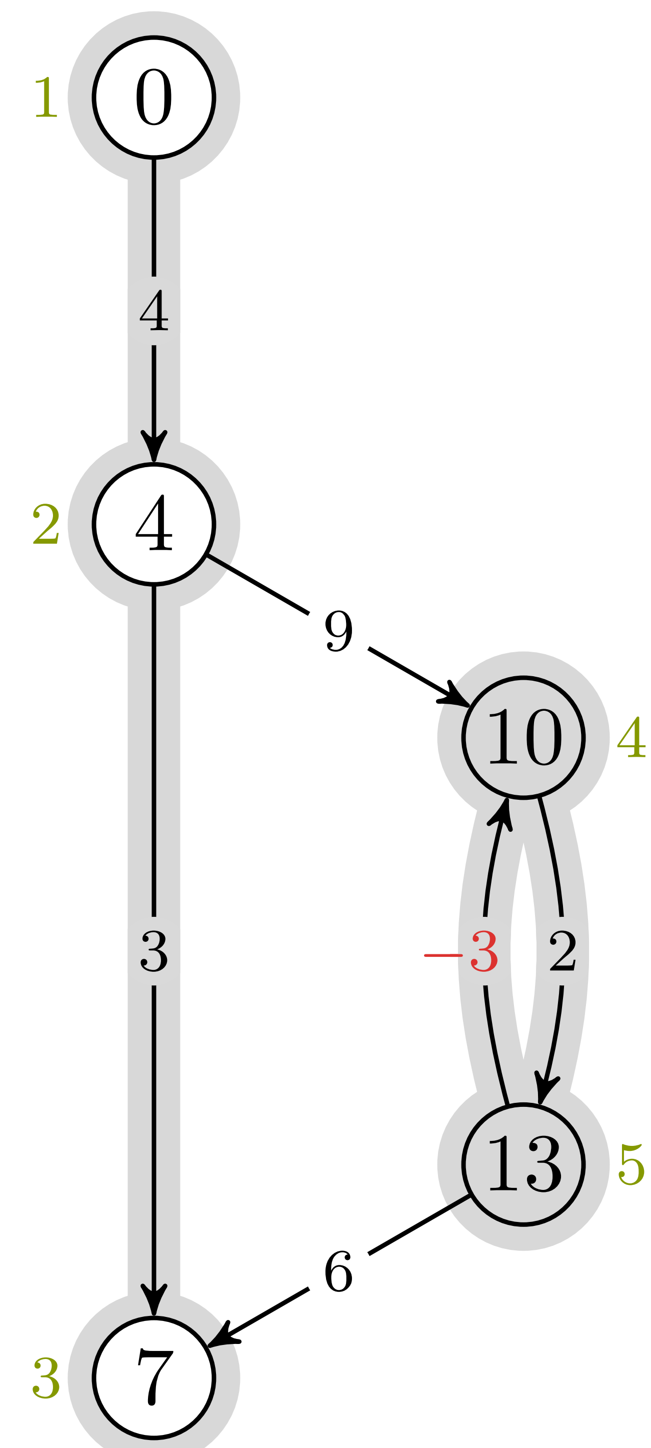


$i, u, v \;=\; -, -, -$

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for i = 1 to |G.V| − 1
    for each edge (u, v) ∈ G.E
        RELAX(u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ G.E
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return FALSE
return TRUE
```

→ FALSE

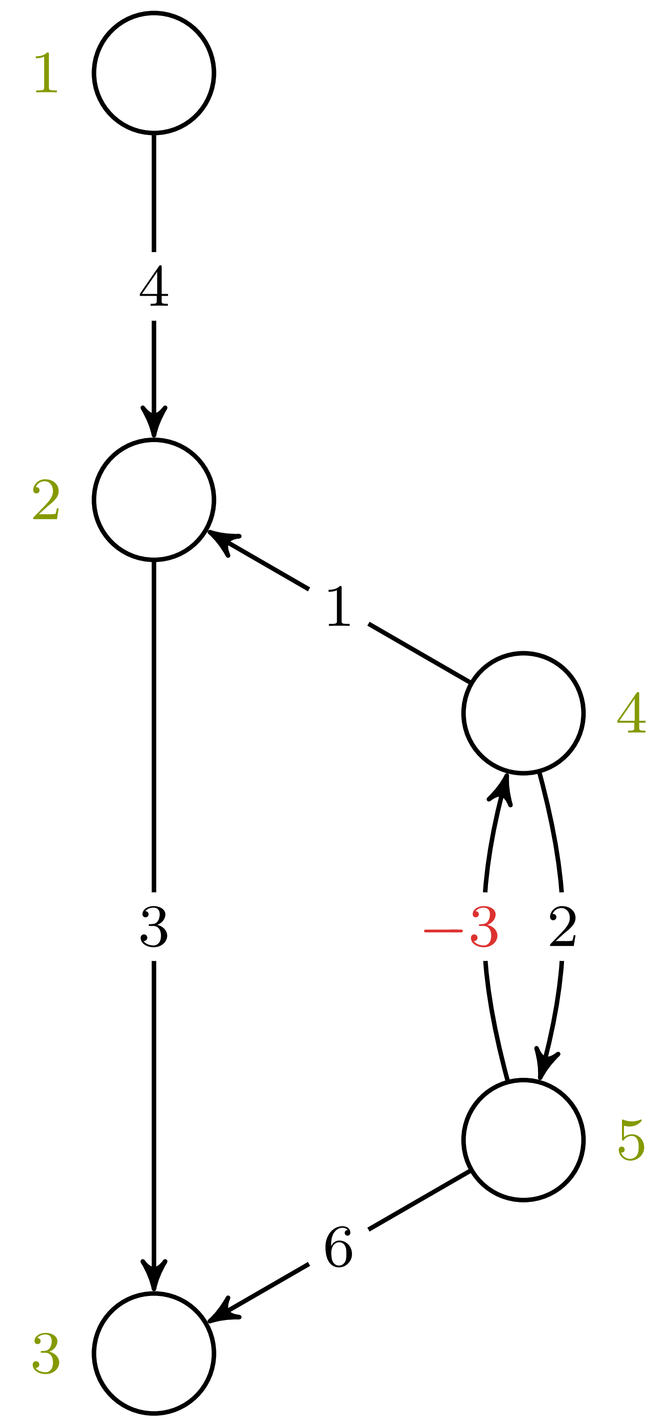
$i, u, v \ = \ $ -, -, -



Merk at om ingen stier fra startnoden når frem til den negative sykelen, så skaper den *ikke* problemer, og løsningen vår er gyldig.

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for i = 1 to |G.V| − 1
    for each edge (u, v) ∈ G.E
        RELAX(u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ G.E
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return FALSE
return TRUE
```

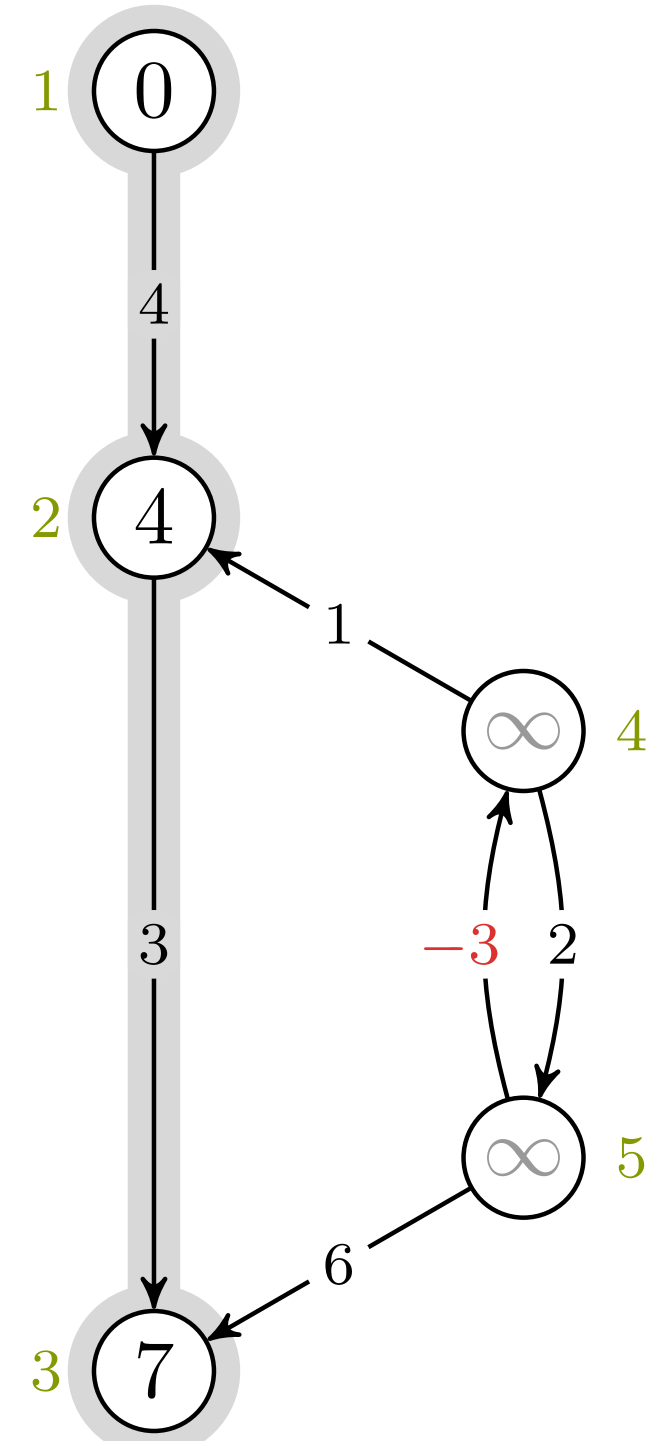
$i, u, v \;=\; -, -, -$



```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for i = 1 to |G.V| − 1
    for each edge (u, v) ∈ G.E
        RELAX(u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ G.E
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return FALSE
return TRUE
```

→ TRUE

$i, u, v \ = \ $ -, -, -



Bellman-Ford ›

Kjøretid

Se også oppg. 24-1

Operasjon	**Antall**	**Kjøretid**
Initialisering	1	$\Theta(V)$
Relax	$V - 1$	

(Altså slakking av alle kantene)

Operasjon	**Antall**	**Kjøretid**
Initialisering	1	$\Theta(V)$
RELAX	$V - 1$	$\Theta(E)$
RELAX	1	$O(E)$

Totalt: $\Theta(VE)$

Her oppgir boka bare den øvre grensen, O(VE).

Operasjon	**Antall**	**Kjøretid**
Initialisering	1	$\Theta(V)$
RELAX	$V - 1$	$\Theta(E)$
RELAX	1	$O(E)$

Totalt: $\Theta(VE)$

Stopp når ingenting endres? Fortsatt $O(VE)$

Om et estimat endres, så var tidligere slakking fra noden bortkastet.

