

Задача 2.3

- $(x, x) \in \overset{\alpha}{=}$
- $(A, A) \in \overset{\alpha}{=}$
- ако $(A_1, A_2) \in \overset{\alpha}{=}$, то $(A_2, A_1) \in \overset{\alpha}{=}$
- ако $(A_1, A_2) \in \overset{\alpha}{=}$ и $(A_2, A_3) \in \overset{\alpha}{=}$, то $(A_1, A_3) \in \overset{\alpha}{=}$
- ако $(A_1, B_1) \in \overset{\alpha}{=}$ и $(A_2, B_2) \in \overset{\alpha}{=}$, то $(A_1B_1, A_2B_2) \in \overset{\alpha}{=}$
- Нека имаме $M = \lambda_x A$, $N = \lambda_y B$. Ако $x \notin FV(B)$ и $(A, B[y \rightsquigarrow x]) \in \overset{\alpha}{=}$, то $(M, N) \in \overset{\alpha}{=}$ (тук \rightsquigarrow е наивна субституция)

Задача 2.1

(1)

Ще направим индукция по дефиницията на частичната субституция.

1. $M \equiv x$. В този случай $M[x \rightsquigarrow N] \equiv N$ и $M[x \hookrightarrow N] \equiv N$.
2. $M \equiv y$, $y \neq x$. В този случай $M[x \rightsquigarrow N] \equiv y$ и $M[x \hookrightarrow N] \equiv y$.
3. $M \equiv M_1M_2$. Тогава $M[x \rightsquigarrow N] = (M_1[x \rightsquigarrow N])(M_2[x \rightsquigarrow N])$ и $M[x \hookrightarrow N] = (M_1[x \hookrightarrow N])(M_2[x \hookrightarrow N])$. От ИП $(M_1[x \rightsquigarrow N]) \equiv (M_1[x \hookrightarrow N])$ и $(M_2[x \rightsquigarrow N]) \equiv (M_2[x \hookrightarrow N])$. Също от ИП знаем, че двете частични субституции са дефинирани. Така получаваме, че $M[x \rightsquigarrow N] \equiv M[x \hookrightarrow N]$, а също сме и сигурни, че $M[x \hookrightarrow N]$ е дефинирано.
4. $M = \lambda_x P$. Тогава $M[x \rightsquigarrow N] \equiv \lambda_x P$ и $M[x \hookrightarrow N] \equiv \lambda_x P$, така получаваме, че $M[x \rightsquigarrow N] \equiv M[x \hookrightarrow N]$.
5. $M = \lambda_y P$ за $y \neq x$. Ясно е, че ако частичната субституция е дефинирана в този случай, то резултатите от двете субституции ще съвпадат. Това, което трябва да се покаже е, че частичната субституция е дефинирана в този случай. По-конкретно трябва да покажем, че $x \notin FV(P)$ или $y \notin FV(N)$. Ще използваме допускането от задачата, че $FV(N) \cap BV(M) = \{\}$.

От дефиницията на BV може да се види, че $y \in BV(M)$. Понеже $FV(N) \cap BV(M) = \{\}$, то излиза, че $y \notin FV(N)$. Това показва, че частичната субституция е дефинирана.

Също така от ИП имаме, че $P[x \hookrightarrow N] \equiv P[x \rightsquigarrow N]$, от което и получаваме, че $[x \hookrightarrow N] \equiv [x \rightsquigarrow N]$

(2)

Да разгледаме терма $M = \lambda_y \lambda_x y$. Искаме да направим субституцията като заместим x с y . Забелязваме, че частичната субституция $M[x \hookrightarrow y]$ е дефинирана и дава $\lambda_y \lambda_x y$. Но наивната субституция не е коректна, понеже $BV(M) = \{x, y\}$, а $FV(N) = \{y\}$ (тук N е y) и съответно нямат празно сечение.

Задача 2.5

Искаме да намерим $M' \stackrel{\alpha}{=} M$, такова, че $M'[x \rightsquigarrow N]$ да е коректна, тоест $FV(N) \cap BV(M') = \{\}$. Нека вземем множеството $FV(N) \cap BV(M) = \{x_1 x_2, \dots, x_n\}$. Можем да изберем произволни $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ извън $FV(N) \cup BV(M)$ (променливите са безкрайно много). Така можем да заместим x_i със z_i . По-конкретно $M' \equiv M[x_1 \rightsquigarrow z_1][x_2 \rightsquigarrow z_2] \dots [x_n \rightsquigarrow z_n]$. Сигурни сме, че така ще сменим само свързани променливи, понеже според конвенцията свободните и свързаните променливи нямат сечение и така можем да сме сигурни, че $M' \stackrel{\alpha}{=} M$.

Задача ???

