CH01. 선형대수 (Linear Algebra)

선형대수는 행렬(matrix)과 벡터(vector)를 다루는 수학의 한 분야입니다. 선형대수는 어떤 함수가 선형(linear)일 때 그 함수의 성질을 배우는 것이며, 선형은 다음과 같은 두개의 식으로 정의할 수 있습니다.

$$f(kx) = kf(x) \qquad\qquad f(x1 + x2) = f(x1) + f(x2)$$

우리가 알고 있는 대표적인 선형 함수는 $y = Wx$ 같은 정비례함수가 있고 미분, 적분 등이 있습니다. 또한 회전변환 확대·축소변환 역시 선형 함수입니다. 비선형 함수는 이차함수, 삼각함수, 로그함수, 지수함수 등이 있습니다. 선형대수 이론에 의하면 임의의 선형 함수는 행렬로 표현할 수 있으며, 반대로 행렬은 어떤 선형 함수에 대응합니다. 그래서 행렬에 대한 성질만 익힌다면 모든 선형함수의 공통 성질을 알게 되는 것입니다. 일반적으로 비선형함수는 계산이 매우 복잡한데 필요에 따라 선형으로 근사 시킬 수도 있습니다. 이러한 경우는 비선형함수에도 선형대수를 적용할 수 있습니다.

1.1 행렬 (Matrix)

1.1.1 행렬 정의

다음과 같이 직사각형 모양으로 배열한 것을 **행렬**이라고 하며 각각의 수를 그 행렬의 **성분**이라고 말합니다.

$$A = \begin{pmatrix} 80 & 90 & 85 \\ 95 & 70 & 75 \end{pmatrix}, \qquad\qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

행렬의 가로줄을 **행(row)**이라 하고, 세로줄을 **열(column)**이라 한다. 위의 행렬은 행이 2개, 열이 3개 있는 행렬로 2×3 행렬(two by three 행렬이라 읽음)입니다. 행과 열의 개수가 모두 n개인 행렬을 n차 정사각 행렬이라고 합

니다.

$\begin{pmatrix} 80 & 90 & 85 \end{pmatrix}$ 처럼 하나의 행으로 이루어진 행렬을 **행 벡터(row vector),** $\begin{pmatrix} 80 \\ 95 \end{pmatrix}$ 처럼 하나의 열로 이루어진 행렬을 **열 벡터(column vector)** 라고 합니다.

위 행렬에서 90점과 같이 1행 2열에 있는 성분을 1,2 성분이라고 하고 a_{12}와 같이 표기 합니다.

1.1.2 행렬의 상등

$m \times n$ 행렬 A와 $p \times q$ 행렬 B에 대하여 $m = p$, $n = q$일 때, 즉 두 행렬 A와 B의 행의 개수와 열의 개수가 각각 같을 때, 행렬 A와 B는 같은 꼴이라고 합니다.

또 행렬 A와 B가 같은 꼴이고 대응하는 성분이 각각 같을 때, 행렬 A와 B는 서로 같다고 하며, 기호로 $A = B$ 와 같이 나타내고 있습니다.

이를테면 2×2 행렬이 서로 같을 조건은 다음과 같습니다.

두 행렬 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11} = b_{11}, & a_{12} = b_{12} \\ a_{21} = b_{21}, & a_{22} = b_{22} \end{cases}$$

1.1.3 행렬의 덧셈과 뺄셈

일반적으로 두 행렬 A, B가 같은 꼴일 때, A와 B의 대응하는 각 성분의 합을 성분으로 하는 행렬을 A와 B의 합이라 하고, 기호로 $A+B$ 와 같이 나타내고 있습니다.

또한 두 행렬 A, B가 같은 꼴일 때, A의 각 성분에 대응하는 B의 성분을 뺀 결과를 가지는 행렬을 A에서 B를 뺀 차라 하고, 기호로 $A-B$ 와 같이 나타냅니다.

이를테면 2×2 행렬의 덧셈과 뺄셈은 다음과 같으며,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\text{일 때}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}$$

행렬의 덧셈에서는 수의 덧셈에서 마찬가지로 교환법칙, 결합법칙이 성립합니다. 즉 같은 꼴의 행렬 A, B, C 에 대하여 다음과 같은 일반적인 법칙이 성립됩니다

(1)교환법칙 $A+B=B+A$

(2)결합법칙 $(A+B)+C=A+(B+C)$

1.1.4 행렬의 실수배

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 다음과 같은 연산을 수행할 경우,

$$A+A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

$$A+A+A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

연산 결과인 $A+A$, $A+A+A$는 행렬 A 각 성분을 2배, 3배 한 것임을 알 수 있습니다. 일반적으로 임의의 실수 k에 대하여 행렬 A의 각 성분을 k배 한 것을 행렬 A를 k배 한 행렬이라 하고, 이것을 기호로 kA와 같이 나타낼 수 있습니다.

행렬 A가 2×2 행렬이고 k가 실수일 때, kA는 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

임의의 실수 k와 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

$$kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

또한 임의의 행렬 A와 영행렬 O가 같은 꼴이고 k가 실수일 때, 행렬의 실수배의 정의로부터 $1A=A,\ (-1)A=-A,\ 0A=O,\ kO=O$ 같은 관계식이 성립하며, 일반적으로 행렬의 실수배에 대하여 다음과 같은 성질이 있음을 알 수 있습니다. 같은 꼴의 행렬 A, B와 임의의 실수 k, l에 대하여 다음의 관계식을 만족합니다.

(1) $(kl)A=k(lA)$

(2) $(k+l)A=kA+lA,\ \ k(A+B)=kA+kB$

[예제] 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 $2A + X = 2X + B$ 를 만족시키는 행렬 X를 구하여라.

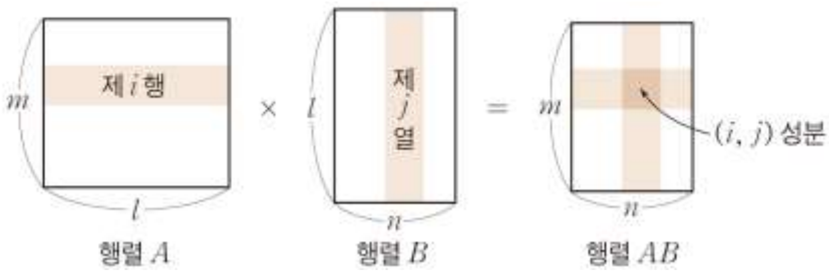
[풀이] $2A + X = 2X + B$에서 X를 A, B로 나타내면 $2X - X = 2A - B$이므로,

$$\therefore X = 2A - B = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.5 행렬의 곱

일반적으로 $m \times l$ 행렬 A와 $l \times n$ 행렬 B에 대하여 행렬 A의 제i행의 성분과 행렬 B의 제j열의 성분을 차례로 곱하여 더한 값을 $(i,\ j)$ 성분으로 하는 행렬을 행렬 A와 B의 곱이라 하고, 기호로 AB와 같이 나타냅니다.



[참고] 행렬 A 열의 개수와 행렬 B 행의 개수가 같을 때에만 두 행렬의 곱 AB가 정의된다. 두 행렬 A, B가 모두 2×2 행렬일 때, 행렬 A와 B의 곱 AB는 다음과 같이 정의됨을 기억해야 합니다.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ 일 때

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

즉 벡터의 내적을 계산할 때 차원이 같아야만 내적을 계산할 수 있는 것처럼 행렬의 곱(dot product)을 계산할 때는 앞 행렬의 열의 수와 뒤 행렬의 행의 수가 같아야만 계산을 할 수가 있습니다.

