Домашно II

Теодор Светославов Костадинов 3 група ІІІ курс 4MI0600097

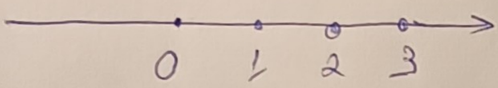
зад. 1 (~~Reversed~~ Gambler's ruin problem $p>\frac{1}{2}$)

Човек се намира в т. $n \in \mathbb{N}$ на числовата ос
прави движение към: $(n+1)$ с вероятност $p > \frac{1}{2}$
$(n-1)$ с вероятност $1-p$

Ако $p_n = P$(човекът достига 0-та от т. n)

$p_1 = ?$ $p_2 = ?$ $p_3 = ?$

Решение



Тривиално $p_0 = 1$, човекът вече е в т. 0

$$p_1 = \underbrace{(1-p)}_{\text{шансът да отиде наляво}} \cdot \underbrace{p_0}_{\text{шансът да е в 0-та от позиция 0}} + \overbrace{p}^{\text{шансът да отиде надясно}} \cdot \underbrace{p_2}_{\text{шансът да стигне т. 0 от т. 2}}$$

$\Rightarrow p_1 = 1-p + p \cdot p_2$, но

$p_2 = p_{2\to 1} \cdot p_1$ ← Шансът да стигне от 2 до 1 и после от 1 до 0

Но $p_{2\to 1} = p_1$

$\Rightarrow p_2 = (p_1)^2$

$$p_1 = (1-p) + p \cdot (p_1)^2$$

$$p \cdot p_1^2 - p_1 + 1 - p = 0$$

$$D = (2p-1)^2$$

$$p_1 = \frac{1+2p-1}{2p} \text{ и } p_1 = \frac{1-2p+1}{2p}$$

$$p_1 = 1 \qquad p_1 = \frac{1-p}{p}$$

$p_1 = 1$ е ✗ тъй като може да се движи само към $+\infty$ ($p > \frac{1}{2}$)

$$p_1 = \frac{1-p}{p}$$

$$\Rightarrow p_2 = p_1^2 = \frac{(1-p)^2}{p^2}$$

$$p_3 = p_{3\to 2} \cdot p_{2\to 1} \cdot p_{1\to 0} = (p_1)^3 = \left(\frac{1-p}{p}\right)^3$$

Зад. 2 (2)

Търси се мястото в редица от студенти, където $\forall$ студенти преди теб нямат съвпадащи рождени дни а ти си първият който има съвпадение с някой от предишните шансът да е максимален това да се случи

Решение

Нека $p_n = P$(Няма еднакви РД до n-тия в опашката включително)

$p_0 = 1$

$p_1 = \frac{365}{365} = 1$

$p_2 = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365}$

$p_3 = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$

$\Rightarrow p_n = \frac{365!}{365^n (365-n)!}$

$p_2 = \frac{365!}{365^2 \cdot 363!} = \frac{365 \cdot 364}{365^2}$

Нека $q_n = P$(n-тия в опашката има РД като някой преди него)

$q_0 = 0$

$q_1 = 0$

$q_2 = \frac{1}{365}$

$q_3 = \frac{2}{365}$

$\Rightarrow q_n = \frac{n-1}{365}$

~~$r_n = \frac{365! \cdot (n-1)}{}$~~

Нека $r_n = P$(печелившата човека на n-та позиция)

$r_n = p_{n-1} \cdot q_n$

$r_1 = p_0 \cdot q_1 = 0 \cdot 1 = 0$

$r_2 = p_1 \cdot q_2 = 1 \cdot \frac{1}{365}$

$r_3 = p_2 \cdot q_3 = \frac{364}{365} \cdot \frac{2}{365}$

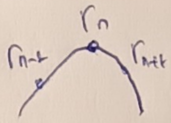
Ако $n > 365$

$r_{n>365} = 0$ (Дирихле)

Тоест трябва да намерим най-голямата стойност на r_n за $n \in [1; 365]$

Търсим $r_n \overset{?}{>} r_{n+1}$

$n = ?$



Тъй-като в началото нараства монотонно, търсим връх

$$p_{n-1}\cdot q_n > p_n\cdot q_{n+1}$$

$$\frac{p_{n-1}}{p_n} > \frac{q_{n+1}}{q_n}$$

$$\frac{p_{n-1}}{p_n} = \frac{\cancel{365!}}{\cancel{365}^{n-1}\cdot(365-(n-1))!}\cdot\frac{\overset{365}{\cancel{365^n}}\cdot(365-n)!}{\cancel{365!}} =$$

$$= \frac{365\cdot(365-n)!}{(366-n)!} = \frac{365}{366-n}$$

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{n+1-1}{\cancel{365}}\cdot\frac{\cancel{365}}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{365}{366-n} > \frac{n}{n-1}$$

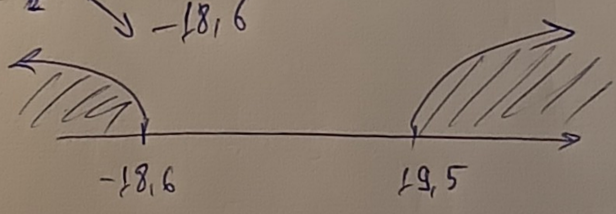
$$365(n-1) > n(366-n)$$

$$365n - 365 > 366n - n^2$$

$$n^2 - n - 365 > 0$$

$$D = 1+4\cdot 365 = 1461$$

$$n_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1461}}{2} \approx \begin{matrix}\nearrow 19{,}5\\ \searrow -18{,}6\end{matrix}$$



