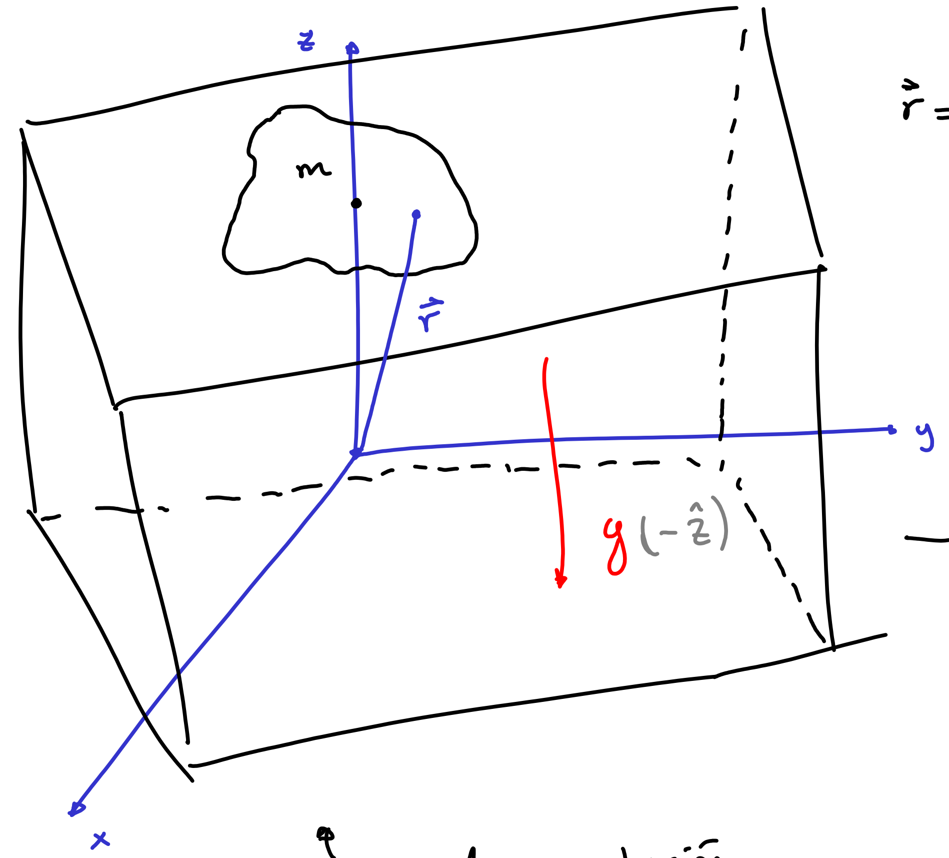
Mecánica teórica — Clase #6 — 15/08/2025



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$z = a$$

$$\longrightarrow \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + a\hat{z}$$

superficies de constricción suaves. (superficie diferenciable)

$$m(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + g\hat{z})\cdot\delta\vec{r}$$

$$m(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + g\hat{z})\cdot(\delta x\hat{x} + \delta y\hat{y}) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}\,\delta x + m\ddot{y}\,\delta y = 0$$

$$m\ddot{x} = 0 \quad \wedge \quad m\ddot{y} = 0$$

Desplazamiento virtual

↳ Desplazamiento que podría ejecutar una partícula en un tiempo t_0.

F. de constricción en la componente z.

$$F_{cz} = mg$$

$$\boxed{m(\ddot{x}\,\hat{x}+\ddot{y}\,\hat{y}+g\,\hat{z})\cdot\delta\vec{r} = \vec{F}_c\cdot\delta\vec{r} = 0}$$

$$\vec{r} = x\hat{x}+y\hat{y}+z(x,y,t)\,\hat{z}$$

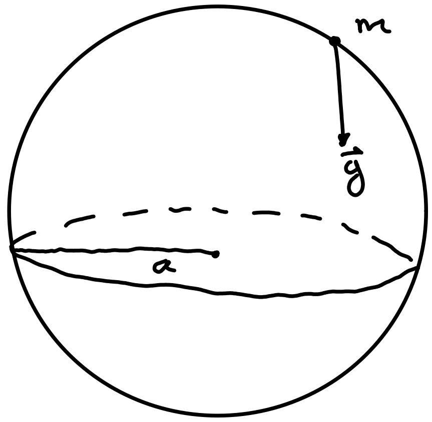
$$f(x,y,z,t) = cte = 0$$

$$z = z(x,y,t)$$

Caso para una esfera de radio a.