[예제] 다음 행렬의 곱을 계산하시오
[1] $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 \ + \ 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 8 \end{pmatrix} = 11$ 1차원 벡터가 실수(스칼라)이듯이 1×1행렬은 실수와 같이 생각한다.
[2] $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 \\ 4 \times 1 & 4 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$
[3] $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$
[4] $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 이 경우에는 행렬의 곱셈이 정의되지 않는다
[5] $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 5 & 1 \times 4 + 2 \times 6 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 3 + 10 & 4 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}$
[6] $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ 이 경우 역시 행렬의 곱셈을 계산할 수가 없다
[7] $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$
[8] $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 18 & 10 + 24 \\ 7 + 24 & 14 + 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$

위 결과에서 볼 수 있듯이 일반적으로 행렬의 곱은 교환법칙이 성립하지 않습니다. 이것은 매우 중요한 사실인데, 행렬의 곱셈에서는 곱하는 순서를 함

부로 바꾸면 안 된다는 것을 알 수 있습니다. 또한 n차원의 행벡터와 열벡터의 곱은 앞에서 배운 벡터의 내적과 같다는 것을 알 수 있습니다. 반대로 n차원의 열 벡터와 행 벡터의 곱은 $n \times n$ 행렬이 됨을 알 수 있습니다.

n차 정사각행렬 끼리의 곱은 같은 꼴의 정사각행렬이 됩니다. 행렬의 곱을 다른 방법으로 설명하면 다음과 같습니다. 다음의 설명을 이해하기가 어렵다면 그냥 다음으로 넘어가도 좋습니다.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_1} \\ \overrightarrow{a_2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{b_2} \end{pmatrix}$ 라면

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_1} \\ \overrightarrow{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{b_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_2} \\ \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{b_2} \end{pmatrix}$$

한편, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{b_1} \\ \overrightarrow{b_2} \\ \overrightarrow{b_3} \end{pmatrix}$,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_1} & \overrightarrow{a_2} & \overrightarrow{a_3} \end{pmatrix}$ 라고 한다면 BA는 다음과 같다.

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overrightarrow{b_1} \\ \overrightarrow{b_2} \\ \overrightarrow{b_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_1} & \overrightarrow{a_2} & \overrightarrow{\mathrm{a}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{a_1} & \overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{a_2} & \overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{a_3} \\ \overrightarrow{b_2} \cdot \overrightarrow{a_1} & \overrightarrow{b_2} \cdot \overrightarrow{a_2} & \overrightarrow{b_2} \cdot \overrightarrow{a_3} \\ \overrightarrow{b_3} \cdot \overrightarrow{a_1} & \overrightarrow{b_3} \cdot \overrightarrow{a_2} & \overrightarrow{b_3} \cdot \overrightarrow{a_3} \end{pmatrix}$$

행렬 곱 역시 벡터와 마찬가지로 다음과 같이 sum를 사용하여 나타낼 수도 있습니다. 즉 $AB = C$ 라 할 때 C 의 i행 j열의 성분 c_{ij}는 다음과 같습니다.

$$c_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

행렬의 곱셈에 대해서는 아래와 같은 성질이 있다. 행렬 A, B, C 가 곱셈, 덧셈이 가능하다고 가정한다면, 다음과 같은 법칙을 발견할 수 있습니다

$AB \neq BA$	행렬의 곱셈은 교환법칙이 성립하지 않는다.(중요함)
$(AB)C = A(BC)$	행렬의 곱셈에 대한 결합법칙
$(A+B)C = AC + BC$	행렬의 덧셈과 곱셈에 대한 분배법칙
$A(B+C) = AB + AC$	행렬의 곱셈과 덧셈에 대한 분배법칙
$(kA)B = k(AB) = A(kB)$	행렬의 실수배와 행렬의 곱에 대한 결합법칙

[예제] 행렬의 곱셈이 결합법칙이 성립함을 증명하시오
[풀이] $(AB)_{ik} = \sum_l a_{il} b_{lk}$,$(BC)_{lj} = \sum_k b_{lk} c_{kj}$를 이용하면 $$[(AB)C]_{ij} = \sum_k (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_k \left(\sum_l a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_k \sum_l \left(a_{il} b_{lk} c_{kj} \right)$$ $$= \sum_l \sum_k (a_{il} b_{lk} c_{kj}) = \sum_l a_{il} \left(\sum_k b_{lk} c_{kj} \right)$$ $$= \sum_l a_{il} (BC)_{lj} = [A(BC)]_{ij}$$

1.1.6 단위행렬

실수 1은 곱셈에 대한 항등원이다. 즉 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ 입니다.

이와 마찬가지로 n차 정사각행렬은 행렬의 곱셈에 대한 항등원이 존재합니다. 그 행렬을 **단위행렬**이라고 하며 기호로 E, E_n 이나 I, I_n 혹은 1 등으로 나타냅니다.

A가 정사각행렬일 때 $AE = EA = A$ 를 만족하는 단위행렬이 존재합니. 이차 단위행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 되고 삼차 단위행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$이 됩니다. 여기서 반드시 기억해야 하는 것은 일반적으로 행렬의 곱은 교환법칙이 성립하지 않지만, 단위행렬과의 곱은 예외로 언제나 교환법칙이 성립한다는 사실입니다. 이러한 특징은 반드시 기억해 두어야합니다.

[예제] A가 n차 정사각행렬일 때, $AE_n = E_nA = A$ 을 만족하는 n차 단위행렬 E_n은 오직 하나만 존재함을 증명하시오.
[풀이] n차 단위행렬이 E_n, F_n 두 개가 있다고 가정하자. 단위행렬의 정의에 의하여 $AE_n = E_nA = A \cdots *$ $AF_n = F_nA = A \cdots **$ 를 만족한다. 위의 $*$ 식에 $A = F_n$을 대입하고, $**$식에 $A = E_n$을 대입하면 다음과 같은 두 개의 행렬식을 얻는다. 즉 $F_nE_n = E_nF_n = F_n$, $E_nF_n = F_nE_n = E_n$ 인데 두 개의 식에 의해서 $E_n = F_n$ 을 보였으므로 단위행렬은 유일함이 증명되는 것을 알 수 있다.

1.1.7 행렬의 거듭제곱

정사각 행렬이 아닌 경우는 자기 자신끼리 행렬을 곱할 수 없지만 정사각행렬은 자기 자신끼리 곱할 수 있습니다. 이러한 행렬의 거듭제곱은 실수의 거듭제곱과 마찬가지로 지수를 이용하여 나타내고 있습니다.

행렬 A가 정사각 행렬이라고 가정하면, 다음과 같은 관계식을 기술할 수 있습니다.

$$A^2 = AA,\ A^3 = A^2A = AA^2 = AAA,\ \cdots,\ A^n = A^{n-1}A = AA^{n-1}$$

여기에서 눈여겨 볼 점은 행렬의 거듭제곱은 교환법칙이 성립한다는 점입니다. 단순하게 한 가지 경우만을 보여서 그것이 타당성을 설명해보면, 다음과 같이

$$A^3A^2 = (AAA)(AA) = AAAAA = (AA)(AAA) = A^2A^3$$

위와 같은 등식이 성립하는 이유는 행렬의 곱은 결합법칙이 성립하기 때문입니다. 보다 일반적인 표현으로는 다음과 같습니다.

$$A^mA^n = A^{m+n} = A^{n+m} = A^nA^m$$

이것과 함께 다음 등식도 성립하는데 이것은 지수법칙과 형태가 매우 비슷합니다.

$$(A^m)^n = A^{mn} = A^{nm} = (A^n)^m$$

$$E^n = E$$

행렬의 곱셈은 교환법칙이 성립하지 않는다는 것을 다시 한 번 상기하시기 바랍니다. 그렇기 때문에 아래와 같은 결과들을 얻을 수 있습니다.

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B \neq A(AB)B = (AA)(BB) = A^2B^2$$

이것을 일반화하면 다음과 같이 재정리할 수 있습니다.

$(AB)^n \ \neq A^nB^n$

$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2 \neq A^2 - B^2$

이 결과들은 수식을 다룰 때의 지수법칙이나 곱셈공식과는 다르다는 것을 알수 있습니다. 그러나 정사각행렬의 거듭제곱과 단위행렬에 대해서는 교환가능하므로 아래 등식이 성립한다는 것을 알 수 있는데, 다음의 관계식은 매

우 중요한 관계식이니 반드시 기억해 두어야 합니다.

$(A+E)^2 = A^2 + 2AE + E^2 = A^2 + 2A + E$

$(A-E)^2 = A^2 - 2AE + E^2 = A^2 - 2A + E$

$(A+E)(A-E) = A^2 - E^2 = A^2 - E$

$(A+E)(A^2 - A + E) = A^3 + E$

$(A-E)(A^2 + A + E) = A^3 - E$

즉 행렬에 관한 식을 다룰 때는 '곱셈의 교환법칙이 성립하지 않는다.'라는 사실을 꼭 기억해 두면서 일반적인 문자식을 다루듯이 하면 됩니다.

1.1.8 역행렬

역행렬을 간단하게 정의해보면, '서로 곱해서 단위행렬이 될 때 한 행렬을 다른 행렬의 역행렬이라고 한다.'입니다.

