Obsah

1. Přednáška č. 1

1.1 Co je deterministický diskrétní signál (značení, popis v časové oblasti)

- **Funkce definovaná na množině celých čísel**, může být definovaná i tabulkou.
    - Diskrétní - indexovaná nekonečná posloupnost čísel z R nebo C.
    - Deterministický - popis exaktním matematickým vzorcem v libovolném čase.
    - Signál – Matematická funkce, která reprezentuje informaci o vývoji nějaké fyzikální veličiny.
- **Značení $x[n]$.**

1.1.1 Popis v časové oblasti

- **Signál je funkce** reprezentující informaci o vývoji fyzikální veličiny, případně člověkem generované veličiny.

1.2 Co je diskrétní systém?

- Matematický operátor transformující vstupní diskrétní signál $x[n]$ na výstupní diskrétní signál $y[n]$.
- **Popisuje se diferenční rovnicí.**

1.3 Elementární signály a jejich značení (jednotkový puls, jednotkový skok, komplexní exponenciála)

1.3.1 Jednotkový puls $\delta[n]$

- **Impuls o délce jedna v nule.**
- Značí se delta n.

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

1.3.2 Jednotkový skok $u[n]$

- **Skok o délce jedna** od nuly až do nekonečna.

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

1.3.3 Komplexní exponenciála

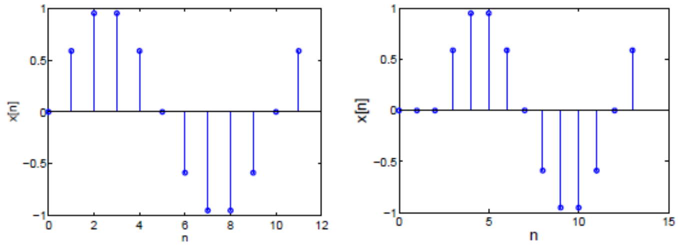
- Speciální případ exponenciální řady, používaný ve Furierově dekompozici signálu.
- Eulerův vztah:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$
$$\omega_0 \in \mathcal{R}$$

$$e^{j\omega_0 n} = \cos[\omega_0 n] + j\sin[\omega_0 n]$$

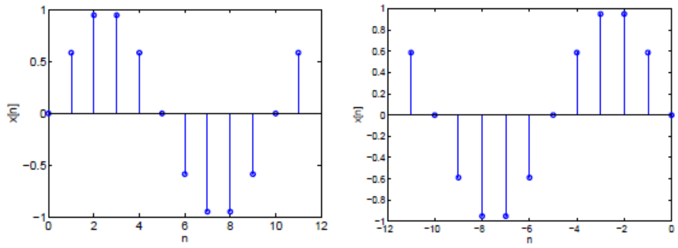
1.4 Základní operace se signálem (posun, otočení, převzorkování)

1.4.1 Posun



- $f(n) = n - n_0$
- **Kladné** n_0 znamená zpoždění - posun **doprava.**
- **Záporné** n_0 znamená posun vpřed - posun **vlevo.**

1.4.2 Otočení



- $f(n) = -n$
- **Otočení signálu podle amplitudové osy.**
- Posun a otočení mají společné to, že jde o transformaci na nezávislé proměnné ose.

1.4.3 Převzorkování

- **Podvzorkování**
  - $f(n) = Mn,\ N \epsilon \mathrm{Z}$
  - Nový signál obsahuje každý M-tý vzorek původního.
- **Nadvzorkování**
  - $f(n) = \frac{n}{N}, N \epsilon \mathrm{Z}$
  - Mezi každý vzorek původního signálu vložíme $N - 1$ nul.

1.5 Vlastnosti diskrétních systémů (bez paměti, kauzalita, stabilita, linearita, invariance vůči posunu)

1.5.1 Bez paměti

- **Výstup** v čase **závisí pouze na vstupu** ve stejném čase (n_0).

1.5.2 Kauzalita

- **Výstup závisí na současných a minulých hodnotách vstupu**, případně minulých hodnotách výstupu (rekurzivní).

1.5.3 Stabilita

- Odezva systému má konečnou hodnotu, pokud má konečnou hodnotu vstupní signál (Bibostabilita).

1.5.4 Linearita

- Systém je lineární, pokud je aditivní a homogenní zároveň.

1.5.5 Aditivita

- Odezva systému na součet dvou signálů, je stejná, jako součet odezev dílčích signálů.
- $T(x_1[n] + x_2[n]) = T(x_1[n]) + T(x_2[n])$

1.5.6 Homogenita

- Odezva systému na signál vynásobený konstantou je stejný, jako když je odezva vynásobená konstantou.
- $T(c * x[n]) = c * T(x[n])$

1.5.7 Invariance vůči posunu

- Pokud vstupní signál posuneme o n vzorků, výstup bude také posunutý o n vzorků.

1.6 LTI systém a jeho popis v časové oblasti (diferenční rovnice, impulsní odezva)

1.6.1 Diferenční rovnice

- Vztah rekurzivně definující výstup jako **lineární kombinaci vstupních a výstupních hodnot**.
    - Například: $y[n] = 3x[n] + x[n-1] - 5x[n-2] - y[n-1] + y[n-2]$
- Oproti klasickému systému, který může obsahovat integrály, umocňování, atd. může LTI systém obsahovat pouze součet a násobení.

1.6.2 Impulsní odezva $h[n]$

- Odezva LTI systému na jednotkový impuls $\delta[n]$.
- Impulsní odezvu získáme z diferenční rovnice, vyřešením $x[n] = \delta[n]$ s nulovými počátečními podmínkami.

1.7 Konvoluce diskrétních signálů (význam, vlastnosti)

1.7.1 Význam

- Výpočet výstupu systému, který je daný impulsní odezvou $h[n]$.
- Uděláme konvoluci impulsní odezvy a vstupního signálu, tím získáme výstup systému.

1.7.2 Vlastnosti

- Komutativita
    - Nezávisí na pořadí operandů ('+' je operátor, čísla jsou operandy).

- $a * b = b * a.$
- Asociativita
  - Nezáleží, jak použijeme závorky u výrazu, kde je více operandů. Tedy nezáleží, v jakém pořadí budeme výraz počítat.
  - $a * (b * c) = (a * b) * c$
- Distributivita
  - Operaci lze distribuovat přes jinou operaci, například lze roznásobit závorku.
  - $a * (b * c) = a * b + a * c$

2. Přednáška č. 2

2.1 Řešení diferenční rovnice – o jaký proces se jedná, co chceme získat, jaké postupy existují.

- Diferenční rovnice je rovnice složena z diferencí nějaké posloupnosti. Jednoduše **se jedná o popis LTI systému**, přesněji je to vztah rekurzivně definující výstup ze systému jako kombinaci (minulých současných a budoucích) hodnot vstupu a minulých hodnot výstupu.

2.1.1 O jaký proces se jedná

- Mějme konkrétní vstupní posloupnost $x[n]$, výstupní posloupnost $y[n]$ a vztah mezi nimi daný nějakou (obecně rekurzivní) LCCDE (lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty).
- Pak řešení této diferenční rovnice pro $x[n]$ je proces, kdy vyjadřujeme $y[n]$ nerekurzivně jako funkci závislou pouze na indexu posunutí n.
- Čili diferenční rovnice je obecný vztah mezi obecným $x[n]$ a $y[n]$, kde $y[n]$ je funkce závislá na hodnotách $x[n]$ a minulých hodnotách výstupu $y[n]$.
- Máme-li konkrétní vstup $x[n]$, pak lze $y[n]$ vyjádřit jednodušeji, pouze jako funkci indexu n.

