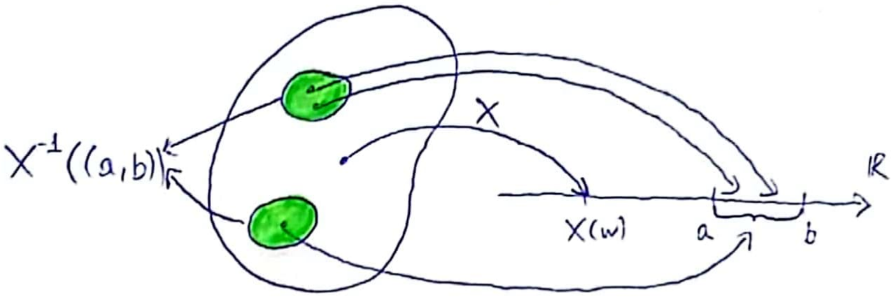
Случайни величини

$V=(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - вероятностно пространство



$I \subseteq \mathbb{R}$, най-често $I=(a,b)$

$X^{-1}(I)=\{w\in\Omega;\ X(w)\in I\}$

$X^{-1}((a,b))=\{w\in\Omega: a<X(w)<b\}$

$X^{-1}(\{a\})=\{X=a\}$

Деф. (Случайна величина)

Нека V е вер. пр-во. Тогава $X:\Omega\to\mathbb{R}$ е случайна величина, тогава когато $\forall a<b,\ a,b\in\mathbb{R}$ е в сила $X^{-1}((a,b))\in\mathcal{A}$, където $\underset{B\subseteq\mathbb{R}}{X^{-1}(B)}=\{w\in\Omega \mid X(w)\in B\}$. Т.е трябва да имаме възможността да кажем каква е вероятността X да е между a и b.

Факт Вярно е, че $X^{-1}(I)\in\mathcal{A}$, ако $I=(a,b]$, $I=[a,b]$, $I=\{x\}, x\in\mathbb{R}$.

Всеки интервал (a,b) от $\mathbb{R}$ има прообраз $B\subseteq\Omega$ и се изпраща в него с $X^{-1}((a,b))$. Някои интервали може да се изпращат в празното множество $\emptyset$.

Теорема (Свойства на случайните величини)

Нека V е вер. пр-во и X и Y са сл. вел. ($X, Y:\Omega\to\mathbb{R}$). Тогава е в сила:

а) $a.X \pm b.Y$ е сл. вел. $\forall a,b\in\mathbb{R}$

б) $c.X$ е сл. вел. $\forall c\in\mathbb{R}$

в) XY е сл. вел.

г) ако $P(Y=0)=0$, то $\dfrac{X}{Y}$ е сл. вел.

Доказателство $X_1=a.X$ $\begin{cases} a=0 \\ a>0 \\ a<0 \end{cases}$ При $a=0$ $X_1=0$ $\{X_1<b\}\overset{?}{\in}\mathcal{A}$

$\left.\begin{array}{l} b\le 0 \Rightarrow X_1<b=\emptyset \\ b>0\Rightarrow X_1<b\in\Omega \end{array}\right\}\Rightarrow\in\mathcal{A}$

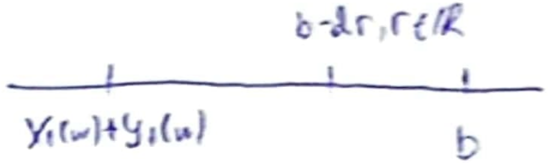
При $a>0$, $\{X_1<b\}=\{a.X<b\}=\{X<\frac{b}{a}\}\in\mathcal{A}$, защото X е сл. вел. $\Rightarrow X_1$ е сл. вел. и $Y_1=b.Y$ е сл. вел

$Z=X_1+Y_1$; $\mathcal{A}\overset{?}{\ni}\{Z<b\}=\{X_1+Y_1<b\}\overset{?}{=}\to\bigcup_{c\in\mathbb{R}}\{X_1<c\}\cap\{Y_1<b-c\}$

$\to\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\underbrace{\underbrace{\{X_1<q\}}_{\in\mathcal{A}}\cap\underbrace{\{Y_1<b-q\}}_{\in\mathcal{A}}}_{\in\mathcal{A}}=L$

$(\subseteq)$ $w\in L\Rightarrow\exists q_0\cdot \left.\begin{array}{l} X_1(w)<q_0 \\ Y_1(w)<b-q_0\end{array}\right\} X_1(w)+Y_1(w)<b\Rightarrow L\subseteq\{X_1+Y_1<b\}$

$(\supseteq)\ w \in \{X_1 + Y_1 < b\}$



$X_1(w) + Y_1(w) < b - 2r$

$q - r < X_1(w) < q + r \Rightarrow X_1(w) < q + r,\ q \in \mathbb{Q}$

$Y_1(w) < b - 2r - X_1(w) < b - 2r - q + r = b - (q + r)$

$w \in \{X_1 < \underbrace{q+r}_{q_1}\} \cap \{Y_1 \cap b - \underbrace{(q+r)}_{q_1}$

