

## Задача 2.3

- $(x, x) \in \overset{\alpha}{=}$
- $(A, A) \in \overset{\alpha}{=}$
- ако  $(A_1, A_2) \in \overset{\alpha}{=}$ , то  $(A_2, A_1) \in \overset{\alpha}{=}$
- ако  $(A_1, A_2) \in \overset{\alpha}{=}$  и  $(A_2, A_3) \in \overset{\alpha}{=}$ , то  $(A_1, A_3) \in \overset{\alpha}{=}$
- ако  $(A_1, B_1) \in \overset{\alpha}{=}$  и  $(A_2, B_2) \in \overset{\alpha}{=}$ , то  $(A_1B_1, A_2B_2) \in \overset{\alpha}{=}$
- Нека имаме  $M = \lambda_x A$ ,  $N = \lambda_y B$ . Ако  $x \notin FV(B)$  и  $(A, B[y \rightsquigarrow x]) \in \overset{\alpha}{=}$ , то  $(M, N) \in \overset{\alpha}{=}$  (тук  $\rightsquigarrow$  е наивна субституция)

## Задача 2.1

(1)

Ще направим индукция по дефиницията на частичната субституция.

1.  $M \equiv x$ . В този случай  $M[x \rightsquigarrow N] \equiv N$  и  $M[x \hookrightarrow N] \equiv N$ .
2.  $M \equiv y$ ,  $y \neq x$ . В този случай  $M[x \rightsquigarrow N] \equiv y$  и  $M[x \hookrightarrow N] \equiv y$ .
3.  $M \equiv M_1M_2$ . Тогава  $M[x \rightsquigarrow N] = (M_1[x \rightsquigarrow N])(M_2[x \rightsquigarrow N])$  и  $M[x \hookrightarrow N] = (M_1[x \hookrightarrow N])(M_2[x \hookrightarrow N])$ . От ИП  $(M_1[x \rightsquigarrow N]) \equiv (M_1[x \hookrightarrow N])$  и  $(M_2[x \rightsquigarrow N]) \equiv (M_2[x \hookrightarrow N])$ . Също от ИП знаем, че двете частични субституции са дефинирани. Така получаваме, че  $M[x \rightsquigarrow N] \equiv M[x \hookrightarrow N]$ , а също сме и сигурни, че  $M[x \hookrightarrow N]$  е дефинирано.
4.  $M = \lambda_x P$ . Тогава  $M[x \rightsquigarrow N] \equiv \lambda_x P$  и  $M[x \hookrightarrow N] \equiv \lambda_x P$ , така получаваме, че  $M[x \rightsquigarrow N] \equiv M[x \hookrightarrow N]$ .
5.  $M = \lambda_y P$  за  $y \neq x$ . Ясно е, че ако частичната субституция е дефинирана в този случай, то резултатите от двете субституции ще съвпадат. Това, което трябва да се покаже е, че частичната субституция е дефинирана в този случай. По-конкретно трябва да покажем, че  $x \notin FV(P)$  или  $y \notin FV(N)$ . Ще използваме допускането от задачата, че  $FV(N) \cap BV(M) = \{\}$ .

От дефиницията на  $BV$  може да се види, че  $y \in BV(M)$ . Понеже  $FV(N) \cap BV(M) = \{\}$ , то излиза, че  $y \notin FV(N)$ . Това показва, че частичната субституция е дефинирана.

Също така от ИП имаме, че  $P[x \hookrightarrow N] \equiv P[x \rightsquigarrow N]$ , от което и получаваме, че  $[x \hookrightarrow N] \equiv [x \rightsquigarrow N]$

(2)

Да разгледаме терма  $M = \lambda_y \lambda_x y$ . Искаме да направим субституцията като заместим  $x$  с  $y$ . Забелязваме, че частичната субституция  $M[x \hookrightarrow y]$  е дефинирана и дава  $\lambda_y \lambda_x y$ . Но наивната субституция не е коректна, понеже  $BV(M) = \{x, y\}$ , а  $FV(N) = \{y\}$  (тук  $N$  е  $y$ ) и съответно нямат празно сечение.

## Задача 2.5

Искаме да намерим  $M' \stackrel{\alpha}{=} M$ , такова, че  $M'[x \rightsquigarrow N]$  да е коректна, тоест  $FV(N) \cap BV(M') = \{\}$ . Нека вземем множеството  $FV(N) \cap BV(M) = \{x_1 x_2, \dots, x_n\}$ . Можем да изберем произволни  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  извън  $FV(N) \cup BV(M)$  (променливите са безкрайно много). Така можем да заместим  $x_i$  със  $z_i$ . По-конкретно  $M' \equiv M[x_1 \rightsquigarrow z_1][x_2 \rightsquigarrow z_2] \dots [x_n \rightsquigarrow z_n]$ . Сигурни сме, че така ще сменим само свързани променливи, понеже според конвенцията свободните и свързаните променливи нямат сечение и така можем да сме сигурни, че  $M' \stackrel{\alpha}{=} M$ .