2.1.2 Co chceme získat

- Impulsní odezvy z diferenční rovnice.

2.1.3 Jaké postupy existují

- Použití filtru -> rekurzivní dosazování (tabulka vstupů a výstupů).
- Řešení v časové oblasti (homogenní a partikulární řešení).
- DTFT (za předpokladu nulových počátečních podmínek).
- Z-transformace (dosazování).

2.2 Autokorelace/kroskorelace deterministických signálů (vlastnosti, použití)

- **Autocorrelation**
  - **Operátor určující, zda je signál $x[n]$ podobný sám sobě s nějakým posunem ℓ (lag).**

    $$r_{xx}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+\ell]x[n]$$
  - Autokorelace se používá například pro detekci periodicity signálu za přítomnosti šumu.
  - Reálná funkce. Muže být kladná i záporná a **je symetrická v bodě 0**.
  - **Používá se k výpočtu energie signálu**.
- **Cross-correlation**

- **Operátor určující vzájemnou podobnost dvou signálů $x[n]$ a $y[n]$, které jsou vůči sobě posunuté o ℓ (lag).**
- Reálná funkce. Muže být kladná i záporná a **není symetrická**.
- **Použití pro určení příchozího směru akustického signálu** v rámci mikrofonního pole (více mikrofonů).

$$r_{xy}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+\ell]y[n]$$

2.3 Energie signálu (výpočet, význam)

2.3.1 Výpočet

- **Hodnota autokorelace v bodě nula**. Zjišťuji jak silný je signál.
- Suma kvadrátů vzorků signálu.
- Signal power (**Výkon**) - Průměrná energie signálu v rámci intervalu délky N.

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]^2$$

2.3.2 Význam

- Energie harmonického (obecně nenulového periodického) signálu je nekonečná.
- Používá se například při rozpoznávání začátku řeči.
- **Stejný význam jako fyzikální energie**.

2.4 Fourierova transformace v diskrétním čase - DTFT (matematický popis, vlastnosti)

- **DTFT = Diskrétní časová Fourierova transformace**
- Lze si představit jako rozklad posloupnosti $x[n]$ do (nespočetné) množiny komplexních exponenciál.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

2.4.1 Matematický popis

- **Transformace diskrétního signálu do spojitých komplexních funkcí (spojité DTFT spektrum).**
- **Zkoumám podobnost signálu s harmonickými signály Sinus a Cosinus.**
- Zobrazení z časové oblasti do oblasti frekvenční, kde lze jednodušeji zkoumat některé vlastnosti signálu a systému.
- Zobrazení z množiny posloupností (signál, impulsní odezva) do množiny spojitých komplexních funkcí reálné proměnné (DTFT spektrum, frekvenční charakteristika).

2.4.2 Vlastnosti

- Periodicita:
  - DTFT je periodická s periodou 2π.

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$$

- Symetrie:

$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
Reálná, sudá	Reálná, sudá
Reálná, lichá	Imaginární, lichá
Imaginární, sudá	Imaginární, sudá
Imaginární, lichá	Reálná, sudá

- Linearita:
  - Je-li $X_1(e^{j\omega})$ DTFT rady $x_1[n]$ a $X_2(e^{j\omega})$ DTFT rady $x_2[n]$, pak platí:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \stackrel{DTFT}{\Longleftrightarrow} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

- Otočení v čase:
  - Otočení řady $x[n]$ v čase vede k otočení $X(e^{j\omega})$ ve frekvenční oblasti.

$$x[-n] \stackrel{DTFT}{\Longleftrightarrow} X(e^{-j\omega})$$

- Posunutí:
  - Posunutí rady v čase vede k vynásobení $X(e^{j\omega})$ komplexní exponenciálou.

$$x[n-n_0] \stackrel{DTFT}{\Longleftrightarrow} e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

- Modulace:
  - Vynásobení rady komplexní exponenciálou vede k posunu ve frekvenci DTFT.
  - Vynásobení rady signálem $\cos(\omega_0 n)$ vede k posunutí spektra nahoru a dolu o ω_0.

$$\cos(\omega_0 n)x[n] \stackrel{DTFT}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2}X(e^{j\omega-\omega_0}) + \frac{1}{2}X(e^{j\omega+\omega_0})$$

- Konvoluční teorém:
  - Důležitá vlastnost DTFT, konvoluce dvou signálu v časové oblasti se rovná součinu obrazu těchto signálu ve frekvenční oblasti.

$$h[n] * x[n] \stackrel{DTFT}{\Longleftrightarrow} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

- Teorém o násobení:
  - Násobení v časové oblasti se mapuje na (periodickou) konvoluci ve frekvenční oblasti.

$$x[n]y[n] \stackrel{DTFT}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

- Parsevalův teorém:
  - **DTFT zachovává při přechodu z časové oblasti, do frekvenční oblasti svou energii.**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

2.5 DTFT – spektrum reálného signálu (vlastnosti, význam)

- **DTFT spektrum je funkce popisující rozklad obecného reálného signálu $x[n]$, na množinu frekvenčních komponent ω** (funkce cosinus posunutých o fázi). $X(e^{j\omega})$
- Výpočet značíme:

$$x[n] \overset{DTFT}{\rightarrow} X(e^{j\omega})$$

- Obvykle se uvádí ve formě dvou reálných funkcí: $X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\phi(\omega)}$
  - Magnitudové spektrum (zesílení a podobnost):

    $\left|X(e^{j\omega})\right|$

  - Fázové spektrum (posunutí vůči počátku):

    $\phi(\omega)$

2.5.1 Vlastnosti

- Komplexní funkce reálné proměnné ω, vyjadřující míru korelace komplexních exponenciál na frekvencích ω a signálu $x[n]$.
- Aplikací DTFT na diskrétní signál $x[n]$ získáme spojité DTFT spektrum.

2.5.2 Význam

- Jedná se o rozklad signálu na součet (nekonečně) harmonických signálu cosinus.

3. Přednáška č. 3

3.1 DTFT spektrum – číslicová frekvence (význam, mezní hodnoty)

- **DTFT spektrum je funkce popisující rozklad obecného reálného signálu $\boldsymbol{x[n]}$, na množinu frekvenčních komponent $\boldsymbol{\omega}$** (funkce cosinus posunutých o fázi).

3.1.1 Číslicová frekvence

- DTFT spektrum reálné posloupnosti má definiční obor $(-\infty, +\infty)$, ale je periodické s periodou 2π a symetrické podle počátku, zajímají nás tedy pouze frekvence $(0, \pi)$
- Harmonický signál pro $\omega = 0$ je konstanta, pro $\omega = \pi$ má dva vzorky na periodu (nejvyšší číslicová frekvence).

3.1.2 Mezní hodnoty

- $(0, \pi)$
    - Zbytek je aliasing.

3.2 Frekvenční charakteristika (význam, matematický popis, periodicita, symetrie)

3.2.1 Význam

- **Jednoznačně popisuje LTI systém**. Jedná se tedy o jeden z možných popisů (dalšími jsou diferenciální rovnice, impulsní odezva)
- Popisuje závislost vlastních hodnot na frekvenci ω (podíl výstupu vstupní magnitudy a výstupní magnitudy).
- Udává, jak komplexní exponenciála (harmonická funkce pro reálné $h[n]$) na frekvenci ω_0 změní svou amplitudu a jak se zpozdí ří průchodu LTI systémem.
- Značíme $H(e^{jw})$.

