Задача 2.1

(1)

Ще напрваим индукция по дефиницията на частичната субституция.

1. $M \equiv x$. В този случай $M[x \rightsquigarrow N] \equiv N$ и $M[x \hookrightarrow N] \equiv N$.

2. $M \equiv y$, $y \not\equiv x$. В този случай $M[x \rightsquigarrow N] \equiv y$ и $M[x \hookrightarrow N] \equiv y$.

3. $M \equiv M_1M_2$. Тогава $M[x \rightsquigarrow N] = (M_1[x \rightsquigarrow N])(M_2[x \rightsquigarrow]N)$ и $M[x \hookrightarrow N] = (M_1[x \hookrightarrow N])(M_2[x \hookrightarrow N])$. От ИП $(M_1[x \rightsquigarrow N]) \equiv (M_1[x \hookrightarrow N])$ и $(M_2[x \rightsquigarrow N]) \equiv (M_2[x \hookrightarrow N])$. Също от ИП знаем, че двете частични субституции са дефинирани. Така получаваме, че $M[x \rightsquigarrow N] \equiv M[x \hookrightarrow N]$, а също сме и сигурни, че $M[x \hookrightarrow N]$ е дефинирано.

4. $M = \lambda_x P$. Тогава $M[x \rightsquigarrow N] \equiv \lambda_x P$ и $M[x \hookrightarrow N] \equiv \lambda_x P$, така получаваме, че $M[x \rightsquigarrow N] \equiv M[x \hookrightarrow N]$.

5. $M = \lambda_y P$ за $y \not\equiv x$. Ясно е, че ако частичната субституция е дефинирана в този случай, то резултатите от двете субституции ще съпвадат. Това, което трябва да се покаже е, че частичната субституция е дефинирана в този случай. По-конкретно трябва да покажем, че $x \notin FV(P)$ или $y \notin FV(N)$. Ще използваме допускането от задачата, че $FV(N) \cap BV(M) = \{\}$.

   От дефиницията на BV може да се види, че $y \in BV(M)$. Понеже $FV(N) \cap BV(M) = \{\}$, то излиза, че $y \notin FV(N)$. Това показва, че частичната субституция е дефинирана.

   Също така от ИП имаме, че $P[x \hookrightarrow N] \equiv P[x \rightsquigarrow N]$, от което и получаваме, че $[x \hookrightarrow N] \equiv [x \rightsquigarrow N]$

(2)

Да разгледаме терма $M = \lambda_y \lambda_x y$. Искаме да направим субституция като заместим x с y. Забелязваме, че частичната субституция $M[x \hookrightarrow y]$ е дефинирана и дава $\lambda_y \lambda_x y$. Но наивната субституция не е коректна, понеже $BV(M) = \{x, y\}$, а $FV(N) = \{y\}$ (тук N е y) и съответно нямат празно сечение.