Теодор Светославов Костадинов 4MI0600097 III курс 3 група (1)

Домашно 1

зад. 1) I) 10 стандартни тестета по 52 карти се теглят по 1 карта от всяко

а) P(да няма повтарящи се) = P(A) = ?

$$P(A) = \frac{52!}{42!\,52^{10}} = 0{,}39713$$

$I \to 1$

$II \to \frac{51}{52}$

...

$X \to \frac{43}{52}$

б) P(да има поне 3 аса) = P(B) = ?

$$X \sim Bi\left(10, \frac{1}{13}\right)$$

$$P(B) = P(X \geq 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} \frac{1}{13^k} \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^{10-k}$$

$$P(X=0) = \left(\frac{12}{13}\right)^{10} \qquad P(X=1) = 10 \cdot \frac{1}{13} \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^{9} = 0{,}37428$$

$$P(X=0) = 0{,}449137$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \cdot \frac{1}{13^2} \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^{8} = 0{,}140355$$

$$P(B) = 1 - (0{,}449 + 0{,}374 + 0{,}140) =$$

$$= 1 - 0{,}963 \approx 0{,}037$$

в) P(4 спатии, 3 кари, 2 купи, 1 пика) = P(C) = ?

②

$$P(C) = \binom{10}{4}\frac{1}{4^4}\cdot\binom{6}{3}\frac{1}{4^3}\cdot\binom{3}{2}\frac{1}{4^2}\cdot\binom{1}{1}\frac{1}{4} =$$

$$= \frac{25\cdot 21\cdot 24}{4^{10}} = 0{,}012$$

г) P(# черни = # червени + 4 | # черни > # червени) = P(D|H) = ?

X = брой черни $\sim Bi(10, 1/2)$

$4 + 10 - X = X$ $\quad 14 = 2x \Rightarrow x = 7$ черни и $10 - x = 3$ червени

$D = \{7$ черни и 3 червени$\}$ $\quad H = \{>5$ черни$\} = \{X > 5\}$

$D = \{X = 7\}$

$\Rightarrow P(D|H) = P(X=7 | X>5) = ?$

$P(X>5) + P(X<5) + P(X=5) = 1$

$2.P(X>5) = 1 - P(X=5)$

$P(X=5) = \binom{10}{5}\frac{1}{2^{10}} = 0{,}246$ $\quad \Rightarrow P(X>5) = \frac{1-0{,}246}{2} = 0{,}377$

$P(X=7) = \binom{10}{7}\frac{1}{2^{10}} = 0{,}1171 = \frac{15}{128}$

$P(X=7|X>5) = \frac{P(X=7)}{P(X>5)} = \frac{0{,}1171}{0{,}377} = 0{,}31$, защото $P(X=7|X\leq 5).P(X\leq 5) = 0$

$\Rightarrow P(D|H_1) = 0{,}31$

I Извод: а) $P(A) = 0{,}397$

б) $P(B) = 0{,}037$

в) $P(C) = 0{,}012$

г) $P(D|H) = 0{,}31$

II) ok | 3/4 ok

Взимаме 1 → оказва се OK → връщаме

P(II изделие от същата партида да не е OK | I е OK) = ?

$$P(\text{брак}) = P(\text{брак} \mid H_1)\cdot P(H_1) + P(\text{брак} \mid H_2)\cdot P(H_2) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

H_i = {избиране i-та урна} $P(H_i) = 1/2$

$$P(OK) = 1 - P(\text{брак}) = \frac{7}{8}$$

P(пада се OK | пада брак от същата урна) $= \frac{3}{4}$, защото само II урна върши работа

$P(B|A) = \frac{3}{4}$

A = {пада се 2ра брак}

B = {пада се 1ра брак}

$$P(A|B) = P(B|A)\cdot\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{28}$$

II вар) $$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\underbrace{P(A\cap B \mid H_1)}_{0}\cdot P(H_1) + P(A\cap B \mid H_2)\,P(H_2)}{P(B)} =$$

$$= \frac{0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{28}$$

Извод: P(II изделие от същата партида да не е OK (брак) | I е OK) $= \frac{3}{28}$

III) $x^2+ax+b=0$, $a\in[0,1]$, $b\in[0,1]$

P(корените на ур-ето да са $\mathbb{R}$ числа) $= ? = P(A)$

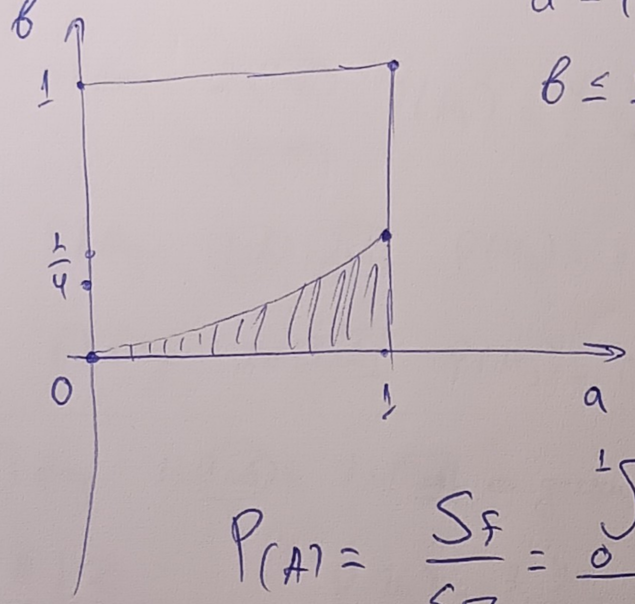
За да са $\mathbb{R}$ числа $\Rightarrow$ $D = a^2-4b \geq 0$