3.2.2 Výpočet

- Spočítáme pomocí DTFT aplikované na impulsní odezvu $h[n]$:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jn\omega}$$

3.2.3 Matematický popis

- Obvykle se uvádí ve formě dvou reálných funkcí:

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\phi(\omega)}$$

    - Magnitudové spektrum:

$$\left|X(e^{j\omega})\right|$$

- Fázová charakteristika:

$$\phi(\omega)$$

- Místo fázové charakteristiky se někdy uvádí fázové zpoždění (phase delay – PD):

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega}$$

  - Udává zpoždění signálu e^{jwn} po průchodu LTI systémem (ve vzorcích).

3.2.4 Periodicita

- Frekvenční charakteristika diskrétního LTI systému je periodická s periodou 2π.

3.2.5 Symetrie

- Je-li impulsní odezva LTI systému reálná, pak platí:
  - FR je konjugovaně symetrická funkce číslicové frekvence ω.

$$H(e^{-jw}) = H*(e^{jw})$$

3.3 Odezva LTI na daný signál (systém je dán diferenční rovnicí (DR), impulsní odezvou, frekvenční charakteristikou)

3.3.1 Diferenční rovnice

- Například **rekurzivní dosazování**.
- Převedeme do frekvenční oblasti a provedeme inverzní DTFT.
- Praktické pro filtry s **nekonečnou** impulsní odezvou.

3.3.2 Impulsní odezva

- **Konvoluce se vstupním signálem.**
- Praktické pro filtry s **konečnou** impulsní odezvou.

3.3.3 Frekvenční charakteristika

- Konvoluce se převede na násobení period frekvence impulsní odezvy a vstupu.

3.4 Převod mezi popisy LTI systému (DR->IO,DR->FCH,IO->FCH)

3.4.1 Diferenční rovnice -> Impulsní odezva

- FIR
  - **Dosazením** (zjistím odezvu na jednotkový impuls).
- IIR

    - **Analyticky vyjádřím impulsní odezvu pomocí DTFT**.
    - Vezmu diferenční rovnici, za všechny X dosadím jednotkový impuls, transformuji do frekvenční oblasti, vyjádřím výstup a mám impulsní odezvu.

3.4.2 Diferenční rovnice -> Frekvenční charakteristika

- **Na diferenční rovnici aplikuji DTFT**, X a Y transponuji obecně, posuny vyjádřím pomocí teorému o posunu (pomocí operátoru posunutí).

3.4.3 Impulsní odezva -> Frekvenční charakteristika

- Udělám **DTFT.**

3.5 Řešení diferenčních rovnic pomocí DTFT

- Mám diferenční rovnici, nulové počáteční podmínky a vstupní signál X.
    - Fourierova transformace diferenční rovnice (převod do frekvenční oblasti).
    - Dosadím vstupní signál.
    - Vyjádřím Y (mám ho ve frekvenční oblasti).
    - Inverzní DTFT (pokud není v tabulce, použiji parciální zlomky).

3.6 Konvoluce nekonečných posloupností pomocí DTFT

- Použiji konvoluční teorém, kde násobím ve frekvenční oblasti, parciální zlomky a převod zpět do frekvenční oblasti.

4. Přednáška č. 4

4.1 Odezva LTI systému na daný signál (systém je dán diferenční rovnicí (DR), impulsní odezvou, frekvenční charakteristikou)

4.1.1 Odezva na systém dán diferenční rovnicí

- Rekurzivní dotazování.

4.1.2 Odezva na systém dán impulsní odezvou

- Konvoluce vstupního signálu.

4.1.3 Odezva na systém dán frekvenční charakteristikou

- Konvoluční teorém.

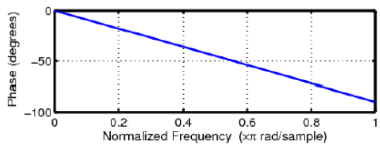
4.2 Systém s lineární fází (matematický popis, vlastnosti)

- Systém **nedeformující fázové spektrum** signálu **(všechny složky jsou zpožděny stejně)**.
- Příkladem je **All-Pass filtr**.
- Systémy s lineární fází **musí** být FIR, tedy má konečnou impulsní odezvu.

4.2.1 Matematický popis

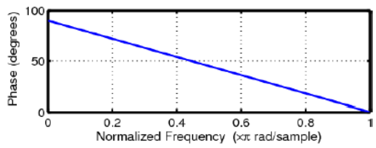
- Digitální filtr má lineární fázi, pokud platí:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega}, \quad \alpha \in \mathcal{R}$$



- Digitální filtr má **zobecněnou** lineární fázi, pokud platí:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\alpha\omega-\beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{R}$$



4.2.2 Vlastnosti

- Systémy s lineární fází mají konstantní skupinové zpoždění:

$$\tau_g(\omega) = \alpha$$

  - Pouze zpožďují signál a téměř jej nedeformují v časové oblasti.
- Máme-li délku impulsní odezvy $h[n]$ rovno N+1 vzorků a impulsní odezva je symetrická, nebo antisymetrická, poté existují **čtyři typy FIR filtrů s lineární fází**.
  - 1. typ – symetrická $h[n]$, N je sudé -> Lineární fáze
  - 2. typ – symetrická $h[n]$, N je liché -> Lineární fáze

    - 3. typ – antisymetrická $h[n]$, N je sudé -> Zobecněná lineární fáze
    - 4. typ – antisymetrická $h[n]$, N je liché -> Zobecněná lineární fáze
- Skupinové zpoždění těchto filtrů je:

$$\tau_g(\omega) = \alpha = \frac{N}{2}$$

4.3 Řešení diferenčních rovnic pomocí DTFT

- Podmínkou jsou nulové počáteční podmínky.
    - Převedeme diferenční rovnici do frekvenční oblasti.
    - Vyjádříme výstup systému jako funkci výstupních členů a posunů.
    - Provedeme inverzní DTFT.

4.4 Spojení více systémů (sériové, paralelní)

4.4.1 Sériové

- Impulsní odezva je **konvolucí** impulsních odezev.
- Frekvenční charakteristika je násobkem frekvenčních charakteristik.

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$
$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$$

4.4.2 Paralelní

- Impulsní odezva je **součtem** impulsních odezev.
- Frekvenční charakteristika je součtem frekvenčních charakteristik.

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$
$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$$

4.5 Odstup signálu od šumu (definice, decibel)

4.5.1 Definice

- SNR (Signal-to-Noise Ratio) je veličina určující **poměr energie "užitečného" signálu a šumu**, obvykle uváděno v decibelech.
- Pro výpočet je třeba rozložit signál se šumem na signálovou a šumovou komponentu.
- Výpočet:

$$\mathrm{SNR} = 10\log_{10}\left(\frac{E_{signal}}{E_{noise}}\right)$$

4.5.2 Decibel

- **Logaritmická jednotka vyjadřující poměr dvou hodnot nějaké fyzikální veličiny** (často energie).
- Mnohdy se také používá jako míra zesílení/zeslabení signálu po průchodu LTI systémem.

