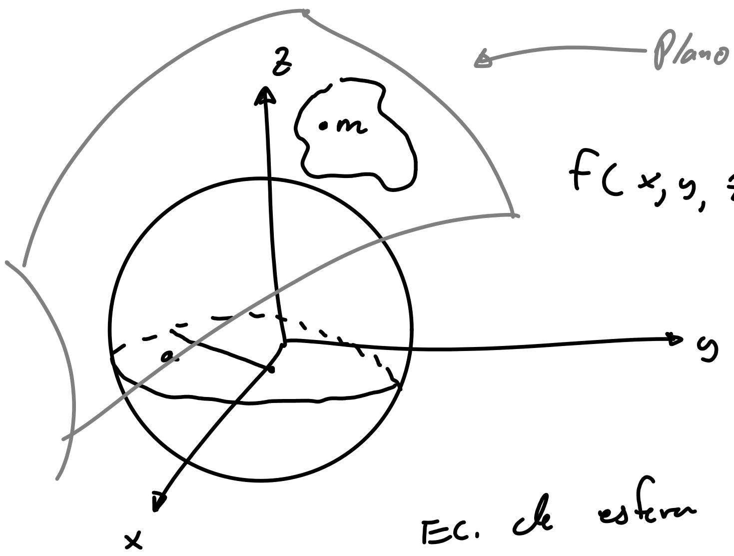
Mecánica teórica clase #5 14/08/2025



$$f(x,y,z,t)=0 \Big\} \; z = z(x,y,t)$$

Ec. de esfera de radio a. centrada en $(0,0)$

Tenemos $x^2+y^2+z^2-a^2=0$

$$\Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

Radio vector

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \;; \quad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} \pm \sqrt{a^2-x^2-y^2}\;\hat{z}$$

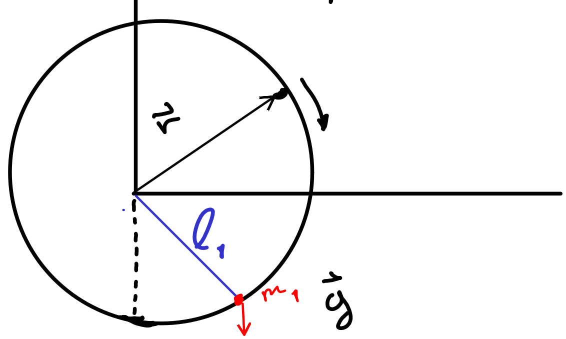
Tenemos

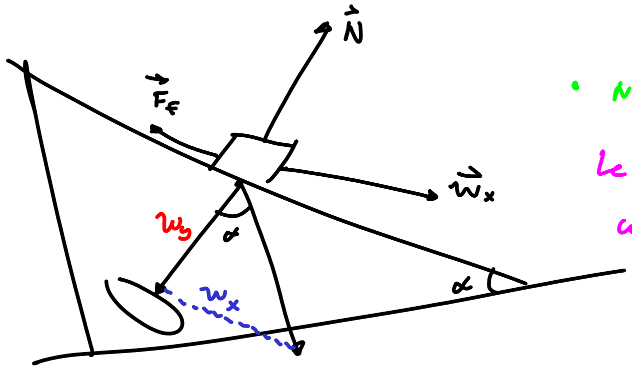
$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \underset{\sim}{\vec{F}} + \vec{F}_c$$

Ejercicio péndulo en $x-y$ con radio vector

$(\vec{r})$ y lazo; l_1

$\Rightarrow$





- No hay desplazamiento virtual

Le es permitido tal que respeta las condiciones de construcción

$\Rightarrow$ Trabajo virtual $(\delta w) = \underline{0}$

- si no se cumple, entonces no existe trabajo virtual.

siguiente problema con constricciones (Máquina de atwood c/ 0 g° de libertad en caso constricción = { })

En otro caso D'alembert

$\Rightarrow \delta w = \vec{F}_c \cdot \delta \vec{r}$

Lagrangiana = ?

No tangente $\neq$ superficie normal.

Desplazamiento virtual $\equiv$ tangente a la sup. de construcción

Vector normal $\equiv$ grad = Ap... la en la sup. de la normal.

F_c = Fuerza de constricción

Tenemos

$$\left(m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{F}\right) \cdot \delta \vec{r} = \vec{F}_c \cdot \delta \vec{r} = \underbrace{\delta w}_{\text{Trabajo virtual}}$$

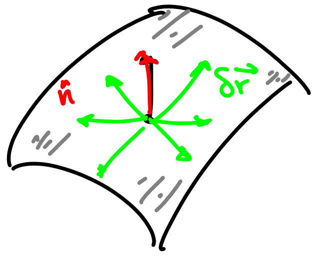
$$\Rightarrow \left(m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{F}\right) \cdot \hat{n} = \vec{F}_c \cdot \hat{n}$$

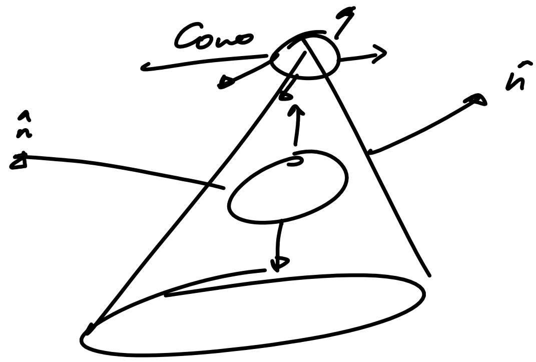
$\hat{n}$: vector unitario normal.

