**Исследовательский проект по математике на тему**

**Фракталы – геометрия красоты**

**Автор: ученица 9 класса Митютнева А.М.**

**Руководитель: Осипова А.Н.**

**Содержание**

1. **Введение**
2. **Основная часть**
   1. **Ⅰ Глава**
   2. **Ⅱ Глава**
3. **Заключение**

**1.Введение**

***Актуальность проекта***

Почему геометрию часто называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака - это не сферы, горы не конусы, линии берега - это не окружности, кора не является гладкой и молния не распространяется по прямой.

Фракталы - понятия, вошедшие в научную картину мира сравнительно недавно, лишь в последней четверти ХХ века. В 1975 году французский математик Бенуа Мандельброт издал книгу «The fractal Geometry of Nature». С того времени интерес к фракталам не угасает не только в кругу специалистов - физиков, математиков, биологов и т. д., но и среди людей, далеких от науки. Исследования, связанные с фракталами, меняют многие привычные представления об окружающем нас мире. Красота фракталов выявила новые закономерности эстетической гармонии мира, которую другими, неформальными средствами исследуют художники, архитекторы и композиторы.

Открытие фракталов произвело революцию не только в геометрии, но и в физике, химии, биологии. Фрактальные алгоритмы нашли применение и в информационных технологиях.

Основная идея работы заключается в изучении, анализе и систематизации литературы и Интернет-ресурсов о фракталах, ознакомлении с историей фракталов, рассмотрении применения фракталов в различных областях науки и техники.

***Цель проекта:*** Изучение сфер применения понятия фракталов

***Задачи:***

1. Ознакомиться с определением фракталам
2. Узнать о применении фракталов

*Результат проекта (продукт):* письменная работа (буклет о видах фракталов)

***Список информационных источников:***

1. [**https://zen.yandex.ru/media/id/5b0ffc175a104f9075bad29f/fraktaly-udivitelnaia-priroda-prosto-o-slojnom-5bb21914db5ea800ab720f31**](https://zen.yandex.ru/media/id/5b0ffc175a104f9075bad29f/fraktaly-udivitelnaia-priroda-prosto-o-slojnom-5bb21914db5ea800ab720f31) **-** фракталы в природе
2. [**https://3dnews.ru/754657**](https://3dnews.ru/754657)- история фракталов
3. [**https://allatravesti.com/chto-takoe-fraktaly-mir-vokrug-nas-chast-1**](https://allatravesti.com/chto-takoe-fraktaly-mir-vokrug-nas-chast-1) - виды фракталов
4. [**https://www.popmech.ru/science/8906-krasota-povtora-fraktaly/**](https://www.popmech.ru/science/8906-krasota-povtora-fraktaly/) - фракталы в геометрии
5. [**https://fishki.net/1922148-fraktaly-krasota-matematiki.html**](https://fishki.net/1922148-fraktaly-krasota-matematiki.html)- изображения фракталов
6. [**http://fraktalsworld.blogspot.com/p/blog-page\_13.html**](http://fraktalsworld.blogspot.com/p/blog-page_13.html) - фракталы в алгебре
7. [**https://eek.diary.ru/p76518778.html**](https://eek.diary.ru/p76518778.html)- литература о фракталах

**2.Основная часть**

**Ⅰ Глава**

**Что такое фрактал?**

У этого понятия нет строгого определения. Поэтому слово «фрактал» не является математическим термином.

Фрактал – самоподобие (копирование) множества или геометрической фигуры, где каждый фрагмент дублируется в уменьшающемся масштабе. В природе это явление встречается очень часто.

Можно сказать, что фрактал – это узор, который повторяет сам себя в разных масштабах до бесконечно малого или/и бесконечно большого. Он рождается не просто повторением форм, а скорее повторением процесса, который применяется к форме. Бесконечная цепочка самопостроения. [3]

## История открытия фракталов

Опираясь на найденные интересные артефакты, мы видим, что знаниями о фракталах располагали люди ещё в древности. Их изображение мы находим на керамике Трипольской культуры (с 5450 по 2700 год. до н. э.), в очертаниях построения селений и городищ, архитектуре зданий.

