Задача 1.6

Тъй като събирането е операция, операцията е функция, функцията е релация, а релацията е множество, то можем да дефинираме събирането като множество от наредени тройки (a, b, c), за които казваме, че $a+b = c$. Това множество ще наричаме P. Дефинираме монотонен оператор $\Gamma : \mathbb{P}(N) \to \mathbb{P}(N)$, $\Gamma(X) = \{(o, x, x)|x \in N\} \cup \{(s(a), b, s(c))|(a, b, c) \in X\}$.

подзадача 1

Трябва да докажем, че $n+s(m) = s(n+m)$. Ще използваме структурна индукция.

случай 1: $n = o$

Тогава трябва да покажем, че $o+s(m) = s(o+m)$. Използвайки базата на дефиницията на събирането, това свойство излиза тривиално.

случай 2: $n \neq o$

Можем да запишем $n = s(x)$ (това е така, понеже множеството N е минимална неподвижна точка на оператора, чрез който се дефинира). Така имаме, че $n + s(m) = s(x) + s(m) = s(x + s(m)) = s(s(x + m)) = s(s(x) + m) = s(n + m)$. От дефиницията на събирането знаем, че $s(x) + s(m) = s(x + s(m))$. От индуктивното предположение знаем, че $s(x + s(m)) = s(s(x + m))$. Отново от дефиницията на събирането можем да запишем $s(s(x + m)) = s(s(x) + m) = s(n + m)$.

подзадача 2

Трябва да покажем, че така дефинираното събиране е комутативно, тоест $n + m = m + n$.

случай 1: $n = o$

Имаме, че $n + m = o + m = m$. ... доказва се

случай 2: $n \neq o$

Нека $n = s(x)$. Тогава $n + m = s(x) + m = s(x + m)$ от дефиницията на събирането. От друга страна $m + n = m + s(x) = s(m + x) = s(x + m)$ от подзадача 1 и от индукционното предположение. Така доказахме случая.