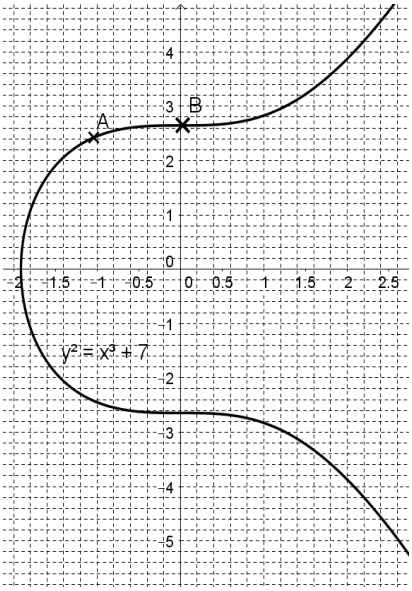
TD4 Courbe Elliptique et Chiffrement

GelAmal

Dans tout le TP on n'utilisera que la courbe elliptique du bitcoin secp256k1 : $Y^2 = X^3 + 7$



Exercice : Premiers calculs sur les courbes elliptiques

1. Calculer graphiquement A+B, 2.A, (A+B)-A.
2. Que peut-on dire de A+(-A) ?
3. Facultatif : Déterminer la formule des coordonnées de A+B et de 2.A
4. Calculer de nouveau les coordonnées des points précédents mais cette fois à partir des formules suivantes :

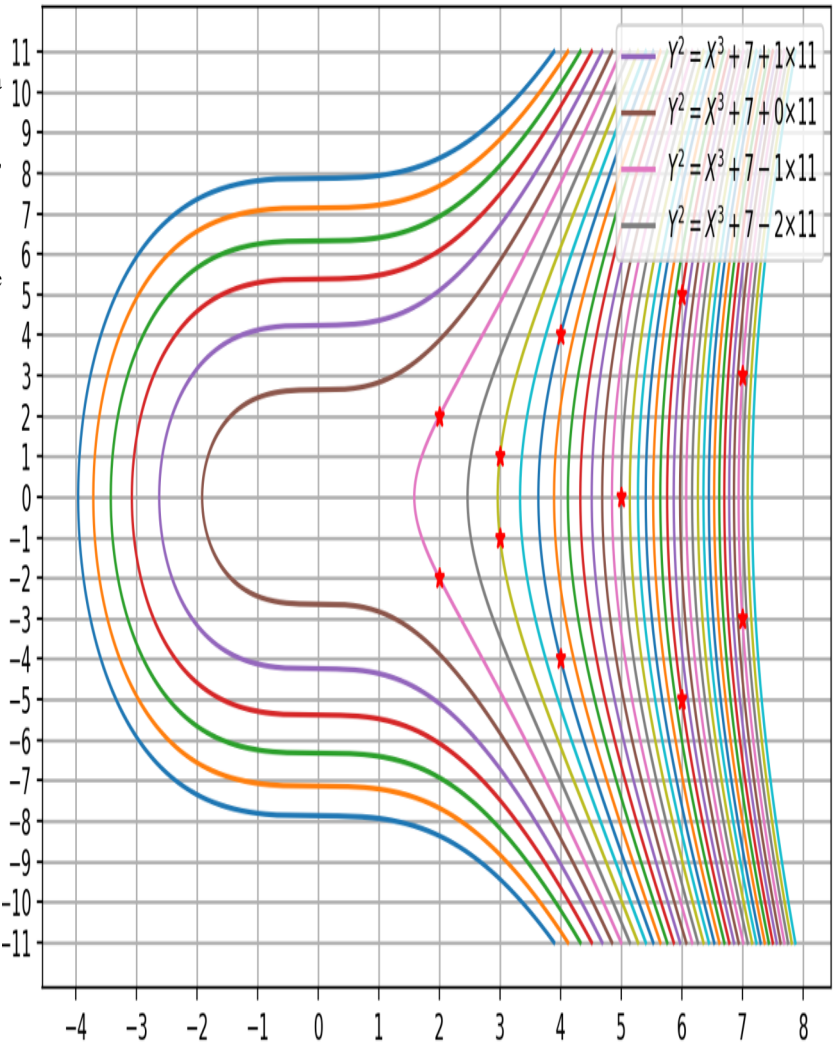
- Calcul de A+B : avec $\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

  $x = \lambda^2 - x_A - x_B$ et $y = -(\lambda(x - x_A) + y_A)$

- Calcul de 2.A : $\lambda = \frac{3.x_A^2}{2.y_A}$, $x = \lambda^2 - 2.x_A$ et $y = -(\lambda(x - x_A) + y_A)$