На данный момент нам не известно, каким термином называли наши предки явление самоподобия объектов. Но точно можно сказать, что знания о фракталах входили в раздел «сакральной геометрии» прошлого. Понимание математической закономерности всего миропорядка было естественным ещё тысячелетия назад.

К примеру, выдающемуся [зодчему Древнего Египта Имхотепу](https://allatravesti.com/imhotep_pervyy_v_mire_astronom_) удалось возвести первую в стране ступенчатую пирамиду – грандиозное фрактальное сооружение с чёткими математическими пропорциями. А во времена существования ордена Тамплиеров по всей Европе получил широкое распространение готический стиль архитектуры – воплощение сакральной геометрии и фрактальных узоров в камне.

Однако, со временем учёные выбрали другой, материалистический путь развития науки, который увёл нас далеко от этих знаний, и божественные законы были забыты. [3]

**Как современники пришли к понятию «фрактал»**

На рубеже 19-20 веков изучение природы фракталов носило эпизодический характер. Это объясняется тем, что математики предпочитали изучать объекты, поддающиеся исследованию, на основе общих теорий и методов. Хельге фон Кох в 1904 году построил непрерывную кривую, не имеющую нигде касательной. Ее довольно легко нарисовать, и, как оказалось, она характеризуется фрактальными свойствами. Один из вариантов данной кривой назвали в честь ее автора – «снежинка Коха». Далее идею самоподобия фигур развивал француз Поль Леви. В 1938 году он опубликовал статью «Плоские и пространственные кривые и поверхности, состоящие из частей, подобных целому». В ней он описал новый вид – С-кривую Леви. Все вышеперечисленные фигуры условно относятся к такому виду, как геометрические фракталы. [3]

Первыми исследователями динамических и алгебраических фракталов стали французские математики Пьер Фату и Гастон Жюлиа. В 1918 году Жюлиа опубликовал работу, в основе которой лежало изучение итераций (многократных повторений) рациональных комплексных функций. Здесь он описал семейство фракталов. Невзирая на то, что данная работа прославила автора среди математиков, о ней быстро забыли. И только спустя полвека благодаря компьютерам труд Жюлиа получил вторую жизнь. ЭВМ (Электронно-вычислительная машина) позволила сделать видимым для каждого человека ту красоту и богатство мира фракталов, которые могли «видеть» математики, отображая их через функции. Мандельброт стал первым, кто использовал компьютер для проведения вычислений (вручную такой объем невозможно провести), позволивших построить изображение этих фигур. При жизни Бенуа Мандельброт неоднократно говорил, что он не занимается формулами, а просто играет с картинками. Этот человек мыслил очень образно, а любую алгебраическую задачу переводил в область геометрии, где, по его словам, правильный ответ всегда очевиден.[2] Таким образом, множества Жюлиа приобрели геометрические формы. В 1980 г. программа отпечатала нечто похожее на кляксу. Это простое на первый взгляд изображение при приближении выявляет в себе новые и новые отображения множеств Жюлиа, которым нет предела.

Много современных учёных успешно работали в данном направлении. Заслуга Бенуа заключается в том, что он первым визуализировал уже имеющиеся формулы, показав всему миру их невероятную красоту, и дал ныне существующее название этому явлению. [3]

## Ⅱ Глава

## Виды фракталов

Фракталы бывают разных видов, рассмотрим некоторые из них:

* геометрические;
* алгебраические;
* стохастические;
* концептуальные (социокультурные, непространственные и т.д.)

**Геометрические**

**Геометрические виды фракталов** являются самыми наглядными и простыми в строении. Увидеть их может любой человек. Множество таких фракталов можно нарисовать на обычном листке бумаги в клетку. Примером являются: Треугольник Серпинского, Снежинка Коха, Н-фрактал, Т-фрактал, Дракон, Кривая Леви, Дерево Пифагора.