$a^2-4b \geq 0 \quad 4b \leq a^2$

$b \leq \frac{a^2}{4}$

За $b=\frac{a^2}{4}$

a	0	1	4
b	0	$\frac{1}{4}$	1



$y \leq \frac{x^2}{4}$

$$P(A) = \frac{S_f}{S_\square} = \frac{\int_0^1 \frac{x^2}{4}}{1} = \frac{x^3}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

Извод: P(корените на ур-то да са $\mathbb{R}$ числа) $= \frac{1}{12}$

Зад. 2

Лявджоб	Десен
4× 1лв	2× 1лв
3× $\boxed{2лв}$	1× $\boxed{2лв}$

1) 2 от Ляв в Десен
2) 2 от Десен в Ляв
3) $P($1 от Десния $=$ 1лв$) = ?$

I) вади 2×1лв от левия $P(H_1) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{2}{7}$

Л	Д
2× 1лв	4× 1лв
3× $\boxed{2лв}$	1× $\boxed{2лв}$

а) вади 2× 1лв от десния $P(M_1) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{5} \Rightarrow P(Д = 1лв \mid M_1) = \frac{2}{3}$

б) вади 1лв $\boxed{2лв}$ $P(M_2) = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{5} \Rightarrow P(Д = 1лв \mid M_2) = 1$

в) вади 2× $\boxed{2лв}$ $P(M_3) = 0$ ~~$\Rightarrow P(Д) = 0$~~ $P(Д \mid M_3) = 0$

II) вади 1× 1лв и 1× $\boxed{2лв}$ от десния $P(H_2) = 2\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{4}{7}$

Л	Д
3× 1лв	3× 1лв
2× $\boxed{2лв}$	2× $\boxed{2лв}$

$P(M_1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ $P(Д \mid M_1) = \frac{1}{3}$

$P(M_2) = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{6}{10}$ $P(Д \mid M_2) = \frac{2}{3}$

$P(M_3) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ $P(Д \mid M_3) = 1$

III) вади 2× $\boxed{2лв}$ от десния $P(H_3) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{7}$

Л	Д
4× 1лв	2× 1лв
1× $\boxed{2лв}$	3× $\boxed{2лв}$

$P(M_1) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ $P(Д \mid M_1) = 0$

$P(M_2) = 2\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{6}{10}$ $P(Д \mid M_2) = \frac{1}{3}$

$P(M_3) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ $P(Д \mid M_3) = \frac{2}{3}$

$P(Д \mid H_1) = \sum_{i=1}^{3} P(Д \mid M_i)_{/H_1} \cdot P(M_i) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{2}{5} + 0 = \frac{4}{5}$

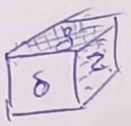
Вероятността е

Извод: 0,628

$P(Д \mid H_2) = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{10} + \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{6}^{2}}{10} + 1\cdot\frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$P(Д \mid H_3) = 0\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{6}^{2}}{10} + \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{10} = \frac{5-1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$P(Д) = \sum_{i=1}^{3} P(Д \mid H_i)\cdot P(H_i) = \frac{2}{7}\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{5} = \frac{8+12+2}{35} = \frac{22}{35} = 0{,}628$

зад 3)  по 2 от страните на зар са в бяло, зелено, червено

$X = \#$ бели   хвърляне зара 2 пъти

$Y = \#$ червени

а) X и Y съвместното разпр $= ?$ в) $cov(X,Y) = ?$

б) $(X \perp\!\!\!\perp Y)$?   г) $P(X=1 \mid Y=1) = ?$

д) $P(X>Y) = ?$

Решение

а) $X \sim Bi(2, \frac{1}{3})$ $P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$Y \sim Bi(2, \frac{1}{3})$ $P(X=1) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$X \stackrel{d}{=} Y$ $P(X=2) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

X	0	1	2
$P(x)$	4/9	4/9	1/9

$Y \backslash X$	0	1	2	
0	1/9	2/9	1/9	4/9
1	2/9	2/9	0	4/9
2	1/9	0	0	1/9
	4/9	4/9	1/9	→ маргиналите

$X + Y \leq 2$

$P(X=1, Y=0) = P(бз \cup зб) = 2 \cdot \frac{1}{9}$

$P(X=1, Y=1) = P(бч \cup чб) = \frac{2}{9}$

б) $X \not\perp\!\!\!\perp Y$, тъй като $P(X=2, Y=2) \neq P(X=2) \cdot P(Y=2)$

$0 \neq \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$

(Не са независими)

в) $E[X] = 0 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = E[Y] = \frac{2}{3}$

XY	0	1	2	4
	7/9	2/9	0	0

$\Rightarrow E[XY] = \frac{2}{9}$

$\Rightarrow cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{2}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{2}{9}$

