

Текущият анализ е по-подробно обяснение на сложността на авторските решения, предложени за задача sequences на контролното за С група през 2022 година.

Част 1

Трябва да покажем, че сред числата $\lfloor \frac{n}{1} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n}{n} \rfloor$ са не повече от $2\sqrt{n}$. Ще покажем това като покажем, че всяко число от вида $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ се съдържа в множеството $N_1 = \{1, 2, \dots, \lfloor \sqrt{n} \rfloor\}$ или $N_2 = \{\lfloor \frac{n}{1} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n}{\sqrt{n}} \rfloor\}$.

Случай 1: $x \geq \sqrt{n}$

Това е лесно. Ясно е, че $\frac{n}{x} \leq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Тоест е ясно, че $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor \in N_1$

Случай 2: $x < \sqrt{n}$

В този случай $\frac{n}{x} > \sqrt{n}$. В този случай $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor \in N_2$ буквално по дефиниция.

Като интуиция за това доказателство можем да ползваме, че всъщност деленето реално е нещо като симетрия спрямо корен квадратен от числителя. И всички начини да разменим n на по-малко положително цяло число могат да се разделят на два случая - когато числителят е малък (малко на брой случаи) или когато числителят е голям (много случаи, но резултатът от деленето е малко число).

Част 2

Трябва да покажем, че числата от вида $\lfloor \frac{x}{i} \rfloor$, където $x \in N_1 \cup N_2$ и $1 \leq i \leq x$, са около $n^{\frac{3}{4}}$. Отново ще ценим на два случая.

Случай 1: $x \in N_1$

Тук директно можем да ползваме Част 1. Знаем, че $x \leq \sqrt{n}$. Знаем, че има най-много $2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{\sqrt{n}}$ числа от вида $\lfloor \frac{x}{i} \rfloor$, тоест по най-грубата сметка излиза, че от този случай имаме най-много $|N_1| \cdot 2\sqrt{\sqrt{n}} = 2n^{\frac{3}{4}}$ числа.

Случай 2: $x \in N_2$

Тук работата е малко по пипкава. Пак ще преизползваме старата задача, но ще трябва малко по-внимателно да си направим анализа на сложността. От старото решение можем да заключим, че имаме от този случай най-много $\sum_{x \in N_2} 2\sqrt{x}$. Това обаче не ни казва много за жалост. Нека го разпишем малко по-подробно.

$$\sum_{x \in N_2} 2\sqrt{x} = 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \sqrt{\frac{n}{j}} \leq 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\sqrt{n}}{j} = 2\sqrt{n} \sum_{j=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{j} \approx 2\sqrt{n} \cdot \ln(\sqrt{n}).$$

Тук използвахме наготово, че $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \approx \ln(m)$.

Довършване

Окончателно от двата случая имаме, че има горе-долу не повече от $2n^{\frac{3}{4}} + 2\sqrt{n} \cdot \ln(\sqrt{n})$, което е $O(n^{\frac{3}{4}})$. Това трябваше и да се покаже.