$x^2+y^2+z^2=a^2$

$r=a$



Coordenadas generalizadas

$s_1 = r$; $s_2 = \theta$; $s_3 = \phi$

$q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$

$X = r\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta$

$y = r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta$

$z = r\cos\theta$

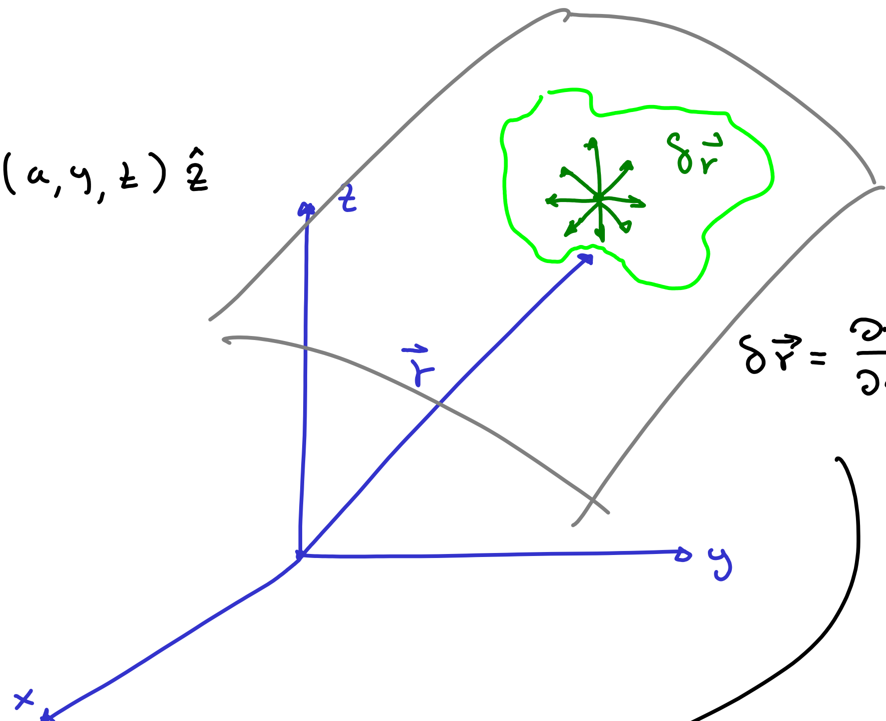
(x, y, z)

$\updownarrow\; r^2\,\mathrm{sen}\,\theta \neq 0$

(r, θ, ϕ)

Jacobiano de la trans. dif. de 0

$$\vec{r} = x\hat{x}+y\hat{y}+z(a,y,t)\,\hat{z}$$



$$\delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\delta q_2$$

$$\left(m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{F}\right) \cdot \delta\vec{r} = \vec{F}_c \cdot \delta\vec{r} = 0$$

$$\left(m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{F}\right) \cdot d\vec{r} = 0$$

Ecuación de Euler - Lagrange para el sistema:

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \right\}_{i=1,2}$$

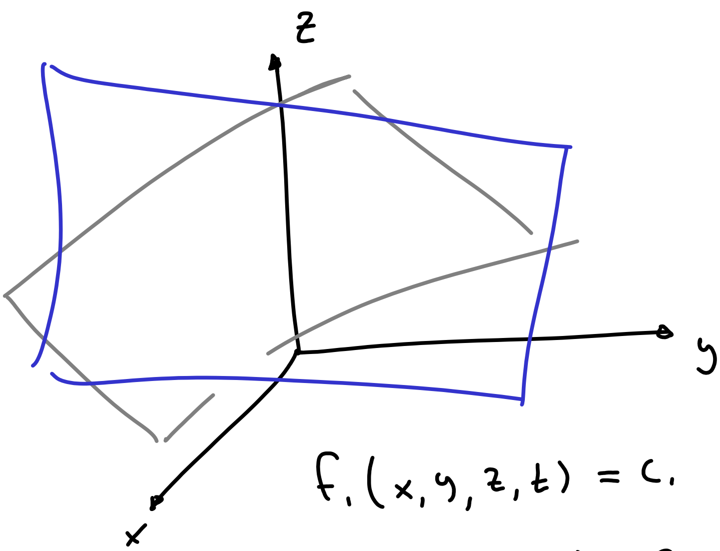
2 g° de libertad

$$\underline{\mathcal{L} \equiv T - U} \quad ; \quad Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial U}{q_i}$$

<u>otro ejemplo</u> : Dos constricciones

Problemas anteriores

- Partícula libre
- oscilador armónico simple.