г) $P(X=1 \mid Y=1) = \frac{2/9}{4/9} = \frac{1}{2}$

д) $P(X>Y) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + 0 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

зад. 4) X е сл. вел. със стойности в $\mathbb{N}_0$

$$g_X(s) := Es^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X=k) \text{ е пораждащата ф-я}$$

I) а) $g_Y = ?$, ако $Y = 3X$

б) $g_Z = ?$, ако $Z = X_1 + X_2$ $\quad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ и $X_1 \sim X$, $X_2 \sim X$

Решение

а) $g_Y(s) = E(s^Y) = E(s^{3X}) = E(s^X)^3 = g_X(s^3)$

Алтернативно: $g_Y(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n)s^n = \sum_{n=0}^{\infty} P(3X=n)s^n =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(X=\frac{n}{3}\right)s^n \overset{m=\frac{n}{3}}{=\!=\!=} \sum_{m=0}^{\infty} P(X=m)s^{3m} =$$

$$= g_X(s^3)$$

Обобщени формули:

$\to Y = kX \Rightarrow g_Y(s) = g_X(s^k)$

$\to Y = k+X \Rightarrow g_Y(s) = s^k \cdot g_X(s)$

$\left(g_Y(s) = E(s^{k+X}) = s^k \cdot E(s^X) = s^k \cdot g_X(s) \right)$

б) $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \Rightarrow$ от свойството на пораждащите ф-ции

$$\Rightarrow g_{X_1+X_2}(s) = g_{X_1}(s) \cdot g_{X_2}(s)$$

$$\Rightarrow g_Z = g_{X_1}(s) \cdot g_{X_2}(s) = g_X^2(s)$$

Доказателство на свойството: при $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

$$g_{X_1+X_2}(s) = Es^{X_1+X_2} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} s^{i+j} P(X_1=j \cap X_2=i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} s^i \cdot P(X_2=i) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} s^j \cdot P(X_1=j) =$$

$$= Es^{X_2} \cdot Es^{X_1} = g_{X_1}(s) \cdot g_{X_2}(s)$$

II) Нека $X \sim Ge(p)$ $\quad P(X=k) = p\cdot(1-p)^k$ за $k \in \mathbb{N}_0$

а) $g_X = ?$ $\quad$ в) $DX = ?$

б) $EX = ? \Rightarrow$ чрез g_X

Решение

а) $g_X(s) = Es^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p\cdot(1-p)^k =$

$= p\cdot\sum_{k=0}^{\infty} s^k q^k = p\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(sq)^k = p\cdot\frac{1}{1-sq}$, тъй като $|sq|<1$

$\Rightarrow g_X(s) = \frac{p}{1-sq}$ $\qquad q = 1-p$

б) $EX = g_X'(1) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{p}{1-sq} = \frac{\partial}{\partial s} p\cdot(1-sq)^{-1} = -p\cdot(-q)\cdot(1-sq)^{-2} =$

$= \frac{pq}{(1-sq)^2} \overset{s=1}{=\!=} \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p}$

в) $DX = g_X''(1) + g_X'(1) - g_X'^2(1)$

$g_X''(1) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{pq}{(1-sq)^2} = -2(-q)\cdot pq\cdot\frac{1}{(1-sq)^3} = \frac{2pq^2}{(1-sq)^3} =$

$\overset{s=1}{=\!=} \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{2pq^2}{p^3} = \frac{2q^2}{p^2}$

$\Rightarrow DX = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q^2+pq}{p^2} = \frac{q\cdot(q+p)}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

$g_X'(s) = (Es^X)' = EX\cdot s^{X-1}|_{s=1} = EX$

$g_X''(s) = EX(X-1)s^{X-2}|_{s=1} = E(X^2-X) = EX^2 - EX \Rightarrow EX^2 = g_X''(s) + g_X'(s)|_{s=1}$

$\Rightarrow DX = EX^2 - (EX)^2 = g_X''(1) + g_X'(1) - g_X'^2(1)$

зад. 5)

$X \perp\!\!\!\perp Y \quad P(X=-1)=P(X=1)=P(Y=1)=2P(Y=3)=2P(Y=5)=\frac{1}{2}$

а) $Z_1 = 2X+Y+1 \quad EZ_1 = ? \quad DZ_1 = ?$

б) $Z_2 = XY \quad EZ_2 = ? \quad DZ_2 = ?$

в) $Z_3 = X^Y \quad EZ_3 = ? \quad DZ_3 = ?$

Решение

а)

X	-1	$+1$
$P(X)$	$1/2$	$1/2$

Y	1	3	5
$P(Y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y^2	1	9	25
$P(Y^2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$EX = 0$

$EX^2 = 1$

$DX = E[X^2] - (E[X])^2 = 1 - 0 = 1$

$EY = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5$

$EY^2 = \frac{35+1}{4} = 9$

$DY = \frac{36}{4} - \left(\frac{10}{4}\right)^2 = \frac{11}{4} = 2{,}75$

$Z_1 = 2X+Y+1$

$EZ_1 = 2E(X) + E(Y) + E(1) = 2\cdot 0 + 2{,}5 + 1 = 3{,}5$

$DZ_1 = D[2X+Y+1] = 4D(X) + D(Y) + D1 + 2\operatorname{cov}(2X,Y) + $
$+ 2\cancel{\operatorname{cov}(2X,1)}^{0} + 2\cancel{\operatorname{cov}(2Y,1)}^{0}$