Exercice : Calculs sur F_{11}

- Sur F_{11} , les points de coordonnées A: (2,2), B(3,1), C(5,3) appartiennent-ils bien à secp256k1 ?
- Calculer sur F_{11} : A+B, 2.A, 3.A, (A+B)-A.
- Que peut-on dire de A+(-A) ?
- Représenter vos résultats sur le graphique suivant :



Exercice : Classe ElemtE07

Construire les méthodes de la classe des éléments de secp256k1 : d $Y^2 = X^3 + 7$ ans $\mathrm{F_p}$

```
class ElemtE07(object):
  "Ensemble des solutions de YÂ²=X^3+7 dans Fp Courbe secp256k1"
  def __init__(self,x,y=None,p=None):
        Défini par deux ElmntZnZ mais seul le modulo de x est utilisé. Celui de
y doit donc lui être égal.
        Avec l'élément neutre ayant self.y='Inf'
        ElemtE07(7,6,11) doit renvoyer une erreur
        >>> ElemtE07(ElmtZnZ(7,11),ElmtZnZ(8,11))
        ElemtE07(7,8,11)
        >>> ElemtE07(1,"Inf",11)
        ElemtE07(1,"INF",11)

  def lDesElements(p=47):
        >>> ElemtE07.lDesElements(5)
        [ElemtE07(0,"INF",5), ElemtE07(2,0,5), ElemtE07(3,2,5), ElemtE07(3,3,5),
ElemtE07(4,1,5), ElemtE07(4,4,5)]
        >>> len(ElemtE07.lDesElements(11))
        12
        >>> ElemtE07(6,5,11) in (ElemtE07.lDesElements(11))
        True
```

Une fonction de hash permettra de mettre des instances de ElemtE07 dans des ensembles mais aussi de programmer facilement des chiffreurs utilisant les courbes elliptiques.

Pour gagner en efficacité on pourra utiliser les ElmntZnZ qui comporte maintenant les fonctions estUnCarre et racineCarree.

```
begin{verbatim}
  def __hash__(self):

  def ElemtE07DepuisHash(h,p):
        >>> h=ElemtE07(6,5,11).__hash__()
        >>> ElemtE07.ElemtE07DepuisHash(h,11)
        ElemtE07(6,5,11)

  def eDesElements(p=47,verbose=False):
        >>> ElemtE07(8,3,17) in (ElemtE07.eDesElements(17))
        True
end{verbatim}
```

Evidemment, les méthodes de calcul.

```
  def __add__(self,other):
        >>> ElemtE07(2,2,11)+ElemtE07(3,1,11)
        ElemtE07(7,3,11)
        >>> (ElemtE07(3,"INF",47)+ElemtE07(3,9,47))+ElemtE07(3,"INF",47)
        ElemtE07(3,9,47)
  def double(self):
        >>> ElemtE07(2,2,11).double()
        ElemtE07(5,0,11)
  def lOrbite(self):
        >>> ElemtE07(2,2,11).lOrbite()
        [ElemtE07(2,2,11), ElemtE07(5,0,11), ElemtE07(2,9,11), ElemtE07(0,"INF",11)]
  def __mul__(self,other):
        >>> ElemtE07(6,5,11)*3
        ElemtE07(5,0,11)
```

```
        >>> ElemtE07(15,13,17)*0
        ElemtE07(0,"INF",17)
    def __rmul__(self,other):
        >>> 2*ElmtZnZ(3,10)
        ElmtZnZ(6,10)
        2*(ElemtE07(3,"INF",47)+3*ElemtE07(3,9,47))+ElemtE07(3,"INF",47)
        ElemtE07(43,32,47)
    def __eq__(self,other):
        >>>3*ElemtE07(6,5,11)==ElemtE07(5,0,11) and ElemtE07(0,"Inf",47)==0
        True
        >>> ElemtE07(3,9,47)==ElemtE07(3,"Inf",47) or ElemtE07(3,"Inf",47)==ElemtE07(3,9,47)
        False
    def __neg__(self):
        >>> -ElemtE07(7,3,11)== ElemtE07(7,8,11)
    def __sub__(self,other):
        >>> ElemtE07(3,10,11)-ElemtE07(7,3,11)==ElemtE07(4,7,11)
        >>> ElemtE07(3,9,47)-ElemtE07(3,9,47)==0
```

Les méthodes de Groupe (Facultatif).

Ces méthodes se révèlent très lente dès que l'on passe à 16bits.