실수 a에 대하여 $ax = xa = 1$을 만족하는 실수 x가 존재할 때, 실수 x를 a의 역수라고 하고 기호로 a^{-1}로 나타낼 수 있습니다. 이와 비슷하게 정사각행렬 A에 대하여 등식 $AX = XA = E$ 를 만족하는 행렬 X가 존재할 때, 행렬 X를 A의 **역행렬**이라고 하고 기호로 A^{-1}로 나타내며 'A inverse' 라고 읽습니다. 이것은 바꾸어 말하면 A는 X의 역행렬이라고도 할 수 있습니다. 앞에 말한 것처럼 두 행렬의 곱이 단위행렬이 되면 한 행렬은 언제나 다른 행렬의 역행렬이 됩니다.

$a \neq 0$이라면 언제나 a의 역수 a^{-1}가 존재하며 $a^{-1} = \frac{1}{a}$입니다. 이와 비슷하게 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $D = ad - bc \neq 0$일 경우 언제나 역행렬이 존재하며 행렬 A 역행렬은 다음과 같이 $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 형태의 행렬로 나타낼 수 있습니다.

[예제] 정사각행렬 A의 역행렬 A^{-1}가 존재할 때, A^{-1}는 행렬 A에 대하여 오직 하나만 존재함을 증명하시오.
[풀이] 먼저 행렬 A의 역행렬이 X, Y 두 개가 존재한다고 가정하자. 그러면 역행렬의 정의에 의해서 $AX = XA = E$, $AY = YA = E$ 라는 두 개의 등식이 성립한다. 그러면 다음과 같이 X와 Y가 같다는 것을 알 수 있는데, $$X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y$$ 서로 다른 두 개의 역행렬이 존재한다고 했는데 위에서 그 두 개는 같은 것임을 보였다. 그래서 역행렬은 오직 하나 존재한다. 이것으로 증명을 마칠 수 있다.

[1] 역행렬의 성질

행렬 A, B의 역행렬이 각각 존재할 경우, 역행렬의 일반적 성질은 다음과 같습니다.

$AB = E \quad \Leftrightarrow \quad BA = E \quad \Leftrightarrow \quad A = B^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad B = A^{-1}$

$(A^{-1})^{-1} = A$ 행렬 A의 역행렬'의 역행렬은 자기 자신

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$ 임에 주의

$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ 단, n은 자연수

$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ 단, $k \neq 0$인 실수

[2] 단위행렬, 거듭제곱, 역행렬의 공통점

지금까지 단위행렬, 행렬의 거듭제곱, 역행렬에 대해서 배웠습니다. 이들에

대한 정의는 다음과 같은 행렬식으로 표현될 수 있으며, 몇 가지 공통점이 있습니다.

$AE = EA = A$

$A^n = A^{n-1}A = AA^{n-1}$

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$

첫째는 모두 정사각행렬이라는 것이다. 단위행렬 자체도 정사각행렬이지만 단위행렬을 곱해서 자기 자신이 나오는 행렬 역시 정사각행렬이어야 합니다. 거듭제곱 역시 정사각행렬이 아니면 정의되지 않습니다. 역행렬 역시 정사각행렬이 아니면 정의되지 않습니다.

둘째 공통점은 행렬의 교환법칙이 성립하는 경우라는 것이다. 일반적으로 행렬의 교환법칙은 성립하지 않습니다. 하지만 단위행렬과의 곱, 거듭제곱, 역행렬과의 곱은 언제나 교환법칙이 성립한다는 것을 알 수 있습니다. 또한 이것 말고 교환법칙이 성립하는 경우가 몇 가지 더 있지만 일반적으로 알고 있으면 유용한 것은 세 가지 경우인데, 이것을 식으로 쓰면 다음과 같습니다.

$AE = EA = A$

$A^nA^m = A^mA^n = A^{m+n}$

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$

행렬에 관한 식이 있는데 등장하는 행렬이 A, A^{-1}, E, A^n, $(A^{-1})^n$ 밖에 없다면 교환법칙이 성립하므로 과감하게 보통의 수식을 다룰 때처럼 하면 됩니다. 지금까지 배운 사실은 n차 정사각행렬의 경우에 언제나 성립하는 것입니다. 지금까지의 결과를 종합하는 의미로 몇 가지 예제를 풀어보면서 행렬의 기본을 마무리하겠습니다.

[예제] $A^2 = E \quad \Leftrightarrow \quad A = A^{-1}$를 증명하시오.

[풀이] $A^2 = AA = E$ 에서, A에 A를 곱했더니 단위행렬이 나왔다. 이 말은 A의 역행렬은 A라는 뜻이며 수식으로 표현하면 $A^{-1} = A$가 된다. 그러므로 $A = A^{-1}$ 이므로 $A^2 = AA = AA^{-1} = E$ 이다

[예제] $A^3 = E \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} = A^2$을 보이시오.
[풀이] $A^3 = A(A^2) = E$ 이므로 앞의 예제와 같이 증명하면 된다.

[예제] $A^2 = O$ 일 때, $E + A$의 역행렬이 $E - A$ 임을 보이시오.
[풀이] 위의 두개의 행렬 곱이 단위행렬이라는 것만 보이면 증명이 가능하다. 즉, 다음과 같이 $(E + A)(E - A) = E^2 - A^2 = E - O = E$ 두 행렬을 곱했더니 단위행렬이 나왔다. 그러니 $E + A$의 역행렬이 $E - A$라는 증명되었으며 동시에 $E - A$의 역행렬이 $E + A$ 임을 보이는 것도 증명 가능하다.

[예제] $A^2 + A - 2E = O$ 일 때 A는 역행렬을 가짐을 보여라.
[풀이] 주어진 $A^2 + A - 2E = O$ 식을 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다. $A^2 + A = 2E$ $A(A + E) = 2E$ $A\left[\frac{1}{2}(A + E)\right] = E$ A와 곱해서 단위행렬이 되는 행렬 $\frac{1}{2}(A + E)$를 인수분해를 통해서 즉시 찾을 수 있으며, 이것이 바로 A의 역행렬이다. 즉 직접 역행렬을 인수분해로 찾을 수 있기 때문에 역행렬이 존재하는 것은 당연한 것이다.

[예제] 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에서 $D = ad - bc \neq 0$일 때, 이 행렬의 역행렬은 다음과 같은 $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 임을 보이시오.
[풀이] 두 행렬의 곱이 단위행렬임을 증명한다면 문제의 조건을 만족한다. $$\mathrm{A}A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{ad-bc}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right]$$ $$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cd+da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.9 대각합(Trace)

행렬의 **대각합(trace)**은 정사각행렬의 주대각성분(\)의 합으로 정의하고 있으며, 행렬 A의 대각합은 tr(A)로 표현하는데 특히 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 경우 $\mathrm{tr(A) = a + d}$ 를 나타내고 있습니다.

n차 정사각행렬 A의 i행 j열 성분을 a_{ij}라 하면, 대각합은 $\sum$를 이용하여 다음과 같은 식으로 정의합니다.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i} a_{ii}$$

행렬의 대각합은 다음과 같은 일반적인 성질이 있습니다.

$\mathrm{tr(AB) = tr(BA) \neq tr(A)tr(B)}$

$\mathrm{tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB) \neq tr(CBA) = tr(ACB) = tr(BAC)}$

[예제] $\mathrm{tr(AB) = tr(BA)}$를 증명하시오.

[풀이] $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ 이므로 $(AB)_{ii} = \sum_k a_{ik} b_{ki}$ 이다.

$$
\begin{aligned}
tr(AB) &= \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \left(\sum_k a_{ik} b_{ki} \right) \\
&= \sum_i \left(\sum_k b_{ki} a_{ik} \right) = \sum_k \left(\sum_i b_{ki} a_{ik} \right) = \sum_k (BA)_{kk} = \mathrm{tr(BA)}
\end{aligned}
$$

[1] 행렬식(Determinant)

일반 고등학교에서 흔히 $D = ad - bc$ 라고 하는 값을 행렬의 **행렬식 (Determinant)**이라 합니다. 행렬식은 정사각 행렬에서만 정의되는 값이며, 그 결과는 스칼라(scalar)이지 행렬이 아닙니다. 또한 이 행렬식은 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 판별식(Discriminant)을 뜻하는 $D = b^2 - 4ac$와는 다릅니다.

행렬식을 이해하기 위해서는 치환(permutation - 순열, 조합에서의 permutation과는 의미가 다름)을 먼저 알아야 합니다. 예를 들어서 1, 2, 3, 4 네 개의 수가 있다고 가정하겠습니다. 이 가운데 임의의 두 수의 위치를 바꾸는 연산을 치환이라고 합니다. 치환은 바로 옆에 붙어 있는 두 수를 바꾸어도 되고 서로 떨어져 있는 것을 바꾸어도 됩니다.