- Je definován jako desetinásobek poměru energií:

$$L_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{E_{x_1[n]}}{E_{x_2[n]}} \right)$$

- **Amplituda je maximální výchylka harmonického signálu** (mechanické kmitání, střídavý elektrický proud).
- Při měření amplitud (zejména harmonických signálu) se uvádí jako dvacetinásobek poměru amplitud A.

$$L_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{A_{x_1[n]}}{A_{x_2[n]}} \right)$$

5. Přednáška č. 5

5.1 Vzorkování (vztah číslicové a analogové frekvence/spektra, vzorkovací teorém, aliasing)

5.1.1 Vztah číslicové a analogové frekvence/spektra

- Většina diskrétních signálů vzniká vzorkováním spojitého signálu, například záznam zvuku.
  - A/D konverze = Analog to Digital
  - D/A konverze = Digital to Analog
- Vzorkování zobrazuje frekvence spojitého signálu na frekvence digitálního signálu.
  - Normalizované frekvence digitálního signálu jsou periodické s periodou 2π.

5.1.2 Vzorkovací teorém

- Určuje, za jakých podmínek je vzorkovaných signál jednoznačně určen svými vzorky.
- **Pokud je vzorkovací frekvence 2x větší než maximální frekvence analogového signálu, je možné signál jednoznačně rekonstruovat.**
  - Je-li Ω_0 nejvyšší frekvencí obsaženou v analogovém signálu $x_a(t)$, pak je ho možné jednoznačně rekonstruovat z jeho vzorků, pokud platí podmínka:

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\Omega_0$$

Ω_0 = Nyquistova frekvence

- **Při nedodržení vzorkovacího teorému vzniká aliasing.**

5.1.3 Aliasing

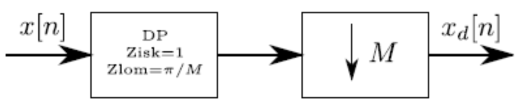
- Překládání spektrálních komponent signálu $x_a(t)$, spektrum vzorkovaného signálu $X(e^{jw})$je poškozeno a spojitý signál není možné jednoznačně rekonstruovat.

5.2 Změna vzorkovací frekvence (decimace, interpolace, převzorkovaní o racionální faktor)

- Častá úloha ve zpracování signálů.

5.2.1 Decimace

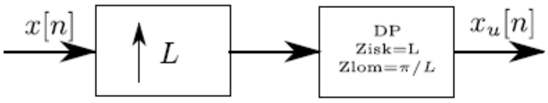
- Kaskáda filtrování dolní propustí a podvzorkování.



- Podvzorkování – Uložení každého M-tého vzorku původního signálu. Obecně vede k aliasingu.

5.2.2 Interpolace

- Kaskáda nadvzorkování a filtrování doplní propustí.

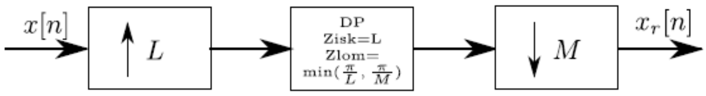


  - Nadvzorkování – Mezi každý vzorek původního signálu vložíme L-1 nul.

5.2.3 Převzorkovaní o racionální faktor

- Chceme-li změnit vzorkovací frekvenci signálu $\frac{L}{M}$ krát, uděláme L krát interpolaci a následně M krát decimaci.
- Lze nahradit dolní propustí se zlomovou frekvencí a zesílením L.

$$\omega_c = \min\left\{\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{L}\right\}$$



5.3 Diskrétní Fourierova Transformace – DFT (vztah k DTFT, matematický popis)

- Používá se k rekonstrukci původního spektra signálu ze vzorků z intervalu N.
- Aplikací N bodové DFT na signál získáme N-bodové diskrétní komplexní spektrum odpovídající DTFT spektru.

5.3.1 Vztah k DTFT

- DFT spektrum odpovídá vzorkování DTFT spektra v bodech $\frac{2\pi k}{N}$, k = 0, 1, … N -1.

5.3.2 Matematický popis

- Vychází ze vzorce pro DTFT:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

- Má-li řada $x[n]$ konečné trvání, pak pouze N členů sumy je nenulových:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jn\omega}$$

- Vzorkujeme-li jednu periodu obrazu $X(e^{jw})$, $\omega\epsilon[0,2\pi)$, (vzdálenost frekvenčních vzorků je $2\pi/N$), tedy používáme:

$$\omega[k] = \frac{2\pi k}{N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

pak je možné původní konečnou řadu $x[n]$ z těchto frekvencí jednoznačně zrekonstruovat.

- DFT je tedy definována jako:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

6. Přednáška č. 6

6.1 Diskrétní Fourierova transformace – DFT (linearita, symetrie, periodicita, frekvenční rozlišení)

6.1.1 Obecně

- DFT je vzorkovaná verze DTFT (diskrétní časová, pro nekonečné, neperiodické signály). Jedná se o analytickou transformaci, protože signál analyzujeme na spektrum. Měříme pouze jednu periodu signálu, který může být nekonečný.
- DFT se používá pro transformaci nekonečné (periodické) řady čísel na nekonečný (periodický) vektor frekvenčních komponent, tedy pro spektrální analýzu signálu. Čím delší signál naměříme, tím bude spektrum přesnější. Signál by neměl být stacionární.
- Vzdálenosti dvou nejbližších bodů ve spektru se říká frekvenční rozlišení, čím více je vzorků, tím jsou k sobě blíže a tím je spektrum detailnější.
- Inverzní transformací se ze spektra dokážeme vrátit do signálu. Říká se jí syntetická, protože ze spektrálních informací vytváříme signál. S DFT je invertibilní, a tvoří DFT pár.
- Složitost je $O(N^2)$.

6.1.2 Linearita

- Lineární kombinaci signálu musí odpovídat lineární kombinace jejich spekter.
- Sekvence musí být tedy stejně dlouhé, pokud nejsou, kratší se doplní nulami.
- Vlastnosti se využívá v metodách overlaps-add/save, kde se signál zpracovává po částech a výstup se znovu spojí do jednoho signálu, to je výhody například při online přenosu.

6.1.3 Symetrie

- Vzorky jsou komplexně sdružené.
- Vlastnosti se využívá v FFT, protože stačí vektor délky 2 dělit na polovinu.

6.1.4 Periodicita

- Signálu měříme pouze jednu periodu, protože je periodický.

6.1.5 Frekvenční rozlišení

- Výpočet vzdálenosti frekvenčních vzorků:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$$

6.2 Kruhová konvoluce (význam, výpočet lineární konvoluce pomocí kruhové)

6.2.1 Obecně

- Jedná se o konvoluci signálu $x[n]$ s periodicky prodlouženým signálem a filtru $h[n]$, vyhodnocenou na jedné periodě o délce N.
- Samotná kruhová konvoluce obecně NEMÁ stejnou hodnotu jako lineární konvoluce.
- Při vhodném doplnění nulami se však výsledek vychází stejně.
- Tento postup je nevhodný pro dlouhé sekvence $x[n]$, obchází se blokovým výpočtem.

6.2.2 Výpočet lineární konvoluce pomocí kruhové

- Z kruhové konvoluce lze udělat lineární doplněním nul k signálu filtru tak, aby kruhová konvoluce vyšla jako lineární.

