Целта е да докажем, че за всяко доказателство от G1 има доказателство за същото твърдение със същите допускания и в H. Тоест, ако $\Gamma \implies \Delta$ в G1, то ще има поне едно доказателствов H, което извежда нещо от Δ.

Ще решим задачата като направим индукция по дълбочината на дървото.

Случай Ax

1. A (As)

Случай $L\perp$

Можем да направим празно доказателство, понеже реално тук не се доказва нищо.

Случай LW

Просто използваме доказателството на $\Gamma \implies \Delta$ и "игнорираме" допускането A.

Случай RW

Просто използваме доказателството за $\Gamma \implies \Delta$.

Случай LC

Използваме доказателството за $A, \Gamma \implies \Delta$, тъй като Γ при Хилбертовите системи е множество, а не мултимножество, то няма проблем.

Случай RC

Използваме доказателството за $A, \Gamma \implies \Delta, A, A$.

Случай $L\wedge$

Генерираме следното доказателство при допускания $\Gamma A_0 \wedge A_1$

1. $A_0 \wedge A_1$ (As)
2. $(A_0 \wedge A_1) \to A_i$ (Ax)
3. A_i (MP 1, 2)

След това залепяме доказателството на Γ, A_i отзад като махаме всички случаи, в които A_i се използва като (As).

Случай $R\wedge$

Нека имаме $X_1, X_2, ..., X_n$ е доказателство на $\Gamma \implies \Delta, A$ и $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ е доказателство на $\Gamma \implies \Delta, B$. Ако $X_n \in \Delta$ или $Y_m \in delta$, тогава използва съотвентото доказателство. В противен случай, знаем, че $X_n \equiv A$ и $Y_m \equiv B$. Тогава, залепяме двете доказателства и добавяме следната последователност:

n+m+1: $\to B \to A \wedge B$ (Ax)

n+m+2: $B \to A \wedge B$ (MP n, n+m+1), тук на позиция n седи X_n

n+m+3: $A \wedge B$ (MP n+m, n+m+2), тук на позиция $n+m$ седи Y_m.

Случай $L\vee$

По предположение знаем, че съществуват доказателства на $A, \Gamma \implies \Delta$ и $B, \Gamma \implies \Delta$. Нека БОО $\Delta = \{O\}$. Правим това, за да си гарантираме, че двете доказателства ще се "синхорнизират". Можем да си позволим да го направим, понеже разсъждаме за произволна Δ и можем да направим рестрикция на нашата, до някоя, която е с един елемент, понеже случая на празна Δ е тривиален. Също така може да се направи това нещо, понеже важи, че $\Gamma \implies \Delta_1 \implies \Gamma \implies \Delta_2$ за $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$. От теорема за дедукцията знаем, че съществуват доказателства и на $\Gamma \implies A \to O$ и $\Gamma \implies B \to O$. Нека тези доказателства са $X_1, X_2, ..., X_n \equiv A \to O$ и $Y_1, Y_2, ..., Y_m \equiv B \to O$. Залепяме двете доказателства едно след друго и към тях слагаме следната последователност:

n+m+1: $(A \to O) \to (B \to O) \to A \vee B \to O$ (Ax)

n+m+2: $(B \to O) \to A \vee B \to O$ (MP n, n+m+1), тук на позиция n седи X_n

n+m+3: $A \vee B \to O$ (MP n, n+m+2), тук на позиция $n+m$ седи Y_m

n+m+4: $A \vee B$ (As)

n+m+5: O (MP n+m+4, n+m+3)

Случай $R\vee$

Нека имаме доказателство $X_1, X_2, ..., X_n$ на $\Gamma \implies \Delta, A_i$. Ако $X_n \in \Delta$, то просто използваме това доказателство. В противен случай, знаем, че $X_n \equiv A_i$. Тогава към това доказателство добавяме $X_{n+1} \equiv A_i \to A_0 \vee A_1$ (Ax).

Случай $L \to$

Нека БОО $\Delta = \{C\}$. Тогава знаем, че имаме доказателства $X_1, X_2, ..., X_n$ и $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ за $\Gamma \implies C, A$ и $B, \Gamma \implies C$. От теорема на дедукцията знаем, че имаме доказалтество $Z_1, Z_2, ..., Z_k$ на $\Gamma \implies B \to C$. Ако $X_n \in \Delta$, тогава можем да използваме $X_1, X_2, ..., X_n$ като доказалтество на $A \to B, \Gamma \implies \Delta$. В противен случай, знаем, че $X_n \equiv A$ и правим следната конструкция.

Залепяме доказателствата $X_1, X_2, ..., X_n$ и $Z_1, Z_2, ..., Z_k$ едно след друго и добавяме следната последователност:

n+k+1: $A \to B$ (As)

n+k+2: B MP(n, n+k+1), тук на позиция n стои X_n

n+k+3: C MP(n+k+2, n+k), тук на позиция $n+k$ стои $Z_k \equiv B \to C$

Случай $R \to$

Следва директно от теоремата за дедукцията.

Случай $L\forall$

Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ е доказалтество на $\Gamma, A[x \longmapsto t] \implies \Gamma$. Слагаме $C_1 = \forall_x \to A[x \longmapsto t]$ (Ax), $C_2 = \forall_x$ (As), $C_3 = A[x \longmapsto t]$ MP(1, 2). Сега залепяме $X_1, X_2, ..., X_n$ като вече не използваме $A[x \longmapsto t]$ като допускане, а като резултат.

Случай $R\forall$

Знаем, че имаме доказателство $X_1, X_2, ..., X_n$ на $\Gamma \implies \Delta, A$. Ако $X_n \in \Delta$ можем да използваме това доказателство и за $\Gamma \implies \Delta, \forall_x A$, в противен случай знаем, че $X_n \equiv A$. Тогава можем да довършим като използваме теорема за генерализацията.

Случай $L\exists$

Знаем, че имаме доказателство $X_1, X_2, ..., X_n \in \Delta$ на $A, \Gamma \implies \Delta$. От теоремата за дедукцията знаем, че съществува доказателство $Z_1, Z_2, ..., Z_k \equiv A \to X_n$ за $\Gamma \implies A \to X_n$. Тъй като $x \notin FV(\exists_x A, \Gamma)$, то от теоремата за генерализацията знаем, че съществува доказателство $Y_1, Y_2, ..., Y_m \equiv \forall_x(A \to X_n)$ за $\Gamma, \exists_x A \implies \forall_x(A \to \exists_x A)$. Правим доказателството $Z_1, ..., Z_k, Y_1, ..., Y_m$ и към него добавяме:

k+m+1: $\forall_x(A \to X_n) \to (\exists_x A \to X_n)$ (Ax).

k+m+2: $\exists_x A \to X_n$ MP(k, n+m+2), тук на позиция k седи $\forall_x(A \to X_n)$.

k+m+3: $\exists_x A$ (As)

k+m+4: X_n MP(k+m+3, k+m+2)

Тъй като $X_n \in \Delta$, то това докзателство върши работа.

Случай $R\exists$

Нека имаме доказателството $X_1, X_2, ..., X_n$ на $\Gamma \implies \Delta, A[x \longmapsto t]$. Ако $X_n \in \Delta$, то можем да използваме това доказателство. В противен случай, знаем, че $X_n \equiv A[x \longmapsto t]$. Тогава към това доказателство залепяме следната последователност:

n+1: $A[x \longmapsto t] \rightarrow \exists_x A$ (Ax)

n+2: $\exists_x A$ MP(n, n+1), тук на позиция n седи $X_n \equiv A[x \longmapsto t]$.