Konklusjon:

Slakk kanter fra v når $v.d$ ikke kan forbedres.

Og hvis $\delta(s, v) < v.d$ så kan $u.d$ forbedres (via korteste vei)

Om et estimat endres, så var tidligere slakking fra noden bortkastet.

Konklusjon:

Slakk kanter fra v når $v.d$ ikke kan forbedres.

Men hvordan vet vi når $v.d$ ikke kan forbedres?

mlh@ntnu.no

Det vi startet med!

Strategi 1 av 2:

Slakk kanter ut fra noder i topologisk sortert rekkefølge.

Strategi 1 av 2:

Slakk kanter ut fra noder i topologisk sortert rekkefølge.*

Hvorfor blir det rett?

Når alle inn-kanter er slakket kan ikke noden forbedres, og kan trygt velges som neste.

* Krever en rettet asyklisk graf

(Implisitt induksjon: Anta at tidligere noder har fått rett estimat)

Strategi 1 av 2:

Slakk kanter ut fra noder i topologisk sortert rekkefølge.*

Hvorfor blir det rett?

Når alle inn-kanter er slakket kan ikke noden forbedres, og kan trygt velges som neste.

* Krever en rettet asyklisk graf

Evt.: Alle stier, inkl. korteste, får kanter slakket i rekkefølge

Hva om vi vil ha sykler?

Hva om vi vil ha sykler?

Strategi 2 av 2:

Velg den gjenværende med lavest estimat.

Hvorfor blir det rett?

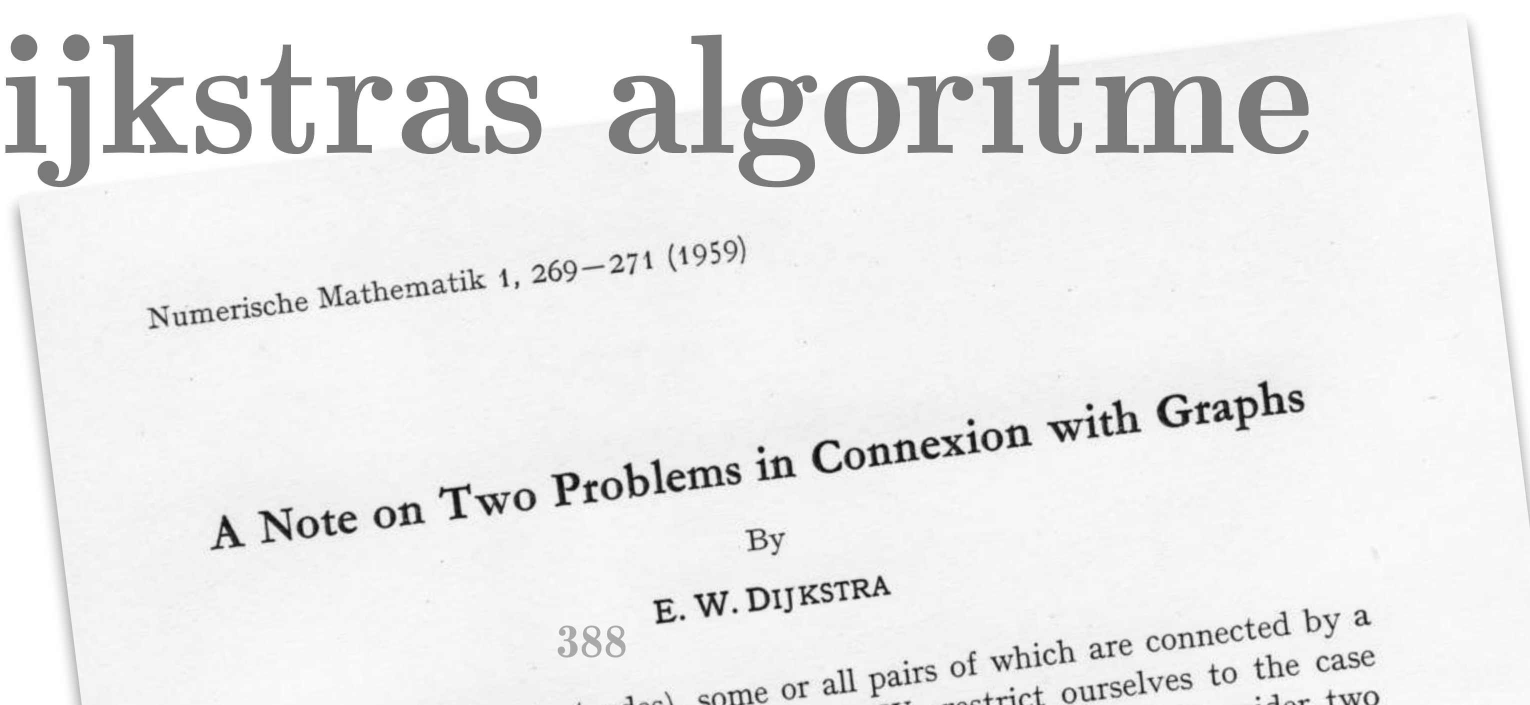
Gjenværende noder kan kun forbedres ved slakking fra andre gjenværende. Det laveste estimatet kan dermed ikke forbedres.*

* Stemmer ikke hvis vi har negative kanter!

(Nok en gang: Anta at tidligere noder har fått rett estimat)

5:5

Dijkstras algoritme


Numerische Mathematik 1, 269—271 (1959)

A Note on Two Problems in Connexion with Graphs

By

E. W. DIJKSTRA

$\textsc{Dijkstra}(G, w, s)$

G	graf
w	vekting
s	startnode

Slakk ut-kanter fra den gjenværende med lavest estimat

DIJKSTRA(G, w, s)
1 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)

G graf
w vekting
s startnode

DIJKSTRA(G, w, s)
1 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
2 S = ∅

G	graf
w	vekting
s	startnode
S	ferdige

Ferdige: Vi har slakket ut fra dem og de vil aldri endre seg igjen

DIJKSTRA(G, w, s)
1 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
2 $S = \emptyset$
3 $Q = G.V$

G graf
w vekting
s startnode
S ferdige
Q pri-kø

Prioritetskø som i PRIM, men her prioritert etter $v.d$

DIJKSTRA(G, w, s)
1 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
2 $S = \emptyset$
3 $Q = G.V$
4 **while** $Q \neq \emptyset$

G	graf
w	vekting
s	startnode
S	ferdige
Q	pri-kø

Så lenge det er noen vi ikke har avstanden til...

```
DIJKSTRA(G, w, s)
    INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
    S = ∅
    Q = G.V
    while Q ≠ ∅
        u = EXTRACT-MIN(Q)
```

G	graf
w	vekting
s	startnode
S	ferdige
Q	pri-kø
u	fra-node

Ingen negative kanter $\Longrightarrow$ $u.d$ vil aldri endres mer!

DIJKSTRA(G, w, s)

INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)

$S = \emptyset$

$Q = G.V$

while $Q \neq \emptyset$

  $u =$ EXTRACT-MIN(Q)

  $S = S \cup \{u\}$

G	graf
w	vekting
s	startnode
S	ferdige
Q	pri-kø
u	fra-node

DIJKSTRA(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
$\mathrm{S} = \emptyset$
$\mathrm{Q} = \mathrm{G.V}$
while $\mathrm{Q} \neq \emptyset$
    $u = $ EXTRACT-MIN(Q)
    $\mathrm{S} = \mathrm{S} \cup \{u\}$
    for each vertex $v \in \mathrm{G}.Adj[u]$

G	graf
w	vekting
s	startnode
S	ferdige
Q	pri-kø
u	fra-node
v	til-node

DIJKSTRA(G, w, s)

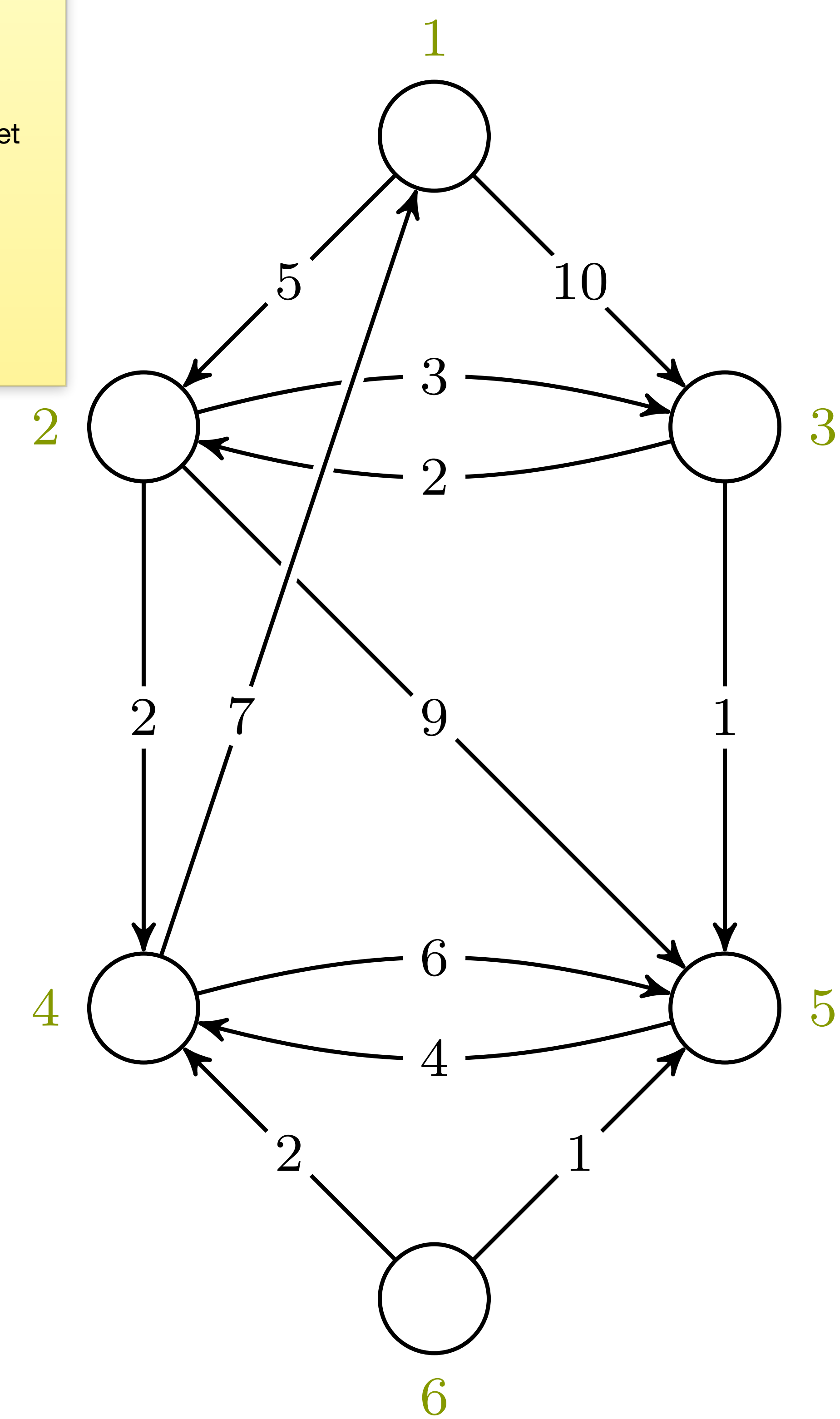
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
$S = \emptyset$
$Q = G.V$
while $Q \neq \emptyset$
    $u =$ EXTRACT-MIN(Q)
    $S = S \cup \{u\}$
    for each vertex $v \in G.Adj[u]$
        RELAX(u, v, w)

