Дефиниции

Случаен експеримент | Експеримент, при който не можем предварително да определим кой от възможните изходи ще се сбъдне.
Всеки възможен елементарен изход ще означаваме с ω и ще наричаме елементарно събитие.

Деф. | С Ω ще означаваме множеството от всички елементарни събития на даден експеримент.

Деф. | Всяко подмножество $A \subseteq \Omega$ наричаме събитие.
С $|A|$ означаваме неговата кардиналност.
(Най-често A е мн-во от елементарни събития, групирани по някакъв признак.)

Операции със събития.

A, B са подмножества на Ω:

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

Деф. | ('или' / обединение)
Нека $A, B \subseteq \Omega$. Тогава $A \cup B$ са всички $\omega \in \Omega$ такива, че $\omega \in A$ или $\omega \in B$.

Деф. | ('и' / сечение)
Нека $A, B \subseteq \Omega$. Тогава под $A \cap B$ разбираме всички $\omega \in \Omega$ такива, че $\omega \in A$ и $\omega \in B$.

Деф. | Отрицание / допълнение
Нека $A \subseteq \Omega$. Тогава A^c е допълнението на A и то обхваща всички $\omega \in \Omega$, т.ч. $\omega \in A$.

Свойства:
1. Комутативност: $A \cap B = B \cap A$ и $A \cup B = B \cup A$
2. Асоциативност: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Дистрибутивност: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ и $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. Закони на де Морган: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ и $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \quad \text{и} \quad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

CamScanner

Деф) (σ-алгебра)
Нека Ω е съвкупност от елементарни събития и $\mathcal{A}$ е колекция от подмножества на Ω.
Наричаме $\mathcal{A}$ σ-алгебра, ако:
1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
3. $\forall i \ge 1: A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A$

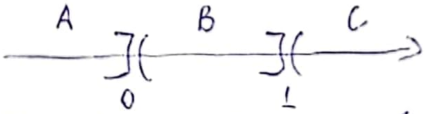
Следствие) Ако $\mathcal{A}$ е σ-алгебра, то:
1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. $\forall i \ge 1 : A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Доказателство)
1. Тъй като $\emptyset \in \mathcal{A}$ и $\emptyset^c = \Omega \overset{2.}{\Longrightarrow} \Omega \in \mathcal{A}$
2. $\forall i \ge 1, A_i \in \mathcal{A} \overset{2.}{\Rightarrow} \forall i \ge 1, A_i^c \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathcal{A} \xRightarrow{\text{де Морган}} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Деф.) Ако $\mathcal{B}$ е произволна колекция от Ω, то $\sigma(\mathcal{B})$ е най-малката σ-алгебра, такава, че $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{B})$, т.е. $\forall B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \sigma(\mathcal{B})$
$\sigma(\mathcal{A}) := \mathcal{B}(\mathbb{R})$ се нарича борелова σ-алгебра, където $\mathcal{A}$ са всички отворени интервали

Пример) Разглеждаме случая $\Omega = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ и $\mathcal{B} = \{$всички отворени интервали, т.е. от типа $(a,b), (a,\infty), (-\infty, b)\}$.
Да вземем $x \in \mathbb{R}$. Изпълнено ли е, че $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$?
Отговорът е „ДА", тъй като можем да представим точката $\{x\}$ по следния начин
$$\{x\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Също така $[a,b) = \{a\} \cup (a,b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $[a,b] = \{a\} \cup (a,b) \cup \{b\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$



Ако ни интересува само трихотомията, т.е. единствено в кой/кои от горните интервали попадаме, можем да се ограничим само до σ-алгебрата $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}, A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C\}$, която има кардиналност $|\mathcal{A}| = 8$, а не като бореловата - безкрайност.

Дефиниция) (Атом)
Ако $\mathcal{A}$ е σ-алгебра, то $A \in \mathcal{A}$ се нарича атом, ако от $B \subseteq A$ и $B \in \mathcal{A} \Rightarrow B = \emptyset$, т.е. не съществува нетривиално подсъбитие на A, което е част от σ-алгебрата.