Геометрична вероятност

Тази вероятност е пример за вероятностно разпределение върху неизброимо множество. Най-простият прототип отново разпределя "равномерно" вероятностите.

Дефинираме вероятността нещо да се случи в $A \subseteq \Omega$, като площта на A върху площта на цялото Ω.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 : |\Omega| = \iint_{\Omega} dx < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ за всяко A отворено

Вероятността зависи само от площта на A, а не от нейната форма и разположение

Площта на една точка $x \in \Omega$ е равно на $0 \Rightarrow \mathbb{P}(\{x\}) = \mu(\{x\}) / \mu(\Omega) = 0$

Деф.) (Вероятностно пространство)

Наредената тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, където Ω е пространство от елементарни събития, $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ е σ-алгебра и $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$ е вероятностна мярка се нарича вероятностно пространство.

Деф.) (Условна вероятност)

Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вероятностното пространство и $A \in \mathcal{A}$ е такова, че $\mathbb{P}(A) > 0$. В такъв случай, можем да дефинираме нова вероятност върху $(A, \mathcal{A} \cap A, \mathbb{P}_A)$ чрез $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}, \forall B \in \mathcal{A}$

Деф.) (Независимост)

Нека V е вер. пр-во. Две събития A и B се наричат независими, ако $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Ако $\mathbb{P}(A) > 0$, то би следвало, че $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$

Деф.) (Независими в съвкупност)

Нека V е вер. пр-во и $A_1, \dots, A_n$ са събития в него. Казваме, че $A_1, \dots, A_n$ са независими в съвкупност, ако $\forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ и $|I| \geq 2$ е изпълнено:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Теорема) Нека $A_1, \dots, A_n$ са n събития във вер. пр-во V, за които е изпълнено

(*) $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) > 0$, тогава $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cdot \mathbb{P}(A_{n-1} | \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i) \dots \mathbb{P}(A_2 | A_1) \mathbb{P}(A_1)$

Доказателство) По индукция

За $n=1$: $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$

Нека допуснем, че (*) е изпълнено за n.

Тогава, тъй като

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i) = \mathbb{P}(A_{n+1} \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i) \overset{\text{Бейс}}{=} \mathbb{P}(A_{n+1} | \bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cdot \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

и след използването на индукционното предположение, получаваме искания резултат за $n+1$ □

Теорема) Нека $A_1, \dots, A_n$ са n независими събития във вер. пр-во V. Тогава $A_1^c, \dots, A_n^c$ също са n независими събития.

Доказателство) По индукция

За $n=2$: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$

$$A_1^c \cap A_2^c \overset{\text{де Морган}}{=} (A_1 \cup A_2)^c = 1 - A_1 + A_2 + A_1 \cap A_2$$

$$\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c) = \mathbb{P}((A_1 \cup A_2)^c) = 1 - \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 1 - \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_2)[1 - \mathbb{P}(A_1)] =$$

$$= [1 - \mathbb{P}(A_1)][1 - \mathbb{P}(A_2)] = \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2^c)$$

Нека допуснем, че е изпълнено за n

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^c)$$

Тогава, тъй като

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i) = \mathbb{P}(A_{n+1} \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i) \quad (A_{n+1} \text{ и } \bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ са независими})$$

То следва, че A_{n+1}^c и $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$ са независими

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i^c) = \prod_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i^c) \quad \square$$

Деф. (Пълна група от събития)

Групата от множества $H_1, H_2, \dots, H_n$ се нарича пълна група от събития, ако за всеки различни $1 \le i \ne j \le n$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ и $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

Теорема (Формула за пълната вероятност)

Нека $H_1, H_2, \dots, H_n$ е пълна група от събития в Ω и $A \in \mathcal{A}$. Тогава

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)$$

Доказателство

Имаме, че $A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)$

От факта, че $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(B)$, получаваме

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)$$

Теорема (Формула на Бейс)

Нека $H_1, H_2, \dots, H_n$ е пълна група от събития в Ω, $A \in \Omega$ и $\mathbb{P}(A) > 0$

Тогава за всяко $1 \le k \le n$:

$$\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}$$

Доказателство Имаме, че $\mathbb{P}(A \cap H_k) = \mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k)$, както и $\mathbb{P}(H_k|A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_k \cap A)$

Следователно $\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(A)} \overset{\text{ФПВ}}{=} \frac{\mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}$