G	graf
w	vekting
s	startnode
S	ferdige
Q	pri-kø
u	fra-node
v	til-node

$u.d$ er rett; slakk alle ut-kanter

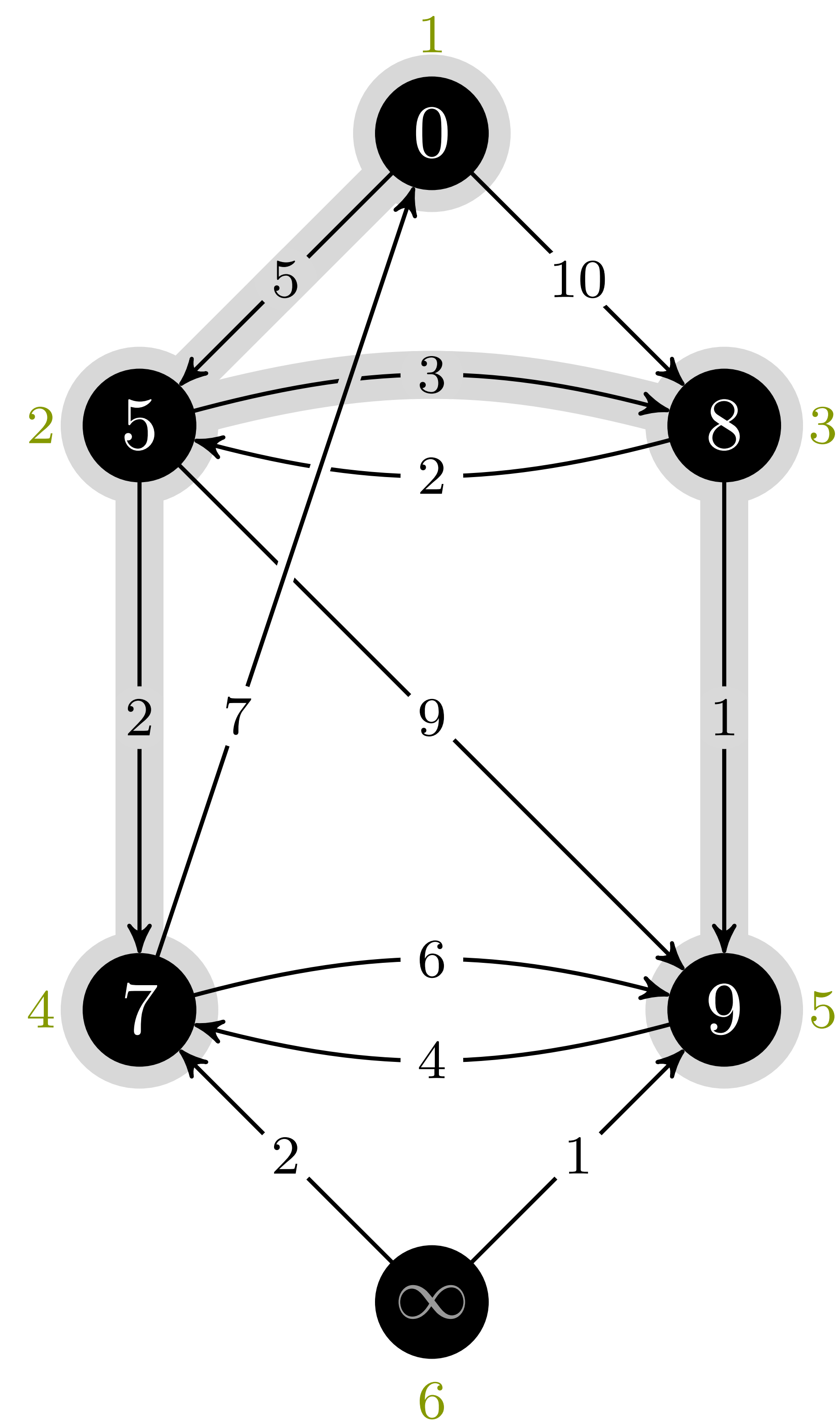
En liten forskjell fra boka: De farger en node svart idet den legges i S, mens jeg farger den svart idet den er ferdigbehandlet – dvs., etter vi har slakket ut-kantene.

```
DIJKSTRA(G, w, s)
  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
  S = ∅
  Q = G.V
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      S = S ∪ {u}
      for each vertex v ∈ G.Adj[u]
          RELAX(u, v, w)
```



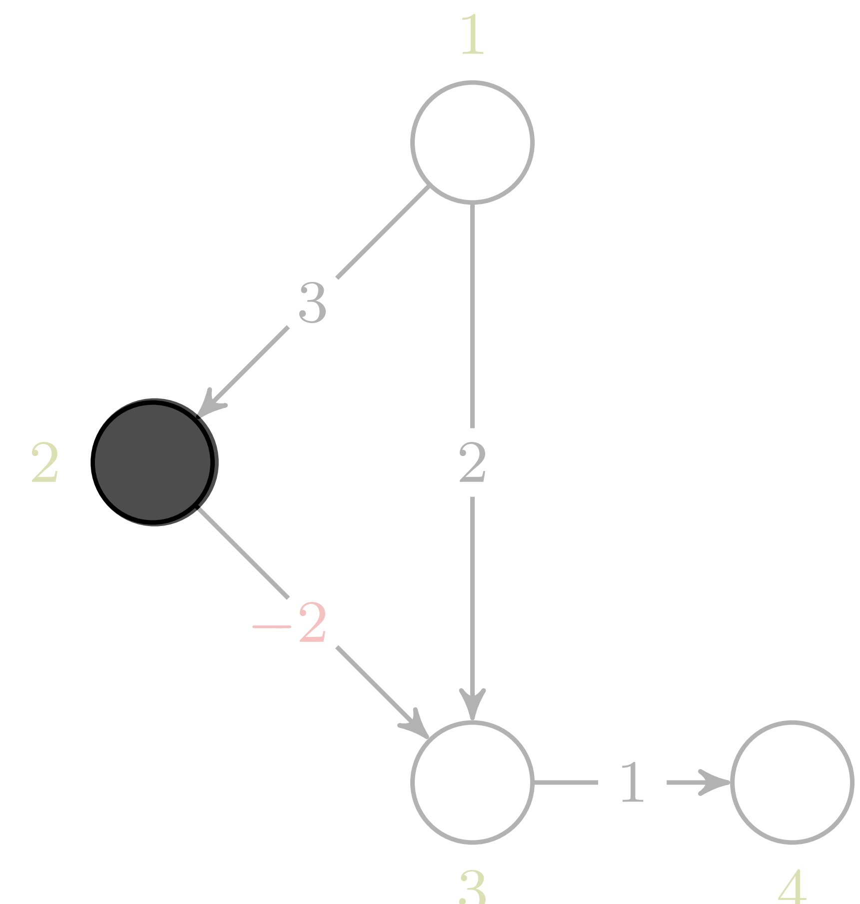
$u, v \; = \; -, -$

DIJKSTRA(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
$S = \emptyset$
$Q = G.V$
while $Q \neq \emptyset$
    $u =$ EXTRACT-MIN(Q)
    $S = S \cup \{u\}$
    for each vertex $v \in G.Adj[u]$
        RELAX(u, v, w)