4231을 1234로 만들기 위해서는 1과 4의 위치를 서로 바꾸면 이 되는데 이 과정을 아래와 같이 표현하는 것이 가능합니다

$$4231 \xrightarrow{14} 1234$$

물론 아래와 같이 해도 아무런 상관이 없습니다.

$$4231 \xrightarrow{12} 4132 \xrightarrow{14} 1432 \xrightarrow{24} 1234$$

4231을 1234로 만들기 위해서 필요한 치환의 횟수는 1번, 3번, 5번, 7번에도 가능하게 할 수 있습니다. 그러나 짝수번의 치환으로는 1234를 만들 수 없습니다. 이와 같이 홀수번의 치환을 해야 하는 수의 배열을 odd permutation 이라고 합니다.

한편, 2431을 1234로 만들기 위해서는 아래와 같이 1,2를 바꾼 뒤에 2,4를 바꾸면 다음과 같이 된다는 것을 알 수 있습니다.

$$2431 \xrightarrow{12} 1432 \xrightarrow{24} 1234$$

이것 역시 아래와 같은 방법으로 해도 상관없다는 것을 알 수 있습니다.

$$2431 \xrightarrow{13} 2413 \xrightarrow{14} 2143 \xrightarrow{12} 1243 \xrightarrow{34} 1234$$

4231을 1234로 만들기 위해서 필요한 치환의 횟수는 2번, 4번, 6번, 8번에도 가능하게 할 수 있습니다. 그러나 홀수번의 치환으로는 1234를 만들 수 없습니다. 이와 같이 짝수번의 치환을 해야 하는 수의 배열을 even permutation 이라고 지칭합니다. 네 개의 수로 만들 수 있는 수의 배열은 $4! = 24$가지가 있습니다. 이 가운데 절반인 12가지는 even이고 또한 나머지 절반은 odd 입니다.

지금까지 치환에 대해서 알아 보았으니 본격적으로 행렬식에 대해서 알아 보도록 하겠습니다. 다음과 같이 3×3 행렬을 예로 들어 설명을 해보면,

행렬 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 에 대해 임의의 세 개의 수를 선택하여 곱합니다.

예를 들어보면, a_1, b_2, c_3를 선택하고 이들의 곱인 $a_1 b_2 c_3$를 계산하는 것입니다. 세 수를 선택하는데 규칙은 '각 행과 열에서 한 수씩 선택한다.'입니다. 만약 $a_1 a_2 c_3$ 같은 경우는 첫째 행(row)에 있는 두 수 a_1, a_2를 선택했기 때문

에 안 되고, $a_1b_2c_2$ 같은 경우는 둘째 열(column)에 있는 두 수 b_2, c_2를 선택했기 때문에 안 된다는 것을 알 수 있습니다. 이 규칙을 가지고서 세 개의 수를 선택하는 방법은 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 가지인데, 그것을 나열하면 아래와 같다는 것을 알 수 있습니다

$$a_1b_2c_3,\quad a_2b_3c_1,\quad a_3b_1c_2,\quad a_3b_2c_1,\quad a_2b_1c_3,\quad a_1b_3c_2$$

마지막 단계는 앞에서 설명한 permutation을 이용하는 것입니다. 첨자의 배열이 odd인 경우는 세 수를 곱한 결과에 -1을 곱하고, even인 경우는 세 수를 곱한 결과에 $+1$을 곱합니다. 그 다음 여섯 개의 수를 모두 합한 결과가 행렬 A의 행렬식이 되며 식으로 나타내면 아래와 같습니다.

$$\det(A) = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ 일 때도 마찬가지입니다. 두 개의 수를 선택하는 경우는 a_1b_2, a_2b_1 두 가지이고 부호를 정한 후 더하면 아래 결과를 얻는데 이 결과는 고등학교에서 배우는 $D = ad - bc$와 같은 식이 된다는 것을 알 수 있습니다.

$$\det(B) = a_1b_2 - a_2b_1$$

행렬식을 표현하는 기호는 $\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 와 같이 여러 가지가 있습니다.

[예제] 다음 행렬들의 대각합(trace)과 행렬식(determinant)을 구하시오.
[1] $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{tr(A)} = 4 + (-1) = 3$ $|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) = -4 + 6 = 2$ [2] $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{tr(A^{-1})} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$

$$\det(A^{-1}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2 - \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 1 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

[3] $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{tr(B)} = (-1) + 5 = 4$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 5 - (-4)\cdot 2 = -5 + 8 = 3$$

[4] $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{tr(AB)} = 2 + 3 = 5$

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - (-1)\cdot 0 = 6 - 0 = 6$$

[5] $BA = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{tr(BA)} = 4 + 1 = 5$

$$\det(BA) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot 1 - 1\cdot(-2) = 4 + 2 = 6$$

[6] $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{tr}\big(\mathrm{R}(\theta)\big) = \cos\theta + \cos\theta = 2\cos\theta$

$$\det\big(R(\theta)\big) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta\cdot\cos\theta - (-\sin\theta)\cdot\sin\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

[7] $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{tr(C)} = 1 + 5 + 9 = 15$

$$\det(C) = (1\cdot 5\cdot 9) + (2\cdot 6\cdot 7) + (3\cdot 4\cdot 8)$$
$$-(3\cdot 5\cdot 7) - (2\cdot 4\cdot 9) - (1\cdot 6\cdot 8)$$
$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0$$

1.1.10 고유값과 고유벡터(eigenvalue and eigenvector)

먼저 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 라 할 때 다음을 계산해 보도록 하겠습니다.

$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

A와 열벡터 x와의 곱은 위 계산의 왼쪽 식에서 보듯이 일반적으로 x와는 무관한 열벡터를 얻는다는 것을 알 수 있습니다. 이를 식으로 표현하면 $A\mathrm{x} = \mathrm{y}$라고 쓸 수 있습니다. 하지만 오른쪽 식에서 보듯이 아주 특별한 어떠한 열벡터 x는 '실수배'라는 차이만을 제외하고는 곱하기 전과 후가 같다는 것을 알 수 있습니다.

이것을 식으로 표현하면 $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$라고 쓸 수 있으며, 이 등식을 만족하는 특별한 상수 λ를 행렬 A의 **고유값(eigenvalue)**이라고 하며, 각각의 λ에 대입했을 때 연립일차방정식 $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$의 해가 되는 열벡터 x를 고유값 λ에 대응하는 **고유벡터(eigenvector)**라 합니다.

위의 보기에서는 고유값 3에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 등이 있습니다. 고유값이 같은 벡터들은 서로 실수배 차이밖에는 나지 않으므로 같은 것으로 취급한다는 것을 알 수 있습니다. 다른 말로 하면 벡터의 크기만 다를 뿐 방향은 같다. 방향이 정 반대인 경우도 있습니다다. 고유값 -1에 대응하는 고유벡터도 알 수 있을 것이며, 0은 고유값이 될 수 있지만 $\vec{0}$은 고유벡터가 될 수 없습니다.

식 $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$ 을 다시 살펴보면 언뜻 생각하기로 '양변을 x로 나누어주면 $A =$

λ 가 되네?'라고 생각할 수도 있겠지만 이것은 수의 곱이 아니라 행렬의 곱임을 기억해 두시기 바랍니다. 열벡터 x는 역행렬이 존재하지 않으므로 위와 같은 계산을 할 수 없습니다. 또한 A는 행렬이고 λ는 실수이므로 이 둘이 같을 수는 없습니다.

이제 고유값을 구하는 방법을 알아보도록 하겠습니다. 앞에서 말했듯이 $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$ 를 만족하는 λ와 x를 구하면 됩니다. 그런데 이 문제의 정형화된 풀이는 이미 앞에서 제시했습니다. 행렬 A가 2차, 3차, 4차 정사각행렬이던 상관없이 λ에 대한 방정식 $\det(A-\lambda E)=0$의 근이 고유값이 되고 각 고유값에 대한 연립방정식의 해가 고유벡터가 된다는 것을 알 수 있습니다.

[예제] 행렬 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$의 고유값과 고유벡터를 구하여라
[풀이] 이 문제는 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$을 만족하는 λ와 그 때의 x값을 구하는 문제이다. 결국 우리가 알고 있는 이차방정식 $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$ $= (5-\lambda)^2 - 4 = 0$ 의 근을 구하는 문제와 같으며 $\lambda = 7,\ 3$을 얻는다. 먼저 $\lambda = 7$일 때 주어진 방정식은 $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 되며 $y = x$가 방정식의 해 이므로 $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$가 고유벡터가 되며 특별히 $x = 1$을 잡으면 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$이 된다. 다음은 $\lambda = 3$일 때 주어진 방정식은 $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 되며 $y = -x$가 방정식의 해 이므로 $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$가 고유벡터가 되며 특별히 $x = 1$을 잡으면 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$이 된다.