Proposer des suggestions pour accélérer tout l'ensemble.

```
def ordreCourbe(p=17):
      >>> ElemtE07.ordreCourbe(11)==      12

def ordrePoint(self):
      >>> ElemtE07(3,10,11).ordrePoint()==      3
      >>> ElemtE07(7,3,11).ordrePoint()==       12

def estGenerateur(self):
      >>> ElemtE07(7,3,11).estGenerateur()
      True
      >>> ElemtE07(3,10,11).estGenerateur()
      False
def lDesElementsGenerateurs(p=47):
      >>> ElemtE07.lDesElementsGenerateurs(11)
      [ElemtE07(4,4,11), ElemtE07(4,7,11), ElemtE07(7,3,11), ElemtE07(7,8,11)]
      def lDesElementsDOrdrePremier(p=47):
      >>> ElemtE07.lDesElementsDOrdrePremier(11)
      [ElemtE07(3,1,11), ElemtE07(3,10,11), ElemtE07(5,0,11)]
def elemtE07APartirDeX(x:ElmtZnZ):
      Renvoie un point avec x ou une valeur proche de x comme abscisse
      >>> ElemtE07.elemtE07APartirDeX(ElmtZnZ(2,11))
      ElemtE07(2,2,11)
def randElemtE07(p):
       Renvoie un élément non nul au hasard
def randGenerateurE07(p=47):
       Renvoie un élément non nul au hasard
      >>> ElemtE07.randGenerateurE07(47).estGenerateur()
      True
```

Et enfin un graphique ! (Facultatif)

Exercice : Codage à clé publique avec secp256k1

1. Construisez la class CodeurE07 bassé sur secp256k1.
2. Pourquoi une valeur par défaut d'un générateur est-elle proposée ?
3. L'idée est de coder l'info dans l'abscisse de points de secp256k1. Quel problème cela pose-t-il ?

Solution Ex2

Solution : *On a* $y_A^2 = x_A^3 + 7$,$y_B^2 = x_B^3 + 7$,$(AB) : Y = \lambda.(X - x_A) + y_A$ *avec* $\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
On a $M(x, y) \in (AB) \cap E$
donc $y^2 - y_A^2 = x^3 - x_A^3$
donc $(y - y_A).(y + y_A) = x^3 - x_A^3$
donc $(\lambda.(x - x_A).(\lambda.(x - x_A) + 2.y_A) = (x - x_A).(x^2 + x.x_A + x_A^2)$
et $(\lambda.(x - x_B).(\lambda.(x - x_B) + 2.y_B) = (x - x_B).(x^2 + x.x_B + x_B^2)$
donc $\lambda^2.(x_B - x_A) + 2.\lambda(y_A - y_B) = x.(x_A - x_B) + (x_A^2 - x_B^2)$
donc $x.(x_A - x_B) + (x_A - xB).(x_A + x_B) = \lambda^2.(x_B - x_A) + 2.\frac{(y_A - y_B)^2}{x_A - x_B)}$
donc $x + (x_A + x_B) = -\lambda^2 + 2.\frac{(y_A - y_B)^2}{(x_A - x_B)^2}$
donc le point d'intersection a pour coordonnées :$x = \lambda^2 - x_A - x_B$ *et* $y = \lambda(x - x_A) + y_A$
donc $A + B : (\lambda^2 - x_A - x_B\ ;\ -\lambda(x - x_A) - y_A)$
Le coefficient directeur de la tangente en A est donné par la dérivée de $(\sqrt{x^3 + 7})' = \frac{3.x^2}{2.\sqrt{x^3+7}} = \frac{3.x^2}{2y}$
On a donc $M(x, y) \in TangenteenA \cap E$
donc $y_A^2 = x_A^3 + 7$,$y^2 = x^3 + 7$,$y = \lambda.(x - x_A) + y_A$ *avec* $\lambda = \frac{3.x_A^2}{2.y_A}$
$y^2 - y_A^2 = x^3 - x_A^3$
$(y - y_A).(y + y_A) = x^3 - x_A^3$
donc $(\lambda.(x - x_A).(\lambda.(x - x_A) + 2.y_A) = (x - x_A).(x^2 + x.x_A + x_A^2)$
donc $(\lambda^2.(x - x_A) = (x^2 + x.x_A + x_A^2) - 2\lambda.y_A$
donc $(\lambda^2.(x - x_A) = (x^2 + x.x_A + x_A^2) - 2\frac{3.x_A^2}{2.y_A}.y_A$
donc $(\lambda^2.(x - x_A) = x^2 + x.x_A - 2x_A^2$
donc $(\lambda^2.(x - x_A) = (x - x_A).(x + 2.x_A)$
donc $x = \lambda^2 - 2.x_A)$ *et* $y = \lambda(x - x_A) +_y A$ *donc* $2.A : (\lambda^2 - 2.x_A; -\lambda(x - x_A) - y_A)$

Exercice : Sol Ex3

C n'appartient pas à la courbe !