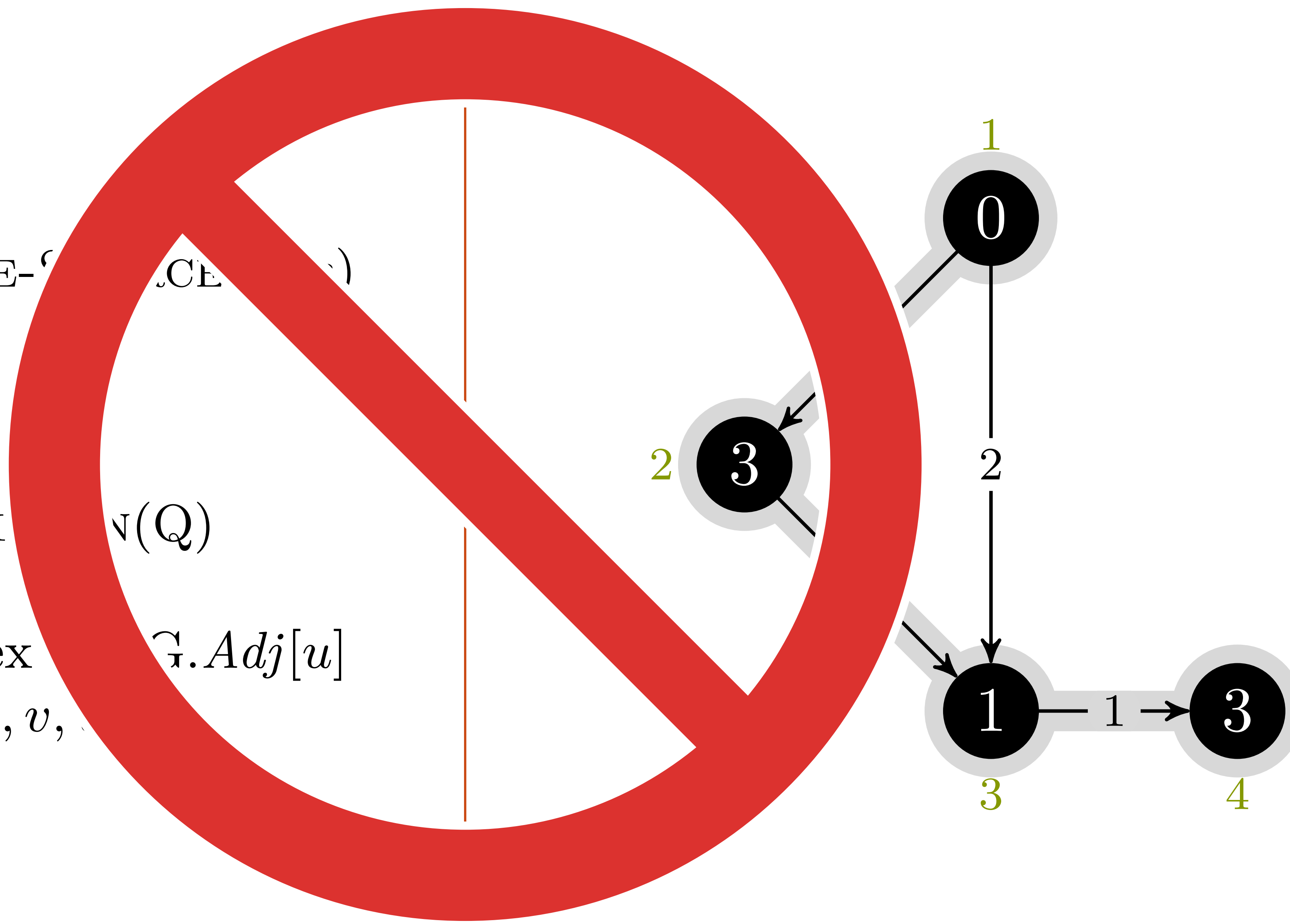
$u, v = -, -$

DIJKSTRA(G, w, s)
1 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
2 $S = \emptyset$
3 $Q = G.V$
4 **while** $Q \neq \emptyset$
5 $u = $ EXTRACT-MIN(Q)
6 $S = S \cup \{u\}$
7 **for** each vertex $v \in G.Adj[u]$
8 RELAX(u, v, w)



$u, v = -, -$

```
DIJKSTRA(G, w, s)
    INITIALIZE-SINGLE-S   CE   )
    S = ∅
    Q = G.V
    while Q ≠ ∅
        u = EXTRACT   N(Q)
        S = S ∪ {u}
        for each vertex     G.Adj[u]
            RELAX(u, v,
```



$u, v = -, -$

Negative kanter forbudt! 3.*d* er nå feil

Dijkstra › Kjøretid

Operasjon	**Antall**	**Kjøretid**
Initialisering	1	$\Theta(V)$
Build-Heap	1	$\Theta(V)$
Extract-Min	V	$O(\lg V)$
Decrease-Key*	E	$O(\lg V)$

Totalt: $O(V \lg V + E \lg V)$

*Nødvendig i Relax

Med binærheap; bedre enn lineært søk for $E = o(V^2/\lg V)$

Operasjon	**Antall**	**Kjøretid**
Initialisering	1	$\Theta(V)$
BUILD-HEAP	1	$\Theta(V)$
EXTRACT-MIN	V	$O(\lg V)$
DECREASE-KEY*	E	$O(\lg V)$

Totalt: $O(V \lg V + E \lg V)$

*Nødvendig i RELAX

Boka bruker $V \times$ INSERT; fortsatt $O(E \lg V)$

Operasjon	**Antall**	**Kjøretid**
Initialisering	1	$\Theta(V)$
BUILD-HEAP	1	$\Theta(V)$
EXTRACT-MIN	V	$O(\lg V)$
DECREASE-KEY*	E	$O(\lg V)$

Totalt: $O(V \lg V + E \lg V)$

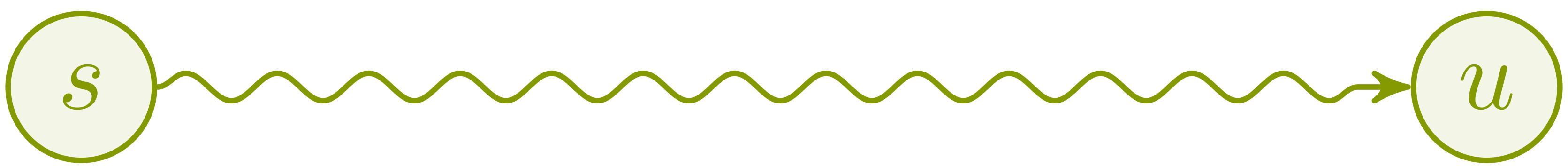
*Nødvendig i RELAX

Fibonacci-heaps: DECREASE-KEY er $O(1)$; vi får $O(V \lg V + E)$

1. **Dekomponering**
2. **DAG-Shortest-Path**
3. **Kantslakking**
4. **Bellman-Ford**
5. **Dijkstras algoritme**

