Задача 1.6

подзадача 1

Трябва да докажем, че $n+s(m) = s(n+m)$. Ще използваме структурна индукция.

случай 1: $n = o$

Тогава трябва да покажем, че $o+s(m) = s(o+m)$. Използвайки базата на дефиницията на събирането, това свойство излиза тривиално.

случай 2: $n \neq s(x)$**,** $x \in N$

Имаме, че $n+s(m) = s(x)+s(m)$. По дефиниция имаме, че $s(x)+s(m) = s(x+s(m))$. От ИП имаме, че $x+s(m) = s(x+m)$. От дефиницията имаме, че $s(x+m) = s(x)+m$. Така получаваме, че $s(x+s(m)) = s(s(x)+m) = s(n+m)$.

подзадача 2

Преди това ще докажем едно помощно твърдение: $a + o = a$.

случай 1: $a = o$

$a + o = o + o = o = a$.

случай 1: $a = s(x)$**,** $x \in N$

$a + o = s(x) + o = s(x + o) = s(x) = a$ от ИП.

Трябва да покажем, че така дефинираното събиране е комутативно, тоест $n + m = m + n$.

случай 1: $n = o$

Имаме, че $n + m = o + m = m = m + o = m + n$.

случай 2: $n \neq o$

Нека $n = s(x)$. Тогава $n + m = s(x) + m = s(x + m)$ от дефиницията на събирането. От друга страна $m + n = m + s(x) = s(m + x) = s(x + m)$ от подзадача 1 и от индукционното предположение. Така доказахме случая.