- Příklad výpočtu lineární konvoluce:

```
Signál: x [1 2 3 4]
Filtr:  h [1 1 1 1]

n       =  0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10
1 * 1   :  1  1  1  1
2 * 1   :     2  2  2  2
3 * 1   :        3  3  3  3
4 * 1   :           4  4  4  4
-------------------------------------------
SUM     :  1  3  6  10 9  7  4
```

  - Výsledek lineární konvoluce je tedy [**1 3 6 10 9 7 4**]

- Příklad výpočtu kruhové konvoluce bez doplnění nul:

```
Signál: x [1 2 3 4]
Filtr:  h [1 1 1 1]

n       =  0  1  2  3  |  4  5  6  7  |  8  9  10
                       |              |
1 * 1   :  1  1  1  1  |              |
2 * 1   :     2  2  2  |  2           |
3 * 1   :        3  3  |  3  3        |
4 * 1   :           4  |  4  4  4     |
---------------------------------------------------------------
SUM        1  3  6  10 |  9  7  4     |  <- Přetečení délky 4
Opakování              |  1  3  6  10 |  9  7  4
---------------------------------------------------------------
SUM                    |  10 10 10 10 |
```

  - Jak vidíme, výsledek přesáhl délku signálu.
  - Výsledek kruhové konvoluce je tedy [**10 10 10 10**] a není stejný jako lineární.

- Příklad výpočtu lineární konvoluce pomocí kruhové:
    - Potřebná délka obou je [**délka signálu + délka filtru – 1**]

```
Signál: x [1 2 3 4] ... N1 = 4
Filtr:  h [1 1 1 1] ... N2 = 4

Potřebná délka filtru:  N1 + N2 - 1 = 7

Signál: x [1 2 3 4 0 0 0] ... N1 = 4
Filtr:  h [1 1 1 1 0 0 0] ... N2 = 4

n       =  0  1  2  3  4  5  6 | 7  8  9  10
1 * H   :  1  1  1  1  0  0  0 | 1  1  1  1
2 * H   :     2  2  2  2  0  0 | 0  2  2  2
3 * H   :        3  3  3  3  0 | 0  0  3  3
4 * H   :           4  4  4  4 | 0  0  0  4
-----------------------------------------
SUM     :  1  3  6  10 9  7  4 | 1  3  6 ..
```

    - Výsledek kruhové konvoluce je tedy [**1 3 6 10 9 7 4**], **stejný jako lineární!**

- Celý postup krok po kroku:
    - Máme-li konečné sekvence $h[n]$ o délce N1 a $x[n]$ o délce N2, pak jejich konvoluci lze vypočítat následovně:
        - Doplnit sekvence $h[n]$ a $x[n]$ nulami na délku N >= N1 + N2 -1.
        - Výpočet N-bodové DFT signálů $h[n]$ a $x[n]$.
        - Vynásobení Y[k] = H[k]X[k].
        - Inverzní transformace IDFT z Y [k].

6.3 Metoda overlap-add, overlap-save - stačí znalost jedné z těchto metod (motivace, základy implementace + využití FFT)

6.3.1 Motivace

- Pro konvoluci potřebujeme celý signál, abychom z něj mohli vypočítat Fourierovu transformaci. Signál tedy zpracováváme po blocích, jednou z metod níže.
- Lze to provést díky linearitě, protože když zpracujeme každý kousek zvlášť a sečteme je, získáme stejný výsledek jako při zpracování celého signálu.
- Člověk snese zpoždění maximálně 400ms, za tuto dobu tedy lze přenést a zpracovat signál.
- Používáme bloky délky 30ms.

6.3.2 Základy implementace

- Základní princip je, že při kruhové konvoluci signálu s impulsní odezvou, vznikne část navíc.

6.3.3 Overlap-add

- Dlouhý signál rozkouskujeme na krátké a doplníme na L + M - 1 nulami, aby kruhová konvoluce byla stejná jako lineární.
    - **Rozdělení signálu na menší a jejich konvoluce sečteme s posunem.**
- V každém bloku zpracuje signál filtrem ve frekvenční oblasti, pomocí N-bodové DFT (FFT).
- Výsledek bude signál o délce = délka filtru (L) + délka signálu (M) -1 (tedy konvoluce).
- Bloky složíme dohromady. Jednotlivé bloky se překrývají o L – 1 vzorků.
- **Více používaná.**

6.3.4 Overlap-save

- Stejně výpočetně náročné.
- Nedoplňujeme nulami a první kousek (L-1 vzorků) zahodíme.

6.4 Rychlá Fourierova Transformace - FFT

- **Numericky optimální verze DFT**, nejedná se o jeden algoritmus, ale o množinu algoritmů.
- **Nejznámější algoritmus je Radix-22 Cooley-Tukey** FFT. Je založený na tom, že dělíme vektor délky 2 na polovinu tak dlouho, dokud je to možné. Při každém dělení nám stačí spočítat pouze polovinu operací. Vyplívá to ze symetrie komplexních exponenciál. Složitost O (N*log(N)).
- Rychlý výpočet umožňuje nasazení v oblastech zpracování signálů, obrazů, řešení parciálních rovnic, …
- Výpočetních úspor je dosaženo díky periodicitě komplexních exponenciál a možnosti vypočítat N-bodovou DFT pomocí dvou N/2-bodových DF.

7. Přednáška č. 7

7.1 Vztah periodicity a DFT spektra

- Původní otázka (vztah mezi periodicitou signálu a DFT spektrem) byla zadána chybně (odhaleno konzultací s vyučujícím).
- Je-li (nekonečný) diskrétní signál periodický, pak jeho DTFT spektrum je tzv. čarové (řídké), tedy pouze některé frekvenční body mají přiřazenu nenulovou hodnotu spektra.
    - (Například trojúhelníková nebo čtvercová vlna).
- Naopak neperiodické signály mají vybuzené celé spektrum (např. bílý šum).

7.2 Krátkodobá spektrální analýza (motivace, princip, spektrogram)

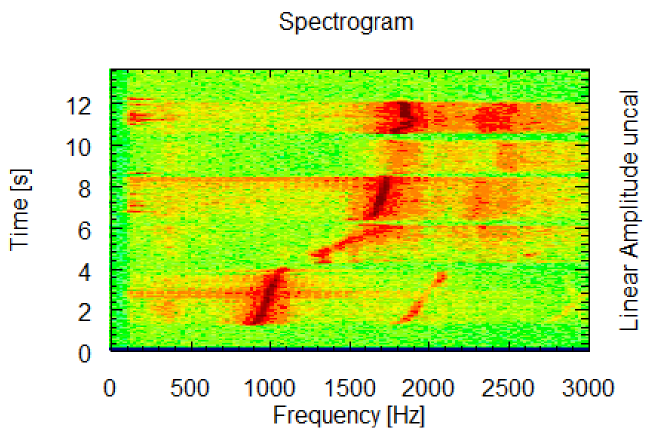
7.2.1 Motivace

- Signály jsou v praxi často nestacionární a mění své parametry v čase. Při spektrální analýze poté není vhodné počítat DFT signálu jako celku.
    - Výpočetní nároky jsou zbytečně velké.
    - Výsledné spektrum má vynikající spektrální rozlišení, ale žádné časové rozlišení.

7.2.2 Princip

- Pátrání po pravidelné vnitřní struktuře (energie soustředěna do úzkých pásem/čar) / periodicitě obsažené v signálu.
- Pracuje s pásmy frekvencí a zabývá se „tvarem“ spektra.
- Ke spektrální analýze signálu se používá v praxi sekvence krátkých DFT, která bude kompromisem mezi spektrálním a časovým rozlišením.

