

2022~2023 学年度第二学期期中重点校联考

高二数学

出题学校：芦台一中 杨村一中

一、选择题（本题共 9 小题，每题 5 分，共 45 分）

1. 下列求导运算正确的是（ ）

A. $\left(\cos \frac{\pi}{4}\right)' = -\sin \frac{\pi}{4}$

B. $\left(e^x \ln x\right)' = e^x \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)$

C. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

D. $\left(3^x\right)' = 3^x$

2. $\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的中间一项的二项式系数为（ ）

A. 15

B. -20

C. -15

D. 20

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = -2, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$ ，则 a_{2021} 的值为（ ）

A. -2

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

4. 已知 $\{a_n\}$ 为递减等比数列， $a_1 > 0, a_1 a_3 = 1, a_2 + a_4 = \frac{5}{4}$ ，则 $S_6 =$ （ ）

A. $\frac{31}{16}$

B. $\frac{63}{16}$

C. $\frac{21}{16}$

D. $-\frac{21}{16}$

5. 已知 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 在区间 $(m, 6 - m^2)$ 上有极小值，则实数 m 的取值范围是（ ）

A. $(-\infty, \sqrt{5})$

B. $(-2, \sqrt{5})$

C. $[-2, \sqrt{5})$

D. $(-\sqrt{5}, 1)$

6. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 4a_2 + 4^2 a_3 + \cdots + 4^{n-1} a_n = \frac{n}{4}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，则 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_{10}$ 等于（ ）

A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{55}$

B. $1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$

C. $1 - \left(\frac{1}{4}\right)^9$

D. $\left(\frac{1}{4}\right)^{66}$

7. 现将 ABCD 四个人全部安排到甲市、乙市、丙市三个地区工作，要求每个地区都有人去，则 A、B 两个人至少有一人到甲市工作的安排种数为（ ）

A. 12

B. 22

C. 18

D. 14

8. 已知等差数列 $\{a_n\}$ ，其前 n 项和为 S_n ，若 $S_{15} > 0$ ， $\frac{a_9}{a_8} < -1$ ，则下列结论正确的是（ ）

(1) $|a_9| > a_8$

(2) 使 $S_n > 0$ 的 n 的最大值为16

(3) 当 $n=8$ 时 S_n 最大 (4) 数列 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ ($n \leq 8, n \in \mathbb{N}^*$) 中的最大项为第8项

A. (1) (2)

B. (1) (3) (4)

C. (2) (3) (4)

D. (1) (2) (4)

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = e^x + \sin x$ ，则不等式 $f(3x-1) < e^\pi$ 的解集是（ ）

A. $\left(\frac{1-\pi}{3}, \frac{1+\pi}{3}\right)$

B. $\left(0, \frac{1+\pi}{3}\right)$

C. $\left(0, \frac{1+e^\pi}{3}\right)$

D. $\left(\frac{1+\pi}{3}, +\infty\right)$

二、填空题（本题共6小题，每题5分，共30分）

10. $(\sqrt{3}x-y)^5$ 展开式中 x^2y^3 的系数为_____（用数字作答）

11. 由0,1,2,3,4,5所组成的没有重复的五位数中，能被5整除的有_____个.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_3 \cdot a_5 = 3a_4$ ，设等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $b_5 = a_4$ ，则 $S_9 =$ _____.

13. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且 $f(x) = x^3 + 2xf'(1) - 1$ ，则 $f'(1) =$ _____.

14. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (-1)^n \frac{4n}{4n^2 - 1}$ ，其前 n 项和为 S_n ，则 $S_{2020} =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5, & x \leq -1 \\ \ln(x+1), & x > -1 \end{cases}$ ， $g(x) = mx$ ，若函数 $y = f(x-1) - g(x)$ 恰有3个零点，则实数 m 的取值范围为_____.

三、解答题（共 5 题，共 75 分）

16.（本小题满分 14 分）

已知在 $\left(\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的展开式中 ($a > 0$)，常数项为 $\frac{45}{4}$ ，求：

- (1) a 的值；
- (2) 展开式中 x^{10} 的系数；
- (3) 含 x 的整数次幂的项共有多少项.

17.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2mx^2 + nx - 3$ ($m, n \in \mathbb{R}$) 在 $x = -3$ 处有极值 6.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；
- (2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值与最小值.

18.（本小题满分 15 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 1$ 且 $S_{n+1} = 2S_n + n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) .

- (1) 证明：数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列；
- (2) 令 $b_n = [2\log_2(a_n + 1) + 1](a_{2n} + 1)$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 15 分)

已知数列 $\{a_n\}$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 满足 $S_n = n^2$; 数列 $\{b_n\}$ 是正项的等比数列, T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 满足 $b_1 = 1$, $T_3 = 7$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $C_n = \begin{cases} \frac{6n+13}{a_n a_{n+2} 2^{n+1}}, & n \text{ 为奇数} \\ \log_2 b_{n+1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 T_{2n} , 若不等式

$(-1)^n \lambda - \frac{1}{(4n+1)4^n} < T_{2n}$ 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 求 λ 的取值范围.

20. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + ax - \ln x$, $a \in \mathbb{R}$

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(3) 当函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$. 证明: $4f(x_1) - 2f(x_2) \leq 1 + 3\ln 2$.