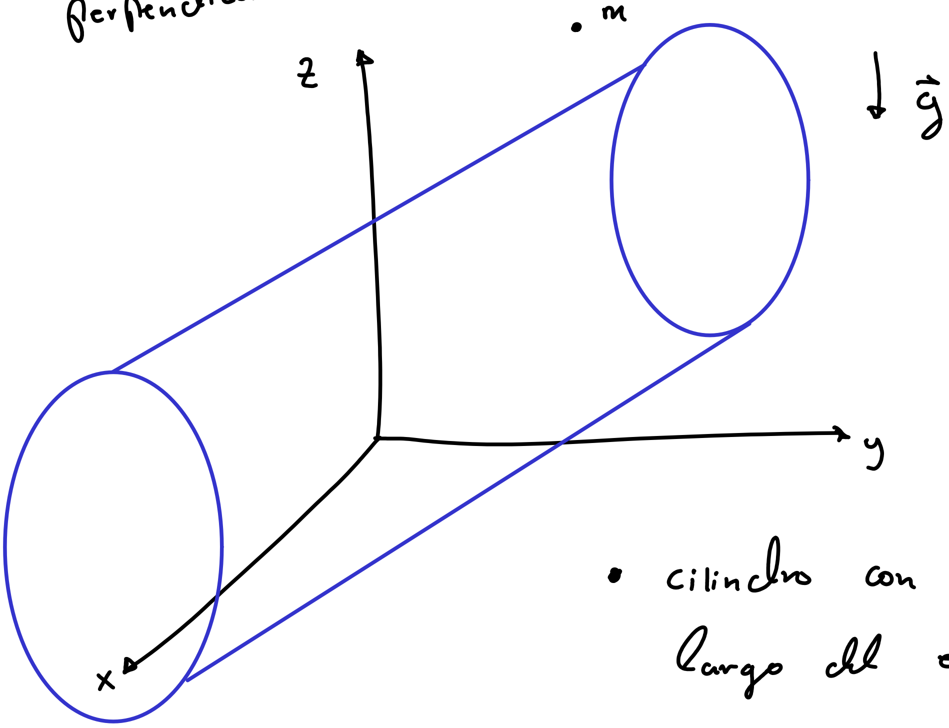


$$f_1(x,y,z,t) = c_1$$

$$f_2(x,y,z,t) = c_2$$

Otro ejemplo:

Constricción perpendicular al eje z (cilindro)



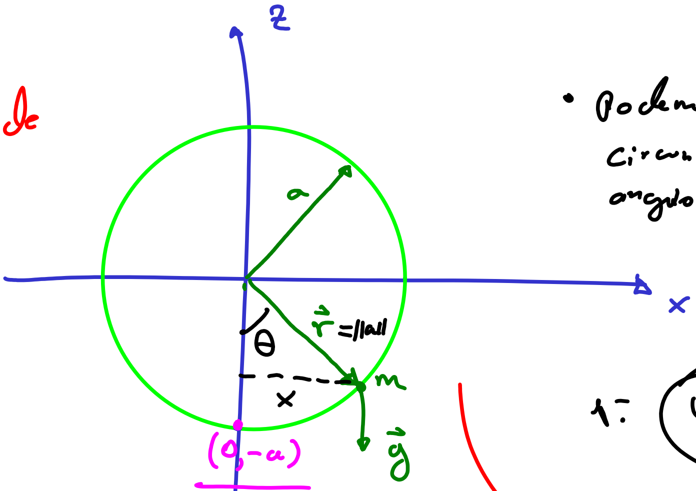
• cilindro con eje a lo largo del eje y.

Ecuación de constricción: cilindro con eje en z

y $y = 0$.

Toda la circunferencia libre para la partícula (libre de moverse ahí).

número de grados de libertad.