따라서 주어진 행렬이 예제와 같이 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$와 같은 특수한 경우 행렬의 고유값은 언제나 $\lambda = a+b,\ a-b$를 얻으며 각각에 대응하는 고유벡터는 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 이다.

[예제] 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에 대하여 다음과 같은 연립방정식 $AX = kX$의 해가 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이외의 해를 가질 때, 실수 k의 값을 구하여라
[풀이] 이 문제는 행렬의 고유값을 구하는 문제라는 것을 알 수 있다. 따라서 이차방정식 $\begin{vmatrix} 2-k & 3 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = (2-k)^2 - 3 = 0$ 의 근이 구하려는 값이다. 이 방정식을 풀면 $k = 2 \pm \sqrt{3}$을 얻는다. 고유값 문제를 만날 때 이러한 정형화된 풀이를 알고 있다면 주어진 문제를 훨씬 빠르게 풀 수 있다는 것을 알 수 있다.

1.1.11 닮음변환(유사변환, similar transformation)

행렬 A를 역행렬이 존재하는 행렬 P와 다음과 같이 곱하여 새로운 행렬 B를 만드는 과정을 **닮음변환**이라고 하며, 이때 A는 B와 **similar** 하다고 합니다.

$$B = P^{-1}AP$$

물론 $Q = P^{-1}$라 한다면 $Q^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P$ 이므로 다음과 같이 쓸 수도 있습니다.

$$B = QAQ^{-1}$$

이러한 형태의 곱은 일반 고등학교 과정에서 배우기 때문에 익숙할 것입니다. 다만 닮음변환이라는 단어는 배우지 않습니다. 닮음변환 $B = P^{-1}AP$에서

는 다음과 같은 성질이 있습니다.

$$A = PBP^{-1}$$

$$B^n = P^{-1}A^nP, \quad A^n = P^{-1}B^nP$$

$$\det(B) = \det(A)$$

$$\mathrm{tr(B)} = \mathrm{tr(A)}$$

[예제] $B = P^{-1}AP$ 일 때, $A = PBP^{-1}$ 을 보이시오.
[풀이] $B = P^{-1}AP$ 의 양변의 왼쪽에 P를 오른쪽에 P^{-1}를 곱하면(순서가 중요) $PBP^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1} = (PP^{-1})A(PP^{-1}) = EAE = A$

[예제] $B = P^{-1}AP$ 일 때, $B^n = P^{-1}A^nP$ 를 증명하시오.
[풀이] $B^n = (P^{-1}AP)^n$ $= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)$ $= P^{-1}A(P^{-1}P^{-1})A(P^{-1}P^{-1})A(P^{-1}\cdots P^{-1})\mathrm{A}P^{-1}$ $= P^{-1}A^nP$

[예제] $B = P^{-1}AP$ 일 때, $\det(B) = \det(A)$ 임을 보이시오.
[풀이] 행렬 B의 determint, 즉 det(B)를 구한 후 det(A) 같음을 보이면 된다 $\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\ \det(A)\det(P)$ $= \dfrac{1}{\det(P)}\ \det(A)\det(P) = \det(A)$

[예제] 행렬 $A = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 일 때, 닮음변환 $B = P^{-1}AP$

를 구하여라.

[풀이] $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 이므로

$B = P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

여기서 위 식의 행렬 B 처럼 주대각성분 이외의 모든 성분이 0인 정사각행렬을 **대각행렬(diagonal matrix)**이라고 한다. 단위행렬은 대표적인 대각행렬이다. 정사각행렬 A에 적당한 정사각행렬 P를 이용하여 위와 같이 닮음변환 시켜 대각행렬을 만드는 과정을 **대각화(diagonalization)**라고 한다.

[예제] 행렬 $A = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$의 고유벡터가 $\mathrm{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 임을 이용하여 A^n을 구하여라.

[풀이] $Q = (\ \mathrm{u},\quad \mathrm{v}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 이라 하면 $A\mathrm{u} = -\mathrm{u}$, $A\mathrm{v} = -2\mathrm{v}$ 이므로

$C = Q^{-1}AQ = Q^{-1}(\ -\mathrm{u},\quad -2\mathrm{v}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$를 얻는다.

즉, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$를 대입하여 직접 C 를 계산해 보면 위와 같은 결과를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다.

$C^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ 이고, $A = QCQ^{-1}$ 이므로

$A^n = QC^nQ^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(-1)^n & 2(-1)^n \\ 3(-2)^n & (-2)^n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -5(-1)^n + 6(-2)^n & 10(-1)^n - 10(-2)^n \\ -3(-1)^n + 2(-2)^n & 6(-1)^n - 5(-2)^n \end{pmatrix}$

1.1.12 케일리-해밀턴 정리(Cayley-Hamilton's Theorem)

케일리-해밀턴 정리는 앞장에서 알아본 고유값, 고유벡터에 대한 개념을 정확하게 알고 있다면 이해하는데 전혀 어려운 문제가 아닙니다.

다음과 같은 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 고유값을 구하는 문제는 디음과 같은 λ에 관한 이차방정식 $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$ 의 근을 구하는 것과 같습니다.

즉 이 식을 일반 장정식 형태로 풀어서 적어보면 다음과 같은 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$ 혹은 $\lambda^2 - \mathrm{tr(A)}\lambda + \det(\mathrm{A}) = 0$ 을 얻는다는 것을 알 수 있습니다. 근과 계수와의 관계에 의해서 고유값의 곱은 $\det(A)$과 같고 고유값의 합은 $\mathrm{tr(A)}$와 같으며, 이 관계는 우리가 많이 보아왔던 식이라는 것을 알 수 있습니다.

이제 위 식에서 λ대신 A를 대입하고 상수항에 E를 곱하면 다음과 같은 케일리-해밀턴 정리를 얻을 수 있습니다

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$$

앞에서 소개한 식은 $A^2 - \mathrm{tr(A)A} + \det(\mathrm{A})\,\mathrm{E} = 0$ 라고 쓸 수도 있습니다. 이 정리는 3차 이상의 행렬에도 적용이 된다는 것을 알아두시기 바랍니다.

[예제] 다음과 같은 행렬 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에 대하여 연립방정식 $AX = kX$ 해가 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이외의 해를 가질 때, 실수 k의 값의 합을 구하시오
[풀이] 케일리-해밀턴 정리의 형태를 이용한다면 구하는 k값은 이차방정식

$k^2 - 6k + 5 = 0$의 근이다. 굳이 이차방정식을 풀 필요도 없이 근과 계수와의 관계에 의해서 6을 얻는다.

[예제] $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 일 때, $A^3 + A^2 + A + E$를 계산하여라.

[풀이] 직접 A^2, A^3 을 계산하여 위 식을 계산할 수 있으나 복잡하기 때문에. $\mathrm{tr(A)} = 1$, $\det(\mathrm{A}) = 1$ 관계와 해밀턴 정리를 이용하면 다음 등식이 성립한다.

$A^2 - A + E = 0$ 이 식을 적절히 활용하면

$$A^3 + A^2 + A + E = (A^2 - A + E)A + 2A^2 + E$$
$$= OA + 2(A^2 - A + E) + 2A - E = 2A - E$$
$$= 2\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 14 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

케일리-해밀턴 정리는 위와 같이 보통 높은 차수의 행렬에 관한 식을 낮은 차수로 변형시킬 때 자주 사용된다. 즉 행렬의 덧셈과 실수배는 비교적 계산하기 쉽지만 행렬의 곱 또는 거듭제곱 등은 계산이 복잡하기 때문에 이러한 케일리-해밀턴 정리를 이용하면 복잡한 행렬 계산을 쉽고 빠르고 할 수 있는 장점이 있다

1.2 벡터 (Vector)

1.2.1 벡터 정의 및 개념

보통 교과서에서는 **벡터(vector)**를 '크기와 방향을 가진 양'으로 정의하고, 크기만 갖고 방향은 없는 양을 **스칼라(scalar)**라고 정의하는 것이 일반적입니다.

벡터는 순서를 생각해야하는 반면에 집합은 순서를 생각하지 않습니다. 집합 $A = \{1,\ a,\ 3\}$와 집합 $B = \{a,\ 3,\ 1\}$를 비교해 보면 순서에 상관없이 들어 있는 원소는 모두 같으므로 두 집합 $A,\ B$는 같은 집합입니다.