Нека дефинираме $c_i = \lambda_n n c_s c_0$

1. Да се докаже, че за произволно $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $c_i c_n \stackrel{\beta}{=} c_n$.
2. Вярно ли е, че $c_i \stackrel{\beta\eta}{=} I$?

1

Ще докажем твърдението с индукция $n \in \mathbb{N}$. Преди това ще забележим, че $c_i c_n \stackrel{\beta}{=} c_n c_s c_0 = (\lambda_f \lambda_x f^n x) c_s c_n \stackrel{\beta}{=} c_s^n c_0$.

База

При $n = 0$ имаме, $c_i c_0 \stackrel{\beta}{=} c_0 c_s c_0 = (\lambda_f \lambda_x x) c_s c_0 \stackrel{\beta}{=} c_0$, с което базата е доказана.

Индуктивна стъпка

Нека се опитаме да докажем твърдението за $n + 1$. $c_i c_{n+1} \stackrel{\beta}{=} c_{n+1} c_s c_0 = (\lambda_f \lambda_x f^{n+1} x) c_s c_0 \stackrel{\beta}{=} c_s^{n+1} c_0$. Използваме дефиницията за n -кратна композиция на функция и записваме, че $c_s^{n+1} c_0 = c_s(c_s^n c_0)$. От наблюдението горе се сещаме, че $c_s(c_s^n c_0) \stackrel{\beta}{=} c_s(c_i c_n)$. От ИП можем да запишем, че $c_s(c_i c_n) \stackrel{\beta}{=} c_s c_n$. Сега от свойствата на c_s получаваме, че $c_s c_n = c_{n+1}$. По този начин индуктивната стъпка е завършена.

2

Нека разгледаме $K = \lambda_x \lambda_y x$. Нека приложим K на c_i и на I . $IK \stackrel{\beta}{=} K = A_1$. От друга страна $c_i K \stackrel{\beta}{=} K c_s c_0 \stackrel{\beta}{=} c_s = A_2$. Използваме дефиницията за c_s от лекции $c_s = \lambda_n \lambda_f \lambda_x f(nfx)$. Вижда се, че A_1 и A_2 са два фундаментално различни обекта, понеже ако приложим променлива a към A_1 получаваме $A_1 a = Ka \stackrel{\beta}{=} \lambda_y a$, което е константа функция, а ако се опитаме да приложим променливата a към A_2 ще се получи грешка, понеже $A_2 a \stackrel{\beta}{=} \lambda_f \lambda_x f(afx)$. Това няма как да е валидно, понеже изисква a да бъде функция.

Задача ????

В тази задача ще използваме наготово аритметиката с нумералите на Church като ще приемем, че имаме работещи основни аритметични функции за числата, както и за тяхното представяне. Също и ще приемем, че имаме работещи основните неща от булевата логика. За момента ще покажем минимизация само за обикновени функции от вида $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Тоест няма да имаме "константни аргументи".

Нека разгледаме терма $\Gamma = \lambda_F \lambda_f \lambda_y (c_=(f\ y)c_0)y(Ff(c_s\ y))$. Тук функцията c_s дава следващото число, тоест $c_s c_x \stackrel{\beta}{=} c_{x+1}$. От сега нататък приемаме, че искаме да минимизираме функцията $f_1 \in \Lambda$. Приемаме, че тя има следната семантика $f_1 c_x \stackrel{\beta}{=} c_y \iff f_2(x) = y$. Термът който ще минимизира f_1 ще бъде $s_1 := Y\Gamma f_1$. Ще докажем, че нашият терм s_1 има се-

$$\text{мантиката на функцията } s_2(x) = \begin{cases} x & f_2(x) = 0 \\ s_2(x+1) & \exists y > x : f_2(y) = 0 \\ \text{недефинирана} & \nexists y > x : f_2(y) = 0 \end{cases}.$$

(тоест, че $s_1 c_x \stackrel{\beta}{=} c_y \iff s_2(x) = y$). Също и ще покажем, че функцията s_2 всъщност извършва минимизацията на f_2 .

Случай 1: $f_1 c_x \stackrel{\beta}{=} c_0 \iff f_2(x) = 0$

Трябва да покажем, че $s_1 c_x \stackrel{\beta}{=} c_x$.

$$s_1 c_x \equiv (Y\Gamma f_1) c_x \equiv ((\lambda_f(\lambda_x f(xx)))(\lambda_x f(xx)))\Gamma f_1 c_x \stackrel{\beta}{=} (((\lambda_x \Gamma(xx)))(\lambda_x \Gamma(xx)))f_1 c_x \stackrel{\beta}{=} \Gamma((\lambda_x \Gamma(xx))(\lambda_x \Gamma(xx)))f_1 c_x. \text{ Нека } \Delta := ((\lambda_x \Gamma(xx))(\lambda_x \Gamma(xx))).$$

