# Задача 2.3

- $(A, A) \in \overset{\alpha}{=}$, $A \in \Lambda$
- ако $(A_1, A_2) \in \overset{\alpha}{=}$, то $(A_2, A_1) \in \overset{\alpha}{=}$, $A_1, A_2 \in \Lambda$
- ако $(A_1, A_2) \in \overset{\alpha}{=}$ и $(A_2, A_3) \in \overset{\alpha}{=}$, то $(A_1, A_3) \in \overset{\alpha}{=}$, $A_1, A_2, A_3 \in \Lambda$
- ако $(A_1, B_1) \in \overset{\alpha}{=}$ и $(A_2, B_2) \in \overset{\alpha}{=}$, то $(A_1 B_1, A_2 B_2) \in \overset{\alpha}{=}$, $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \Lambda$
- Нека имаме $M = \lambda_x A$, $N = \lambda_y B$, $A, B \in \Lambda$ и $x, y \in V$. Ако $(A, B[y \rightsquigarrow x]) \in \overset{\alpha}{=}$ и $y \notin FV(A) \cup BV(A)$, то $(M, N) \in \overset{\alpha}{=}$ (тук $\rightsquigarrow$ е наивна субституция).

# Задача 2.1

## (1)

Ще напрваим индукция по дефиницията на частичната субституция.

1. $M \equiv x$. В този случай $M[x \rightsquigarrow N] \equiv N$ и $M[x \hookrightarrow N] \equiv N$.
2. $M \equiv y$, $y \not\equiv x$. В този случай $M[x \rightsquigarrow N] \equiv y$ и $M[x \hookrightarrow N] \equiv y$.
3. $M \equiv M_1 M_2$. Тогава $M[x \rightsquigarrow N] = (M_1[x \rightsquigarrow N])(M_2[x \rightsquigarrow]N)$ и $M[x \hookrightarrow N] = (M_1[x \hookrightarrow N])(M_2[x \hookrightarrow N])$. От ИП $(M_1[x \rightsquigarrow N]) \equiv (M_1[x \hookrightarrow N])$ и $(M_2[x \rightsquigarrow N]) \equiv (M_2[x \hookrightarrow N])$. Също от ИП знаем, че двете частични субституции са дефинирани. Така получаваме, че $M[x \rightsquigarrow N] \equiv M[x \hookrightarrow N]$, а също сме и сигурни, че $M[x \hookrightarrow N]$ е дефинирано.
4. $M = \lambda_x P$. Тогава $M[x \rightsquigarrow N] \equiv \lambda_x P$ и $M[x \hookrightarrow N] \equiv \lambda_x P$, така получаваме, че $M[x \rightsquigarrow N] \equiv M[x \hookrightarrow N]$.
5. $M = \lambda_y P$ за $y \not\equiv x$. Ясно е, че ако частичната субституция е дефинирана в този случай, то резултатите от двете субституции ще съвпадат. Това, което трябва да се покаже е, че частичната субституция е дефинирана в този случай. По-конкретно трябва да покажем, че $x \notin FV(P)$ или $y \notin FV(N)$. Ще използваме допускането от задачата, че $FV(N) \cap BV(M) = \{\}$.

От дефиницията на $BV$ може да се види, че $y \in BV(M)$. Понеже $FV(N) \cap BV(M) = \{\}$, то излиза, че $y \notin FV(N)$. Това показва, че частичната субституция е дефинирана.

Също така от ИП имаме, че $P[x \hookrightarrow N] \equiv P[x \rightsquigarrow N]$, от което и получаваме, че $[x \hookrightarrow N] \equiv [x \rightsquigarrow N]$

### (2)

Да разгледаме терма $M = \lambda_y \lambda_x y$. Искаме да направим субституция като заместим $x$ с $y$. Забелязваме, че частичната субституция $M[x \hookrightarrow y]$ е дефинирана и дава $\lambda_y \lambda_x y$. Но наивната субституция не е коректна, понеже $BV(M) = \{x, y\}$, а $FV(N) = \{y\}$ (тук $N$ е $y$) и съответно нямат празно сечение.

## Задача 2.23

Нека дефинираме $c_i = \lambda_n n c_s c_0$

1. Да се докаже, че за произволно $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $c_i c_n \stackrel{\beta}{=} c_n$.
2. Вярно ли е, че $c_i \stackrel{\beta\eta}{=} I$?

### 1

Ще докажем твърдението с индукция $n \in \mathbb{N}$. Преди това ще забележим, че $c_i c_n \stackrel{\beta}{=} c_n c_s c_0 = (\lambda_f \lambda_x f^n x) c_s c_0 \stackrel{\beta}{=} c_s^n c_0$.