Рассмотрим принцип построения фракталов на примере – **«Снежинки Коха»**.

Он строится путём многократного разделения отрезка линии на 3 равные части и замены средней части на 2 новых отрезка той же длины. Число сторон каждый раз учетверяется, вследствие чего становится бесконечно великим. Периметр снежинки имеет бесконечную длину, но площадь при этом конечна, так как фигура является замкнутой.

«Снежинка Коха» стала основой фрактальных антенн, которые мы используем в мобильных устройствах. Благодаря такой форме антенны имеют компактный размер с широким диапазоном действия.

По принципу построения интересен также **«Треугольник Серпинского»**.

1. Возьмём равносторонний треугольник, отметим середины его сторон.
2. Соединим срединные точки прямыми линиями. Образовались 4 треугольника.
3. Центральный треугольник вынимаем и «выкидываем».

Теперь повторим эту операцию с каждым из вновь образовавшихся треугольников. И так до бесконечности.

Из этого примера легко увидеть, что количество треугольников увеличивается, и сумма их периметров (сумма сторон треугольников) стремится к бесконечности, а сумма площадей – к нулю.

Треугольник Серпинского имеет нулевую площадь. Разбирая способ построения, можно увидеть, что «вынимая» из треугольника всё наполнение после каждой итерации (повторение операции построения), мы постоянно уменьшаем его площадь и в результате сводим её к нулю.

**Алгебраические фракталы**

Это самая крупная группа фракталов, которая базируется на основе разных алгебраических формул.

Множество Мандельброта является одним из самых известных алгебраических фракталов, в том числе за пределами математики, благодаря своим цветным визуализациям. Его фрагменты не строго подобны исходному множеству, но при многократном увеличении определённые части всё больше похожи друг на друга. [1]

Не менее популярным является способ построения, основанный на комплексной динамике. В результате образуются фракталы, напоминающие живые организмы – биоморфы.

**Стохастические фракталы**

Строятся путём хаотического изменения некоторых параметров. При этом получаются объекты, очень похожие на природные. Фракталы данного вида широко применяются в киноиндустрии. С помощью компьютерной графики создаются искусственные горы, облака, поверхности моря, планеты, береговые линии, несимметричные деревья. Также представителем данного вида является – «плазма» в природе:

* Молния
* Северное сияние
* Пламя

**Концептуальные фракталы**

Этот вид объединяет непространственные структуры, выходящие за рамки геометрической фрактальности. Принцип многоуровневого самоподобия заложен в культурных произведениях. В художественных текстах (стихах для детей, народных песнях, в музыкальных произведениях и сказках) часто встречается «рассказ в рассказе».

Например:

«У попа был двор, на дворе был кол, на колу мочало – не начать ли сказочку сначала?... У попа был двор...»

или

Сказка «Репка»:

Дедка, бабка.

Дедка, бабка, внучка.

Дедка, бабка, внучка, Жучка и т.д.

Фрактальность наблюдается в организации человеческих поселений (страна – город – квартал); в распределении общества на группы (народ – общество – семья – человек). Сюда же отнесём фрактальность взаимоотношений, которые начинаются с самого человека. Меняется человек, его восприятие, внутреннее состояние – изменяется взаимоотношение в семье, коллективе, в итоге преобразуется всё общество. Прослеживается фрактальность в иерархических системах управления. [3]

**Фрактальные формы в природе**

Один из наглядных примеров фрактальной формы – береговые линии, которые отличаются друг от друга степенью своей изрезанности. Нет абсолютно одинаковых протоков, но их общие очертания как будто нарисованы одним лекалом. Эти очертания независимо от размера очень похожи. Маленький проток – это уменьшенная копия большого.