7.2.3 Spektrogram



- Osa X – Čas

- Osa Y – Frekvence
- Barva – Amplituda frekvence v čase

7.3 Okénko (vlastnosti v časové oblasti, hlavní parametry ve frekvenční oblasti)

- Zvolíme krátký segment tak, že uvnitř intervalu si zachová hodnotu a mimo se rovná nule.
- Volba vhodného okénka je kompromisem mezi:
    - Malou šířkou hlavního laloku
    - Malou magnitudou vedlejšího laloku

7.3.1 Vlastnosti v časové oblasti

-

7.3.2 Hlavní parametry ve frekvenční oblasti

- Minimum
- Maximum

7.4 Harmonická analýza (definice, rozlišitelnost frekvenčních komponent, vliv různých okének)

7.4.1 Definice

- Mějme spojitou komplexní exponenciálu $y(t) = Ae^{j(\Omega t + \phi_0)}$ a chceme změřit frekvenci Ω_0.
- Vzorkujeme signál s vzorkovací periodou T_s tak, že platí $-\pi < \Omega_0 T_s < \pi$.
- Získáme signál $y[n] = Ae^{j(\omega_0 n + \phi_0)}$, $0 \leq n \leq N - 1$ a $\Omega_0 T_s = \omega_0$.
- Dirichletův kernel má jediné maximum v bodě $\omega = 0$, proto je možné ω_0 najít jako frekvenci, kde magnitudové spektrum $\left|Y\left(e^{j\omega}\right)\right|$ nabývá maxima.

7.4.2 Rozlišitelnost frekvenčních komponent

- Použití okénka mění podmínky rozlišitelnosti dvou frekvenčních komponent následovně:
    - Všechny komponenty jsou od sebe vzdáleny alespoň polovinu šířky hlavního laloku.
    - Žádná z frekvencí komponent není menší než polovina šířky a větší než pí mínus polovina šířky hlavního laloku.
    - Poměr logaritmovaných magnitud $20\log_{10} A_k$ nesmí být větší než velikost magnitudy postranního laloku.

7.4.3 Vliv různých okének

- Různé zvlnění v okolních oblastech.

8. Přednáška č. 8

8.1 Základní model hudebního tónu (základní parametry a jejich význam), základní metody pro syntézu hudby (výhody/ nevýhody)

8.1.1 Základní parametry tónu a jejich význam

- Základní signály generované hudebními nástroji mají jednoduchý matematický model,

  $$x(t) = a(t) \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(2\pi m f_0 t + \phi_m)$$

  kde $\boldsymbol{f_0}$ je základní frekvence, $\boldsymbol{c_m}$ je amplituda a $\boldsymbol{\phi_m}$ je obálka tónu.

8.1.2 Základní metody pro syntézu hudby

- **Aditivní syntéza**
  - **Dosadíme** do vzorce výše.
  - Výhodou je jednoduchost modifikace tónu změnou parametrů.
  - Nevýhodou je nedokonalý realismus.
- **Tabulková syntéza**
  - **Sestavení z nahraných vzorků** skutečných nástrojů.
  - Výhodou je, že tóny jsou velmi realistické.
  - Nevýhodou je velmi složitá modifikace signálů a paměťové nároky.

8.2 Detekce QRS komplexu v EKG, postup řešení a význam jednotlivých kroků

8.2.1 Detekce QRS v EKG

- **EKG signál zdravého srdce nabývá tvaru QRS komplex.**
- Analýza tvaru QRS komplexu v časové oblasti umožňuje lékařům určit diagnózu.
- Pro digitální zpracování se volí vzorkovací frekvence $F_s = 500Hz$ a více.
- EKG může obsahovat celou řadu artefaktů (úzkopásmové rušení, širokopásmové rušení).
  - Odstranění artefaktů filtrací se provádí, až když není chybu možné odstranit nastavením podmínek.
  - Pro případnou filtraci se používají adaptivní filtry.

8.2.2 Řešení

- Filtrace
- Diferenciace
- Umocnění
- Vyhlazení

- Prahování
- Detekce R špiček

8.3 Zlepšování řeči metodou spektrálního prahování a spektrálního odečítání (předpoklady na šumový signál, význam jednotlivých kroků)

- Neprobráno, několik let po sobě přeskakování.

9. Přednáška č. 9

9.1 Z-transformace (definice, vztah k DTFT, linearita, konvoluční teorém)

9.1.1 Definice

- **Zobrazení z množiny diskrétních řad, do množiny komplexních funkcí komplexních proměnných.**
- **Jednoduše se jedná o Fourierovu transformaci signálu, který je převáženou různými mocninnými řadami, většinou klesajícími.**

9.1.2 Co je Z-Transformace

- Jedná se o transformaci zobecňující DTFT pro signály, které nekonvergují, tedy nejsou absolutně sčitatelné.
- Používá se pro zkoumání vlastností systémů, protože impulsní odezvy systémů jsou běžně nekonečné a pro ty Fourierova transformace často neexistuje, například jednotkový skok.
- Vezme diskrétní řadu, aplikujeme vzoreček Z-Transformace a dostaneme komplexní funkci komplexních proměnných.
- Vzoreček DTFT (Fourierova transformace):

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

- Upravíme na vzoreček Z-Transformace:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- Signál zůstává stejný, ale přibylo ale místo komplexní exponenciály máme Z:

$$z = re^{j\omega}, z \in \mathcal{C}, r \in \mathcal{R},\ r > 0$$

- R je poloměr neboli magnituda komplexního čísla.
    - |R| < 1 -> Klesající mocninná řada
    - |R| > 1 -> Rostoucí mocninná řada
    - **|R| = 1 -> Fourierova transformace**

9.1.3 Vztah k DTFT

- |R| = 1 -> Fourierova transformace, pokud tedy bude poloměr roven jedné, rovná se Z-Transformace DTFT.
- Spojitost je tedy ve 3D grafu Z-Transformace, kdy při R = 1, uvidíme Fourierovu transformaci.

9.1.4 Z-obraz = X(z)

- Komplexní funkce komplexní proměnné.
- Zobrazuje se jako magnitudová a fázová část (3D graf).

9.1.5 Region Konvergence

- Jedná se o mezikruží v Z-rovině, kde existuje Z-přenos.
- Říká nám, kde je řada sčitatelná a má tedy konečnou hodnotu.

9.1.6 Linearita

- Součet sumy je suma součtů, lze tedy signál rozkouskovat.
- Další vlastnosti jsou posunutí, otočení v čase, násobení exponenciální funkcí.

9.1.7 Konvoluční teorém

- Konvoluce v časové oblasti je násobení obrazů.

9.1.8 Teorém o počáteční hodnotě

- Když X[n] je pravostranná řada, lze pomocí vztahu Z-obrazu najít její první prvek i bez její znalosti.

9.2 Z-přenos LTI systému (význam, matematický popis, nuly a póly)

9.2.1 Význam

- Z-přenos je Z-transformace impulsní odezvy.
- Tato přenosová funkce je významná z hlediska analýzy systémů (stabilita, kauzalita, systémy s lineární fází, minimální fází apod.).

9.2.2 Matematický popis

- Lineární systém popisujeme pomocí Z-transformace jako racionální funkci.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b[k] z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a[k] z^{-k}}$$

- Alternativním zápisem je rozepsání čitatele a jmenovatele ve formě kořenových činitelů.

$$H(z) = C \frac{\prod_{k=1}^{q} (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{p} (1 - \alpha_k z^{-1})}$$

- LTI systém je tedy jednoznačně popsán i pomocí nul a pólů (až na zesílení C).

