Algorithme 17 Description de l'algorithme de Huffman.

On construit avec l'alphabet source S un ensemble de nœuds isolés auxquels on associe les probabilités de $\mathcal{P}$.

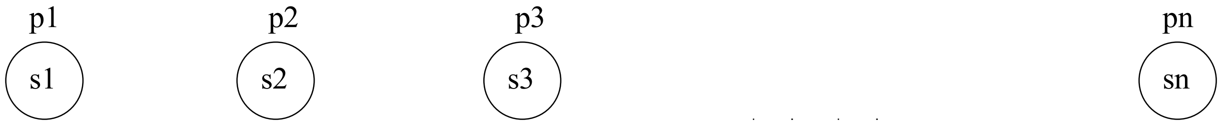

FIG. 2.1 : Algorithme de Huffman : départ.

Soient $p_{i_1}, \ldots, p_{i_q}$ les q symboles de plus faibles probabilités. On construit un arbre (sur le modèle des arbres de Huffman), dont la racine est un nouveau nœud et auquel on associe la probabilité $p_{i_1} + \ldots + p_{i_q}$, et dont les branches sont incidentes aux nœuds $p_{i_1}, \ldots, p_{i_q}$. La figure 2.2 montre un exemple de cette opération pour $q = 2$.

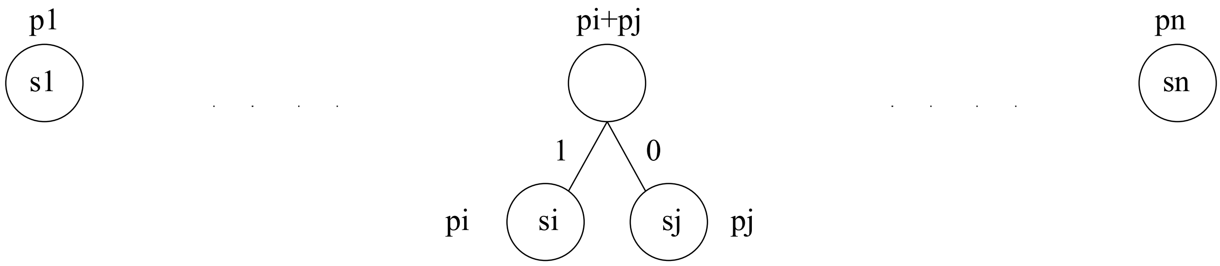

FIG. 2.2 : Algorithme de Huffman : première étape ($q = 2$).

On recommence ensuite avec les q plus petites valeurs parmi les nœuds du plus haut niveau (les racines), jusqu'à n'obtenir qu'un arbre (à chaque itération, il y a $q-1$ éléments en moins parmi les nœuds de plus haut niveau), dont les mots de S sont les feuilles, et dont les mots de code associés dans le schéma ainsi construit sont les mots correspondant aux chemins de la racine aux feuilles.

Exemple : Soit la source à coder sur $V = \{0, 1\}$

Symbole	Probabilité
a	0,35
b	0,10
c	0,19
d	0,25
e	0,06
f	0,05

Les étapes successives de l'algorithme sont décrites par la figure 2.3.
Le code de Huffman construit est alors :