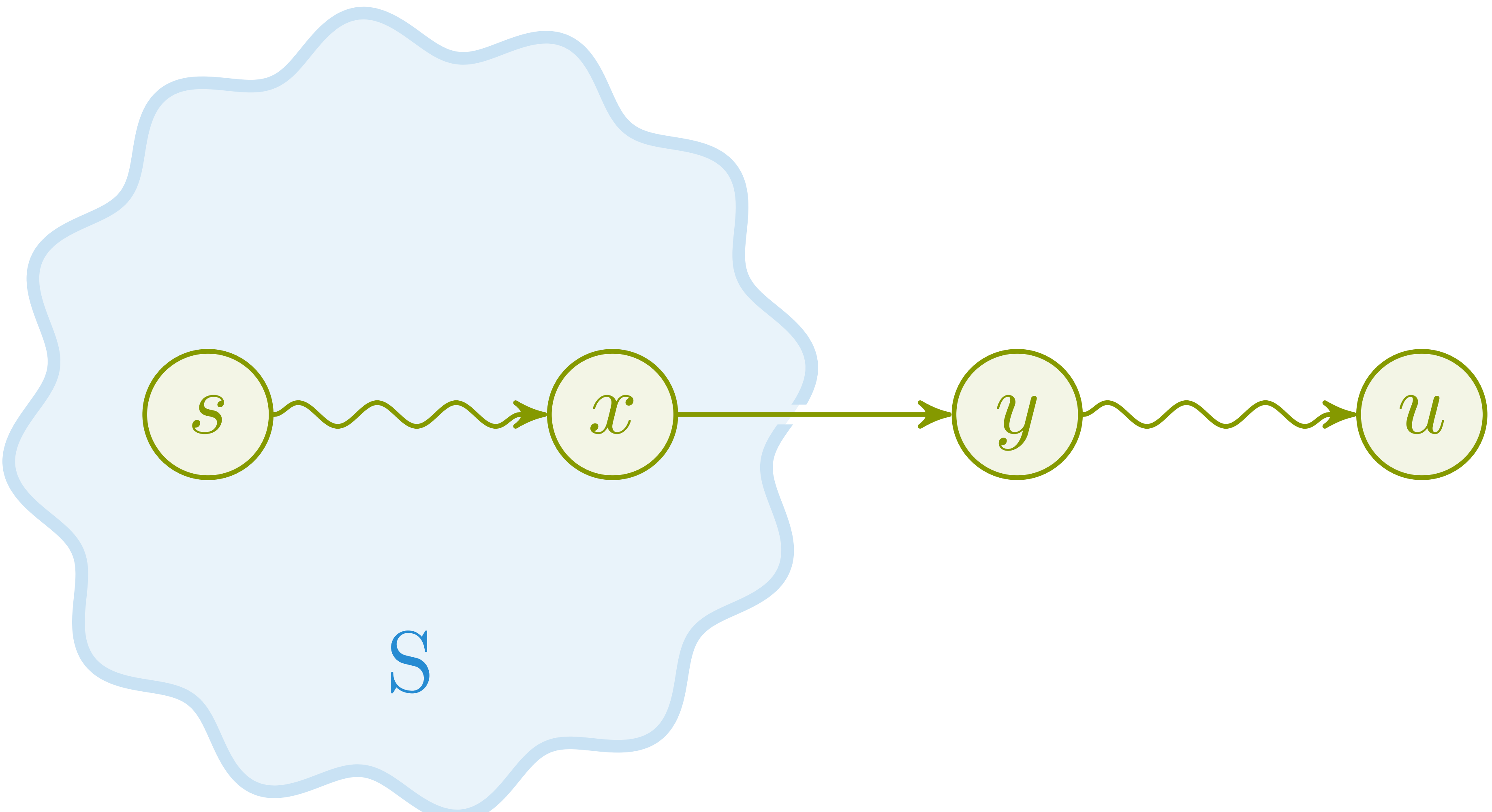
Bonusmateriale

Korteste vei › Dijkstra › Korrekthet

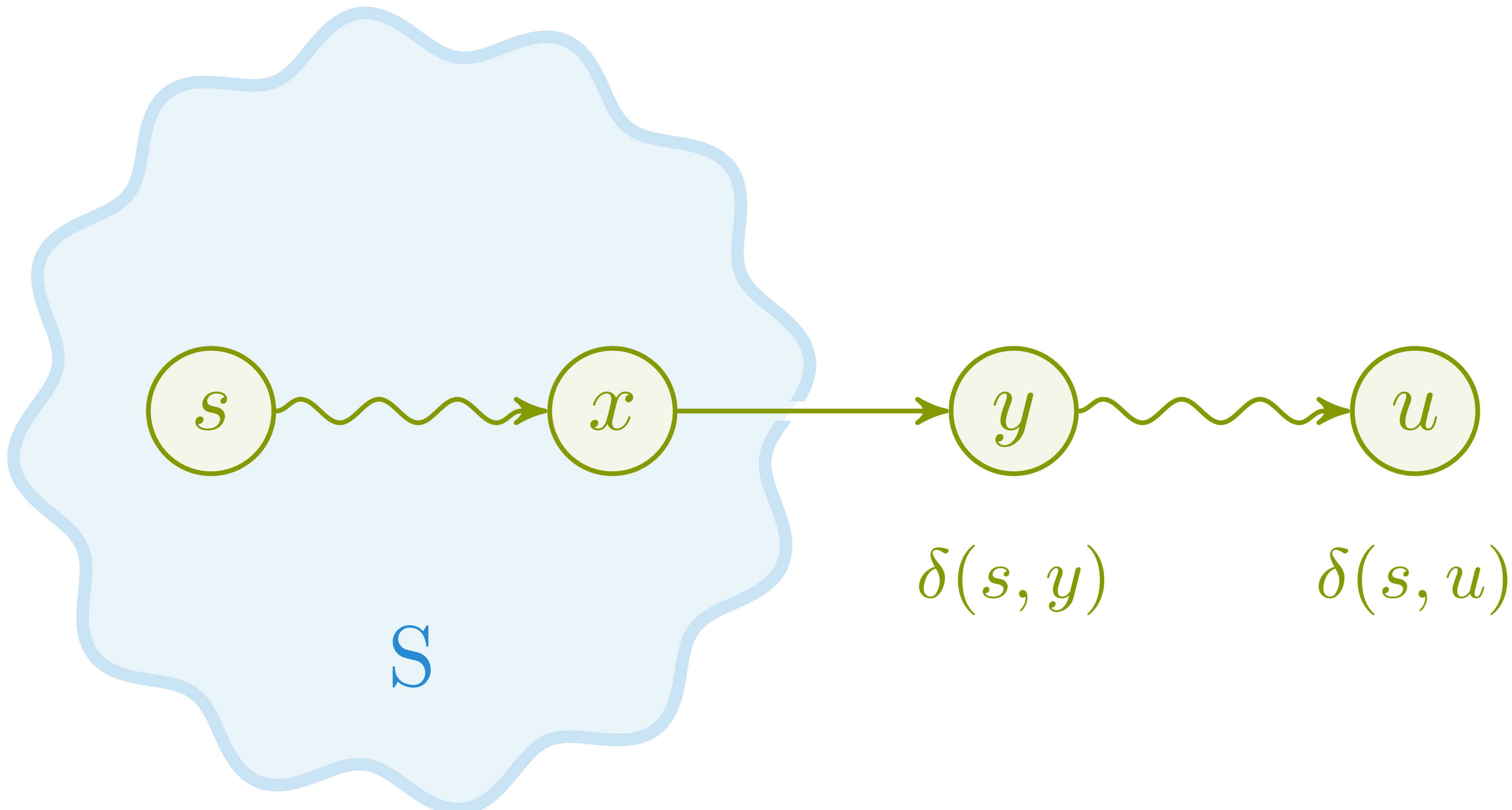


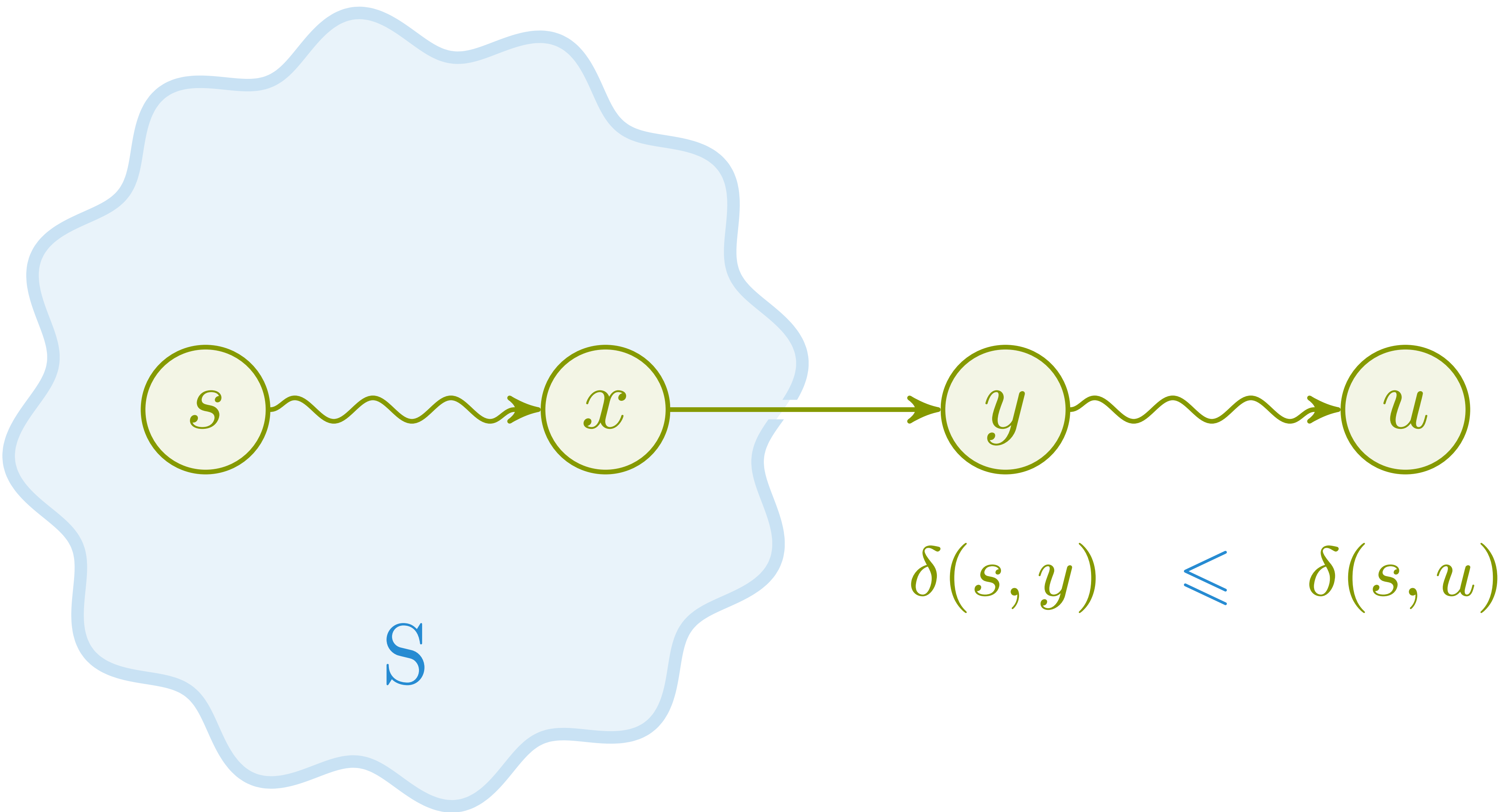
La u være den neste som skal besøkes; kan $u.d$ være feil?

(x, y) ligger på en av de korteste stiene fra s til u

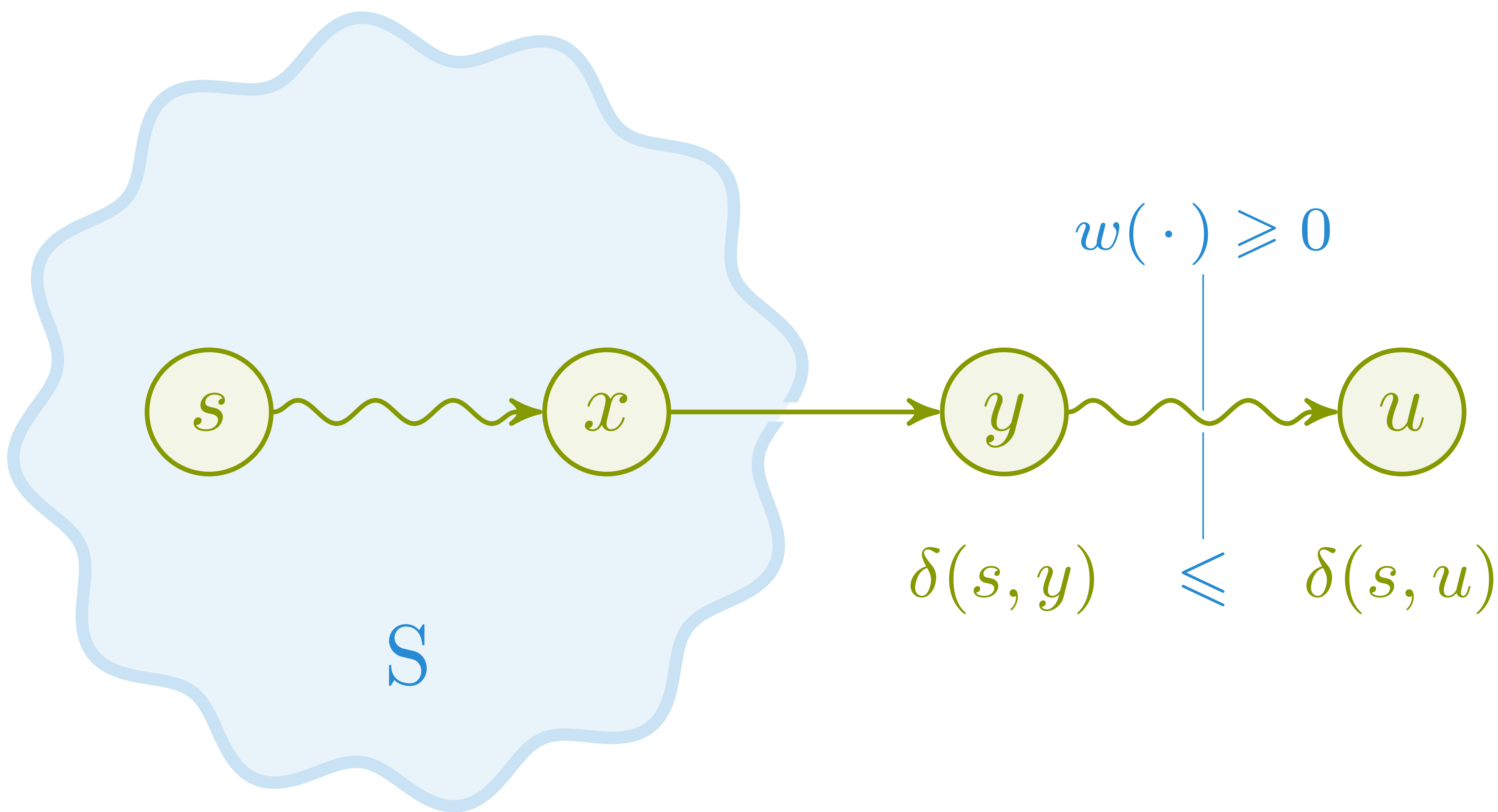


x ligger i S; vi kan ha $s = x$ eller $y = u$; $y \rightsquigarrow u$ kan gå innom S