$2\operatorname{cov}(2X,Y) = 4\operatorname{cov}(X,Y) = 0, \quad X \perp\!\!\!\perp Y$

$DZ_1 = 4D(X) + D(Y) + \cancel{D1}^{0} = 4\cdot 1 + 2{,}75 = 6{,}75$

Алтернативно

Z_1	0	2	4	6	8
$P(Z_1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$Y \backslash X$	-1	1	
1	$1/4$	$1/4$	$1/2$
3	$1/8$	$1/8$	$1/4$
5	$1/8$	$1/8$	$1/4$
	$1/2$	$1/2$	

$EZ_1 = 2\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{3}{8} + 6\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{8} = \frac{2+12+6+8}{8} = \frac{28}{8} = 3\frac{4}{8} = 3{,}5$

...

$DZ_1 = E[Z_1^2] - (EZ_1)^2 = \frac{4+16\cdot 3+36+64}{8} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{152-98}{8} = \frac{27}{4} = 6{,}75$

б) $Z_2 = xy$

$y \backslash x$	-1	$+1$
1	-1	1
3	-3	3
5	-5	5

Z_2	-1	1	-3	3	-5	5
$P(Z_2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$EZ_2 = 0$ (симетрично)

$EZ_2 = Exy \overset{x \perp y}{=} Ex \cdot Ey = 0 \cdot Ey = 0$

$EZ_2^2 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2+34}{4} = 9$

$DZ_2 = 9 - 0^2 = 9$

$DZ_2 = D[xy] = E[(xy)^2] - (Exy)^2 =$

$= E(x^2) E(y^2) - (Ex)^2 (Ey)^2 =$

$= 1 \cdot 9 - 0^2 \cdot 2{,}5^2 = 9 - 0 = 9$

в) $Z_3 = xy$

Z_3	-1	1
$P(Z_3)$	$1/2$	$1/2$

$EZ_3 = 0$ (симетрично)

$E(Z_3^2) = 1$

$\Rightarrow DZ_3 = 1^2 - 0^2 = 1$

Извод: $EZ_1 = 3{,}5$ $\quad EZ_2 = 0$ $\quad EZ_3 = 0$

$DZ_1 = 6{,}75$ $\quad DZ_2 = 9$ $\quad DZ_3 = 1$

зад 6) $n \geq 3$, p ест. числа | Игра с участници $A_1, \dots, A_n$

- $(2p+1)$ хвърляния на станд. монета
- $\forall$ играч предвижда резултата (ЕТЕ...)
- след $(2p+1)$ хвърляния играчите с най-много познати печелят $n!$ лв. общо.

Нека: X_i = броя познати изходи от A_i

- G_i = печалбата на играч A_i
- $q_k = P(X_i = k)$
- $r_k = P(X_i \leq k)$

$E(G_1) = ?$ при

Пример $n = 4$, $p = 1$

$2p+1 = 3$ хвърляния

пада се ЕТЕ

$A_1 \to$ ЕТЕ	$X_1 = 2$	$G_1 = \frac{4!}{2}$
$A_2 \to$ ЕЕЕ	$X_2 = 1$	
$A_3 \to$ ТТТ	$X_3 = 2$	$G_3 = \frac{4!}{2}$
$A_4 \to$ ЕЕТ	$X_4 = 0$	$G_4 = G_2 = 0$

Част I)

а) $\Omega = ?$ за вер. пр-во (Ω, F, P)

$$\Omega = \{0, 1\}^{2p+1} = \{E, T\}^{2p+1}$$

б) разпр. на $X_i = ?$ $\quad X_i \sim Bin(2p+1, \frac{1}{2})$

в) $r_p = ?$

$$r_p = P(X_i \leq p) = \sum_{k=0}^{p} P(X_i = k) = \sum_{k=0}^{p} q_k$$

$$q_k = P(X_i = k) = \binom{2p+1}{k} \frac{1}{2^{2p+1}}$$

?

Част I

г) $X_1(\Omega) = \{0, 1, \dots, 2p+1\}$

за $P(A) > 0$ $E(X|A) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\, P(X=k|A)$

Док, че $EX = \sum_{k=1}^{s} E(X|B_k)\, P(B_k)$, ако $B_1, \dots, B_s$ са пълна система от събития с ненулева вер.

Доказателство

$$EX = \sum_{k \in X(\Omega)} k.\, P(X=k) \overset{\text{пълна вер.}}{=} \sum_{k \in X(\Omega)} k.\, \sum_{i=1}^{s} P(B_i)\, P(X=k|B_i) =$$

$$= \sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{i=1}^{s} k.\, P(B_i)\, P(X=k|B_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} P(B_i) \sum_{k \in X(\Omega)} k.\, P(X=k|B_i) \overset{\text{по условие}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} P(B_i).\, E(X|B_i) = \sum_{k=1}^{s} P(B_k).\, E(X|B_k)$$

Част II) $\forall$ избират Ези/Тура с вероятност $1/2$ независимо 1 от друг

а) $G_1(\Omega) = ?$

↳ печалбите на A_1 играча

$$G_1(\Omega) = \left\{0, \frac{n!}{n}, \frac{n!}{n-1}, \dots, \frac{n!}{2}, \frac{n!}{1}\right\}$$

