Задача 2.3

- $(x, x) \in \overset{\alpha}{=}$
- $(A, A) \in \overset{\alpha}{=}$
- ако $(A_1, A_2) \in \overset{\alpha}{=}$, то $(A_2, A_1) \in \overset{\alpha}{=}$
- ако $(A_1, A_2) \in \overset{\alpha}{=}$ и $(A_2, A_3) \in \overset{\alpha}{=}$, то $(A_1, A_3) \in \overset{\alpha}{=}$
- ако $(A_1, B_1) \in \overset{\alpha}{=}$ и $(A_2, B_2) \in \overset{\alpha}{=}$, то $(A_1 B_1, A_2 B_2) \in \overset{\alpha}{=}$
- Нека имаме $M = \lambda_x A$, $N = \lambda_y B$. Ако $x \notin FV(B)$ и $(A, B[y \rightsquigarrow x]) \in \overset{\alpha}{=}$, то $(M, N) \in \overset{\alpha}{=}$ (тук $\rightsquigarrow$ е наивна субституция)

Задача 2.1

(1)

Ще напрваим индукция по дефиницията на частичната субституция.

1. $M \equiv x$. В този случай $M[x \rightsquigarrow N] \equiv N$ и $M[x \hookrightarrow N] \equiv N$.
2. $M \equiv y$, $y \not\equiv x$. В този случай $M[x \rightsquigarrow N] \equiv y$ и $M[x \hookrightarrow N] \equiv y$.
3. $M \equiv M_1 M_2$. Тогава $M[x \rightsquigarrow N] = (M_1[x \rightsquigarrow N])(M_2[x \rightsquigarrow]N)$ и $M[x \hookrightarrow N] = (M_1[x \hookrightarrow N])(M_2[x \hookrightarrow N])$. От ИП $(M_1[x \rightsquigarrow N]) \equiv (M_1[x \hookrightarrow N])$ и $(M_2[x \rightsquigarrow N]) \equiv (M_2[x \hookrightarrow N])$. Също от ИП знаем, че двете частични субституции са дефинирани. Така получаваме, че $M[x \rightsquigarrow N] \equiv M[x \hookrightarrow N]$, а също сме и сигурни, че $M[x \hookrightarrow N]$ е дефинирано.
4. $M = \lambda_x P$. Тогава $M[x \rightsquigarrow N] \equiv \lambda_x P$ и $M[x \hookrightarrow N] \equiv \lambda_x P$, така получаваме, че $M[x \rightsquigarrow N] \equiv M[x \hookrightarrow N]$.
5. $M = \lambda_y P$ за $y \not\equiv x$. Ясно е, че ако частичната субституция е дефинирана в този случай, то резултатите от двете субституции ще съпвадат. Това, което трябва да се покаже е, че частичната субституция е дефинирана в този случай. По-конкретно трябва да покажем, че $x \notin FV(P)$ или $y \notin FV(N)$. Ще използваме допускането от задачата, че $FV(N) \cap BV(M) = \{\}$.

От дефиницията на BV може да се види, че $y \in BV(M)$. Понеже $FV(N) \cap BV(M) = \{\}$, то излиза, че $y \notin FV(N)$. Това показва, че частичната субституция е дефинирана.

Също така от ИП имаме, че $P[x \hookrightarrow N] \equiv P[x \rightsquigarrow N]$, от което и получаваме, че $[x \hookrightarrow N] \equiv [x \rightsquigarrow N]$

(2)

Да разгледаме терма $M = \lambda_y \lambda_x y$. Искаме да направим субституция като заместим x с y. Забелязваме, че частичната субституция $M[x \hookrightarrow y]$ е дефинирана и дава $\lambda_y \lambda_x y$. Но наивната субституция не е коректна, понеже $BV(M) = \{x, y\}$, а $FV(N) = \{y\}$ (тук N е y) и съответно нямат празно сечение.