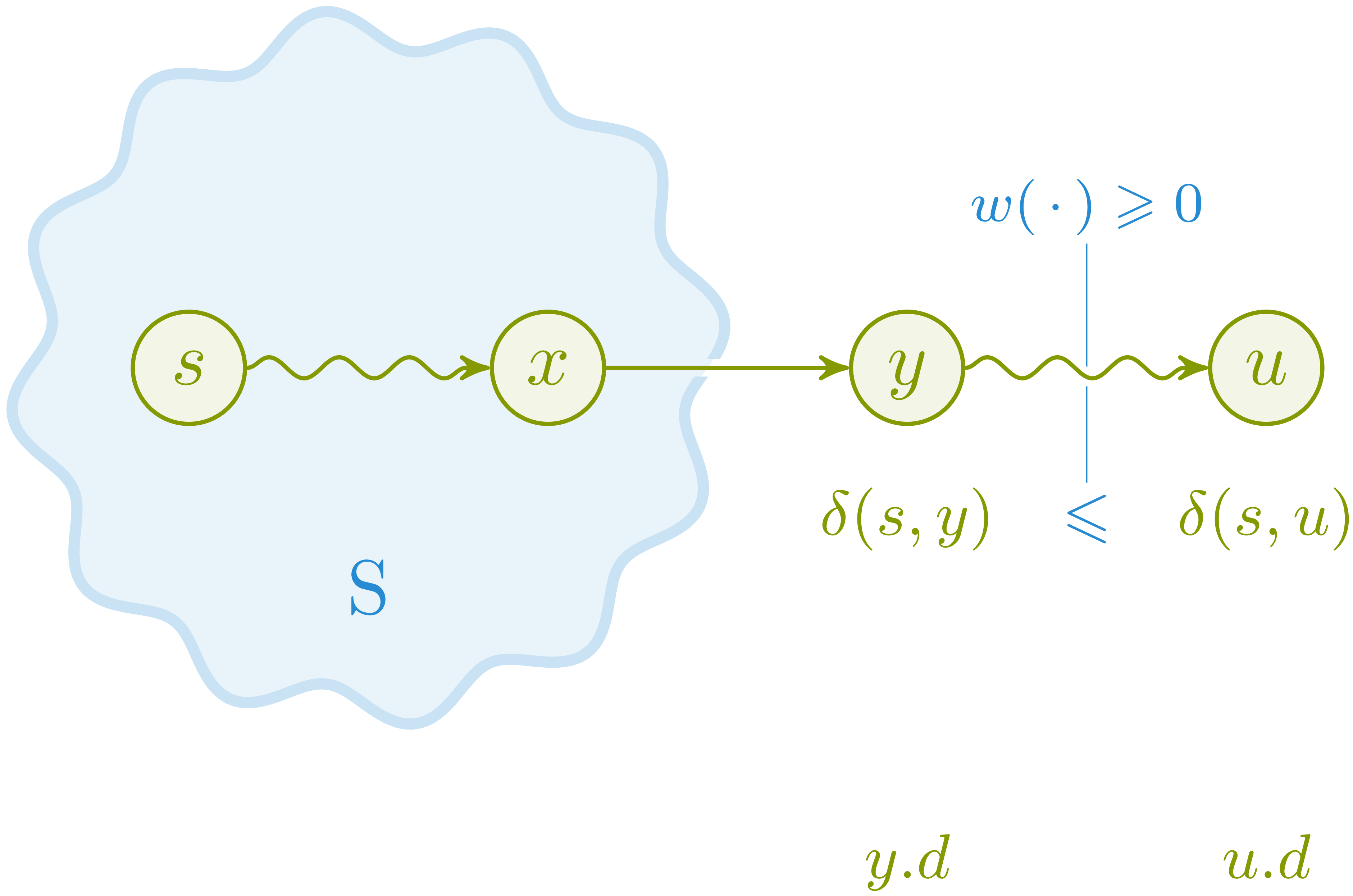

s
x
y
u
$\delta(s, y)$
$\delta(s, u)$
S

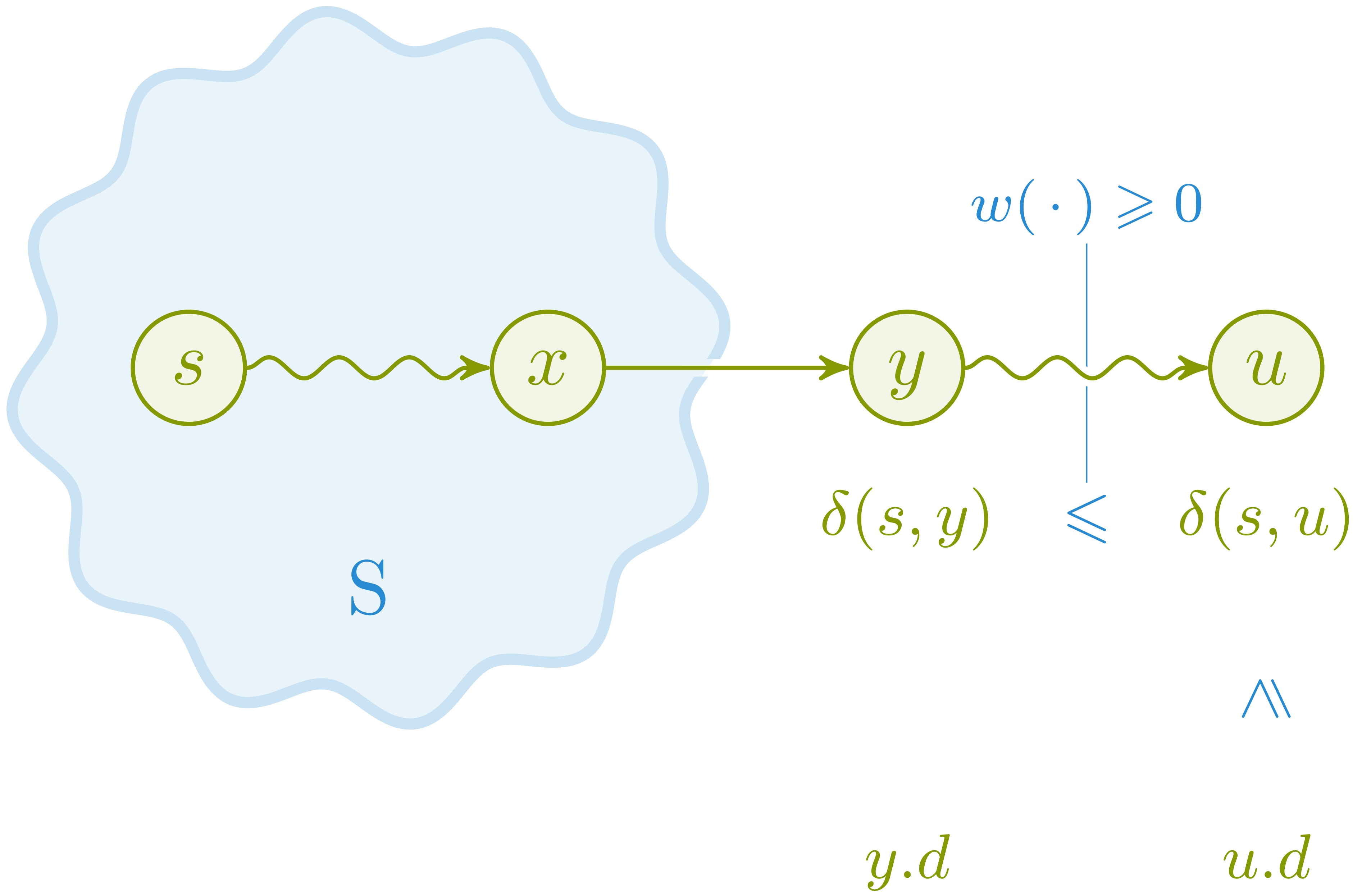


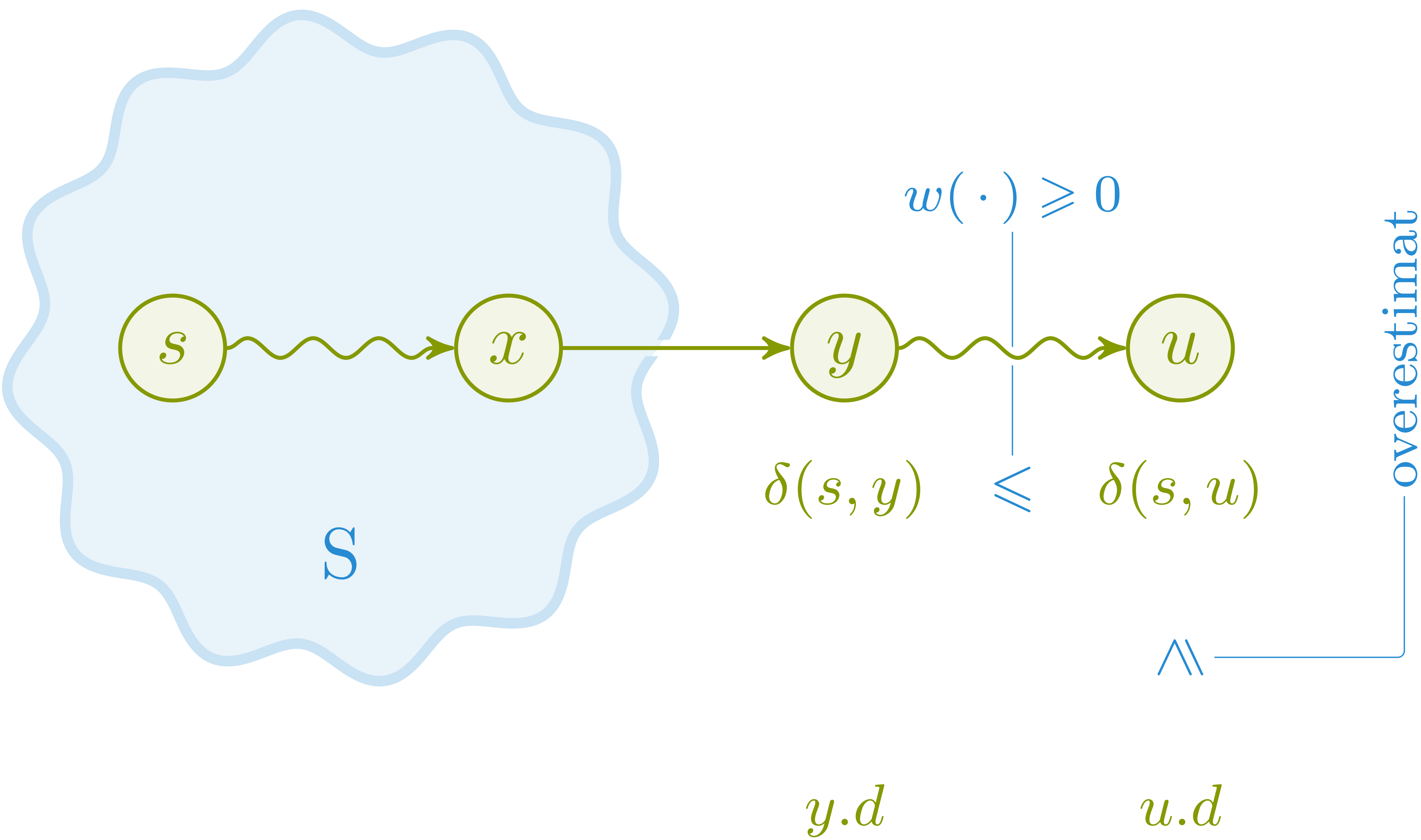
s
x
y
u
$\delta(s,y) \leqslant \delta(s,u)$
S