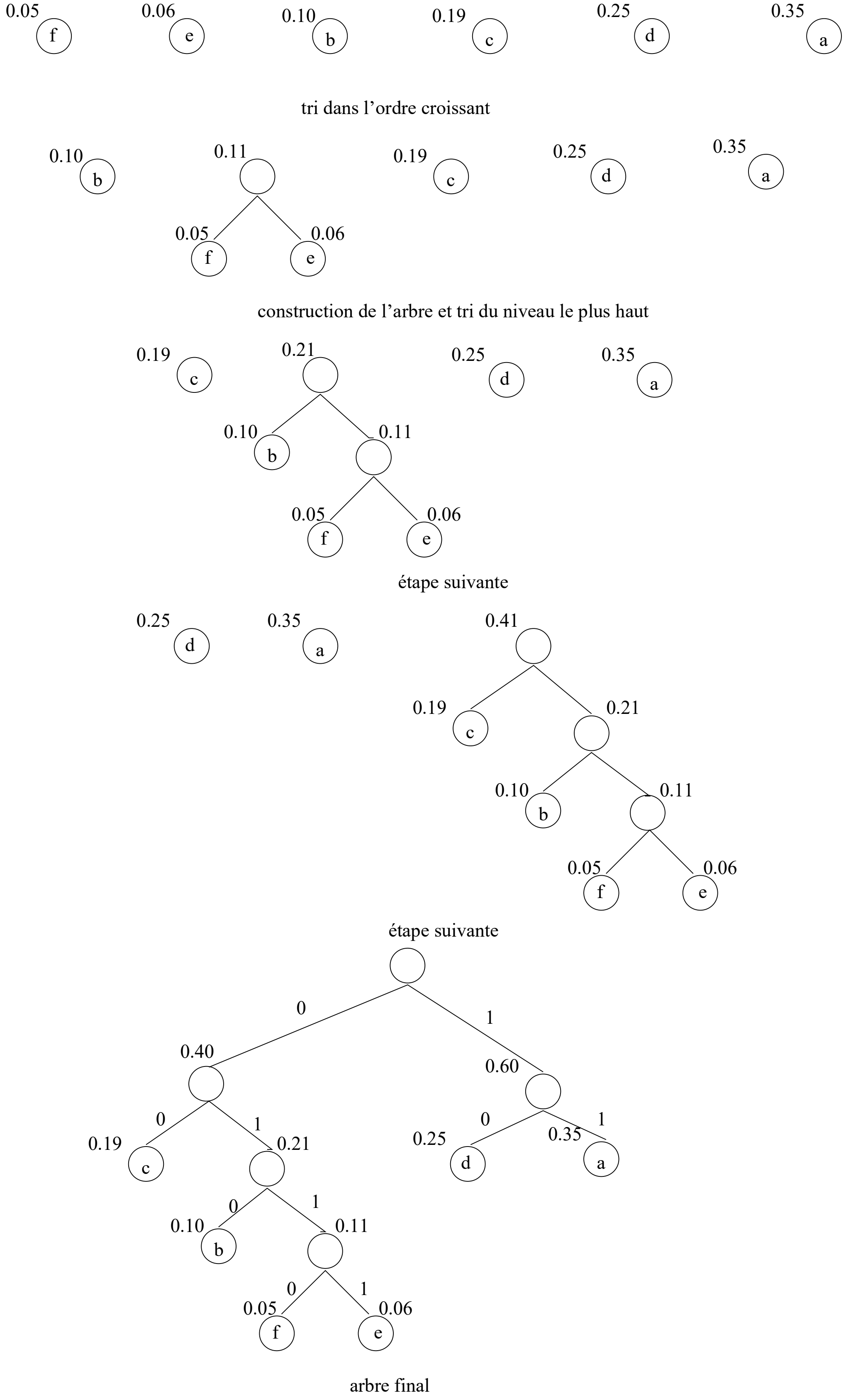

FIG. 2.3: Exemple de construction d'un code de Huffman.

Symbole	Mot de code
a	11
b	010
c	00
d	10
e	0111
f	0110

Exercice 2.2. *Cet exercice introduit des éléments théoriques sur la valeur du code généré par l'algorithme de Huffman. Soit la source $\mathcal{S} = (S, \mathcal{P})$, où $S = (0, 1)$, et $P(0) = 0.99$ et $P(1) = 0.01$.*

1. *Calculer l'entropie de $\mathcal{S}$.*
2. *Donner le code généré par l'algorithme de Huffman sur la troisième extension $\mathcal{S}^3$. Quel est son taux de compression ?*
3. *Que pouvez-vous dire de l'optimalité de l'algorithme de Huffman en comparant les taux de compression obtenus avec ceux de l'exercice 1.24, page 79 ? Cela est-il conforme au théorème de Shannon ?*

Solution page 289.

Exercice 2.3 (Pile ou Face pour jouer au 421). *On désire jouer au lancé de dé, avec pour unique moyen une pièce de monnaie. On va donc chercher à coder un dé non pipé à 6 faces avec une pièce non pipée à deux faces.*

1. *Quelle est l'entropie d'un dé ?*
2. *Proposer un algorithme de codage.*
3. *Calculer la longueur moyenne de ce codage.*
4. *Ce codage est-il optimal ?*

Solution page 289.

L'algorithme de Huffman est optimal

Théorème 19. *Le code issu de l'algorithme de Huffman est optimal parmi tous les codes instantanés de $\mathcal{S}$ sur V.*

Preuve. On suppose dans la preuve pour alléger les notations que $q = 2$, mais on peut à toutes les étapes généraliser automatiquement.
On sait qu'un code instantané peut être représenté par un arbre de Huffman. Soit A l'arbre représentant un code optimal, et H l'arbre représentant le code issu de l'algorithme de Huffman.