

Целта е да докажем, че за всяко доказателство от $G1$ има доказателство за същото твърдение със същите допускания и в H . Тоест, ако $\Gamma \Rightarrow \Delta$ в $G1$ и $\Delta \neq \{\}$, то ще има поне едно доказателство в H , което извежда нещо от Δ .

Ще решим задачата като направим пълна индукция по дълбочината на дървото.

Случай Ax

1. A (As)

Случай $L\perp$

Случаят не се разглежда, понеже $\Delta = \{\}$

Случай LW

Използваме доказателството на $\Gamma \Rightarrow \Delta$ и "игнорираме" допускането A .

Случай RW

Използваме доказателството за $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Случай LC

Тъй като при Хилбертовите системи допусканията са множество, то няма разлика между A, A, Γ и A, Γ и по тази причина можем да използваме доказателството на $A, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Случай RC

Използваме доказателството за $A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A, A$.

Случай $L\wedge$

Генерираме следното доказателство при допускания $\Gamma A_0 \wedge A_1$

1. $A_0 \wedge A_1$ (As)
2. $(A_0 \wedge A_1) \rightarrow A_i$ (Ax)
3. A_i (MP 1, 2)

След това залепяме доказателството на Γ, A_i отзад като махаме всички случаи, в които A_i се използва като (As).

Случай $R\wedge$

Нека имаме X_1, X_2, \dots, X_n е доказателство на $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ и Y_1, Y_2, \dots, Y_m е доказателство на $\Gamma \Rightarrow \Delta, B$. Ако $X_n \in \Delta$ или $Y_m \in \Delta$, тогава използваме съответното доказателство. В противен случай, знаем, че $X_n = A$ и $Y_m = B$. Тогава, залепяме двете доказателства и добавяме следната последователност:

- n+m+1: $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$ (Ax)
- n+m+2: $B \rightarrow A \wedge B$ (MP n, n+m+1), тук на позиция n седи X_n
- n+m+3: $A \wedge B$ (MP n+m, n+m+2), тук на позиция $n + m$ седи Y_m .

Случай $L\vee$

Нека $O \in \Gamma$. По предположение знаем, че съществуват доказателства на $A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ и $B, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Нека те да бъдат съответно X_1, X_2, \dots, X_n и Y_1, Y_2, \dots, Y_m , където $X_n, Y_m \in \Delta$. От теорема за дедукцията знаем, че съществуват доказателства и на $\Gamma \Rightarrow A \rightarrow O$ и $\Gamma \Rightarrow B \rightarrow O$. Нека тези доказателства са $U_1, U_2, \dots, U_k = A \rightarrow X_n$ и $V_1, V_2, \dots, V_l = B \rightarrow Y_m$. Залепяме двете доказателства едно след друго и към тях слагаме следната последователност:

- k+1+1: $(A \rightarrow X_n) \rightarrow (B \rightarrow Y_m) \rightarrow A \vee B \rightarrow O$ (Ax)
- k+1+2: $(B \rightarrow Y_m) \rightarrow A \vee B \rightarrow O$ (MP k, k+1+1), тук на позиция n седи U_k

k+l+3: $A \vee B \rightarrow O$ (MP k+l, k+l+2), тук на позиция $k+l$ седи V_l

k+l+4: $A \vee B$ (As)

k+l+5: O (MP k+l+4, k+l+3)

Случай $R\vee$

Нека имаме доказателство X_1, X_2, \dots, X_n на $\Gamma \implies \Delta, A_i$. Ако $X_n \in \Delta$, то просто използваме това доказателство. В противен случай, знаем, че $X_n = A_i$. Тогава към това доказателство добавяме $X_{n+1} = A_i \rightarrow A_0 \vee A_1$ (Ax) и $X_{n+2} = A_0 \vee A_1$ MP(n, n+1).

Случай $L \rightarrow$

От ИП имаме доказателства X_1, X_2, \dots, X_n и Y_1, Y_2, \dots, Y_m за $\Gamma \implies \Delta, A$ и $B, \Gamma \implies \Delta$. От теорема на дедукцията знаем, че имаме доказателство Z_1, Z_2, \dots, Z_k на $\Gamma \implies B \rightarrow Y_m$. Ако $X_n \in \Delta$, тогава можем да използваме X_1, X_2, \dots, X_n като доказателство на $A \rightarrow B, \Gamma \implies \Delta$. В противен случай, знаем, че $X_n = A$ и правим следната конструкция.

Залепяме доказателствата X_1, X_2, \dots, X_n и Z_1, Z_2, \dots, Z_k едно след друго и добавяме следната последователност:

n+k+1: $A \rightarrow B$ (As)

n+k+2: B MP(n, n+k+1), тук на позиция n стои X_n

n+k+3: Y_m MP(n+k+2, n+k), тук на позиция $n+k$ стои $Z_k = B \rightarrow Y_m$

Случай $R \rightarrow$

Следва директно от теоремата за дедукцията.

Случай $L\forall$

Нека X_1, X_2, \dots, X_n е доказателство на $\Gamma, A[x \mapsto t] \implies \Gamma$. Слагаме $C_1 = \forall_x A \rightarrow A[x \mapsto t]$ (Ax), $C_2 = \forall_x A$ (As), $C_3 = A[x \mapsto t]$ MP(1, 2). Сега залепяме X_1, X_2, \dots, X_n като вече не използваме $A[x \mapsto t]$ като допускане, а като резултат.

Случай $R\forall$

Знаем, че имаме доказателство X_1, X_2, \dots, X_n на $\Gamma \implies \Delta, A$. Ако $X_n \in \Delta$ можем да използваме това доказателство и за $\Gamma \implies \Delta, \forall_x A$, в противен случай знаем, че $X_n = A$. Тогава можем да довършим като използваме теорема за генерализацията.

Случай $L\exists$

Знаем, че имаме доказателство $X_1, X_2, \dots, X_n \in \Delta$ на $A, \Gamma \implies \Delta$. От теоремата за дедукцията знаем, че съществува доказателство $Z_1, Z_2, \dots, Z_k = A \rightarrow X_n$ за $\Gamma \implies A \rightarrow X_n$. Тъй като $x \notin FV(\exists_x A, \Gamma)$, то от теоремата за генерализацията знаем, че съществува доказателство $Y_1, Y_2, \dots, Y_m = \forall_x (A \rightarrow X_n)$ за $\Gamma, \exists_x A \implies \forall_x (A \rightarrow \exists_x A)$. Правим доказателството $Z_1, \dots, Z_k, Y_1, \dots, Y_m$ и към него добавяме:

k+m+1: $\forall_x (A \rightarrow X_n) \rightarrow (\exists_x A \rightarrow X_n)$ (Ax).

k+m+2: $\exists_x A \rightarrow X_n$ MP(k, n+m+2), тук на позиция k седи $\forall_x (A \rightarrow X_n)$.

k+m+3: $\exists_x A$ (As)

k+m+4: X_n MP(k+m+3, k+m+2)

Тъй като $X_n \in \Delta$, то това доказателство върши работа.

Случай $R\exists$

Нека имаме доказателството X_1, X_2, \dots, X_n на $\Gamma \implies \Delta, A[x \mapsto t]$. Ако $X_n \in \Delta$, то можем да използваме това доказателство. В противен случай,

знаем, че $X_n = A[x \mapsto t]$. Тогава към това доказателство залепяме следната последователност:

$$n+1: A[x \mapsto t] \rightarrow \exists_x A (Ax)$$

$$n+2: \exists_x A \text{ MP}(n, n+1), \text{ тук на позиция } n \text{ седи } X_n = A[x \mapsto t].$$