#### База

При $n = 0$ имаме, $c_i c_0 \stackrel{\beta}{=} c_0 c_s c_0 = (\lambda_f \lambda_x x) c_s c_0 \stackrel{\beta}{=} c_0$, с което базата е доказана.

**Индуктивна стъпка**

Нека се опитаме да докажем твърдението за $n+1$. $c_i c_{n+1} \stackrel{\beta}{=} c_{n+1} c_s c_0 = (\lambda_f \lambda_x f^{n+1} x) c_s c_0 \stackrel{\beta}{=} c_s^{n+1} c_0$. Използваме дефиницията за $n$-кратна композиция на функция и записваме, че $c_s^{n+1} c_0 = c_s(c_s^n c_0)$. От наблюдението горе се сещаме, че $c_s(c_s^n c_0) \stackrel{\beta}{=} c_s(c_i c_n)$. От ИП можем да запишем, че $c_s(c_i c_n) \stackrel{\beta}{=} c_s c_n$. Сега от свойствата на $c_s$ получаваме, че $c_s c_n \stackrel{\beta}{=} c_{n+1}$. По този начин индуктивната стъпка е завършена.

### 2

Нека разгледаме $K = \lambda_x \lambda_y x$. Нека приложим $K$ на $c_i$ и на $I$. $IK \stackrel{\beta}{=} K = A_1$. От друга страна $c_i K \stackrel{\beta}{=} K c_s c_0 \stackrel{\beta}{=} c_s = A_2$. Използваме дефиницията за $c_s$ от лекции $c_s = \lambda_n \lambda_f \lambda_x f(nfx)$. Вижда се, че $A_1$ и $A_2$ са няма как да са бета-еквивалентни, понеже и двете са в бета-нормална форма, но не са равни.

## Задача 2.29

- $[]$ - $\lambda_f \lambda_e e$.
- $[x_1]$ - $\lambda_f \lambda_e((fe)x_1)$
- $[x_1, x_2]$ - $\lambda_f \lambda_e(f((fe)x_1))x_2$
- $[x_1, x_2, ...., x_{n+1}]$ - $\lambda_f \lambda_e(f((l_{[x_1,x_2,....,x_n]} f)e))x_{n+1}$, където $l_{[x_1,x_2,....,x_n]}$ е списъка $[x_1, x_2, ...., x_n]$.

Желаните функции са реализирани във файла lists.scm. Append се казва pushBack. Функцията member е написана да сравнява само числа, за да се тества по лесно.

## Задача 2.38

Ще направим индукция по дефиницията на $M$.

## Случай 1 - $M \equiv y$, y е променлива

### Случай 1.1 - $y \equiv x$

Тогава $M[x \longmapsto N] \equiv N$ и $M[x \longmapsto N'] \equiv N'$. От условието е ясно, че $(M[x \longmapsto N], M[x \longmapsto N']) \in D^{\lambda,R,T}$ по условие.

### Случай 1.2 - $y \not\equiv x$

Тогава $M[x \longmapsto N] \equiv y$ и $M[x \longmapsto N'] \equiv y$. От условието е ясно, че $(M[x \longmapsto N], M[x \longmapsto N']) \in D^{\lambda,R,T}$ заради рефлексивността.

## Случай 2 - $M \equiv M_1 M_2$

От ИП имаме, че $(M_1[x \longmapsto N], M_1[x \longmapsto N']) \in D^{\lambda,R,T}$ и $(M_2[x \longmapsto N], M_2[x \longmapsto N']) \in D^{\lambda,R,T}$. Тъй като $M[x \longmapsto N] \equiv (M_1[x \longmapsto N])(M_2[x \longmapsto N])$ и $M[x \longmapsto N'] \equiv (M_1[x \longmapsto N'])(M_2[x \longmapsto N'])$, то от ламбда затварянето и транзитивността следва, че $(M[x \longmapsto N], M[x \longmapsto N']) \in D^{\lambda,R,T}$.

## Случай 3 - $M \equiv \lambda_y P$

### Случай 3.1 - $y \equiv x$

$(\lambda_x P)[x \longmapsto N] \equiv \lambda_x P$ и $(\lambda_x P)[x \longmapsto N'] \equiv \lambda_x P$. От рефликсвоност е вярно, че $(M[x \longmapsto N], M[x \longmapsto N']) \in D^{\lambda,R,T}$.

## Случай 3.2 - $y \not\equiv x$

$(\lambda_y P)[x \longmapsto N] \equiv \lambda_y(P[x \longmapsto N])$ и $(\lambda_y P)[x \longmapsto N'] \equiv \lambda_y(P[x \longmapsto N'])$. От ИП имаме, че $(P[x \longmapsto N], P[x \longmapsto N']) \in D^{\lambda,R,T}$. Так от ламбда затварянето имаме, че $(M[x \longmapsto N], M[x \longmapsto N']) \in D^{\lambda,R,T}$.