Непрекъснати сл. вел.

Деф. Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вер. пр-во. Тогава $X: \Omega \to \mathbb{R}$ е непр. сл. вел., ако тя може да приема неизброимо много ст-ти.

Деф. (абсолютно непр. сл. вел.)

X е абс. непр. сл. вел., ако $\exists f_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, т.ч.:

а) $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

б) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

в) $\mathbb{P}(X \in (a,b)) = \int_a^b f_X(x)dx, \forall a,b \in (-\infty, \infty), a<b$

f_X наричаме плътност

Твърдение Нека X е непр. сл. вел. Тогава, ако $c \in \mathbb{R}$, то $\mathbb{P}(X=c)=0$. Следователно $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \mathbb{P}(X \in [a,b)) = \mathbb{P}(X \in (a,b]) = \mathbb{P}(X \in (a,b)), \forall a,b \in (-\infty,\infty), a<b$

Доказателство $\{X=c\} = \bigcap_{n \geq 1} \{X \in [c-\frac{1}{n}, c+\frac{1}{n}]\}, \forall n \geq 1$

$\mathbb{P}(X=c) \leq \lim_{n\to\infty} \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x)dx = \int_c^c f_X(x)dx = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X=c) \leq 0$, но $\mathbb{P}(X=c) \geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X=c)=0$

и използваме факта, че $[a,b] = \{a\} \cup (a,b) \cup \{b\}$

Деф. (Функция на разпределение на НСВ)

Нека X е НСВ с плътност $f_X(x)$. Тогава ф-ята $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ се нарича функция на разпределение на X.

Свойства

1. Ако f_X е непр. в x_0, то $\frac{d}{dx} F_X \Big|_{x=x_0} = f_X(x_0)$

2. $F_X(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X<x) = \lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 0$

3. $F_X(+\infty) = 1$

4. $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X<x) + \underbrace{\mathbb{P}(X=x)}_{=0} = \mathbb{P}(X<x)$

Смяна на променливите на НСВ

Теорема (Смяна на променливи на НСВ)

Нека X е НСВ и g е строго монотонна и диференцируема ф-я. Тогава $Y = g(X)$ е НСВ с плътност $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\,|g^{-1}(y)'|$

Доказателство Нека g е строго растяща

$$P(Y \in (a,b)) = \int_a^b f_Y(y)\,dy$$

$$P(Y\in(a,b)) = P(g(X) \in (a,b)) = P(X \in (g^{-1}(a), g^{-1}(b))) \overset{\cancel{x=g(y)}}{=} \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f_X(x)\,dX =$$

$$\overset{x=g^{-1}(y)}{=} \int_a^b f_X(g^{-1}(y))\,d\,g^{-1}(y) = \int_a^b \underbrace{f_X(g^{-1}(y)) \cdot g^{-1}{}'(y)}_{f_Y(y)}\,dy$$

Нека g е строго намаляваща

$$P(Y\in(a,b)) = P(g(X) \in (a,b)) = P(X \in (g^{-1}(b), g^{-1}(a))) = \int_{g^{-1}(b)}^{g^{-1}(a)} f_X(x)\,dx =$$

$$\overset{x=g^{-1}(y)}{=} \int_b^a f_X(g^{-1}(y))\,g^{-1}{}'(y)\,dy =$$

$$= \int_a^b \underbrace{f_X(g^{-1}(y)) - g^{-1}{}'(y)}_{f_Y(y)}\,dy$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\,|g^{-1}{}'(y)|$$

Математическо очакване на НСВ

Нека X е НСВ. $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$, ако $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) < \infty$

Свойства

1. $\mathbb{E}[c.X] = c\mathbb{E}[X]$
2. $\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y . f_Y(y) dy$
3. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
4. $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$, ако $X \perp\!\!\!\perp Y$
5. $Y = g(X)$, то $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$, където $g\uparrow$ или $g\downarrow$

Доказателство 5. $\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y . f_Y(y) dy \overset{y=g(x)}{\underset{x=g^{-1}(y)}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(g^{-1}(y)) . |g^{-1\prime}(y)| dy \frac{x=g^{-1}(y)\ y=g(x)}{\frac{dy}{dx}=g'(x)}$

Нека $g\uparrow$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \underbrace{g^{-1\prime}(g(x)) . g'(x)}_{1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Деф (Дисперсия)

Нека X е НСВ с плътност f_X. Тогава, ако $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx < \infty$, то под дисперсия на X разбираме $\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[\underbrace{(X - \mathbb{E}[X])^2}_{g(x)}] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x) dx$

Свойства

1. $\mathbb{D}[cX] = c^2 \mathbb{D}[X]$
2. $\mathbb{D}[X+c] = \mathbb{D}[X]$
3. $\mathbb{D}[X+Y] = \mathbb{D}[X] + \mathbb{D}[Y]$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

Равномерно разпределена НСВ

Деф | За $-\infty < a < b < \infty$, казваме, че $X \sim Unif(a,b)$, ако $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-3a^2-6ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F_X(x) = P(X<x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a,b] \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$Y \sim Unif(0,1)$

$Y = \frac{X-a}{b-a} = g(X)$ $\qquad g^{-1}(y) = y(b-a)+a = X$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\,|g^{-1\prime}(y)| = \frac{1}{b-a}\cdot(b-a) = 1 \cdot 1_{\{y \in (0,1)\}}$$

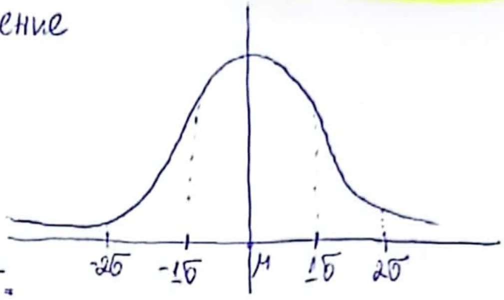
$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y(b-a)+a] = (b-a)\mathbb{E}[Y] + a$$

$$\mathbb{D}[X] = \mathbb{D}[Y(b-a)+a] = (b-a)^2\,\mathbb{D}[Y]$$

Нормално разпределена НСВ

Казваме, че $X \in N(\mu, \sigma^2)$, където $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, ако $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

$Z \sim N(0,1)$ - Стандартно нормално разпределение



$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} =: g(x) \Rightarrow g^{-1}(z) = \sigma z + \mu = X$

$f_Z(z) = f_X(\sigma z + \mu) |g^{-1\prime}(z)| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma z + \mu - \mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \sigma =$

$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}$

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sigma Z + \mu] = \sigma \mathbb{E}[Z] + \mu = \mu \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mu$

$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} d\cancel{\frac{z^2}{2}} \overset{u = \frac{z^2}{2}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} u \cdot e^{-u} du = 0$

$\mathbb{D}[X] = \mathbb{D}[\sigma Z + \mu] = \sigma^2 \mathbb{D}[Z] = \sigma^2$

$\mathbb{E}[Z^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -z^2 \frac{1}{z} d e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\underset{0}{\underset{\parallel}{\left[z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{\text{Гаусов инт.} = \sqrt{2\pi}} \right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1$

$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\sigma Z + \mu \leq x) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$