2.40

а) $M \xrightarrow{\beta} N \Rightarrow M \xrightarrow{1} N$

Ще направим структурна индукция по дефиницията на $\xrightarrow{\beta}$. Ще използваме, че $\xrightarrow{\beta} = \beta^2$

в) Нека:

$M = (\lambda x\, A)\, B$

$N = A[x \mapsto B]$

От (1) имаме, че $A \xrightarrow{1} A$ и $B \xrightarrow{1} B$

$\Rightarrow$ от (4) използвайки, че $M \equiv (\lambda x A) B \xrightarrow{1} A[x \mapsto B] \equiv N$

л.1) Нека $M \equiv AP$, $N \equiv BP$ и $A \xrightarrow{\beta} B$.

От ИП: $A \xrightarrow{1} B$.

От (1): $P \xrightarrow{1} P$ $\Rightarrow M \equiv AP \xrightarrow{1} BP \equiv N$ от (3)

л.2) Нека $M = PA$, $N = PB$ и $A \xrightarrow{\beta} B$.

От ИП: $A \xrightarrow{1} B$

От (1): $P \xrightarrow{1} P$ $\Rightarrow M \equiv PA \xrightarrow{1} PB \equiv N$ от (3)

л.3) $M \equiv \lambda x A$, $N = \lambda x B$ и $A \xrightarrow{\beta} B$

От ИП: $A \xrightarrow{1} B \Rightarrow M = \lambda x A \xrightarrow{1} \lambda x B = N$ от (2)

8) $M \xrightarrow{1} N \Rightarrow M \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to N$

Ще направим структурна индукция по дефиницията на $\xrightarrow{1}$. Ще използваме, че $\xrightarrow{\beta}\!\!\!\to = \beta^{\lambda}, R, T$

(1) Нека $M \equiv A$ и $N = A$

$\Rightarrow M \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to N$ от R)

(2) Нека $M \equiv \lambda x A$ и $N = \lambda x B$ и $A \xrightarrow{1} B$

От ИП $A \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to B$

$\Rightarrow M \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to N$ от λ.3)

(3) $M = AB$, $N = A'B'$, $A \xrightarrow{1} A'$ и $B \xrightarrow{1} B'$.

От ИП $A \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to A'$ и $B \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to B'$.

$AB \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to A'B$ от λ.1)

$A'B \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to A'B'$ от λ.2)

$\Rightarrow AB \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to A'B'$ от T)

(4) $M = (\lambda x A)B$, $N = A'[x \mapsto B']$, $A \to A'$, $B \to B'$

От ИП $A \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to A'$ и $B \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to B'$.

$(\lambda x A)B \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to (\lambda x A)B'$ от λ.2)

$\lambda x A \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to \lambda x A'$ от λ.3)

$(\lambda x A)B' \to\!\!\!\to (\lambda x A')B'$ от T)

$\Rightarrow (\lambda x A)B \xrightarrow{\beta}\!\!\!\to (\lambda x A')B'$ от T)