$\frac{n!}{n}$ → печалбата, когато $\forall$ делят (n играча)

$n!$ → печалбата, когато само той е познал най-много хвърляния

0 → познал по-малко от някой друг

б) за $\forall k \in X_1(\Omega)$, $j \in [n]$, докажете че:

$$P\left(G_1 = \frac{n!}{j} \mid X_1 = k\right) = \binom{n-1}{j-1} (r_k - r_{k-1})^{j-1} \, r_{k-1}^{n-j}$$

Доказателство

$$r_k - r_{k-1} = P(X_i \le k) - P(X_i \le k-1) = P(X_i = k) = q_k$$

Щом I играч дели на j общата печалба
=> трябва $j-1$ други играча да имат същия резултат $X_j = X_1$

$$P\left(G_1 = \frac{n!}{j} \mid X_1 = k\right) = \binom{n-1}{j-1} \cdot q_k^{j-1} \cdot r_{k-1}^{n-j}$$

$\binom{n-1}{j-1}$ → Избираме от останалите $(n-1)$ играча без първия, кои $j-1$ да спечелят

q_k^{j-1} → вероятността $(j-1)$ избрани играча да спечелят

r_{k-1}^{n-j} → вероятността останалите да имат $X_i < X_1 = k$

След заместване получаваме:

$$P\left(G_1 = \frac{n!}{j} \mid X_1 = k\right) = \binom{n-1}{j-1} \cancel{q_k^{j-1}} (r_k - r_{k-1})^{j-1} \, r_{k-1}^{n-j}$$

в) за $k > 0$ Док, че $E(G_1 \mid X_1 = k) = \dfrac{(n-1)!\,(r_k^n - r_{k-1}^n)}{q_k}$

Доказателство

$$E(G_1 \mid X_1 = k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{j} P\left(G_1 = \frac{n!}{j} \mid X_1 = k\right) \overset{\text{от б)}}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{j} \binom{n-1}{j-1} (r_k - r_{k-1})^{j-1} r_{k-1}^{n-j} =$$

$$= (n-1)! \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{(r_k - r_{k-1})^j \, r_{k-1}^{n-j}}{\underbrace{r_k - r_{k-1}}_{q_k}} = \frac{(n-1)!}{q_k} \left(\sum_{j=0}^{n} (r_k - r_{k-1})^j r_{k-1}^{n-j} - r_{k-1}^n \right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{q_k} \cdot \left[(r_k \cancel{- r_{k-1}} \cancel{+ r_{k-1}})^n - r_{k-1}^n \right] = \frac{(n-1)!\,(r_k^n - r_{k-1}^n)}{q_k}$$

$\boxed{a^n - b^n = ((a-b)+b)^n - b^n}$

Z

Част II

г) Заключете, че $E(G_1) = (n-1)!$

Доказателство

$$E(G_1) = \sum_{k=0}^{2p+1} E(G_1 | X_1 = k) . P(X_1 = k) =$$

$$\overset{6)}{=} \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{(n-1)!\,(r_k^n - r_{k-1}^n)}{\cancel{q_k}} . \cancel{q_k} = (n-1)! \sum_{k=0}^{2p+1} (r_k^n - r_{k-1}^n) =$$

Telescoping Sum

$$= (n-1).\,(r_{2p+1}^n - r_{-1}^n) = (n-1)\,(1^n - 0^n) = n-1$$

$r_{2p+1} = P(X_1 \leq 2p+1) = 1$

$r_{-1}^n = 0$ от 6)

$$\sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n-1}) = a_N - a_0$$

д) Можем ли да достигнем до $E(G_1) = (n-1)!$ по друг начин

Нека $G_1 + G_2 + \dots + G_n = S_n = n!$

$$E S_n = n!$$

$$E \sum_{i=1}^{n} G_i = n!$$

от линейност $\sum_{i=1}^{n} E G_i = n!$

от симетричност $\sum n\, E G_1 = n!$

$$\Rightarrow E G_1 = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

II част) А) $A_3, \dots, A_n$ играят случайно

A_2 залага обратното на A_1

Ако някой от тях спечели си делят печалбата

- G' - общата печалба
- G'_1, G'_2 - печалбата поотделно, на A_1 и A_2
- Y = "по-големият брой познати изходи от A_1 и A_2"
- $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $q_k = P(X_i = k)$, $r_k = P(X_i \le k)$

а) Докажете че $Y(\Omega) = \{p+1, \dots 2p+1\}$

$X_1 + X_2 = 2p+1$ тъй като непознатите от A_1 са познати от A_2

X_1	X_2	Y
0	$2p+1$	$2p+1$
1	$2p$	$2p$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	$p+1$	$p+1$
$p+1$	p	$p+1$
$p+2$	$p-1$	$p+2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2p$	1	$2p$
$2p+1$	0	$2p+1$

$\left.\begin{matrix} p+1 \\ p+1 \end{matrix}\right\}$ симетрично

$\Rightarrow Y(\Omega) = \{p+1, \dots, 2p+1\}$

б) Док, че за $k \in \{p+1, \dots, 2p+1\}$, $P(Y=k) = 2q_k$

$\{Y=k\} = \{X_1 = k\} \cup \{X_2 = k\}$, но $\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\} = \emptyset$,