Тъй като $n \in N$

$\Rightarrow$ Най-малкото $n \in N$: $r_n > r_{n+1}$ е $n = 20$

$\Rightarrow$ Оптималната позиция е 20-тата

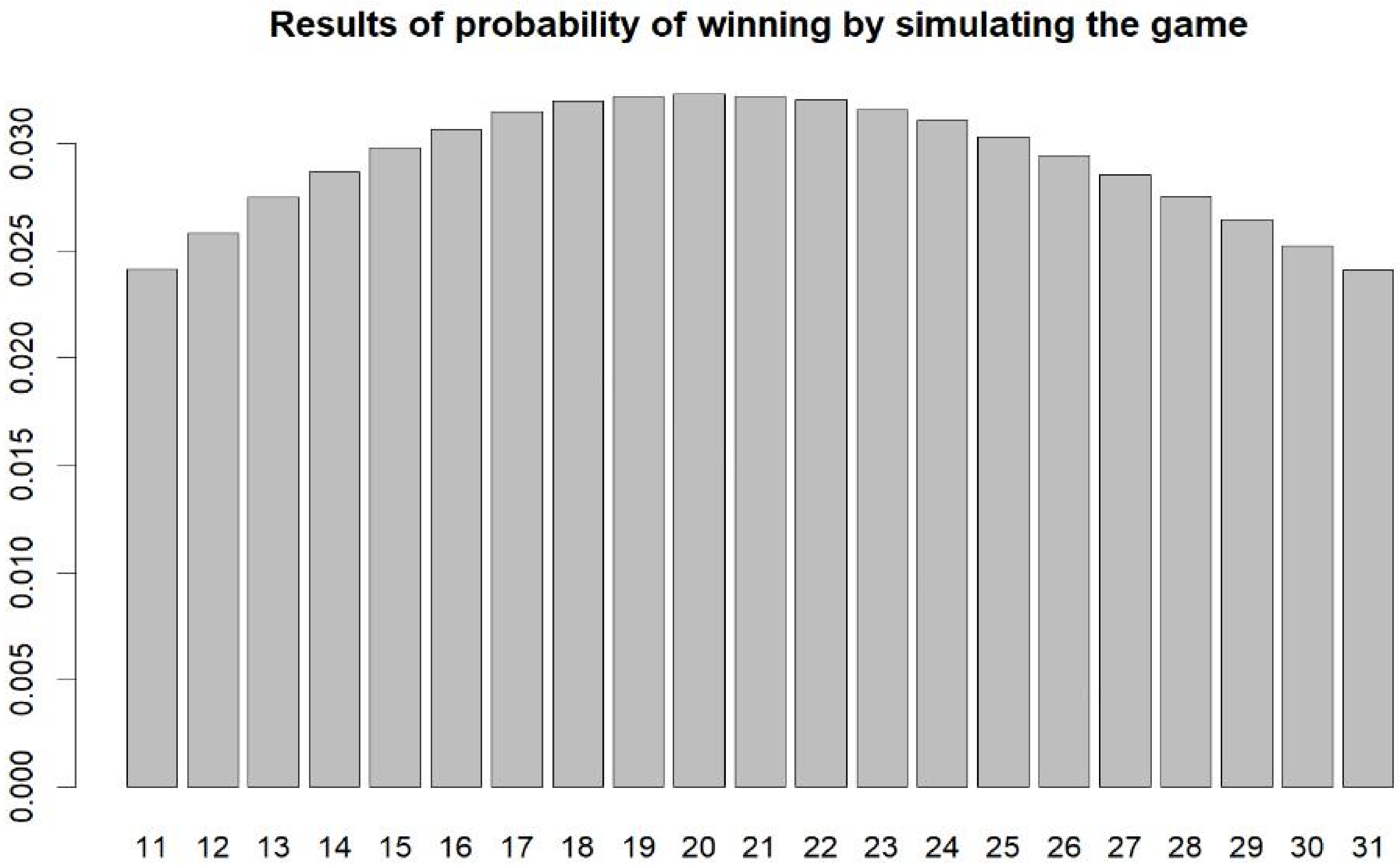
Максималната стойност може да се изчисли чрез намиране на $\max(\Gamma_n)$ $n \in [1; 366]$

$$\Gamma_n = \frac{365!\,(n-1)}{365^n \cdot (366-n)!}$$

Освен това емпирично чрез симулиране на експеримента.
Проблемът тогава обаче е много-близките стойности между оптималната стойност (20) е тези около нея, което води до отклонение с (пълната) истината.

```r
# Code for simulating the Birthday line problem
days = 365
max_people = 366

task2.experiment = function(){
  people = sample(days, max_people, replace = T)
  anyDuplicated(people)
}

task2.prob = function(Nrep){
  result = replicate(Nrep, task2.experiment())
  prop.table(table(result))
}

set.seed(666)

table = task2.prob(10^7)
table[which.max(table)]
table[10:30]
barplot(table[10:30], main="Results of probability of wi


```

```
>
>
>
>
>
> table[which.max(table)]
       20
0.0323182
> table[10:30]
result
       11        12        13        14        15
0.0241683 0.0258494 0.0275198 0.0287020 0.0298394
       16        17        18        19        20
0.0307045 0.0314958 0.0319884 0.0322230 0.0323182
       21        22        23        24        25
0.0322485 0.0320647 0.0316176 0.0310800 0.0303214
       26        27        28        29        30
0.0294785 0.0285730 0.0275350 0.0264511 0.0252585
       31
0.0241141
> 
```


Results of probability of winning by simulating the game
0.000
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31