• Podemos interpretar la circunferencia con el ángulo θ (¿cuánto barre?) o con su ecuación $x^2+z^2=a^2$

$N =$ partículas

$K =$ Ecuaciones de constricción

$n = 3N - K = 3 - 2 = 1$

1: $y = 0$

$x = a \operatorname{sen}\theta \; ; \; y = a\cos\theta$

$$\boxed{\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}$$

2: $x^2 + z^2 = a^2$

$x = \pm\sqrt{a^2 - z^2}$

$\vec{r} = x\hat{x} + z\hat{z}$; $\vec{r} = \pm\sqrt{a^2 - z^2}\,\hat{x} + z\hat{z}$; $\vec{r} = x\hat{x} \pm \sqrt{a^2 - x^2}\,\hat{z}$

Usamos ahora $a\,\text{sen}\,\theta$ y $a\cos\theta$ como coordenadas generalizadas:

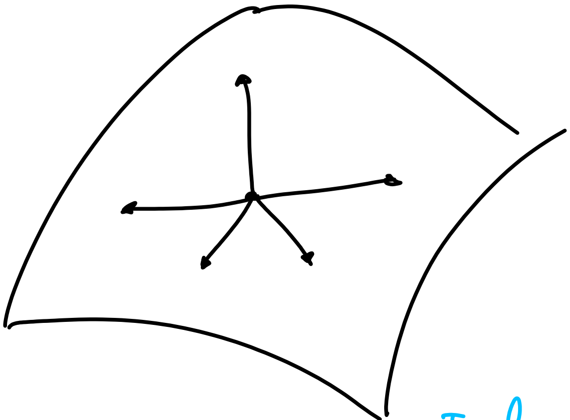
$$\vec{r} = a\,\text{sen}\,\theta\,\hat{x} - a\cos\theta\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = a(\text{sen}\,\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{z})$$

Ahora, desplazamientos virtuales permitidos...

$$\delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\delta\theta = a\underbrace{(\cos\theta\,\hat{x} + \text{sen}\,\theta\,\hat{z})}\delta\theta$$

- Todos los desplazamientos virtuales (puntos accesibles a la partícula) son tangentes a la superficie de constricción.



. Tendríamos solo para la forma de $\underline{x}$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y,z,t) = cte \\ f_2(x,y,z,t) = cte \end{array}\right\}$$

Para la 2^{da} Ec. de constricción metemos $z = (x,y)$

$\hookrightarrow f_2(x, y, z(x,y), t) = cte.$

$\hookrightarrow y = y(x,t)$ ← ahora esta la metemos aca en la pera.

Tenemos

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad ; \quad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y(x)\hat{y} + z(x)\hat{z}$$

Todas como función de x.

- Todos los desplazamientos virtuales permitidos.

$$\partial\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\delta x = \left[\hat{x} + \frac{dy}{dx}\hat{y} + \frac{dz}{dx}\hat{z}\right]\delta x$$

- Evolución de la partícula la dicta la 2nda ley de newton

Tenemos

$$\vec{r} = \vec{r}(q,t) \quad ; \quad \delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\delta q$$

Tenemos

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{F}_c$$

$$\Rightarrow \left(m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{F}\right)\cdot\delta\vec{r} = \boxed{\vec{F}_c \cdot \delta\vec{r}} = 0$$