понеже $\{X_2 = k\} = \{X_1 = 2p+1-k\}$

и $\{X_1 = k\} \cap \{X_1 = 2p+1-k\} = \emptyset$

$\Rightarrow P(Y=k) = P(X_1 = k) + P(X_2 = k) = q_k + q_k = 2q_k$

б) за $k \in \{p+1, \dots, 2p+1\}$ и $j \in \{0, \dots, n-2\}$

Док, че $P\left(G' = \frac{n!}{j+1} \middle| y = k\right) = \binom{n-2}{j} (r_k - r_{k-1})^j \, r_{k-1}^{\,n-2-j}$

Доказателство

От играчите без A_1 и $A_2 \to (n-2)$ избираме кои j да спечелят заедно с A_1 и A_2. Винаги печели само един от A_1 и A_2 $(p, p+1)$. Печалбата я взима един и я делят след това.

$r_k - r_{k-1} = P(X_i \le k) - P(X_i \le k-1) = P(X_i = k) = q_k$

$q_k^{\,j} \to$ подсигуряваме, че j играча, ще имат познати каквото A_1 и $A_2 \to y = k$

Останалите $n-2-j$ губещи трябва да имат брой познати хвърляния $X_i \le k-1$

$$\Rightarrow P\left(G' = \frac{n!}{j+1} \middle| y = k\right) = \binom{n-2}{j} (r_k - r_{k-1})^j \, r_{k-1}^{\,n-2-j}$$

Док, че $E(G' | y = k) = (n) \cdot (n-2)! \, \frac{r_k^{\,n-1} - r_{k-1}^{\,n-1}}{q_k}$

Доказателство:

$$E(G' | y = k) = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j+1} \underbrace{\binom{n-2}{j} (r_k - r_{k-1})^j \, r_{k-1}^{\,n-2-j}}_{= P\left(G' = \frac{n!}{j+1} \middle| y = k\right)} =$$

$$= (n-2)! \, n \cdot \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-1)!}{(j+1)! \, (n-2-j)!} \, \frac{(r_k - r_{k-1})^{j+1} \, r_{k-1}^{\,n-1-(j+1)}}{\underbrace{r_k - r_{k-1}}_{= q_k}} =$$

$$= \frac{n (n-2)!}{q_k} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j+1} (r_k - r_{k-1})^{j+1} \, r_{k-1}^{\,n-1-(j+1)} \quad \frac{m = n-1}{j+1 = i}$$

$$= \underbrace{\frac{n(n-2)!}{q^k}}_{\text{оставаме полагането}} \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (r_k - r_{k-1})^i \, r_{k-1}^{m-i} =$$

$$= \frac{n(n-2)!}{q^k} \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (r_k - r_{k-1})^i \, r_{k-1}^{m-i} - r_{k-1}^{m} \right) =$$

$$= \frac{n(n-2)!}{q^k} \left[(r_k - r_{k-1} + r_{k-1})^m - r_{k-1}^m \right] =$$

$$= \frac{n(n-2)!}{q^k} \left(r_k^m - r_{k-1}^m \right) = \frac{n(n-2)!}{q^k} \left(r_k^{n-1} - r_{k-1}^{n-1} \right)$$

$\cancel{Z}$

---

2) Докаже $E(G') = 2n(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$

Доказателство

$$E(G') = \sum_{k=p+1}^{2p+1} E(G \mid y=k) \cdot P(y=k) =$$

$$\overset{\delta) u \, \text{в})}{=} \sum_{k=p+1}^{2p+1} \frac{n(n-2)!}{\cancel{q^k}} \left(r_k^{n-1} - r_{k-1}^{n-1} \right) \cdot 2\cancel{q^k} =$$

$$= 2n(n-2)! \sum_{k=p+1}^{2p+1} \left(r_k^{n-1} - r_{k-1}^{n-1} \right) \overset{a_N - a_0}{=} 2n(n-2)! \left(r_{2p+1}^{n-1} - r_p^{n-1} \right) =$$

$$= 2n(n-2)! \left(1^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) = 2n(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right),$$

защото $r_{2p+1} = P(x_i \le 2p+1) = 1$ ($\forall$ стойности)

и $r_p = P(x_i \le p) = P(x_i \ge p+1)$ (симетрично от x_i в т.п. в част I δ)

$P(x_i \le p) + P(x_i \ge p+1) = 1$

$\Rightarrow P(x_i \le p) = \frac{1}{2}$

Проверяваме че Стратегия II е по-добра за A_1 и A_2 от стратегия I (18)

$E(G_1) = (n-1)!$

$E(G') = 2n(n-2)!\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, което е $G_1' + G_2'$, такст ✓ взама половината от G'

$\frac{E(G')}{2} \overset{?}{\geq} E(G_1)$ за $n \geq 2$

$\frac{\cancel{2}n\cancel{(n-2)!}}{\cancel{2}}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \overset{?}{\geq} \cancel{(n-1)}!$ $n-1$