- Desplazamiento virtual.

Movimiento permito y es tangente a la superficie de construcción

- No singularidades
- es suave } bonita

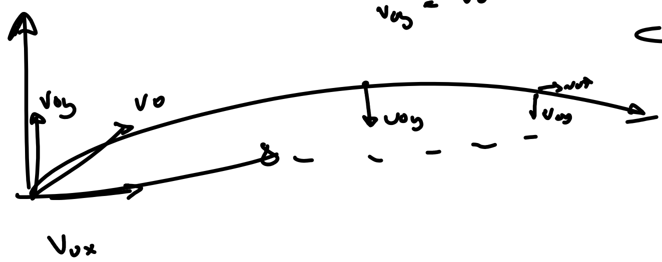




Tiro parabólico } · 3 g° de libertad.

$v_{ox} = v_o \cos\theta$
$v_{oy} = v_o \sin\theta$

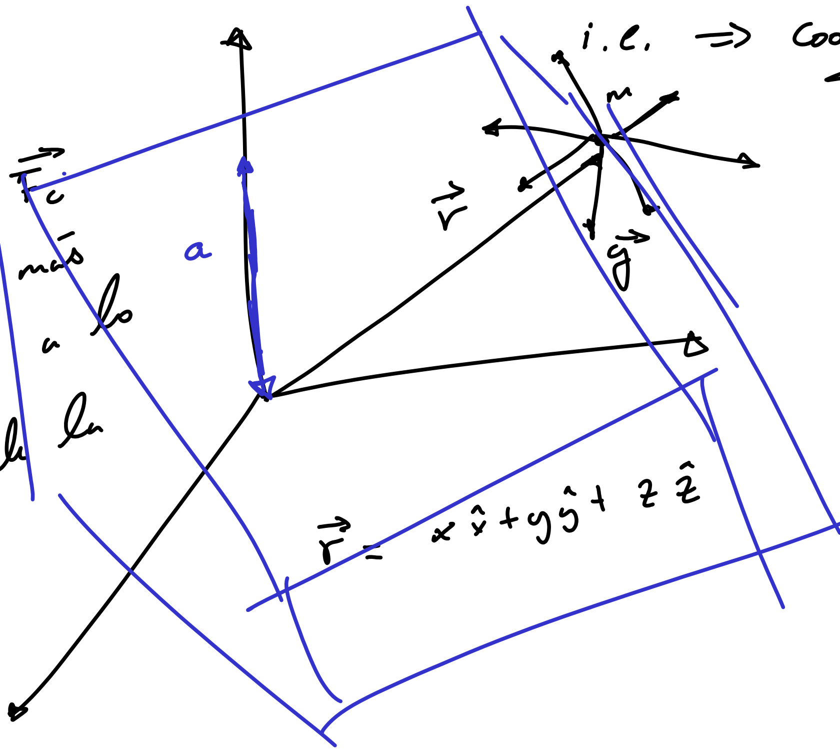
xD
xD



Ejemplo

- coordenadas más sencilla dominadas
i.e. $\Rightarrow$ Coordenadas cartesianas

- sometemos a una $\vec{F}_c$ y a la más se mueva a lo largo de la mesa.



condiciones iniciales determinan la sol. del problema.

Determinar las trayectorias.

- $\vec{r}$ no es libre

sig. paso $\Rightarrow$ Describir la ec. de constricción

$\hookrightarrow$ llevarla a la forma (x, y, z, t)

$\hookrightarrow f(x,y,z,t) = z - a = 0$

$\Rightarrow z = a$ } · Podemos usar cualesquiera sist. de ref.

- Es importante elegir sist. de ref. adecuado.

  ↳ Ec. de constricción más sencilla.

En cartesianas rectangulares:

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0$$

Y si cambiamos a coordenadas esféricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\phi \,\operatorname{sen}\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\phi \,\operatorname{sen}\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \underline{r=a}$$

más sencilla (Ec. de constricción)

Derivadas (D_x, D_y)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \,\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\phi \,\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \\ \triangle \\ \triangle \end{pmatrix}$$

New → (θ, ϕ)

↳ + apropiadas

↳ checar matriz de transformación para esféricas ($\mathbb{R}^3$)

Ec. de constricción.

- Partimos de un sistema de coordenadas
- Hallar en ese sistema la ec. de constricción para nuestro problema
- ver si existe otro sistema de coordenadas en donde la simetría sea la más sencilla posible

- Ecuaciones de constricción lo más sencillas posibles

Partimos de:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \Rightarrow$$

observamos Ec. de constricción es

$\underline{z = a}$

↑ Puntos accesibles de nuestro sistema.

Tenemos para los desplazamientos:

$$\left.\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + a\hat{z}\right\} \delta\vec{r} = (\delta x')\hat{x} + (\delta y)\hat{y}$$

- 5 horas extras 21/7 para abordar estos temas