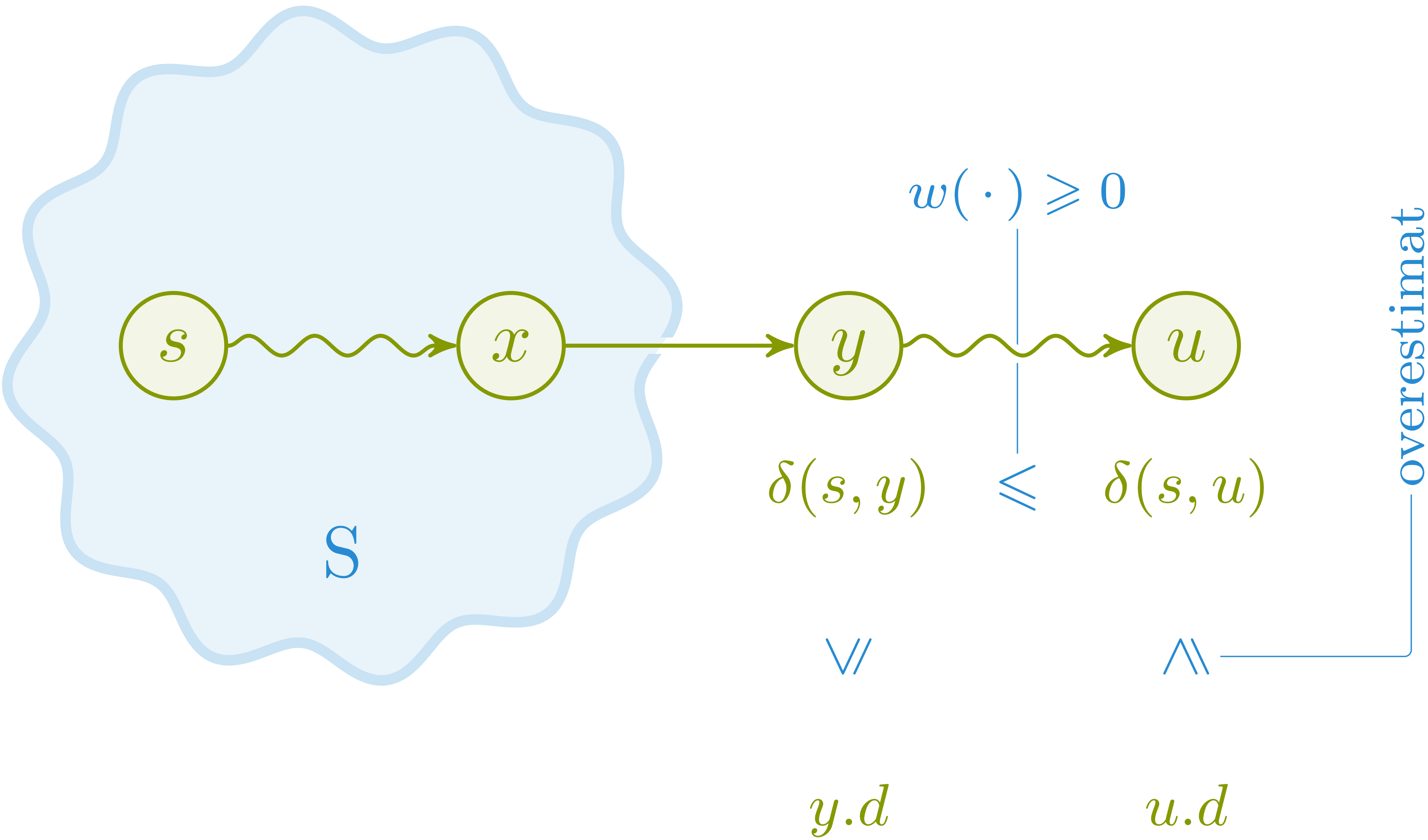


Ikke-negative vekter $\implies$ avstandene synker ikke

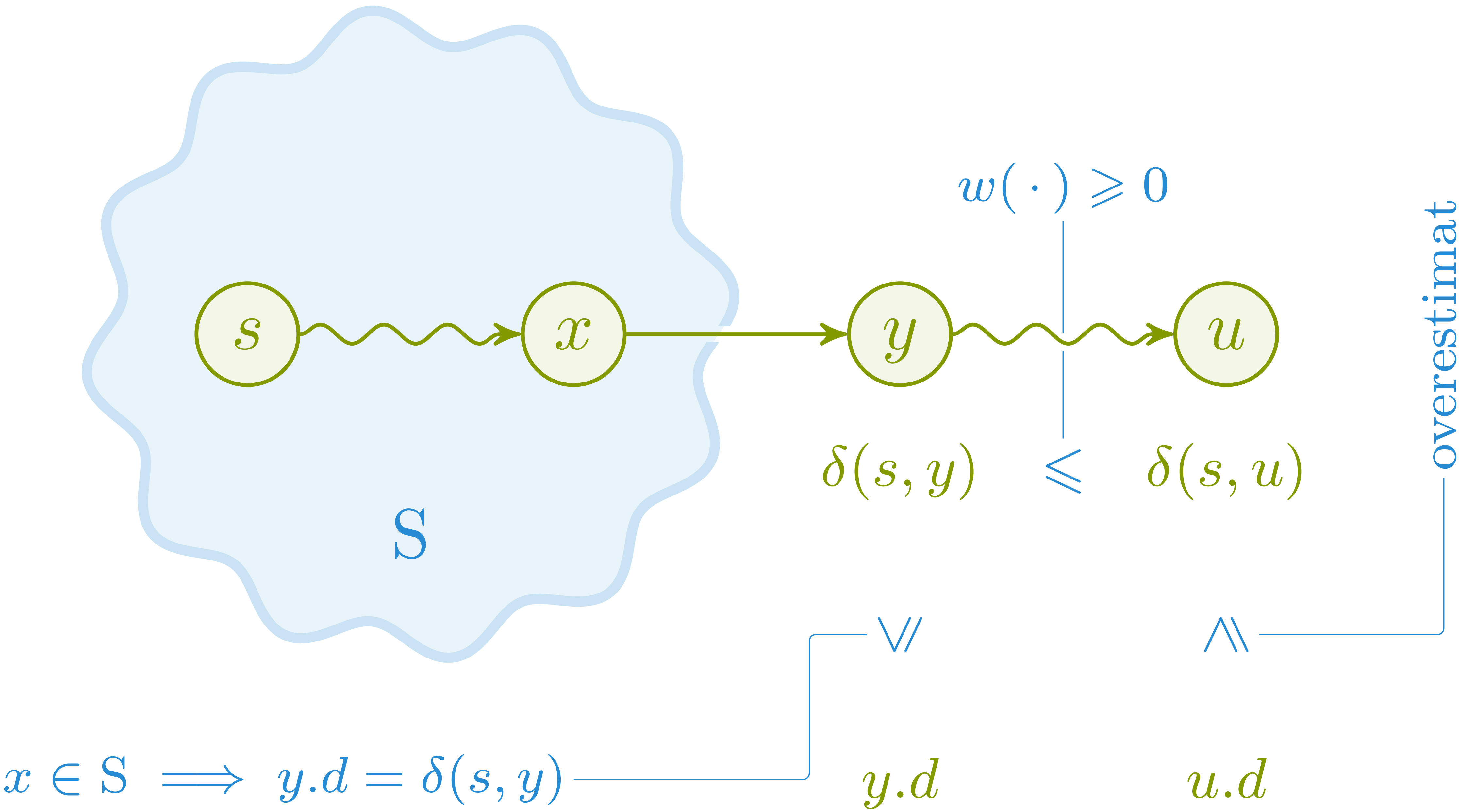

s
x
y
u
S
$w(\,\cdot\,) \geqslant 0$
$\delta(s, y)$
$\leqslant$
$\delta(s, u)$
$y.d$
$u.d$

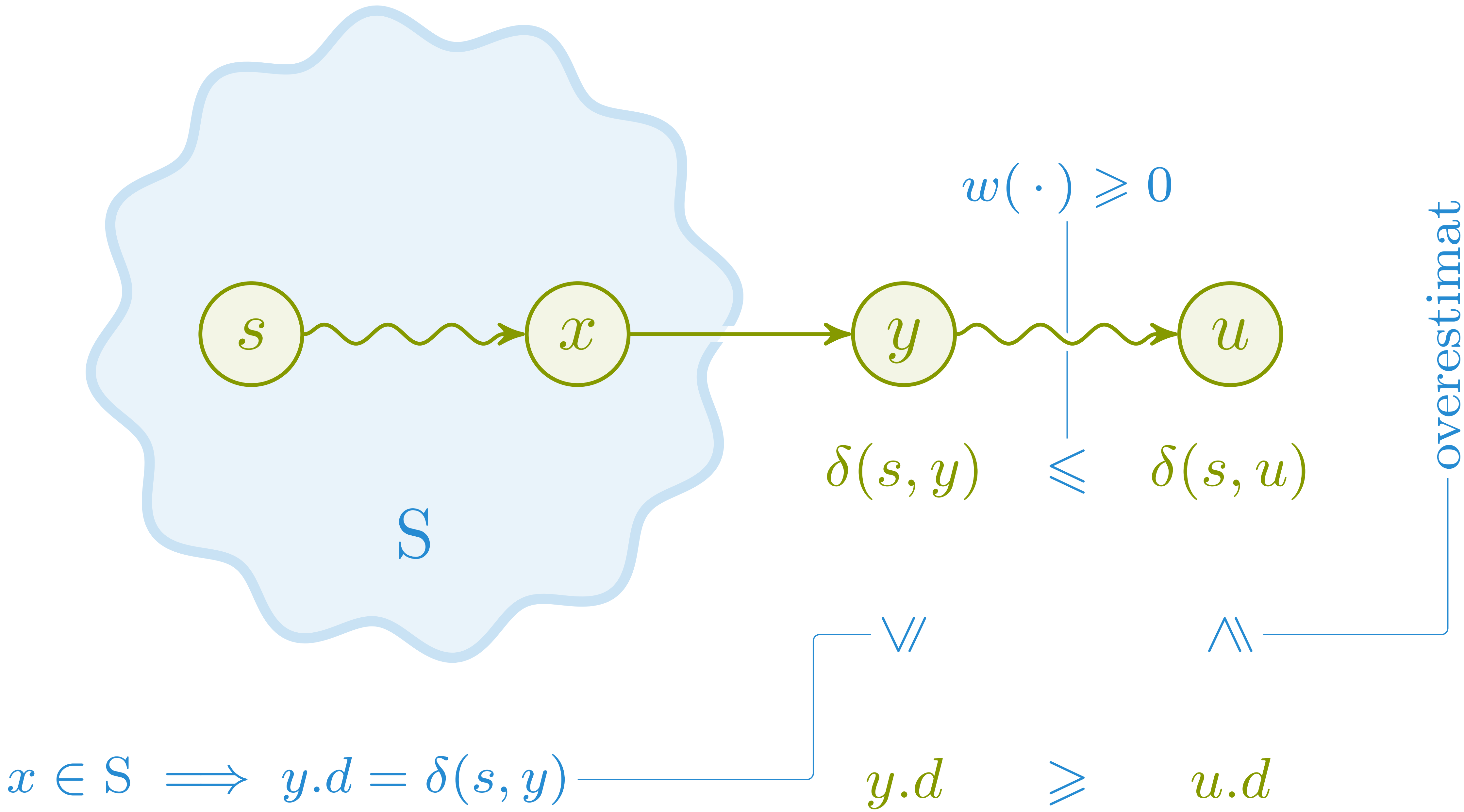

$w(\cdot) \geqslant 0$
s
x
y
u
$\delta(s, y)$
$\leqslant$
$\delta(s, u)$
S
$\wedge\!\!\backslash$
$y.d$
$u.d$