$1 - \frac{1}{2^{n-1}} \overset{?}{\geq} \frac{n-1}{n}$

$1 - \frac{1}{2^{n-1}} \overset{?}{\geq} 1 - \frac{1}{n}$

$\frac{1}{2^{n-1}} \overset{?}{\leq} \frac{1}{n}$

$2^{n-1} \overset{?}{\geq} n$

1) $n = 2$ $\quad 2^1 \geq 2$ ✓

2) $n = 3$ $\quad 2^2 \geq 3$ ✓

3) Приемаме за $\underset{\geq 2}{k} \Rightarrow 2^{k-1} > k$

4) Ще докажем за $k+1$

от $2^{k-1} > k \;/.2$

$2.2^{k-1} > 2k$

$2^k > 2k$

$\Rightarrow 2^{k+1-1} > k + k$, понеже $k \geq 2$

$\Rightarrow 2^{k+1-1} > k+1$ ✓

$\Rightarrow$ Наистина е по-изгодно и за двамата

$\frac{E(G')}{2} \geq E(G_1)$ (даже строго $>$ за $n > 2$)

д) $E(G_i) = ?$ $\quad i = \{3, \dots n\}$

$S_n = G' + G_3 + \dots + G_n = n!$

$ES_n = n!$

$\Rightarrow E[G' + \sum_{i=3}^{n} G_i] = n!$

от линейност $E[G'] + \sum_{i=3}^{n} EG_i = n!$

от симетричност $E[G'] + (n-2)E(G_3) = n!$

$EG_i = E(G_3) = \frac{n! - E[G']}{n-2}$

$EG_3 = \frac{n! - 2n(n-2)!\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{n-2}$

$EG_3 = n(n-3)!\left(n-1-2+\frac{2}{2^{n-2}}\right)$

$EG_3 = n(n-3)!\left(n-3+\frac{1}{2^{n-2}}\right)$

...

зад. 8 Нека X е положителна случайна величина с крайно очакване и $a > 0$

а) Докажете неравенството на Марков $P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$ и неравенството на Чебишёв $P(|X - EX| \geq a) \leq \frac{DX}{a^2}$

Доказателство

- $EX = P(X \geq a)\, E(X \mid X \geq a) + P(X < a)\, E(X \mid X < a)$

$EX = P(X \geq a)\, E(X \mid X \geq a) + Q$, $Q \geq 0$ тъй като $X > 0$

$\Rightarrow EX \geq P(X \geq a)\, E(X \mid X \geq a)$, но

X е поне a $\Rightarrow E(X \mid X \geq a) \geq a$

$\Rightarrow EX \geq P(X \geq a) . a$ $\qquad P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$

- Чебишев чрез Марков:

$P(|X| \geq a) = P(X^2 \geq a^2)$ и тъй като $X > 0 \Rightarrow$

$P(X \geq a) = P(X^2 \geq a^2)$, защото X^2 е монотонно растяща в $(0; +\infty)$

Нека $X = X - E[X]$, от Марков: $P(X^2 \geq a^2) \leq \frac{E[X^2]}{a^2} \Rightarrow P(|X| \geq a^2) \leq \frac{E[X^2]}{a^2}$

$\Rightarrow P(|X - EX| \geq a^2) \leq \frac{E[(X - EX)^2]}{a^2} = \frac{E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2]}{a^2} = \frac{E[X^2] - 2E[X].E[X] + (E[X])^2}{a^2}$

$P(|X - EX| \geq a^2) \leq \frac{DX}{a^2}$ $\qquad \left(DX = E[X^2] - (E[X])^2\right)$

- Алтернативно без Марков

$DX = E[(X - EX)^2] = E[(X - EX)^2 \mid |X - EX| \geq a]\, P(|X - EX| \geq a) +$

$+ \underbrace{E[(X - EX)^2 \mid |X - EX| < a]}_{\geq 0} . P(|X - EX| < a)$

$\Rightarrow DX \geq \underbrace{E[(X - EX)^2 \mid |X - EX| \geq a]}_{\geq a^2 \text{ от } (|X - EX| \geq a \Rightarrow (X - EX)^2 \geq a^2)} . P(|X - EX| \geq a) \Rightarrow P(|X - EX| \geq a) \leq \frac{DX}{a^2}$

2) Докажете неравенството на Чернов за $\forall t > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

$$X \geq a \overset{t>0}{\iff} tX \geq ta \overset{e \text{ мон. раст.}}{\iff} e^{tX} \geq e^{ta}$$

$$\Rightarrow P(X \geq a) = P(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}} \text{ (по Марков)}$$

$$\Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

---

3) $X_1, \dots, X_n \sim Ber(1/2)$ са независими

$X = X_1 + \dots + X_n$

$EX = ?$

$DX = ?$

$X \sim ?$

$Ee^{tX} = ?$

Решение

X_1	1	0
$P(X_1)$	1/2	1/2

$$EX_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$DX_1 = E[X_1^2] - (E[X_1])^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$DX_1 = p \cdot (1-p) = \frac{1}{4}$$

$$EX_1 = p = \frac{1}{2}$$

$X \in [0; n]$

$$E[X] = E[X_1 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots E[X_n] = n \cdot E[X_1] = np = \frac{n}{2}$$

$$D[X] = D[X_1 + \dots + X_n] = D[\sum_{i=1}^{n} X_i] \overset{\text{нез.}}{=} \sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \sum_{i=1}^{n} D[X_1] =$$

$$= n \cdot D[X_1] = n \cdot p(1-p) = \frac{n}{4}$$

$\Rightarrow X \sim Bin(n, p)$.