Ecuación de euler-lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

$$L = T - U$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

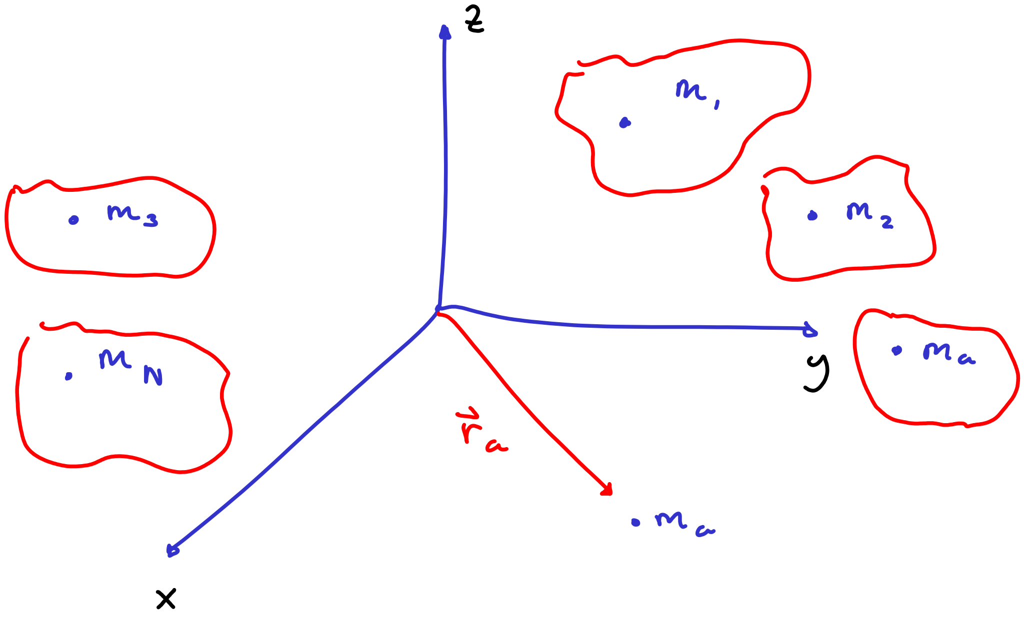
Si tenemos 3 constricciones dadas como:

$$f_1(x, y, z, t) = C_1$$

$$f_2(x, y, z, t) = C_2$$

$$f_3(x, y, z, t) = C_3$$

Ejemplo: sistema de varias partículas.



$$\vec{r}_a(t) = x_a(t)\,\hat{x} + y_a(t)\,\hat{y} + z_a(t)\,\hat{z} \quad ; \qquad \{a\}_{i=1}^{N}$$

$$\{\underbrace{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N}_{3N}\}$$

$$\boxed{m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} = \vec{F}_a} \qquad \{a\}_{i=1}^{N}$$

$$\boxed{\begin{aligned} m_a \frac{d^2 x_a}{dt^2} &= F_{ax} \\ m \frac{d^2 y_a}{dt^2} &= F_{ay} \\ m \frac{d^2 z_a}{dt^2} &= F_{az} \end{aligned}}$$

Tenemos

$$\sum_{a=1}^{N} \left[\left(m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} - \vec{F}_a \right) \cdot \delta \vec{r}_a \right] = 0$$

Segunda ley de Newton

$$\left(m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \vec{F}_1 \right) \cdot \delta \vec{r}_1 + \left(m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} - \vec{F}_2 \right) \cdot \delta \vec{r}_2 = 0$$

Transformación de coordenadas (Jacobiano siempre distinto de 0)

Factor de escala

$$3N \left\{ \begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}, t) \\ y_1 &= y_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}, t) \\ z_1 &= z_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}, t) \\ &\vdots \\ z_N &= z_N(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}, t) \end{aligned} \right\} \quad J \neq 0$$

Tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \; ; \qquad \{i\}_{i=1}^{3N} \longrightarrow \text{corre desde 1 hasta } 3N$$

$$\{a\}_{i=1}^{N} \rightarrow \text{corre desde 1 hasta } N$$

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\underbrace{\sum_{a=1}^{N}\left(m_a \frac{d^2\vec{r}_a}{dt^2}\right)\cdot\delta\vec{r}_a}\; - \;\underbrace{\sum_{a=1}^{N}\vec{F}_a\cdot\delta\vec{r}_a} = 0$$

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_i, t) \Longrightarrow \delta\vec{r}_a = \sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_i}\delta q_i$$

Tenemos

$$\sum_{a=1}^{N}\vec{F}_a\cdot\delta\vec{r}_a = \sum_{a=1}^{N}\vec{F}_a\cdot\left(\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_i}\delta q_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3N}\underbrace{\left(\sum_{a=1}^{N}\vec{F}_a\cdot\frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_i}\right)}_{\equiv\, Q_i}\delta q_i$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{3N} Q_i\,\delta q_i}$$

Tenemos

$$Q_i = \sum_{a=1}^{N} \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}$$

¿Se puede escribir esta fuerza como un potencial?

↳ Depende de $\vec{F}_a$

$$\sum_{a=1}^{N} m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} \cdot \delta \vec{r}_a = \boxed{\sum_{a=1}^{N} m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} \cdot \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \delta q_i}$$

$$\vdots = \sum_{i=1}^{3N} \left(\sum_{a=1}^{N} m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

Por clase vemos esto