Математическо очакване

Деф. (Математическо очакване)

Нека X е дискр. сл. вел. Ако $\sum_j' x_j p_j$ е добре деф. (крайна), то

$$\mathbb{E}[X] := \sum_j' x_j \cdot p_j = \sum_j' \underbrace{x_j}_{\substack{\text{възм. ст-ти} \\ \text{на } X}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X=x_j)}_{\substack{\text{вер. за тази} \\ \text{ст-ст } X=x_j}}$$ е очакването на X.

Лема Нека X и Y са дискр. сл. вел. в едно вер. пр-во V. Нека $\mathbb{E}[X]$ и $\mathbb{E}[Y]$ съществуват:

а) $X = c$, то $\mathbb{E}[X] = c \to \mathbb{E}[X] = c \cdot 1$

б) $Y = 1_A$, то $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{P}(A) \to \mathbb{E}[Y] = 0 \cdot \mathbb{P}(Y=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(A)$

в) $Y = c \cdot X$, то $\mathbb{E}[Y] = c \cdot \mathbb{E}[X] \to g(x) = c \cdot X = \mathbb{E}[Y] = \sum_j' c \cdot x_j \cdot p_j = c \cdot \sum_j' x_j \cdot p_j = c \cdot \mathbb{E}[X]$

г) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

д) $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

е) $X \geq 0$, то $\mathbb{E}[X] \geq 0 \to \mathbb{E}[X] = \sum_j' \underbrace{x_j}_{\geq 0} \cdot \underbrace{p_j}_{\geq 0} \geq 0$

Доказателство г) $\mathbb{E}[X+Y] = \sum_i' \sum_j' (x_j + y_i)\mathbb{P}(X=x_j \cap Y=y_i) = \sum_i' \sum_j' x_j \cdot \mathbb{P}(X=x_j \cap Y=y_i) + \sum_i' \sum_j' y_i \cdot \mathbb{P}(X=x_j \cap Y=y_i)$

$$= \sum_j' x_j \underbrace{\sum_i' \mathbb{P}(X=x_j \cap Y=y_i)}_{\substack{\mathbb{P}(X=x_j) \\ \text{изчерпваме всички} \\ \text{възм. ст-ти на } Y \\ \text{сечени с } x_j \text{ (ФПВ)}}} + \sum_i' y_i \underbrace{\sum_j' \mathbb{P}(X=x_j \cap Y=y_i)}_{\mathbb{P}(Y=y_i)}$$

$$= \sum_j' x_j \mathbb{P}(X=x_j) + \sum_i' y_i \mathbb{P}(Y=y_i) = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \quad \square$$

д) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

въвеждаме $g(x,y) = xy$

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_j' \sum_i' x_j y_i \mathbb{P}(X=x_j \cap Y=y_i) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=\!=} \sum_j' \sum_i' x_j y_i \mathbb{P}(X=x_j)\mathbb{P}(Y=y_i)$$

$$= \sum_j' x_j \cdot \mathbb{P}(X=x_j) \sum_i' y_i \cdot \mathbb{P}(Y=y_i) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Дисперсия

Деф.) (Дисперсия) Нека X е дискр. сл. вел.

Ако сума $\sum_j{}' (x_j - \mathbb{E}[X])^2 \cdot p_j$ е добре дефинирана, то

$\mathbb{D}[X] = \sum_j{}' (x_j - \mathbb{E}[X])^2 \cdot p_j$ е дисперсията на X.

Деф.) (Стандартно отклонение)

Ако X е сл. вел. и $\mathbb{D}[X] < \infty$, то $\sqrt{\mathbb{D}[X]}$ се нарича стандартно отклонение на X.