$X \sim Bin(n, \frac{1}{2})$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}$$

$$Ee^{tX} = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} (P(X=k)) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= (1 - p + pe^t)^n$$

4) $\delta \in (0,1)$

$$P\left(|X-EX| \geq \frac{\delta n}{2}\right) \leq e^{-\frac{n\delta^2}{6}}$$

а) $\delta = ? : P\left(X \notin \left(EX - \delta n/2 \,,\, EX + \delta n/2\right)\right) \leq \frac{4}{n}$

$|X-EX| \geq \frac{\delta n}{2} \Rightarrow X-EX \geq \frac{\delta n}{2} \cup X-EX \leq -\frac{\delta n}{2}$

еквивалентна на $X-EX \notin \left(-\frac{\delta n}{2} ; \frac{\delta n}{2}\right)$

$X \notin \left(EX - \frac{\delta n}{2} ; EX + \frac{\delta n}{2}\right)$

от сл.

$$\Rightarrow P\left(X \notin \left(EX - \frac{\delta n}{2} ; EX + \frac{\delta n}{2}\right)\right) \leq e^{-\frac{n\delta^2}{6}}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{n\delta^2}{6}} = \frac{4}{n} \;/\ln \qquad -\frac{n\delta^2}{6} = \ln\frac{4}{n}$$

$$\delta^2 = -\frac{6}{n}\ln\frac{4}{n} \qquad \delta = \sqrt{-\frac{6}{n}\ln\frac{4}{n}} \;, n > 0$$

Дефинирано за $\sqrt{-\ln\frac{4}{n}} \geq 0 \quad -(\ln 4 - \ln n) \geq 0$

$\ln n \geq \ln 4$

$n \geq 4$

Тогава и самата вероятност

$P(Q.) \leq \frac{4}{n}$ ще има смисъл

б) $a = ? : P(X \notin (EX-a; EX+a)) \leq \frac{4}{n}$

$|X-EX| \geq a \Rightarrow X-EX \geq a \cup X-EX \leq -a \Rightarrow X-EX \notin (-a;a)$

$X \notin (EX-a; EX+a)$

от Чебишев $\Rightarrow P(|X-EX| \geq a) \leq \frac{DX}{a^2} = \frac{4}{n}$

$DX = \frac{n}{4}$ от 3)

$$\frac{n}{4}\cdot\frac{1}{a^2} = \frac{4}{n} \qquad a^2 = \frac{n^2}{4^2} \qquad a > 0 \text{ и } n > 0$$

$$a = \frac{n}{4}$$

в) за $n = 10\,000$ $\qquad a = \frac{n}{4} = 2500$

$Ex = \frac{n}{2} = 5\,000$

$Dx = \frac{n}{4} = 2500$

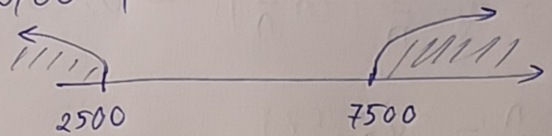
$\delta = \sqrt{-\frac{6}{n} \ln\left(\frac{4}{n}\right)} \approx 0{,}0685$

$\frac{\delta n}{2} \approx 342{,}579$

за Чебишев:

$P(X \notin (Ex - a; Ex + a)) \leq \frac{4}{n}$

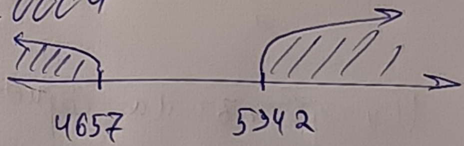
$P(x \notin (2500, 7500)) \leq 4 \cdot 10^{-4} = 0{,}0004$

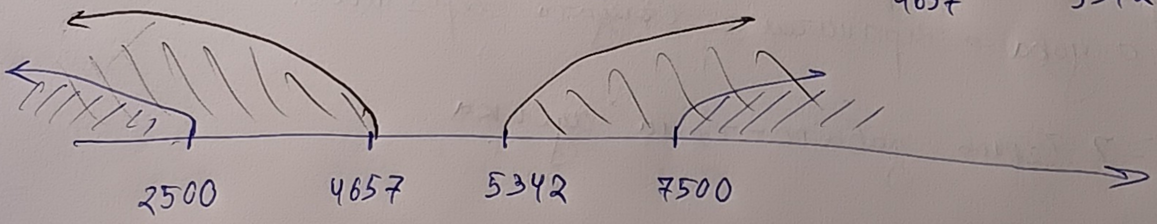


за Чернов

$P\left(x \notin \left(Ex - \frac{\delta n}{2}; Ex + \frac{\delta n}{2}\right)\right) \leq \frac{4}{n}$

$P(x \notin (4657 \; ; 5342)) \leq 4 \cdot 10^{-4} = 0{,}0004$





Интервалът от неравенството на Чернов (за $x \in$) е по-малък от този, получен от неравенството на Чебишев.

т.е. Неравенството на Чернов дава по-точна оценка.