Деф.) (Вероятност)

Нека Ω е мн-вото от елементарни събития и $\mathcal{A}$ е σ-алгебрата над Ω.

Тогава изображението $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$ се нарича вероятност, ако е изпълнено:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Ако $A \in \mathcal{A}$ и $A^c = \Omega \setminus A$, то $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. Ако $\forall i \geq 1$, $A_i \in \mathcal{A}$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$, то $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

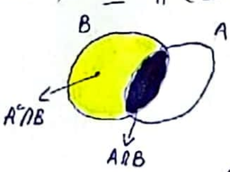
В този смисъл вероятността е мярка, тъй като това е най-класическото свойство на мярката.

Твърдение) Нека $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$ е вероятност. Тогава за $A, B \in \mathcal{A}$ е изпълнено:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. ~~Ако $A \subseteq B$, то~~ $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$
3. (монотонност) ако $A \subseteq B$ и $A, B \in \mathcal{A}$, то $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$
5. Ако $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots A_n \supseteq \dots$ то
   $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$
6. Ако $A_i \in \mathcal{A}$, $\forall i \geq 1$ $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

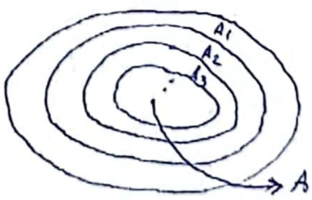
Доказателство)

1. Тъй като $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ и $\emptyset = \Omega^c \overset{2.}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\Omega^c) = 1 - \mathbb{P}(\Omega)$
2. $B = \underbrace{(A \cap B) \cup (A^c \cap B)}_{\text{непресичащи}} \overset{3.}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$



3. $A \subseteq B \Rightarrow B = \underbrace{A \cup (A^c \cap B)}_{\text{непресичащи}} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B) \geq \mathbb{P}(A)$

4. $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$, $A^c \cap B = B \setminus (A \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
5. Нека $A_i \in \mathcal{A}$ и $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$



$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$, т.е. A принадлежи на всяко от събитията A_j

Целта ни е да докажем, че $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$

Конструираме множествата: $B_1 = A_1 \setminus A_2$; $B_2 = A_2 \setminus A_3$; $B_3 = A_3 \setminus A_4$ .... $B_j = A_j \setminus A_{j+1}$.

Тъй като $A_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus A_{j+1} \cup A$, то $1 \geq \mathbb{P}(A_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j) + \mathbb{P}(A)$, което води до заключението, че $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j) < \infty$ е сходящ ред. В частност, $\lim_{n \to \infty} \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{P}(B_j) = 0$

От друга страна, $A_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} B_n \cup A \Rightarrow \mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{P}(B_j) + \mathbb{P}(A)$, което след граничен преход дава:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A) + \lim_{n \to \infty} \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{P}(B_j) = \mathbb{P}(A)$$

6. Целта ни е да док., че $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty}{}' \mathbb{P}(A_j)$

От 4. имаме, че $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$

Следователно по индукция, $\forall n\in\mathbb{N}$: $\sum_{j=1}^{n}{}' \mathbb{P}(A_j) \ge \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{n} A_j)$

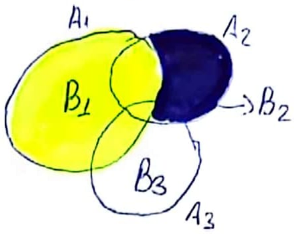
Нека дефинираме $B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1^c$

$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$

- - - - - - - -

$B_n = A_n \setminus (\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j)$



Трябва да отбележим, че $\forall n\in\mathbb{N}, B_n \subseteq A_n$, което води до $\mathbb{P}(B_n) \le \mathbb{P}(A_n)$ и $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i=j$

Следователно: $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \overset{!!}{=} \sum_{j=1}^{\infty}{}' \mathbb{P}(B_j) \le \sum_{j=1}^{\infty}{}' \mathbb{P}(A_j)$

Целим да докажем, че $B := \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A$

Тъй като $B_n \subset A_n$, то $B \subset A$. Да проверим, че и $A \subset B$. Нека $w \in A$. Тогава w принадлежи най-малко на едно A_i, тъй като е в тяхното обединение. Нека вземем най-малкия индекс k, за който $w \in A_k$. Ако $k=1$, то $w \in A_1 = B_1$ и значи $w \in B$. Ако $k \ge 1$, то, от минималността на k, $w \in A_k$, но $w \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$. В такъв случай $w \in A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i = B_k$ и следователно във всички случаи $w \in A$, води до $w \in B$, което искахме да докажем

Деф.) (Дискретна вероятност)

Ако имаме краен брой елементарни изходи $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \simeq \{1, 2, \dots, N\}$

Стандартният избор в дискретна ситуация е $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ и избираме числата $p_1, p_2, \dots$, т.ч. $\sum_{i=1}^{N}{}' p_i = 1$. В такъв случай, можем да дефинираме $\forall A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A) := \sum_{i\in A}{}' p_i$

Проверка за коректност: По дефиниция $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ и ако $A_1, \dots, A_k$ са непресичащи се събития, то $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) = \sum_{i \in \bigcup_{j=1}^{k} A_j}{}' p_i = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i\in A_j}{}' p_i = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_j)$ $\quad \left(\sum_{i\in A_j} p_i = \mathbb{P}(A_j) \right)$

Деф.) (Равномерна вероятност)

Ако $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$, вероятността $\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in A} \frac{1}{N} = \frac{|A|}{N}$ наричаме равномерна. $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{N}$, $i = \overline{1, N}$

* $\Omega = \{1, 2, \dots\}$, тъй като $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, то можем да дефинираме вероятност чрез $\mathbb{P}(\{n\}) = p_n = \frac{6}{(\pi n)^2}$