Тогава $\Gamma((\lambda_x \Gamma(xx))(\lambda_x \Gamma(xx)))f_1 c_x \equiv \Gamma \Delta f_1 c_x \equiv \lambda_F \lambda_f \lambda_y (c_=(f\ y)c_0)y(Ff(c_s\ y))\Delta f_1 c_x \stackrel{\beta}{=} (c_=(f_1\ c_x)c_0)c_x(\Delta f_1(c_s\ c_x))$. От допускането можем да презапишем този израз като $(c_=(c_0 c_0)c_x(\Delta f_1(c_s\ c_x))) \stackrel{\beta}{=} c_t c_x(\Delta f_1(c_s\ c_x)) \stackrel{\beta}{=} c_x$. По този начин довършваме случая.

Случай 2: $f_1 c_x \not\stackrel{\beta}{=} c_0 \iff f_2(x) \neq 0$ и $s_2(x)$ е дефинирано

В този случай трябва да покажем, че $s_1 c_x \stackrel{\beta}{=} s_1 c_{x+1}$. По-късно ще видим като доказваме коректността на функцията s_2 , че $s_1 c_{x+1}$ ще бъде λ -определимо. Подобно на миналия случай започваме да правим β -редукции $s_1 c_x \equiv (Y\Gamma f_1) c_x \stackrel{\beta}{=} \dots \stackrel{\beta}{=} (c_=(f_1\ c_x)c_0)c_x(\Delta f_1(c_s\ c_x))$. От предположението знаем, че този израз е β -еквивалентен на $c_f c_x(\Delta f_1(c_s\ c_x)) \stackrel{\beta}{=} \Delta f_1(c_s\ c_x) \equiv ((\lambda_x \Gamma(xx))(\lambda_x \Gamma(xx)))f_1(c_s\ c_x) \stackrel{\beta}{=} Y\Gamma f_1(c_s\ c_x) \stackrel{\beta}{=} Y\Gamma f_1 c_{x+1} \equiv s_1 c_{x+1}$. Така доказахме случая.

Случай 3: $s_2(x)$ не е дефинирано

Тук трябва да покажем, че $s_1 c_x$ няма нормална форма, но за жалост не знам как :(.

Знаейки вече, че s_1c_x има същата семантика като $s_2(x)$, то остава смао да направим доказателство, че $s_2(0)$ наистина намира най-малката стойност x , за която $f_2(x) = 0$, ако изобщо съществува такава. Ще докажем това твърдение със силна индукция наобратно. По-конкретно ще докажем следното твърдение:

$$s_2(x) = \begin{cases} y & \exists y \in \mathbb{N}, y \geq x : f_2(y) = 0 \wedge \nexists z \in \mathbb{N}, x \leq z < y : f_2(z) = 0 \\ \text{недефинирана} & \nexists y \in \mathbb{N}, y \geq x : f_2(y) = 0 \end{cases}$$

Тоест, ще доказваме, че $s_2(x)$ намира най-близкото не по-малко число от x , което е корен на f_2 .

База

Нека $y \in \mathbb{N}$, $f_2(y) = 0$ и y е минималното такова число. Нека $x = y$, тогава е ясно, че $s_2(x) = x = y$. Ако такова y не съществува, то от дефиницията на s_2 става ясно, че $s_2(x)$ е недефинирано $\forall x \in \mathbb{N}$, така че вече ще разглеждаме само случая, в който y съществува. Тогава също и термът s_1c_y ще е ламбда определим и β -еквивалентен на c_y .

Индуктивно предположение

Допускаме, че функцията s_2 се държи както е описано по-горе за всички стойности в интервала $[x + 1, y]$, където y е минималният корен на функцията f_2 . А пък, ако такова y не съществува, то $s_2(x)$ не е дефинирано. Също и че термът s_1c_a , $a \in [x+1, y]$ е λ -определим и има семантиката на $s_2(a)$.

Индуктивна стъпка

Ще докажем, че $s_2(x)$ има очакваното поведение използвайки ИП. От минималността на y знаем, че $f_2(x) \neq 0$. Тогава по определението за s_2 знаем, че $s_2(x) = s_2(x + 1)$. От индуктивното предположение става ясно, че $s_2(x + 1) = y$, което е очаквания резултат. Също и е ясно, че ако y не съществува, то $s_2(x)$ няма да е дефинирано. Също така, тъй като s_1c_x ще бъде β -еквивалентно на s_1c_{x+1} в този случай, то s_1c_x ще има семантиката на $s_2(x)$.

Така вече знаем, че s_2 върши това, което очакваме да върши и можем да заключим, че $s_1 c_0$ наистина намира най малкия корен на функцията f_1 , ако той съществува, а иначе няма нормална форма.