Задача 2.5

Искаме да намерикм $M' \stackrel{\alpha}{=} M$, такова, че $M'[x \rightsquigarrow N]$ да коректна, тоест $FV(N) \cap BV(M') = \{\}$. Нека вземем множеството $FV(N) \cap BV(M) = \{x_1 x_2, ..., x_n\}$. Можем да изберем произволни $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ извън $FV(N) \cup BV(M)$ (променливите са безкрайно много). Така можем да заместим x_i със z_i. По-конкретно $M' \equiv M[x_1 \rightsquigarrow z_1][x_2 \rightsquigarrow z_2]...[x_n \rightsquigarrow z_n]$. Сигурни сме, че така ще сменим само свързани променливи, понеже според конвенцията свободните и свързаните променливи нямат сечение и така можем да сме сигурни, че $M' \stackrel{\alpha}{=} M$.

Задача ???

Нека дефинираме $c_i = \lambda_n n c_s c_0$

1. Да се докаже, че за произволно $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $c_i c_n \stackrel{\beta}{=} c_n$.
2. Вярно ли е, че $c_i \stackrel{\beta\eta}{=} I$?

1

Ще докажем твърдението с индукция $n \in \mathbb{N}$. Преди това ще забележим, че $c_i c_n \overset{\beta}{=} c_n c_s c_0 = (\lambda_f \lambda_x f^n x) c_s c_n \overset{\beta}{=} c_s^n c_0$.

База

При $n = 0$ имаме, $c_i c_0 \overset{\beta}{==} c_0 c_s c_0 = (\lambda_f \lambda_x x) c_s c_0 \overset{\beta}{=} c_0$, с което базата е доказана.

Индуктивна стъпка

Нека се опитаме да докажем твърдението за $n+1$. $c_i c_{n+1} \overset{\beta}{=} c_{n+1} c_s c_0 = (\lambda_f \lambda_x f^{n+1} x) c_s c_0 \overset{\beta}{=} c_s^{n+1} c_0$. Използваме дефиницията за n-кратна композиция на функция и записваме, че $c_s^{n+1} c_0 = c_s(c_s^n c_0)$. От наблюдението горе се сещаме, че $c_s(c_s^n c_0) \overset{\beta}{=} c_s(c_i c_n)$. От ИП можем да запишем, че $c_s(c_i c_n) \overset{\beta}{=} c_s c_n$. Сега от свойствата на c_s получаваме, че $c_s c_n = c_{n+1}$. По този начин индуктивната стъпка е завършена.

2

Нека разгледаме $K = \lambda_x \lambda_y x$. Нека приложим K на c_i и на I. $IK \overset{\beta}{=} K = A_1$. От друга страна $c_i K \overset{\beta}{=} K c_s c_0 \overset{\beta}{=} c_s = A_2$. Използваме дефиницията за c_s от лекции $c_s = \lambda_n \lambda_f \lambda_x f(nfx)$. Вижда се, че A_1 и A_2 са два фундаментално различни обекта, понеже ако приложим променлива a към A_1 получаваме $A_1 a = Ka \overset{\beta}{=} \lambda_y a$, което е константа функция, а ако се опитаме да приложим променливата a към A_2 ще се получи грешка, понеже $A_2 a \overset{\beta}{=} \lambda_f \lambda_x f(afx)$. Това няма как да е валидно, понеже изисква a да бъде функция.

Задача ????

В тази задача ще използваме наготово аритметиката с нумералите на Church като ще приемем, че имаме работещи основни аритметични функции за числата, както и за тяхното представяне. За момента ще покажем минимизация само за обикновени функции от вида $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тоест няма да имаме "константни аргументи".