9.2.3 Nuly a póly

- Nuly a póly jsou:
  - Kořeny čitatele – nuly (Beta k).
    - Bod v rovině, kde má Z-přenos **nulovou** hodnotu.
  - Kořeny jmenovatele – póly (Alfa k).
    - Bod v rovině, kde má Z-přenos **nekonečnou** hodnotu.

9.3 Inverzní Z-transformace (polynomiální dělení, rozklad na parciální zlomky)

9.3.1 Inverzní Z-transformace

- Jedná se o inverzní zobrazení, tedy zobrazení z množiny komplexních funkcí komplexních proměnných do množiny reálných posloupností.
- Existují tři způsoby provedení Z-transformace (řešení diff. Rovnic, konvoluce, atd.).
  - Rozklad na parciální zlomky.
  - Polynomiální dělení.
  - Křivkový integrál (Cauchyho teorém).

9.3.2 Polynomiální dělení

- Používáme tehdy, jeli řád polynomů ve jmenovateli **menší** než řád polynomů v čitateli, protože poté nelze provést rozklad na parciální zlomky a musíme provést polynomiální dělení lomené funkce.

9.3.3 Rozklad na parciální zlomky

- Chceme složité racionálně lomené funkce převést na parciální zlomky, protože je nemáme v převodní tabulce.
- Lze provést pouze, pokud je řád polynomů ve jmenovateli **větší** než řád polynomů v čitateli.

10. Přednáška č. 10

10.1 Analýza LTI systémů pomocí z-transformace (stabilita, kauzalita, realizovatelnost)

10.1.1 Stabilita

- Původně jsme se bavili o BIBO stabilitě.
    - Filtr je BIBO stabilní, když máme konečný vstupní signál (má omezenou magnitudu), tak výstup ze systému musí být také omezenou magnitudu.
- Pokud je LTI systém stabilní, pak jeho region konvergence (ROC) přenosové funkce, obsahuje jednotkovou kružnici.
    - Důvodem je, že existuje Fourierova transformace, a tedy existuje frekvenční charakteristika, která má konečnou hodnotu.
- Obecně lze říct, že systém je stabilní, pokud amplituda jeho výstupu neroste nad všechny meze. (Nestabilní systém je např. s kladnou zpětnou vazbou).

10.1.2 Kauzalita

- Výstup kauzálního systému závisí pouze na současných a minulých hodnotách.
- Systém je kauzální, pokud impulsní odezva systému je pravostranná.
- Všechny póly kauzálního systému musí ležet uvnitř, nebo na kružnici $|z| \leq \alpha$.
    - Pravostranná řada má vždy region konvergence $|z| > \alpha$, kde alfa je hodnota z mocninné řady.
    - Žádné póly nesmějí ležet uvnitř regionu konvergence, protože póly jsou nekonečné.
        - Region konvergence je takový prostor, kde je součet řady konečný.
        - Póly mají nekonečnou hodnotu.

10.1.3 Realizovatelnost

- Realizovatelný systém je stabilní a kauzální.
    - Region konvergence musí obsahovat jednotkovou kružnici.
    - Póly musí ležet uvnitř jednotkové kružnice, platí pouze pro Kauzální systémy.

10.2 Inverzní systém

- Inverzní systém je takový systém, který vrátí signál do původní podoby.
    - Omezením je, pokud máme nulu na jednotkové kružnici, protože úplně vymažeme určitou frekvenci. Jinými slovy, ve jmenovateli nesmí být nula.
- Používá se v ekvalizaci, nebo k minimalizaci akustického vlivu (třeba místnosti).
    - Například signál vynásobíme inverzním systémem, frekvenční charakteristiky místnosti, dostaneme původní signál bez rušení od záclon a dalších věcí.

10.3 Systém s minimální fází (definice, motivace)

10.3.1 Motivace

- Z-přenos je realizovatelný, pokud se póly nacházejí uvnitř jednotkové kružnice, ale poloha nul může být libovolná. Pokud ale nuly leží mimo jednotkovou kružnici a hledáme inverzní systém, tak po převodu se nuly systému stanou póly inverzního systému.
    - Takový inverzní systém je buď nestabilní, nebo nekauzální a to se nám nehodí.
- Chceme tedy ke každému systému najít systém invertovatelný.
    - Všechny nuly mimo jednotkovou kružnici jsme schopni dostat dovnitř jednotkové kružnice tak, že nezměníme magnitudu, ale změní se nám skupinové zpoždění (to nám nevadí). Díky tomu bude mít systém inverzní systém a my jsme schopni dělat ekvalizaci.
    - Druhou výhodou je, že bude mít nejmenší skupinové zpoždění ze všech možných filtrů.
- Výhoda minimálního skupinového zpoždění je v řízení, že regulátor je schopen velice rychle reagovat na řízený proces, pokud ho vymyslím tak, aby měl minimální skupinové zpoždění.

10.3.2 Definice

- Systém má minimální fázi, pokud má realizovatelný inverzní systém (nuly uvnitř jednotkové kružnice).
    - Na takový systém jsme schopni převést většinu realizovatelných systémů, mimo systém, který má nuly na jednotkové kružnici.

10.3.3 Faktorizace na systém s minimální fází

- Frekvenční charakteristiku každého realizovatelného systému je možné zapsat jako součin systému s minimální fází a realizovatelného allpass filtru
- Díky této faktorizaci má h_{min} minimální skupinové zpoždění.
- Přemístění nul dovnitř jednotkové kružnice, se říká **kompenzace pomocí fázovacího článku**.

10.4 LTI systém, jeho popisy a převody mezi nimi (diferenční rovnice, frekvenční charakteristika, z-přenos, impulsní odezva)

10.4.1 Diferenční rovnice $y[n]$

- Diferenční rovnice jednoznačně charakterizuje LTI systém.
- Víme, jak se systém chová podle jednotlivých vzorků.

10.4.2 Frekvenční charakteristika

- Funkce, která popisuje závislost vlastních hodnot na frekvenci.
- Získáme jí aplikaci DTFT na impulsní odezvu systému, nebo z diferenční rovnice jako zlomek koeficientů.

10.4.3 Z-přenos

- Získáme pomocí Z-transformace impulsní odezvy, jedná se tedy o obraz impulsní odezvy.
- Z-přenos jednoznačně charakterizuje LTI systém.
- Jedná se o racionální lomenou funkci, nuly/póly.

10.4.4 Impulsní odezva $h[n]$

- Výstup LTI systému na jednotkový impuls.
- Impulsní odezva jednoznačně charakterizuje LTI systém.

11. Přednáška č. 11

11.1 Toleranční schéma (parametry)

- Definuje požadavky na magnitudové vlastnosti filtru.
- Definuje se v intervalu $0 < \omega < \pi$.

11.1.1 Parametry

- Pásmo propustné, závěrné, přechodové.
- Hraniční frekvence propustného ω_p /závěrného ω_s pásma.
- Positivní δ^+/negativní δ^- tolerance v propustném pásmu.
- Nominální (požadovaná) magnituda v propustném pásmu je 1.
- Nominální (požadovaná) magnituda v závěrném pásmu je 0.
- Tolerance v závěrném pásmu δ_s.
- Zvlnění v propustném pásmu v dB.
- Útlum v závěrném pásmu v dB.