반면에 벡터는 순서쌍이기 때문에 순서가 매우 중요합니다. 집합을 문자로 표현할 때는 $A,\ B,\ X$ 등과 같이 대문자로 표현하고 벡터를 문자로 표현할 때는 $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{x}$와 같이 문자 위에 화살표를 그려서 표기하고, 순서쌍을 나타내기 위해서는 $\vec{a} = (1,\ a,\ 3)$와 같이 소괄호를 이용합니다.

즉 $\vec{a}$ 는 $\vec{b} = (a,\ 3,\ 1)$ 와는 다른 벡터이다. 순서가 다르기 때문입니다. $(1,\ a,\ 3)$처럼 세 개의 수로 이루어진 순서쌍을 3차원 벡터라고 하고 $(1,\ -2)$처럼 두 개의 수로 이루어진 순서쌍을 2차원 벡터라고 합니다. (2)처럼 한 개의 수로 이루어진 순서쌍을 1차원 벡터라고 말하기도 하지만 1차원 벡터는 스칼라(실수)를 의미합니다.

순서쌍 개념에 익숙해지기 위해서 다음의 예를 보도록 하겠습니다.

편의점에서 복숭아, 파인애플, 오렌지를 판다고 가정해보도록 하겠습니다. 어느 날 복숭아 3개, 파인애플 4개, 오렌지 2개가 팔렸다면 보통 사람은 다음과 같이 장부에 적을 것입니다.

오늘의 판매량 : 복숭아 3개, 파인애플 4개, 오렌지 2개

이렇게 매일 매일 적다보면 '복숭아, 파인애플, 오렌지'이라는 글을 적기가 불편할 것이라는 것을 알 수 있습니다. 더구나 월말 결산이라도 하려면 똑같은 과일 이름을 서른번 정도 적어야 할 것입니다. 뭔가 좋은 방법이 없을까요?

그 중에 하나는 나름 데로 순서를 정하는 것입니다. 즉 다음과 같이 오늘의 판매량 : (3, 4, 2) 라고 적어놓고 처음은 복숭아, 둘째는 파인애플, 셋째는 오렌지라고 약속을 한다면 훨씬 일이 쉬워질 것입니다. 여기서 중요한 것은 순서이다. (3, 4, 2)와 (2, 3, 4)는 전혀 다른 것입니다.

이런 식으로 식을 적을 때 처음 수가 무엇이고 둘째 수가 무엇인지를 안다면 일일이 모든 것을 적는 것에 비해 시간과 노력이 매우 줄어든다는 것을 알 수 있습니다.

이렇게 순서를 정해서 수를 나열한 순서쌍을 **벡터**라고 하며 각각의 수를 벡터의 **성분**이라고 합니다. 알고 보면 벡터는 쉬운 것입니다. 보통 고등학교 과정은 벡터의 성분이 실수인 경우만 다루지만 고급과정에서는 $(1+i,\ -i,\ 3)$과 같이 복소수인 경우도 다루게 됩니다. (본 과정은 머신러닝과 딥러닝 알고리즘을 이해하기 위한 기본 선형대수 과정이므로 복소수 성분의 벡터는 다루지 않습니다)

1.2.2 벡터의 상등

두 벡터가 서로 같다는 것은 각각의 성분이 같다는 것입니다. 당연히 순서도 같아야 하고 벡터의 차원도 같아야 한다는 것을 알 수 있습니다. 즉

$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ 라고 할 때

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad (a_1,\ a_2,\ a_3) = (b_1,\ b_2,\ b_3) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 & \text{and} \\ a_2 = b_2 & \text{and} \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

위와 같은 3차원 벡터의 경우에는 두 벡터가 같다는 것은 세 성분이 모두 같아야 하므로 성분으로 이루어진 세 개의 등식을 모두 만족시켜야 합니다. 이 세 등식 중에 하나라도 만족하지 않으면 두 벡터는 같지 않습니다.

1.2.3 벡터의 덧셈

어제의 판매량이 $(3,\ 4,\ 2)$ 이고, 오늘의 판매량이 $(6,\ 7,\ 5)$ 이었다면 이틀 동안의 판매량은 얼마일까요? 아마도 $(9,\ 11,\ 7)$ 이라고 대답했을 것입니다. 즉,

$$(3,\ 4,\ 2) + (6,\ 7,\ 5) = (3+6,\ 4+7,\ 2+5) = (9,\ 11,\ 7)$$

와 같은 계산을 했다는 뜻입니다. 이것이 바로 벡터의 셈이며 벡터의 뺄셈도 덧셈과 비슷하게 합니다. 벡터의 덧셈은 차원이 같은 벡터끼리만 가능합니다.

즉 2차원 벡터와 3차원 벡터는 덧셈을 할 수 없습니다. 여기서 n차원으로 일반화 시키는 것은 어렵지 않지만 기억해 둘 것은 우리가 기존에 알고 있는 덧셈, 뺄셈과 계산 방법이 다르다는 것을 알 수 있습니다. 같은 기호를 사용하고 같은 단어를 사용하지만 수(number, scalar)의 덧셈과 벡터의 덧셈은 다르다는 것을 반드시 기억해두는 것이 좋을 것 같습니다.

즉, $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ 라고 할 때

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1,\ a_2,\ a_3) + (b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1,\ a_2,\ a_3) - (b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)$$ 이다.

[예제] 다음 벡터의 덧셈과 뺄셈을 계산하여라.
[1] $(1,\ 0,\ 4)+(3,\ 2,\ 5)=(1+3,\ 0+2,\ 4+5)=(4,\ 2,\ 9)$
[2] $(3,\ 2,\ 4)-(1,\ 2,\ 5)=(3-1,\ 2-2,\ 4-5)=(2,\ 0,\ -1)$
[3] $(-2,\ 3,\ -4)+(-1,\ 2,\ 5)=(-2+(-1),\ 3+2,\ -4+5)=(-3,\ 5,\ 1)$
[4] $(2,\ -5,\ -1)-(-1,\ 2,\ -4)=\big(2-(-1),\ -5-2,\ -1-(-4)\big)=(3,\ -7,\ 3)$
[5] $(4,\ -2)+(-3,\ 2)=(4+(-3),\ -2+2)=(1,\ 0)$

보통 영벡터라고 부르는 $\vec{0}=(0,\ 0,\ 0)$은 벡터의 덧셈에 대한 항등원입니다. 어떤 수에 0을 더하면 자기 자신이 되는 것처럼 어떤 벡터에 $\vec{0}$을 더하면 자기 자신이 됩니다. 당연한 이야기지만 2차원 영벡터는 $\vec{0}=(0,\ 0)$ 이라고 적습니다.

벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 덧셈 가능할 때 벡터의 덧셈에는 다음과 같은 성질들이 있습니다.

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	교환법칙
$\big(\vec{a}+\vec{b}\big)+\vec{c}=\vec{a}+\big(\vec{b}+\vec{c}\big)$	결합법칙
$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$	덧셈 항등원 $\vec{0}$(영벡터)이 존재
$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$	$\vec{a}$의 덧셈에 대한 역원 $-\vec{a}$이 존재

[예제] 벡터의 덧셈은 교환법칙이 성립함을 보이시오.
[풀이] $\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+\ b_2, a_3+b_3)$ $=(b_1+a_1,\ b_2+\ a_2, b_3+a_3)$ $=(b_1,\ b_2, b_3)+(a_1,\ a_2, a_3)=\vec{b}+\vec{a}$

1.2.4 벡터의 실수배

어제의 판매량이 (3, 4, 2)이고 오늘은 어제의 두 배를 팔았을 때 오늘의 판매량은 다음과 같이 계산됩니다

$$2 \times (3,\ 4,\ 2) = (2 \times 3,\ 2 \times 4,\ 2 \times 2) = (6,\ 8,\ 4)$$

즉 벡터의 실수배는 다음과 같은 식으로 정의됩니다.

$$k\,\vec{a} = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$$

앞장에서 배운 덧셈과 마찬가지로 보통 '곱하기'라는 똑같은 단어를 사용하지만 우리가 알고 있는 '수×수'와 방금 말한 '수×벡터'는 비슷하지만 다른 연산이라는 것을 기억해 두어야 합니다. 수와 벡터의 곱은 $k\vec{a}$라는 표현을 많이 사용하고 $\vec{a}k,\ k \cdot \vec{a},\ k \times \vec{a}$와 같은 표현은 거의 사용하지 않습니다.

