Текущият анализ е по-подробно обяснение на сложността на авторските решения, предложени за задача sequences на контролното за C група през 2022 година.

Част 1

Трябва да покажем, че сред числата $[\frac{n}{1}], [\frac{n}{2}], ..., [\frac{n}{n}]$ са не повече от $2\sqrt{n}$. Ще покажем това като покажем, че всяко число от вида $[\frac{n}{x}]$ се съдържа в множеството $N_1 = \{1, 2, ..., [\sqrt{n}]\}$ или $N_2 = \{[\frac{n}{1}], [\frac{n}{2}], ..., [\frac{n}{\sqrt{n}}]\}$.

Случай 1: $x \geq \sqrt{n}$

Това е лесно. Ясно е, че $\frac{n}{x} \leq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Тоест е ясно, че $[\frac{n}{x}] \in N_1$

Случай 2: $x < \sqrt{n}$

В този случай $\frac{n}{x} > \sqrt{n}$. В този случай $[\frac{n}{x}] \in N_2$ буквално по дефиниция.

Като интуиция за това доказателство можем да ползваме, че всъщност делението реално е нещо като симетрия спрямо корен квадратен от числителя. И всички начини да разменим n на по-малко положително цяло число могат да се разделят на два случая - когато числителят е малък(малко на брой случаи) или когато числителят е голям(много случаи, но резултатът от делението е малко число).

Част 2

Трябва да покажем, че числата от вида $[\frac{x}{i}]$, където $x \in N_1 \cup N_2$ и $1 \leq i \leq x$, са около $n^{\frac{3}{4}}$. Отново ще цепим на два случая.

Случай 1: $x \in N_1$

Тук директно можем да ползваме Част 1. Знаем, че $x \leq \sqrt{n}$. Знаем, че има най много $2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{\sqrt{n}}$ числа от вида $[\frac{x}{i}]$, тоест по най-грубата сметка излиза, че от този случай имаме най-много $|N_1| \cdot 2\sqrt{\sqrt{n}} = 2n^{\frac{3}{4}}$ числа.

Случай 2: $x \in N_2$

Тук работата е малко по пипкава. Пак ще преизползваме старата задача, но ще трябва малко по-внимателно да си направим анализа на сложността. От старото решение можем да заключим, че имаме от този случай най-много $\sum\limits_{x \in N_2} 2\sqrt{x}$. Това обаче не ни казва много за жалост. Нека го разпишем малко по-подробно.

$$\sum_{x \in N_2} 2\sqrt{x} = 2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \sqrt{\frac{n}{j}} = 2\sqrt{n}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{\sqrt{j}} < 2\sqrt{n} \cdot (2\sqrt{\sqrt{n}+1} - 1) \approx 4n^{\frac{3}{4}}$$

Тук използвахме наготово, че $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{m}} \approx 2\sqrt{m+1} - 1$.

Довършване

Окончателно от двата случая имаме, че има горе-долу не повече от $2n^{\frac{3}{4}} + 4n^{\frac{3}{4}}$, което е $O(n^{\frac{3}{4}})$. Това трябваше и да се покаже.