Растительный мир нашей зелёной планеты богат и разнообразен. На первый взгляд кажется, что в нём нет никакой закономерности: растения в лесу расположены беспорядочно, ветки с листьями на растениях тоже. Но возьмём, к примеру, дерево. Если рассматривать дерево, поднимаясь от основания к вершине, то видно, как от ствола отходят большие ветви, на больших ветвях идёт такое же разветвление меньших веток, и дальше форма разветвления в любой части дерева будет повторяться, лишь уменьшаясь в размере к вершине. И зная принципы построения фракталов, изучив все закономерности расположения веток на вершине дерева, нетрудно догадаться, как выглядит это же дерево у своего основания.

Крона – это видимая часть дерева, которая является отражением корневой системы. А корни, в свою очередь, тоже имеют ярко выраженное фрактальное строение.

Самое интересное, что прожилки на листьях тоже образуют фрактальный рисунок, очень похожий на плоское миниатюрное дерево. Нет листьев с одинаковым рисунком, так же как нет людей с одинаковым отпечатком пальца. Рисунок на каждом листе уникален.

Один из самых старых видов наземных растений – папоротники. Учёные полагают, что они существуют более 350 млн. лет. Строение листа этого растения очень похоже на компьютерный фрактал. Именно это растение является ярким доказательством того, что чем древнее биологическая форма, тем чётче в ней прослеживается фрактал, то есть форма организма строится по простым правилам.

Съедобные растения тоже несут в себе формы самоподобия. Красная капуста в продольном срезе имеет фрактальный рисунок.

Казалось бы, тугой кочан капусты, а его красота может вдохновить даже художника. Белые утолщения центральных черенков плотно прижатых листьев образуют волшебный фрактальный лабиринт.

Лишайники – это самые древние представители растительного мира, поэтому фракталы в них выражены особенно ярко. В их узлах содержатся те же фрактальные формы, что и по краям. [3]

**Выход фракталов в свет**

В 1982 году вышла книга Мандельброта «Фрактальная геометрия природы», в которой автор собрал и систематизировал практически всю имевшуюся на тот момент информацию о фракталах и в легкой и доступной манере изложил ее. Основной упор в своем изложении Мандельброт сделал не на формулы и математические конструкции, а на геометрическую интуицию читателей. Благодаря иллюстрациям, полученным при помощи компьютера, и историческим байкам, которыми автор умело разбавил научную составляющую монографии, книга стала бестселлером, а фракталы стали известны широкой публике. Их успех среди нематематиков во многом обусловлен тем, что с помощью весьма простых конструкций и формул, которые способен понять и старшеклассник, получаются удивительные по сложности и красоте изображения. Когда персональные компьютеры стали достаточно мощными, появилось даже целое направление в искусстве — фрактальная живопись, причем заниматься ею мог практически любой владелец компьютера. Сейчас в интернете можно легко найти множество сайтов, посвященных этой теме. [4]

**3. Заключение**

Понимание фрактального устройства упростило многие сферы научных исследований. Удивительная особенность фракталов – повторение аналогичного рисунка в разных масштабах – позволяет нам, изучив малую часть какого-либо события или явления, предполагать об устройстве целого.

Это свойство позволило более точно рассчитывать площади неровных изломанных поверхностей. Например, географических, таких как береговые линии, облака, или биологических – внутренняя поверхность лёгких или нервных волокон.

Фрактальное строение ландшафта позволило создавать 3D модели гор, облаков, берега, что широко используется в компьютерной графике кинематографа, программ обучения водителей, лётчиков, а также в компьютерных играх. В технической сфере мы научились производить фрактальные антенны, которые позволяют значительно уменьшить размеры конструкции, и расширить диапазон принимаемых частот без увеличения объёма и громоздкости.

Применение фрактального свойства в архитектуре привело к появлению новых необычных форм с увеличением прочности строений.

Знания о фракталах нашли применение во всех сферах жизни человека – в физике, экономике, культуре, биологии, геологии и т.д.

Но главное – это реальный шанс по-новому взглянуть на мироустройство, которое пронизано фракталами вдоль, поперёк и насквозь. Например, изучение галактики, позволило учёным приблизиться к пониманию о строении Вселенной и о параллельных мирах.