[예제] 다음 벡터와 실수와의 곱셈을 계산하시오.
[1] $3(2,\ -1,\ 4) = (3 \times 2,\ 3 \times (-1),\ 3 \times 4) = (6,\ -3,\ 12)$ [2] $-(1,\ -4,\ 0) = -1(1,\ -4,\ 0)$ $= ((-1) \times 1,\ (-1) \times (-4),\ (-1) \times 0) = (-1,\ 4,\ 0)$ [3] $0(3,\ 1,\ -2) = (0 \times 3,\ 0 \times 1,\ 0 \times (-2)) = (0,\ 0,\ 0)$ [4] $4(0,\ 0,\ 0) = (4 \times 0,\ 4 \times 0,\ 4 \times 0) = (0,\ 0,\ 0)$ [5] $-2(1,\ -3) = ((-2) \times 1,\ (-2) \times (-3)) = (-2,\ 6)$

벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 덧셈 가능할 때 벡터의 실수배에는 다음과 같은 성질들이 있습니다.

$0\vec{a} = \vec{0}$	0과 임의의 벡터와의 곱은 영벡터
$k\vec{0} = \vec{0}$	임의의 실수와 영벡터와의 곱은 영벡터
$1\vec{a} = \vec{a}$	1은 벡터의 실수배의 항등원
$(-1)\vec{a} = -\vec{a}$	-1 과 주어진 벡터와의 곱은 그 벡터의 역벡터(덧셈 역원)
$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$	벡터의 실수배와 벡터의 덧셈에 대한 분배법칙
$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$	실수의 합과 벡터의 실수배에 대한 분배법칙
$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$	실수의 곱과 벡터의 실수배에 대한 결합법칙

[예제] $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ 을 증명하시오.

[풀이] $k(\vec{a} + \vec{b}) = \mathrm{k}(\mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_1,\ \mathrm{a}_2 + \mathrm{b}_2,\ \mathrm{a}_3 + \mathrm{b}_3)$

$$= \left(\mathrm{k}(\mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_1), \mathrm{k}(\mathrm{a}_2 + \mathrm{b}_2), \mathrm{k}(\mathrm{a}_3 + \mathrm{b}_3)\right)$$

$$*= (\mathrm{ka}_1 + \mathrm{kb}_1, \mathrm{ka}_2 + \mathrm{kb}_2, \mathrm{ka}_3 + \mathrm{kb}_3)$$

$$**= (\mathrm{ka}_1, \mathrm{ka}_2, \mathrm{ka}_3) + (\mathrm{kb}_1, \mathrm{kb}_2, \mathrm{kb}_3)$$

$$= k\vec{a} + k\vec{b}$$

여기서 * 표한 등식은 실수의 곱셈과 덧셈에 대한 분배법칙을 이용했으며 ** 표한 등식은 벡터의 덧셈의 정의를 이용하여 전개되었음을 기억할 필요가 있다

1.2.5 벡터의 내적(inner product or dot product)

(실수)×(실수)와 (실수)×(벡터)를 배웠으니 이제는 (벡터)×(벡터) 연산을 통해 내적 개념을 파악해 보도록 하겠습니다. 역시 과일 문제에서 시작하겠습니다.

복숭아, 파인애플, 오렌지의 오늘의 판매량이 $(2,\ 4,\ 3)$ 이라고 하고, 각각의 과일 가격이 $(50,\ 80,\ 60)$ 이라고 가정하겠습니다.

벡터의 의미는 쉽게 알 수 있을 것입니다. 굳이 설명하자면 복숭아 가격은 50원, 파인애플의 가격은 80원, 오렌지의 가격은 60원이라는 뜻입니다. 이렇게 말로 쓰는 것 보다 벡터를 이용한 표현이 훨씬 간편함을 다시 한 번 느낄 수 있을 것입니다. 그러면 이 상황에서 오늘의 매출은 얼마일까요? 즉 다음과 같이 계산결과를 보면,

$$\begin{aligned}(2,\ 4,\ 3)\cdot(50,\ 80,\ 60) &= (2\times 50)+(4\times 80)+(3\times 60)\\ &= 100+320+180=600\end{aligned}$$

이처럼 우리 스스로는 인식하지 못했겠지만 대부분의 사람들은 벡터의 내적 연산법을 이미 알고 있습니다. 벡터의 내적은 이렇게 우리에게 익숙한 연산이고 전혀 새로운 것이 아니라는 것을 알 수 있습니다. 다시 말해 벡터의 **내적**은 다음과 같은 식으로 정의할 수 있습니다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)\cdot(b_1,\ b_2,\ b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

벡터의 내적의 결과물은 벡터가 아닌 스칼라인 것을 기억하는 것이 중요합니다. 그렇기 때문에 벡터의 **내적(Inner product)**은 다른 말로 **스칼라 곱 (scalar product)**이라도 합니다. 또한 가운데에 점을 찍기 때문에 **dot product** 라고도 합니다.

벡터의 내적은 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 혹은 $\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$로 표현하지만, $\vec{a}\times\vec{b}$나 $\vec{a}\vec{b}$ 라고 절대로 적지 않습니다. 전자를 가리켜 벡터의 **외적(outer product)** 혹은 × 기호를 사용하기 때문에 **cross product** 라고 하고, 후자를 가리켜 벡터의 **다이아드 곱(diadic product)**이라 합니다. 즉 벡터의 내적을 표현할 때는 반드시 가운데에 점을 찍어서 나타내야만 한다는 것을 기억해 두시기 바랍니다.

[예제] 다음 벡터의 내적을 계산 하시오.
[1] $(1,\ 3,\ -2)\cdot(-2,\ 3,\ 1)$ $= [1\times(-2)]+(3\times 3)+[(-2)\times 1] = -2+9+(-2) = 5$ [2] $(2,\ 1,\ -5)\cdot(1,\ 3,\ 1)$ $= (2\times 1)+(1\times 3)+[(-5)\times 1] = 2+3+(-5) = 0$ [3] $(1,\ -1,\ -3)\cdot(1,\ -1,\ -3)$ $= 1^2+(-1)^2+(-3)^{2=}1+1+9 = 11$ [4] $(2,\ 1)\cdot(-1,\ 2)$ $= [2\times(-1)]+(1\times 2) = -2+2 = 0$ [5] $(3,\ -1)\cdot(-2,\ -5)$ $= [3\times(-2)]+[(-1\times(-5)] = -6+5 = -1$

벡터의 크기는 $\left|\vec{a}\right|$ 혹은 그냥 a라고 표현하며, $\left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$ 혹은 $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$로 정의합니다. 또한 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적이 0이라면 두 벡터는 서로 **직교(orthogonal)**한다고 말하고 $\vec{a}\perp\vec{b}$라고 표현합니다. 왜 직교라는 말을 쓰는지는 뒤에 배우게 될 것입니다. 위의 [예제]에서 내적의 결과가 0이 된 경우를 생각해 보면 짐작할 수 있을 것입니다. 내적에는 다음과 같은 성질이 있습니다.

$\vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$ 자기 자신과의 내적은 그 벡터의 크기의 제곱과 같다.

$\vec{a}\cdot\vec{a} \geqq 0$ 자기 자신과의 내적은 언제나 0 또는 양의 실수

$\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \ \Leftrightarrow\ \vec{a} = \vec{0}$ 자기 자신과의 내적이 0 이면, 그 벡터는 $\vec{0}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ 벡터의 내적의 교환법칙

$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ 벡터의 내적과 벡터의 덧셈에 대한 분배법칙

$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ 벡터의 실수배와 내적에 대한 결합법칙

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}\ or\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|=0$$

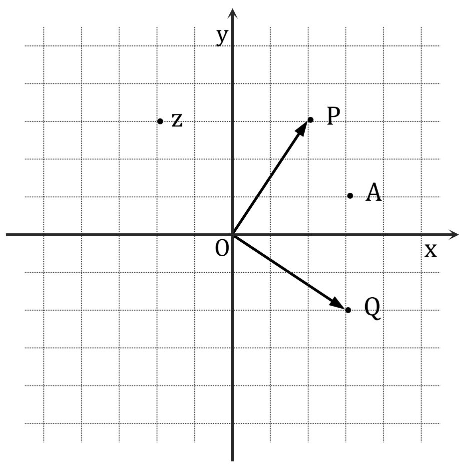
두 벡터의 내적이 0이면 직교하거나 $\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|=0$이다.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ 내적의 또 다른 정의로 뒤에서 자세히 설명한다.

[예제] $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 성립함을 증명하시오.
[풀이] $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)\cdot(b_1,\ b_2,\ b_3)$ $=a_1b_1+\ a_2\,b_2+a_3b_3$ $*=b_1a_1+\ b_2a_2+b_3a_3$ $=(b_1,\ b_2,b_3)\cdot(a_1,\ a_2,a_3)=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 여기서 * 표한 등식은 실수의 곱셈에 대한 교환법칙을 이용했다.