ElemtE07(2,2,11), ElemtE07(3,1,11) ElemtE07(4,4,11) ElemtE07(5,0,11)
ElemtE07(6,5,11) ElemtE07(7,3,11)

>>> ElemtE07(2,2,11)*2 == ElemtE07(5,0,11)

>>> ElemtE07(2,2,11)+ElemtE07(3,1,11)== ElemtE07(7,3,11)

>>> ElemtE07(2,2,11)*3== ElemtE07(2,9,11)

Solution : *C n'appartient pas à la courbe ! ElemtE07(2,2,11), ElemtE07(3,1,11) ElemtE07(4,4,11) ElemtE07(5,0,11) ElemtE07(6,5,11) ElemtE07(7,3,11)*

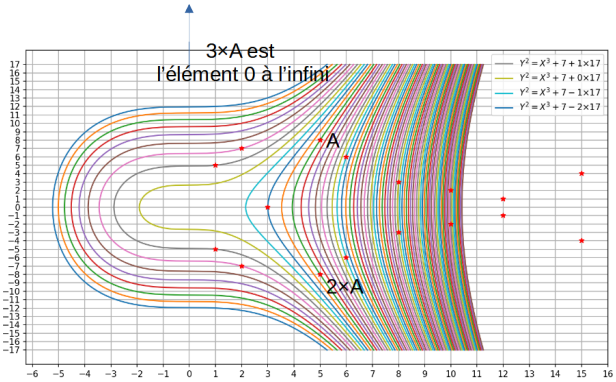
*»> ElemtE07(2,2,11)*2 == ElemtE07(5,0,11)*

*»> ElemtE07(2,2,11)+ElemtE07(3,1,11)== ElemtE07(7,3,11) »> ElemtE07(2,2,11)*3== ElemtE07(2,9,11)*

Les points de la courbe $Y^2==X^3+7$ sur F_{17}.

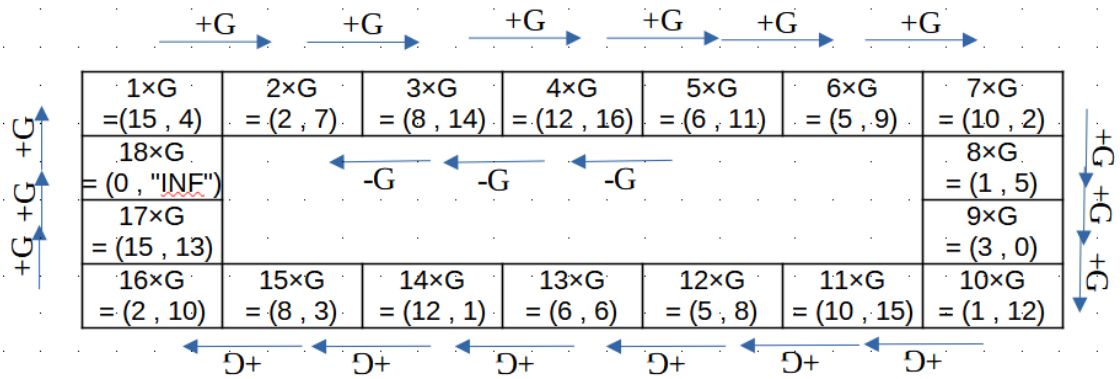
Les 18 points de la courbe Y**2==X**3+7 modulo 17									
(0 , "INF")	(1 , 5)	(2 , 7)	(3 , 0)	(5 , 8)	(8 , 3)	(6 , 6)	(10 , 2)	(12 , 1)	(15 , 4)
	(1 , 12)	(2 , 10)		(5 , 9)	(8 , 14)	(6 , 11)	(10 , 15)	(12 , 16)	(15 , 13)