$w \in \{X_1 < q_1\} \cap \{Y_1 < b - q_1\} \in L$

$\Rightarrow L = \{X_1 + Y_1 < b\}$

Дискретни случайни величини

Деф.) Индикаторна функция

Нека Ω е мн-во от елементарни събития и $H \subseteq \Omega$. Тогава $\mathbb{1}_H$ се нарича индикаторна функция, ако $\mathbb{1}_H = \begin{cases} 1, & \text{ако } w \in H \\ 0, & \text{ако } w \notin H \end{cases}$

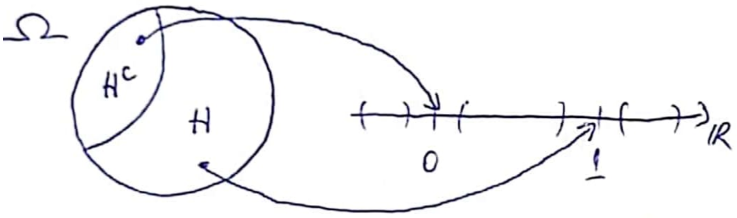
$\mathbb{1}_{H^c} = \mathbb{1} - \mathbb{1}_H$; $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$; $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$; $\mathbb{1}_{(A\cup B)^c} = \mathbb{1}_{A^c}\mathbb{1}_{B^c}$;

$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \mathbb{1} - \mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c} = \mathbb{1} - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i^c} = \mathbb{1} - \prod_{i=1}^{n}(\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_i})$

Лема) Нека V е вер. пр-во и $H \in \mathcal{A}$. Тогава $\mathbb{1}_H : \Omega \to \mathbb{R}$ е сл. вел.

Доказателство)

Ако $X(w) := \mathbb{1}_{H}(w)$, то $X^{-1}(\{0\}) = H^c$, а $X^{-1}(\{1\}) = H$



$\forall a<b$ е вярно, че $X^{-1}(a,b) = \begin{cases} \emptyset, & \text{ако } a \geq 1 \text{ или } b \leq 0 \\ \Omega, & \text{ако } 0 \in (a,b) \text{ и } 1 \in (a,b) \\ H, & \text{ако } 1 \in (a,b) \text{ и } 0 \notin (a,b) \\ H^c, & \text{ако } 1 \notin (a,b) \text{ и } 0 \in (a,b) \end{cases}$

Което и интервал (a,b) да изберем - изходите ще са един от 4-те възможни $\emptyset, \Omega, H, H^c$, които са σ-алгебра. Т.е. дефиницията е изпълнена

За всеки случай $X^{-1}((a,b)) \in \mathcal{A} \Rightarrow X = \mathbb{1}_H$ е сл. вел. □

Деф.) (Дискретна случайна величина)

Нека V е вер. пр-во, H е пълна група от събития във V и $\bar{x}$ е вектор или редица от числа, съответстващи на елементарни събития в H. Тогава:

$X(w) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbb{1}_{H_j}(w)$ се нарича дискретна сл. вел.

Деф.) (Разпределение на дискретна случайна величина)

Нека $X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{H_i}$ е дискр. сл. вел. Тогава таблицата

X	x_1	x_2	...	x_k	...
$P(X=x_j)$	p_1	p_2	...	p_k	...

където $P(X=x_i) = p_i = \mathbb{P}(H_i)$ и $\sum_i p_i = 1$ се нарича разпределение на X.

Казваме, че две дискретни случайни величини са еднакви по разпределение, ако техните таблици съвпадат.

Смяна на променливите на дискр. сл. вел.

X - дискр. сл. вел., $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $Y = g(X)$ - искаме да знаем дали Y е сл. вел.

Ако $X = \sum_j' x_j \mathbb{1}_{H_j}$, то $Y = \sum_j' g(x_j) \mathbb{1}_{H_j}$ е сл. вел. и ако положим $y_j = g(x_j)$, то

$Y = \sum_j' y_j \mathbb{1}_{H_j}$.

Деф. Нека X и Y са две дискретни сл. вел. в едно вер. пр-во и нека $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Тогава $Z = g(X, Y)$ е смяна на променливите X и Y

! $Z(w) = g(X(w), Y(w))$

Деф. (Независимост на дискр. сл. вел.)
Нека X и Y са две дискр. сл. вел. във V. Тогава

$X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = x_j, Y = y_k) = \mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_k) = \mathbb{P}(X = x_j)\mathbb{P}(Y = y_k)$, $\forall j, k$

Деф. (Независимост в съвкупност)
Нека $X_1, \dots, X_n$ са дискр. сл. вел. във V. Тогава те са независими в съвкупност, ако

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Деф. (Функция на разпределение на сл. вел.)
Нека X е сл. вел. във V. Тогава $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$, $\forall x \in (-\infty, \infty)$, се нарича функция на разпределение на X.