1.2.6 벡터와 좌표

벡터의 표현법과 좌표의 표현법이 같다는 것은 이미 파악하고 있을 것입니다. 다시 말하면 (3, 1)은 2차원 벡터를 뜻하기도 하지만, 좌표평면위의 한 점 A(3, 1)을 뜻합니다.



또한 (1, 4, 3)은 3차원 벡터를 뜻하기도 하지만, 공간좌표에서의 한 점 B(1, 4, 3)을 뜻하기도 합니다. 벡터 (2, 3)는 좌표평면의 원점 O(0, 0)에서 시작하여 점 $P(2,\ 3)$로 끝나는 화살표로 그릴 수 있습니다. x축을 '복숭아 축', y축을 '파인애플 축'으로 잡는다면 $P(2,\ 3)$는 복숭아 2개, 파인애플 3개를 뜻한다. 또한 복소평면에서는 복소수를 좌표평면위에 나타내기 위해서 x축을 실수축, y축을 허수축으로 잡는데, (−2, 3)은 복소수 $z=-2+3i$를 뜻한다. 또한 두 벡터 $\overrightarrow{OP}=(2,\ 3)$와 $\overrightarrow{OQ}=(3,\ -2)$에 대하여, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ 이고 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 라는 것도 알 수 있을 것

입니다. 즉 내적이 0이면 왜 직교한다고 하는지 좌표를 통해서 어느 정도 개념을 파악할 수 있습니다.

1.2.7 벡터와 복소수

이제는 벡터와 복소수 사이의 관계를 알아보도록 하겠습니다. 복소수의 덧셈, 뺄셈, 실수배는 2차원 벡터의 그것과 내용적으로 동일합니다.
이번에도 예를 들어서 관계를 파악하도록 해보겠습니다.

$z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 4 + i$라 하고 이들을 계산해 보면

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 + i) = (2 + 4) + (3 + 1)i = 6 + 4i$$
$$4z_1 = 4(2 + 3i) = (4 \times 2) + (4 \times 3)i = 8 + 12i$$

결과를 얻을 수 있고 아래의 대응관계를 참고하면 위의 두 연산은 벡터의 덧셈, 벡터의 실수배와 같다는 것을 알 수 있습니다.

$$z_1 = 2 + 3i \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = (2,\ 3)$$
$$z_2 = 4 + i \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = (4,\ 1)$$

복소수의 곱셈은 벡터의 내적과는 다른 연산입니다. 뒤에 행렬 부분에서 복소수의 곱셈이 벡터나 행렬과 어떤 관계가 있는지 알 수 있을 것입니다. 지금까지 결과를 종합해 보면 2차원 벡터는 좌표평면 위의 한 점으로 생각할 수 있고, 복소평면위의 한 복소수로 생각할 수 있다는 것을 알 수 있습니다.

1.2.8 벡터와 함수

언뜻 생각하면 벡터와 함수는 아무런 관련이 없어 보입니다. 하지만 벡터와

함수는 관련이 있으며 일반적인 고등학교 과정에서는 배우지 않는 경향이 있습니다.

위대한 수학자 칸토어(Cantor)의 말처럼 수학의 본질은 자유로움에 있는지도 모릅니다. 이미 벡터를 배웠던 사람들 에게 다음과 같은 질문을 하고 싶습니다.

[1] 벡터를 '크기와 방향을 가진 양'이외의 것으로 생각해 본적이 있습니까?
[2] 벡터 내적이 위에서 설명한 과일의 매출이나 성적과 관련이 있다고 생각해 본적이 있습니까?
[3] 벡터의 덧셈을 그렇게 생각해 본 적이 있습니까?
[4] 또한 앞으로 설명할 내용인 벡터가 함수와 어떤 관계가 있는지 생각해 본 적이 있습니까?

사람들은 어려서부터 사과 두 개, 자동차 두 대, 사람 두 명, 연필 두 개 등으로부터 얻은 공통점을 찾아내어 '둘'이라고 이름 붙이고 '2'라는 기호를 사용합니다. 이러한 과정을 추상화 키니다고 한다는 것을 우리는 잘 알고 있습니다.

사람들이 2라는 수를 보면 그것이 무슨 뜻인지 알 수 있는 이유가 바로 이러한 추상화능력이 있기 때문입니다. 실제로 사과, 자동차, 사람, 연필 등은 아무런 공통점이 없지만 사람이 가진 추상화능력으로 '둘'이라는 공통점을 찾아낸 것입니다. 이와 비슷하게 벡터와 함수는 서로 아무런 공통점이 없어 보이지만 위에 말한 것처럼 추상적인 공통점이 있습니다.

구체적인 보기로 이차함수와 3차원 벡터의 공통점을 살펴보도록 하겠습니다.

$f(x) = -2x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^2 - x + 3$ 이라 하고 다음 연산을 생각해 보면,

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (-2x^2 + 3x + 1) + (x^2 - x + 3) \\ &= (-2 + 1)x^2 + (3 - 1)x + (1 + 3) = -x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

$$2f(x) = 2(-2x^2 + 3x + 1)$$
$$= [2 \times (-2)]x^2 + (2 \times 3)x + (2 \times 1) = -4x^2 + 6x + 2$$

이 연산들로부터 벡터와의 공통점을 찾아냈습니까? 찾지 못했다면 우리가 지금까지 학습했던 다음과 같은 벡터의 연산을 통해 비교해본다면 쉽게 이해할 수 있습니다.

$\vec{a} = (-2,\ 3,\ 1)$, $\vec{b} = (1,\ -1,\ 3)$ 이라면 이들의 연산은 다음과 같습니다.

$$\vec{a} + \vec{b} = (-2 + 1,\ 3 + (-1),\ 1 + 3) = (-1,\ 2,\ 4)$$

$$2\vec{a} = 2(-2,\ 3,\ 1) = (2 \times (-2),\ 2 \times 3,\ 2 \times 1) = (-4,\ 6,\ 2)$$

함수의 연산과 벡터의 연산을 비교해 보면

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = (-2,\ 3,\ 1)$$
$$g(x) = x^2 - x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = (1,\ -1,\ 3)$$

라는 대응관계에 있을 때 이차함수의 덧셈과 3차원 벡터의 덧셈은 똑같은 연산이라는 것을 알 수 있고 이차함수의 실수배와 벡터의 실수배 역시 똑같은 연산이라는 것을 알 수 있습니다.

이것을 수학적인 전문용어로 동형(isomorphic)이라고 하며 이러한 대응관계를 동형사상(isomorphism)이라고 합니다.

[예제] 이차방정식 $(1,\ -3,\ 2)$의 근을 구하시오.
[풀이] 앞에서 말한 대응관계를 떠올린다면 $(1,\ -3,\ 2) \ \Leftrightarrow\ x^2 - 3x + 2 = 0$라고 방정식의 일반해를 찾을 수 있다. 즉 이 방정식을 풀면 $x = 1,\ 2$를 얻는다.

1.3 선형대수 문제

[문제 1] 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 $2A + X = 2X + B$ 를 만족시키는 행렬 X를 구하여라.

[문제 2] 정사각행렬 A의 역행렬 A^{-1}가 존재할 때, A^{-1}는 행렬 A에 대하여 오직 하나만 존재함을 증명하시오.

[문제 3] $A^2 + A - 2E = O$ 일 때 A는 역행렬을 가짐을 보여라.

[문제 4] 행렬 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$의 고유값과 고유벡터를 구하여라

[문제 5] 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에 대하여 다음과 같은 연립방정식 $AX = kX$ 의 해가 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이외의 해를 가질 때, 실수 k의 값을 구하여라

[문제 6] 행렬 $A = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 일 때, 닮음변환 $B = P^{-1}AP$ 를 구하여라.

[문제 7] 행렬 $A = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$의 고유벡터가 $\mathrm{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 임을 이용하여 A^n을 구하여라.

[문제 8] $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 일 때, $A^3 + A^2 + A + E$를 계산하여라.

[문제 9] 다음 벡터의 내적을 계산하시오. (계산 과정도 함께 기술하시오)
[1] $(1,\ 3,\ -2) \cdot (-2,\ 3,\ 1)$

[2] $(2,\ 1,\ -5) \cdot (1,\ 3,\ 1)$

[3] $(1,\ -1,\ -3) \cdot (1,\ -1,\ -3)$

[4] $(2,\ 1) \cdot (-1,\ 2)$

[5] $(3,\ -1) \cdot (-2,\ -5)$

[문제 10] 다음과 같은 이차방정식 $(2, -1, -1)$의 일반적인 해를 벡터의 동형사상(isomorphism)을 이용하여 구하시오.