$w(\cdot) \geqslant 0$
overestimat
s
x
y
u
$\delta(s, y)$
$\leqslant$
$\delta(s, u)$
S
$\wedge\!\!\!\backslash$
$y.d$
$u.d$

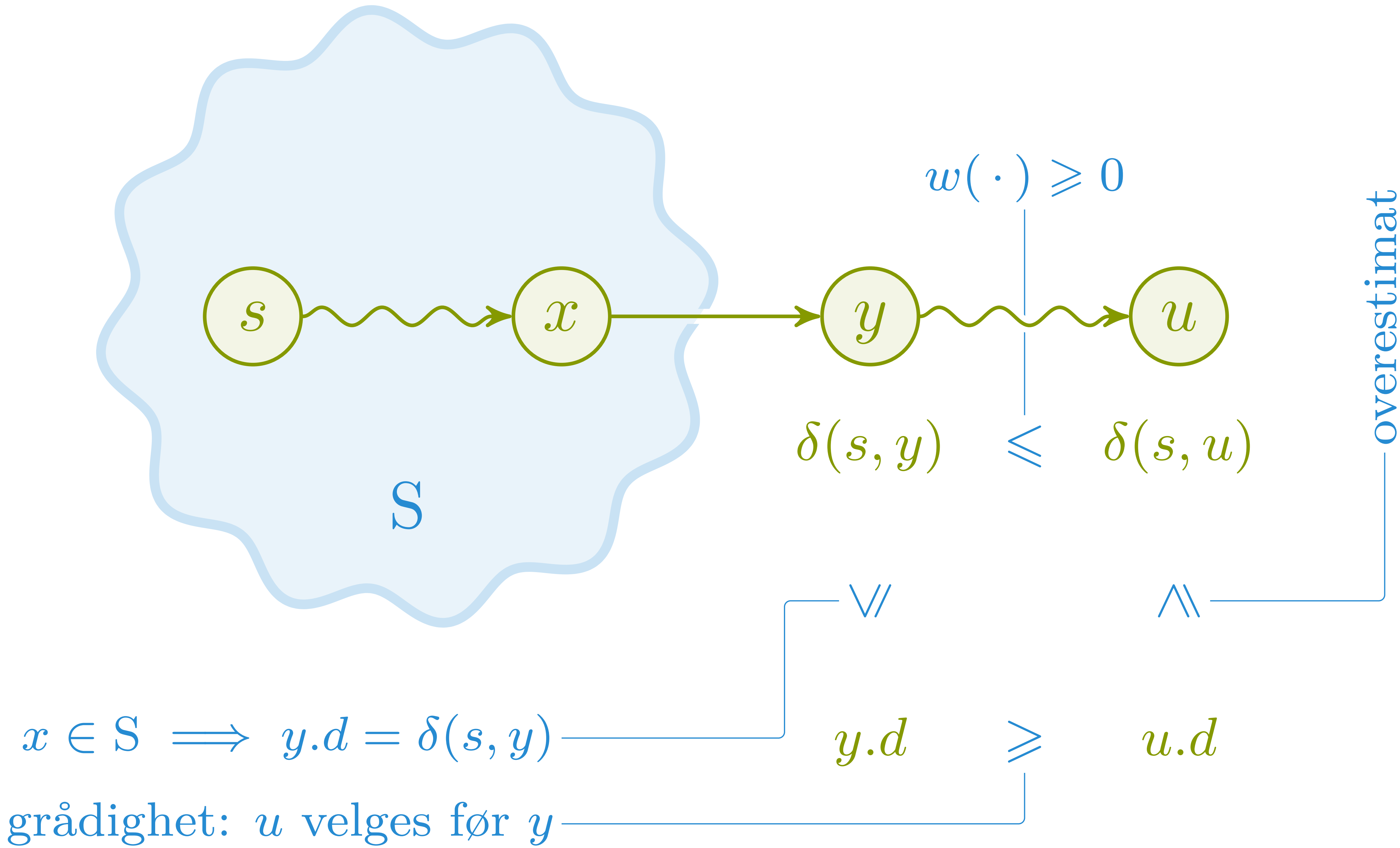


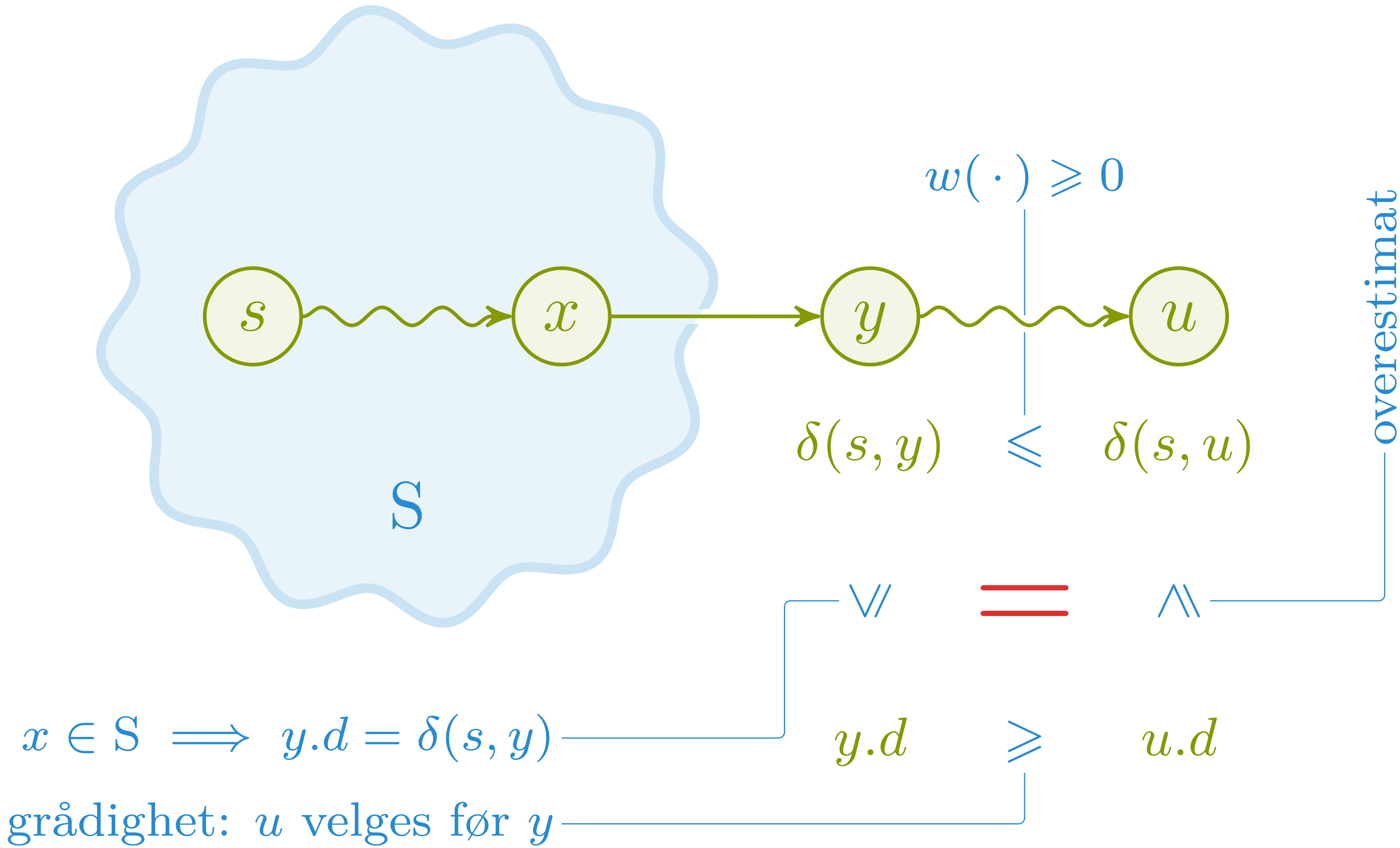
s
x
y
u
S
$w(\,\cdot\,) \geqslant 0$
overestimat
$\delta(s,y) \quad \leqslant \quad \delta(s,u)$
$\vee\!/ \qquad \wedge\!\backslash$
$y.d \qquad u.d$


s
x
y
u
S
$w(\,\cdot\,) \geqslant 0$
$\delta(s,y) \quad \leqslant \quad \delta(s,u)$
overestimat
$\vee\!\!/\!\!/ \qquad \wedge\!\!\backslash\!\!\backslash$
$y.d \qquad u.d$
$x \in \mathrm{S} \implies y.d = \delta(s,y)$



s
x
y
u
S
$w(\,\cdot\,) \geqslant 0$
$\delta(s,y) \leqslant \delta(s,u)$
overestimat
$\vee\!\!/\!\!/$ $\quad \wedge\!\!\backslash\!\!\backslash$
$x \in S \implies y.d = \delta(s,y)$
$y.d \geqslant u.d$


s
x
y
u
S
$w(\,\cdot\,) \geqslant 0$
overestimat
$\delta(s, y)$ $\leqslant$ $\delta(s, u)$
$\vee\!\!/$ $\wedge\!\!\backslash$
$x \in \mathrm{S} \implies y.d = \delta(s, y)$
$y.d$ $\geqslant$ $u.d$
grådighet: u velges før y


s
x
y
u
S
$w(\cdot) \geqslant 0$
overestimat
$\delta(s, y) \leqslant \delta(s, u)$
$\vee\!\!/ \quad = \quad \wedge\!\!\backslash$
$y.d \geqslant u.d$
$x \in \mathrm{S} \implies y.d = \delta(s, y)$
grådighet: u velges før y

$$
\begin{array}{ccc}
\delta(s,y) & \leqslant & \delta(s,u) \\
\rotatebox{-90}{$\geqslant$} & = & \rotatebox{90}{$\geqslant$} \\
y.d & \geqslant & u.d
\end{array}
$$

Når u velges, så er $u.d$ lik $\delta(s,u)$, altså korrekt