11.2 Ideální frekvenčně selektivní filtr (proč nelze v praxi navrhnout)

- Frekvenčně selektivní filtr je nejzákladnější typ filtru, například:
    - Dolní propust
        - Propustí frekvence od 0 do f, ostatní potlačí.
    - Horní propust
        - Zadrží frekvence od f do $fs/2$, ostatní propustí.
    - Pásmová propust
        - V určitém rozmezí frekvence propustí, zbytek potlačí.
    - Pásmová zádrž
        - V určitém rozmezí frekvence zadrží, zbytek propustí.

11.2.1 Proč nelze v praxi navrhnout

- Výpočet by vyžadoval až nekonečný počet koeficientů a výpočet by trval až nekonečně dlouho.
    - Počet koeficientů se tedy ořezává pouze na menší počet za cenu ovlivnění okolí.

11.3 Návrh FIR filtru (s konečnou impulsní odezvou) pomocí metody oken (princip, volba parametrů)

11.3.1 Princip

- Podle požadovaného zvlnění zvolíme typ okna.
- Podle požadované šířky přechodového pásma zvoláme délku/řád.

- Podle vztahů uvedených pro metodu IRT vypočteme L koeficientů impulsní odezvy, které převážíme zvoleným oknem.
- Výhodou je jednoduchost výpočtu.
- Nevýhodou je, že tolerance nejsou závislé v propustném a závěrném pásmu, a zvlnění není rovnoměrné.

11.3.2 Volba parametrů

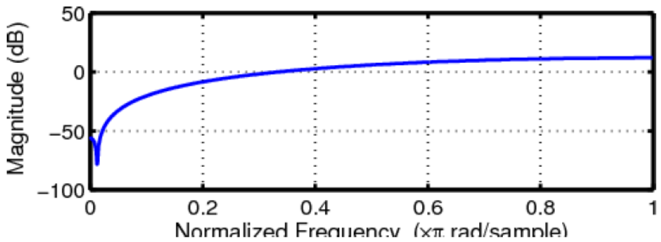
- Zvlnění.
- Šířka přechodového pásma.

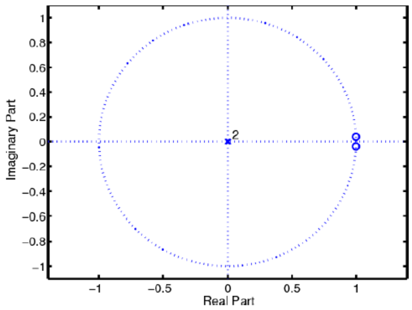
11.4 Návrh nulovacího filtru (princip, FIR a IIR - vlastnosti)

11.4.1 Princip

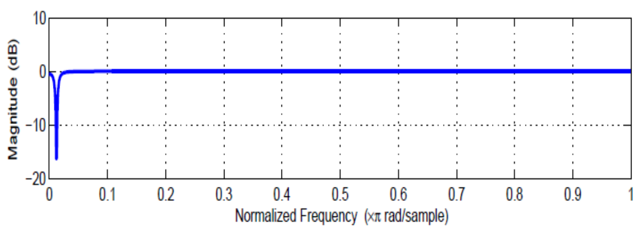
- Úplně potlačuje harmonický signál na konkrétní frekvenci.
- Navrhuje se umístěním nuly v z-rovině na příslušnou ω_0.
    - Kvůli kompenzaci zkreslení se do blízkosti nuly umístí pól.

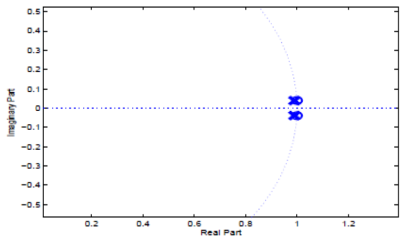
11.4.2 Nulovací filtr FIR





11.4.3 Nulovací filtr IIR





12. Přednáška č. 12

12.1 Návrh FIR pomocí kritérií optimality (metoda nejmenších čtverců, filtry se stejnoměrným zvlněním; v čem spočívá výhoda těchto návrhových metod?)

- Metody překonávající omezení metody oken.

12.1.1 Metoda nejmenších čtverců

- Spočívá na rozdílech čtverců kvadrátů mezi skutečnou a požadovanou amplitudovou charakteristikou (**odchylka**).
- **Váha** je nezáporné číslo určující důležitost odchylky (čím menší je tolerance, tím větší má váhu odchylka).
- Výhodou je **jednoduchý návrh** vedoucí ke slušně navrženým filtrům.

12.1.2 Filtry se stejnoměrným zvlněním

- Metoda, která je založená na **minimalizaci maximálního rozdílu (odchylky) mezi skutečnou a požadovanou amplitudovou charakteristikou.**
- Velký problém u návrhu filtrů je volba řádu. Tento vzorec **po výpočtu vrátí řád**, který, když nesedí, stačí pouze zvýšit.

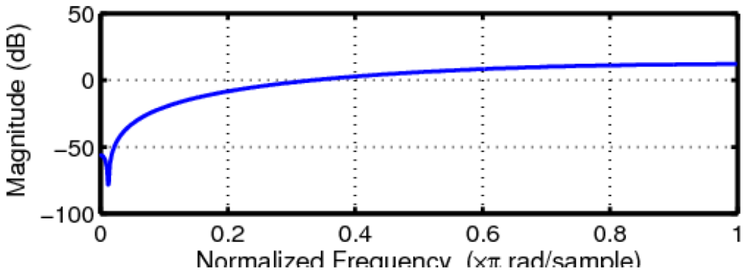
12.2 Základní typy IIR filtrů (průběh magnitudové charakteristiky)

12.2.1 Typy

- Butterworthovy
    - Žádné zvlnění.
    - Pomalejší přechod mezi propustným a závěrným pásmem.
- Čebyševovy
    - První typ má zvlnění v propustném pásmu
    - Druhý typ má zvlnění v propustném pásmu
- Elyptické filtry
    - Propustné v obou pásmech

12.2.2 Průběh magnitudové charakteristiky

- Magnitudovou charakteristiku používáme u filtrů, abychom zjistili, jak budou ovlivněné jednotlivé frekvence v rozsahu 0 až fs/2.



- Osa X nám říká, jaké frekvence budou ovlivněny filtrem.
- Osa Y nám říká, jak bude ovlivněna intenzita frekvence v dB.
    - Na Grafu se frekvence v rozsahu 0 až 0.2 změní až o 75 dB.

12.3 Srovnání IIR a FIR filtrů (stabilita, výpočetní náročnost, latence, fáze a fázové zkreslení).

12.3.1 Stabilita

- IIR nemusí být stabilní (bistabilní filtr).
    - Pokud navrhneme stabilní IIR filtr, může se stát, že časem nebude stabilní, například na hardwaru, kde jsou omezená desetinná čárka, protože kořeny se mohou dostat mimo jednotkovou kružnici, kvůli zaokrouhlování.

12.3.2 Výpočetní náročnost

- IIR jsou jednodušší na výpočet, díky nižšímu řádu.

12.3.3 Latence

- IIR mají kratší latenci, díky nižšímu řádku.

12.3.4 Fáze a fázové zkreslení

- U FIR filtrů nemusí docházet ke zkreslení.
- IIR má vždy fázové zkreslení.
    - Jednotkové frekvence signálů nejsou zpožděny o stejný koeficient (změní se tvar signálu).