## Задача ???

Нека дефинираме  $c_i = \lambda_n n c_s c_0$

1. Да се докаже, че за произволно  $n \in \mathbb{N}$  е изпълнено  $c_i c_n \stackrel{\beta}{=} c_n$ .
2. Вярно ли е, че  $c_i \stackrel{\beta\eta}{=} I$ ?

## 1

Ще докажем твърдението с индукция  $n \in \mathbb{N}$ . Преди това ще забележим, че  $c_i c_n \stackrel{\beta}{=} c_n c_s c_0 = (\lambda_f \lambda_x f^n x) c_s c_n \stackrel{\beta}{=} c_s^n c_0$ .

### База

При  $n = 0$  имаме,  $c_i c_0 \stackrel{\beta}{=} c_0 c_s c_0 = (\lambda_f \lambda_x x) c_s c_0 \stackrel{\beta}{=} c_0$ , с което базата е доказана.

### Индуктивна стъпка

Нека се опитаме да докажем твърдението за  $n + 1$ .  $c_i c_{n+1} \stackrel{\beta}{=} c_{n+1} c_s c_0 = (\lambda_f \lambda_x f^{n+1} x) c_s c_0 \stackrel{\beta}{=} c_s^{n+1} c_0$ . Използваме дефиницията за  $n$ -кратна композиция на функция и записваме, че  $c_s^{n+1} c_0 = c_s(c_s^n c_0)$ . От наблюдението горе се сещаме, че  $c_s(c_s^n c_0) \stackrel{\beta}{=} c_s(c_i c_n)$ . От ИП можем да запишем, че  $c_s(c_i c_n) \stackrel{\beta}{=} c_s c_n$ . Сега от свойствата на  $c_s$  получаваме, че  $c_s c_n = c_{n+1}$ . По този начин индуктивната стъпка е завършена.

## 2

Нека разгледаме  $K = \lambda_x \lambda_y x$ . Нека приложим  $K$  на  $c_i$  и на  $I$ .  $IK \stackrel{\beta}{=} K = A_1$ . От друга страна  $c_i K \stackrel{\beta}{=} K c_s c_0 \stackrel{\beta}{=} c_s = A_2$ . Използваме дефиницията за  $c_s$  от лекции  $c_s = \lambda_n \lambda_f \lambda_x f(nfx)$ . Вижда се, че  $A_1$  и  $A_2$  са два фундаментално различни обекта, понеже ако приложим променлива  $a$  към  $A_1$  получаваме  $A_1 a = Ka \stackrel{\beta}{=} \lambda_y a$ , което е константа функция, а ако се опитаме да приложим променливата  $a$  към  $A_2$  ще се получи грешка, понеже  $A_2 a \stackrel{\beta}{=} \lambda_f \lambda_x f(afx)$ . Това няма как да е валидно, понеже изисква  $a$  да бъде функция.

## Задача ????

В тази задача ще използваме наготово аритметиката с нумералите на Church като ще приемем, че имаме работещи основни аритметични функции за числата, както и за тяхното представяне. За момента ще покажем минимизация само за обикновени функции от вида  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Тоест няма да имаме "константни аргументи".

Нека разгледаме терма  $\Gamma = \lambda_F \lambda_f \lambda_y (c_=(f\ y)c_0)y(Ff(c_s\ y))$ . Тук функцията  $c_s$  дава следващото число, тоест  $c_s c_x \stackrel{\beta}{=} c_{x+1}$ . От сега нататък приемаме, че искаме да минимизираме функцията  $f_1 \in \Lambda$ . Приемаме, че тя има следната семантика  $f_1 c_x \stackrel{\beta}{=} c_y \iff f_2(x) = y$ . Термът който ще минимизира  $f_1$  ще бъде  $s_1 := Y\Gamma f_1$ . Ще докажем, че нашия терм  $s_1$  има семантиката на функцията  $s_2(x) = \begin{cases} x & f_2(x) = 0 \\ s_2(x+1) & \exists y > x : f_2(y) = 0 \\ \text{недефинирана} & \nexists y > x : f_2(y) = 0 \end{cases}$ . (тоест, че  $s_1 c_x \stackrel{\beta}{=} c_y \iff s_2(x) = y$ ). Също и ще покажем, че функцията  $s_2$  всъщност извършва минимизацията на  $f_2$ .