Нека разгледаме терма $\Gamma = \lambda_F \lambda_f \lambda_y (c = (f\ y) c_0) y (F f (c_s\ y))$. Тук функцията c_s дава следващото число, тоест $c_s c_x \stackrel{\beta}{=} c_{x+1}$. От сега нататък приемаме, че искаме да минимизираме функцията $f_1 \in \Lambda$. Приемаме, че тя има следната семантика $f_1 c_x \stackrel{\beta}{=} c_y \iff f_2(x) = y$. Термът който ще минимизира f_1 ще бъде $s_1 := Y \Gamma f_1$. Ще докажем, че нашия терм s_1 има семантиката на функцията $s_2(x) = \begin{cases} x & f_2(x) = 0 \\ s_2(x+1) & \exists y > x : f_2(y) = 0 \\ \text{недефинирана} & \nexists y > x : f_2(y) = 0 \end{cases}$. (тоест, че $s_1 c_x \stackrel{\beta}{=} c_y \iff s_2(x) = y$). Също и ще покажем, че функцията s_2 всъщност извършва минимизацията на f_2.

Случай 1: $f_1 c_x \stackrel{\beta}{=} c_0 \iff f_2(x) = 0$

Трябва да покажем, че $s_1 c_x \stackrel{\beta}{=} c_x$.
$s_1 c_x \equiv (Y \Gamma f_1) c_x \equiv ((\lambda_f (\lambda_x f(xx))(\lambda_x f(xx))) \Gamma f_1) c_x \stackrel{\beta}{=} (((\lambda_x \Gamma(xx))(\lambda_x \Gamma(xx))) f_1) c_x \stackrel{\beta}{=}$ $\Gamma((\lambda_x \Gamma(xx))(\lambda_x \Gamma(xx))) f_1 c_x$. Нека $\Delta := ((\lambda_x \Gamma(xx))(\lambda_x \Gamma(xx)))$. Тогава $\Gamma((\lambda_x \Gamma(xx))(\lambda_x \Gamma(xx))) f_1 c_x \equiv$ $\Gamma \Delta f_1 c_x \equiv \lambda_F \lambda_f \lambda_y (c = (f\ y) c_0) y (F f (c_s\ y)) \Delta f_1 c_x \stackrel{\beta}{=} (c = (f_1\ c_x) c_0) c_x (\Delta f_1 (c_s\ c_x))$.
От допускането можем да презапишем този израз като $(c = c_0 c_0) c_x (\Delta f_1 (c_s\ c_x)) \stackrel{\beta}{=}$ $c_t c_x (\Delta f_1 (c_s\ c_x)) \stackrel{\beta}{=} c_x$. По този начин довършваме случая.

Случай 2: $f_1 c_x \stackrel{\beta}{\neq} c_0 \iff f_2(x) \neq 0$ и $s_2(x)$ е дефинирано

В този случай трябва да покажем, че $s_1 c_x \stackrel{\beta}{=} s_1 c_{x+1}$. По-късно ще видим като доказваме коректността на функцията s_2, че $s_1 c_{x+1}$ ще бъде λ-определимо. Подобно на миналия случай започваме да правим β-редукции $s_1 c_x \equiv (Y \Gamma f_1) c_x \stackrel{\beta}{=} ... \stackrel{\beta}{=} (c = (f_1\ c_x) c_0) c_x (\Delta f_1 (c_s\ c_x))$. От предположението знаем, че този израз е β-еквивалентен на $c_f c_x (\Delta f_1 (c_s\ c_x)) \stackrel{\beta}{=}$ $\Delta f_1 (c_s\ c_x) \equiv ((\lambda_x \Gamma(xx))(\lambda_x \Gamma(xx))) f_1 (c_s\ c_x) \stackrel{\beta}{=} Y \Gamma f_1 (c_s\ c_x) \stackrel{\beta}{=} Y \Gamma f_1 c_{x+1} \equiv$ $s_1 c_{x+1}$. Така доказахме случая.

Случай 3: $s_2(x)$ не е дефинирано

Тук трябва да покажем, че $s_1 c_x$ няма нормална форма.