Твърдение) $\mathbb{D}[X] \overset{(1)}{=} \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \overset{(2)}{=} \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

Доказателство)

Нека $g(x) = (x - \mathbb{E}[X])^2$, то

$$\mathbb{E}[g(x)] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \overset{def.}{=} \sum_j{}' (x_j - \mathbb{E}[X]) p_j \overset{def.}{=} \mathbb{D}[X] \Rightarrow (1) \text{ е доказано}$$

$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2] =$ (линейност на мат. очакване)

$$= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[\underbrace{2}_{\text{число}} \cdot \underbrace{X}_{\text{сл. вел.}} \cdot \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\text{число}}] + \mathbb{E}[\underbrace{(\mathbb{E}[X])^2}_{\text{число}}] =$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2 \cdot \mathbb{E}[1] = \mathbb{E}[X^2] - 2(\mathbb{E}[X])^2 + (\mathbb{E}[X])^2 =$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \Rightarrow (2) \text{ е доказано}$$

Твърдение) Нека X и Y са дискр. сл. вел., т.ч. $\mathbb{D}[X] < \infty$ и $\mathbb{D}[Y] < \infty$. Тогава:

а) $\mathbb{D}[X] \geq 0$

б) $\mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}[X])^2$

в) Ако $X = c$, $c = const$, то $\mathbb{D}[X] = 0$

г) $\mathbb{D}[cX] = c^2 \mathbb{D}[X]$, $c = const$

д) Ако X и Y са независими дискр. сл. вел., то $\mathbb{D}[X+Y] = \mathbb{D}[X] + \mathbb{D}[Y]$

Доказателство)

а) $\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \geq 0$, понеже $(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq 0$

б) $\mathbb{D}[X] \overset{(2)}{\geq} 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}[X])^2$

в) $\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[(c-c)^2] = 0$

г) $\mathbb{D}[c.X] = \mathbb{E}[(cX)^2] - (\mathbb{E}[c.X])^2 = c^2 \mathbb{E}[X^2] - c^2 (\mathbb{E}[X])^2 = c^2 (\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2) = c^2 . \mathbb{D}[X]$

д) $\mathbb{D}[X+Y] = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - (\mathbb{E}[X+Y])^2 = \mathbb{E}[X^2+2XY+Y^2] - (\mathbb{E}[X])^2 - (\mathbb{E}[Y])^2 - \cancel{2\mathbb{E}[XY]} =$ $-2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$$= \mathbb{E}[X^2] + 2\underbrace{\cancel{\mathbb{E}[XY]}}_{\substack{\parallel X \perp\!\!\!\perp Y \\ \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}} + \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[X])^2 - (\mathbb{E}[Y])^2 - 2\cancel{\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2}_{\mathbb{D}[X]} + \underbrace{\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2}_{\mathbb{D}[Y]} = \mathbb{D}[X] + \mathbb{D}[Y]$$

Пораждащи функции

Деф. (Пораждаща функция)

Нека $X \in \mathbb{N}_0$ е дискр. сл. вел. Тогава ф-ята $g_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k.\mathbb{P}(X=k)$, за $|s|<1$ се нарича пораждаща функция на X.

Свойства на пораждаща функция

1. $\mathbb{E}[X] = g_X'(1)$

$$\frac{d}{ds} g_X(s) = \frac{d}{ds}\mathbb{E}[s^X] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{ds}.s^X\right] = \mathbb{E}[X.s^{X-1}]\Big|_{s=1} = \mathbb{E}[X]$$

2. $\mathbb{D}[X] = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2$

$$g_X'(1) = \mathbb{E}[X] = \sum_k k.\mathbb{P}(X=k) = \sum_k k.s^{k-1}.\mathbb{P}(X=k)$$

$$g_X''(1) = \frac{d}{ds}\sum_k k.s^{k-1}\mathbb{P}(X=k) = \sum_k k.(k-1).s^{k-2}.\mathbb{P}(X=k)\Big|_{s=1} = \sum_k k(k-1)\mathbb{P}(X=k) = \sum_k (k^2-k).\mathbb{P}(X=k)$$

$$g_X''(1) + g_X'(1) = \sum_k (k^2-k).\mathbb{P}(X=k) + \sum_k k.\mathbb{P}(X=k) = \sum_k k^2.\mathbb{P}(X=k)$$

$$(g_X'(1))^2 = (\mathbb{E}[X])^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{D}[X] = \underbrace{g_X''(1) + g_X'(1)}_{\mathbb{E}[X^2]} - \underbrace{(g_X'(1))^2}_{(\mathbb{E}[X])^2} = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

