

## Задача 1

Да се докаже, че  $\supseteq$  е рефлексивна и транзитивна релация.

### рефлексивност

Можем за типова субституция да изберем идентитета  $\iota$ . Ясно е, че тогава  $\alpha \supseteq \alpha$ , понеже  $\alpha\iota = \alpha$ .

### транзитивност

Трябва да покажем, че от  $\alpha_1 \supseteq \alpha_2 \supseteq \alpha_3$  следва  $\alpha_1 \supseteq \alpha_3$ . Знаем, че съществуват типови субституции  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , за които  $\alpha_1\xi_1 = \alpha_2$  и  $\alpha_2\xi_2 = \alpha_3$ . Трябва да намерим такава субституция  $\xi$ , за която  $\alpha_1\xi = \alpha_3$ . Ще конструираме  $\xi$ , която да работи като  $\xi_2$  след  $\xi_1$ , тоест  $\alpha\xi = (\alpha\xi_1)\xi_2$ . Нека  $\tau \in TV$ , тогава  $\xi(\tau) = (\xi_1(\tau))\xi_2$ . Нека да докажем, че  $\xi$  има желаните свойства. Ще го направим с индукция по дефиницията на типовете.

**Случай 1:**  $\alpha = \tau$ ,  $\tau \in TV$

Следва по дефиницията на функцията.

**Случай 2:**  $\alpha = \beta_1 \implies \beta_2$

$((\beta_1 \implies \beta_2)\xi_1)\xi_2 = ((\beta_1\xi_1) \implies (\beta_2\xi_1))\xi_2 = (\beta_1\xi_1)\xi_2 \implies (\beta_2\xi_1)\xi_2$ . По ИП  $(\beta_1\xi_1)\xi_2 \implies (\beta_1\xi_1)\xi_2 = \beta_1\xi \implies \beta_2\xi = (\beta_1 \implies \beta_2)\xi$ .

## Задача 2

Ако  $M^\tau \in \Lambda^T$  и  $FV(M^\tau) = \{x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \dots, x_n^{\sigma_n}\}$  да се докаже, че  $\Gamma$