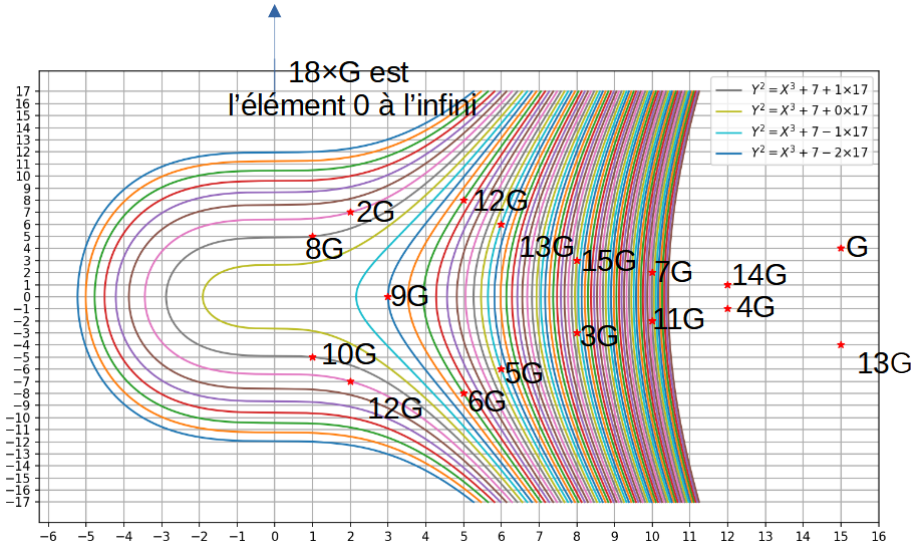
- A=(5 8) a une orbite de 3 éléments :
  1×A=(5 , 8) ; 2×A=(5 , 9) et 3×A=(0 , "INF")
  A n'est donc pas un générateur.



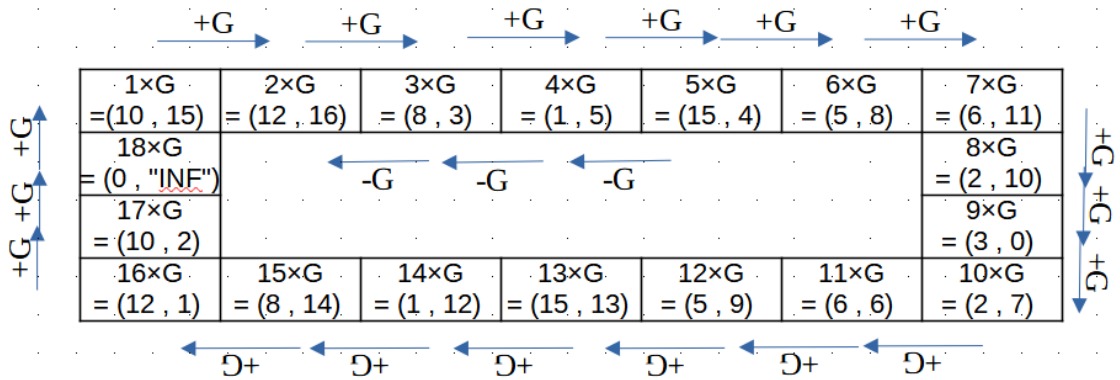
- Un premier élément générateur G : (15 , 4)

On a G+G=(2 , 7), G+G+G=3×G=(8 , 14) et 8×G=(1 , 5)
G=(15 , 4) a donc une orbite de 18 éléments :





- On peut aussi prendre G=(10 , 15) comme générateur. Son orbite est alors :



Exercice : Ex3

Parce que les générateurs sont très durs à trouver !

Il n'y a pas de points à chaque abscisses ! Il faudra donc se placer un peu à coté !!! Le décalage maximal est faible mais il faudrait l'évaluer. Pour faire simple nous allons coder sur 2 octets chaque octet de monBin. On utilisera les méthodes :

```
  M=ElemtE07.elemtE07APartirDeX(ElmtZnZ(m,self.p))
  monBinC.ajouteMot40b(MP.__hash__())
  h,pos=monBinC.lisMot(5,pos)
  MP=ElemtE07.ElemtE07DepuisHash(h,self.p)

class CodeurE0765537(object):
  """Codeur à partir de la courbe elliptique sur F65537"""
  def __init__(self,a,B,G=ElemtE07(47106,21934,65537),p =65537):

  def __str__(self):
  return f"CodeurE0765537 avec la clé privé {self.a=} et sa clé
publique {self.A=}, la clé publique d'un tier {self.B=}, avec comme
point générateur {self.G=} sur F{self.p}"
  def __repr__(self):

  def binCode(self,monBinD:Binaire603)->Binaire603:

  def binDecode(self,monBinC:Binaire603)->Binaire603:

#Exemple d'utilisation ;
mes=Texte603("Bonjour les amis !")
print(f"Message à coder :{mes}")
binc=ca.binCode(mes.toBinaire603())
print(f"Message codé avec la clé secrète de {a=} et la clé publique
{B=} :{Texte603(binc)}")
bind=cb.binDecode(binc)
print(f"Message décodé avec la clé secrète de {b=} et la clé publique
{A=} :{Texte603(bind)}")
```