3. $g_X^{(n)}(0) = n!\,\mathbb{P}(X=n)$

$$g_X^{(n)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty}(s^k)^{(n)}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{\infty}(s^k)^{(n)}\mathbb{P}(X=k) \overset{s=0}{=} (s^n)^{(n)}\mathbb{P}(X=n) = n!\,\mathbb{P}(X=n)$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(X=n) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$$

4. Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$ и $X \in \mathbb{N}_0$ и $Y \in \mathbb{N}_0$. Тогава $g_{X+Y}(s) = g_X(s)g_Y(s)$

Доказателство:

$$g_{X+Y}(s) = \mathbb{E}[s^{X+Y}] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} s^{j+i}\mathbb{P}(X=j \cap Y=i) = \sum_{i=0}^{\infty} s^i\mathbb{P}(Y=i).\sum_{j=0}^{\infty} s^j\mathbb{P}(X=j) = \mathbb{E}[s^Y]\mathbb{E}[s^X] = g_X(s)g_Y(s)$$

$\square$

$X \overset{d}{=} Y$, ако $\mathbb{P}(X=x_j) = \mathbb{P}(Y=x_j)$ за всички възможни стойност x_j

Твърдение $X \overset{d}{=} Y \Leftrightarrow g_X = g_Y$

Казваме, че $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ са равни по разпределение, ако $X_1 \overset{d}{=} X_j$, $j=\overline{1,n}$ $\quad (g_{X_1} = g_{X_j}, j=\overline{1,n})$

Твърдение Нека $X_1, \dots, X_n$ са целочислени сл. вел., които са независими в съвкупност. Тогава, ако $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$, то $g_Y(s) = \prod_{j=1}^{n} g_{X_j}(s)$

В допълнение, ако те са равни по разпределение, то $g_Y(s) = (g_{X_1}(s))^n$

Доказателство Ако $X_1, \dots, X_n$ са независими в съвкупност и $h_1, \dots, h_n$ са ограничени функции, то $\mathbb{E}[h_1(X_1) \cdot h_2(X_2) \cdot \dots \cdot h_n(X_n)] = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}[h_j(X_j)]$

Нека за произв. фикс. $|s| \le 1$, $f(x) = h_j(x_j) = s^{x_j}$, $j=\overline{1,n}$

Тогава $g_Y(s) = \mathbb{E}[s^{X_1+X_2+\dots+X_n}] = \mathbb{E}[s^{X_1} s^{X_2} \dots s^{X_n}] =$

$$= \mathbb{E}[h(X_1) \cdot h(X_2) \cdot \dots \cdot h(X_n)] = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}[h(X_j)] = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}[s^{X_j}] = \prod_{j=1}^{n} g_{X_j}(s)$$

Ако $X_1 \overset{d}{=} X_j \overset{\text{Тв}}{\Rightarrow} g_{X_1}(s) = g_{X_j}(s) \Rightarrow g_Y(s) = (g_{X_1}(s))^n$

Тук използвахме факта, че

$$\mathbb{E}[h(X_1) h(X_2)] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i) h(x_j) \mathbb{P}(X_1 = x_i \cap X_2 = x_j) \overset{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i) h(x_j) \mathbb{P}(X_1 = x_i) \mathbb{P}(X_2 = x_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} h(x_j) \mathbb{P}(X_2 = x_j) \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i) \mathbb{P}(X_1 = x_i) = \mathbb{E}[h(X_1)] \mathbb{E}[h(X_2)]$$

CamScanner