**Случай 1:**  $f_1 c_x \stackrel{\beta}{=} c_0 \iff f_2(x) = 0$

Трябва да покажем, че  $s_1 c_x \stackrel{\beta}{=} c_x$ .  
 $s_1 c_x \equiv (Y\Gamma f_1) c_x \equiv ((\lambda_f (\lambda_x f(xx)) (\lambda_x f(xx))) \Gamma f_1) c_x \stackrel{\beta}{=} (((\lambda_x \Gamma(xx)) (\lambda_x \Gamma(xx))) f_1) c_x \stackrel{\beta}{=} \Gamma((\lambda_x \Gamma(xx)) (\lambda_x \Gamma(xx))) f_1 c_x$ . Нека  $\Delta := ((\lambda_x \Gamma(xx)) (\lambda_x \Gamma(xx)))$ .  
 Тогава  $\Gamma((\lambda_x \Gamma(xx)) (\lambda_x \Gamma(xx))) f_1 c_x \equiv \Gamma \Delta f_1 c_x \equiv \lambda_F \lambda_f \lambda_y (c_=(f\ y)c_0)y(Ff(c_s\ y)) \Delta f_1 c_x \stackrel{\beta}{=} (c_=(f_1\ c_x)c_0)c_x(\Delta f_1(c_s\ c_x))$ . От допускането можем да презапишем този израз като  $(c_=(c_0 c_0)c_x(\Delta f_1(c_s\ c_x))) \stackrel{\beta}{=} c_t c_x(\Delta f_1(c_s\ c_x)) \stackrel{\beta}{=} c_x$ . По този начин довършваме случая.

**Случай 2:**  $f_1 c_x \not\stackrel{\beta}{=} c_0 \iff f_2(x) \neq 0$  и  $s_2(x)$  е дефинирано

В този случай трябва да покажем, че  $s_1 c_x \stackrel{\beta}{=} s_1 c_{x+1}$ . По-късно ще видим като доказваме коректността на функцията  $s_2$ , че  $s_1 c_{x+1}$  ще бъде  $\lambda$ -определимо. Подобно на миналия случай започваме да правим  $\beta$ -редукции  $s_1 c_x \equiv (Y\Gamma f_1) c_x \stackrel{\beta}{=} \dots \stackrel{\beta}{=} (c_=(f_1\ c_x)c_0)c_x(\Delta f_1(c_s\ c_x))$ . От предположението знаем, че този израз е  $\beta$ -еквивалентен на  $c_f c_x(\Delta f_1(c_s\ c_x)) \stackrel{\beta}{=} \Delta f_1(c_s\ c_x) \equiv ((\lambda_x \Gamma(xx)) (\lambda_x \Gamma(xx))) f_1(c_s\ c_x) \stackrel{\beta}{=} Y\Gamma f_1(c_s\ c_x) \stackrel{\beta}{=} Y\Gamma f_1 c_{x+1} \equiv s_1 c_{x+1}$ . Така доказахме случая.

**Случай 3:**  $s_2(x)$  не е дефинирано

Тук трябва да покажем, че  $s_1 c_x$  няма нормална форма, но за жалост не знам как :(.

Знаейки вече, че  $s_1 c_x$  има същата семантика като  $s_2(x)$ , то остава смао да направим доказателство, че  $s_2(0)$  наистина намира най-малката стойност  $x$ , за която  $f_2(x) = 0$ , ако изобщо съществува такава. Ще докажем това твърдение със силна индукция наобратно. По-конкретно ще докажем следното твърдение:

$$s_2(x) = \begin{cases} y & \exists y \in \mathbb{N} \geq x : f_2(y) = 0 \wedge \nexists z \in \mathbb{N} < y : f_2(z) = 0 \\ \text{недефинирана} & \nexists y \in \mathbb{N} \geq x : f_2(y) = 0 \end{cases}$$

Тоест, ще доказваме, че  $s_2(x)$  намира най-близкото не по-малко число от  $x$ , което е корен на  $f_2$ .

## База

Нека  $y \in \mathbb{N}$ ,  $f_2(y) = 0$  и  $y$  е минималното такова число. Нека  $x = y$ , тогава е ясно, че  $s_2(x) = x = y$ . Ако такова  $y$  не съществува, то от дефиницията на  $s_2$  става ясно, че  $s_2(x)$  е недефинирано  $\forall x \in \mathbb{N}$ , така че вече ще разглеждаме само случая, в който  $y$  съществува.

## Индуктивно предположение

Допускаме, че функцията  $s_2$  се държи както е описано по-горе за всички стойности в интервала  $[x + 1, y]$ , където  $y$  е минималният корен на функцията  $f_2$ . А пък, ако такова  $y$  не съществува, то  $s_2(x)$  не е дефинирано.

## Индуктивна стъпка

Ще докажем, че  $s_2(x)$  има очакваното поведение използвайки ИП. От минималността на  $y$  знаем, че  $f_2(x) \neq 0$ . Тогава по определението за  $s_2$  знаем, че  $s_2(x) = s_2(x + 1)$ . От индуктивното предположение става ясно, че  $s_2(x + 1) = y$ , което е очаквания резултат. Също и е ясно, че ако  $y$  не съществува, то  $s_2(x)$  няма да е дефинирано.

Така вече знаем, че  $s_2$  върши това, което очакваме да върши и можем да заключим, че  $s_1 c_x$  наистина намира най малкия корен на функцията  $f_1$ , ако той съществува, а иначе няма нормална форма.