
EA MAP512 - 3.10 : COMPÉTITION À DEUX TYPES

par

Michel Florent, Jean-Baptiste Soubaras, Shouda Wang

Résumé. — Nous étudions des modèles de chase-escape définis sur différents types de graphes, dont les graphes complets, les arbres n -aires, les réseaux \mathbb{Z}^d .

Table des matières

Introduction	2
1. Cas sommaire chase-escape	3
1.1. Le graphe complet	3
1.2. L'arbre d-aire	8
2. Chase-escape dans \mathbb{Z}^d	11
2.1. Percolation orientée	12
2.2. Chase-escape dans \mathbb{Z}^2	15
3. Applications à des graphes plus généraux	20
3.1. L'arbre à attachement préférentiel	20
3.2. Étude d'un graphe particulier : un réseau d'amis Facebook	23
Références	26

Introduction

Nous étudions un modèle épidémiologique de compétition à deux types que l'on appellera chase-escape dans la suite et qui a été introduit par Kordzakhia puis Bordenave. On considère alors un graphe à n sommets qui peuvent par exemple représenter n individus qui peuvent être de trois types différents : S comme susceptible, I comme infecté et R comme rétabli. Les individus infectés peuvent propager une maladie à leurs voisins susceptibles (qui deviennent alors infectés) avec un taux de λ fixé à l'avance et les individus rétablis peuvent guérir leurs voisins infectés (qui deviennent alors rétablis) avec un taux de 1. Cela permet ainsi de modéliser la propagation d'une épidémie au sein d'une population dans laquelle les liens entre les individus sont représentés par les arêtes d'un graphe. Cependant, le champ d'application est plus large puisque ce modèle est également pertinent pour modéliser la propagation d'une rumeur ou encore la propagation de deux espèces dans un environnement.

Plus précisément, comme décrit dans [Bor14], pour chaque arête (x, y) tel que x est de type I et y est de type S à un instant t_0 , alors on tire (indépendamment des autres) une durée de propagation $t_{(x,y)}$ suivant la loi exponentielle de paramètre λ , notée $\mathcal{E}(\lambda)$ dans la suite. Si le type des deux arêtes ne change pas pendant l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + t_{(x,y)}[$ alors l'individu y devient infecté à l'instant $t_0 + t_{(x,y)}$.

De même si x est de type R et y est de type I mais avec un temps de propagation qui suit la loi $\mathcal{E}(1)$.

Le but de notre travail est alors d'explorer le comportement de ce modèle sur différents types de graphes simples comme le graphe complet, les arbres d-aires pour $n \rightarrow +\infty$ ou encore \mathbb{Z}^d ainsi que sur des graphes plus complexes plus proches de situations réelles (arbres à attachement préférentiel, graphe issu de Facebook). En particulier, nous nous sommes penchés sur l'influence du taux de propagation λ et sur l'existence de transition de phase suivant la valeur de ce paramètre. Par exemple, suivant le type de graphe, la maladie peut-elle se propager dans l'ensemble du graphe même si $\lambda < 1$?

On a alors simulé le processus sur ces différents types de graphes afin de retrouver des résultats théoriques sur les taux de propagation critiques ou encore les distributions du nombre d'individus de chaque type à la fin de la propagation. Ensuite, nous nous sommes intéressés à un résultat théorique dans le cas de \mathbb{Z}^2 que nous avons relié à la percolation orientée. Enfin, nous avons à nouveau fait des simulations pour observer le comportement du modèle sur des graphes plus réalistes.

En particulier, nous disposons d'un graphe d'amitié Facebook correspondant à la promotion X2018 (il existe une arête entre deux étudiants si ils sont amis sur Facebook) qui a été obtenu par scrapping et sur lequel nous avons propagé le modèle.

1. Cas sommaire chase-escape

1.1. Le graphe complet. — Le premier cas particulier que nous avons traité est celui du graphe complet. Ainsi, on considère $N+2$ individus et on place une arête entre n’importe quel couple d’individus. Remarquons l’absence de géométrie de ce graphe : tous les sommets jouent le même rôle. De plus, on initialise le processus avec un individu infecté, un individu rétabli et N individus susceptibles. Enfin, on arrête le processus lorsqu’il ne reste plus d’individus infectés (la maladie a été éradiquée) ou plus d’individus susceptibles (la maladie s’est propagée à tous les individus) comme dans [Kor15].

1.1.1. Simulation du processus. — Afin de simuler le processus, nous avons d’abord essayé une approche naïve consistant à simuler une durée de propagation pour chaque arête en parcourant toutes les arêtes et en regardant pour chacune d’entre elles si il faut simuler une durée de propagation (pour une arête entre I et S ou entre R et I), et si oui, quel est le paramètre de la loi exponentielle que suit la durée de propagation (λ pour $I-S$, 1 sinon). La complexité temporelle nécessaire pour effectuer une simulation était alors beaucoup trop importante : il fallait trouver une autre approche.

On remarque alors qu’étant donné l’absence de géométrie, il n’y a même pas besoin de créer un graphe lors de l’implémentation, il suffit de garder en mémoire le nombre d’individus de chaque type (S , I et R). Ainsi, à un instant fixé, il y a $I * S$ arêtes entre individus de type S et I et $R * I$ arêtes entre individus de type R et I .

A chaque étape de la propagation, seules deux transitions sont possibles : $(S, I, R) \rightarrow (S-1, I+1, R)$ et $(S, I, R) \rightarrow (S, I-1, R+1)$ selon si la propagation s’effectue depuis un individu de type I ou R . Il suffit donc de déterminer la probabilité d’une de ces deux transitions.

On sait que I se propage plutôt que R si la plus petite durée de propagation des arêtes de type $I-S$ est inférieure à la plus petite durée de propagation des arêtes de type $R-I$. Or, ces deux plus petites durées suivent respectivement des lois exponentielles de paramètres $I * S * \lambda$ et $R * I * 1$ en tant que minimum de variables aléatoires exponentielles indépendantes de même paramètre. On en déduit le résultat suivant :

$$\mathbb{P}((S, I, R) \rightarrow (S-1, I+1, R)) = \mathbb{P}(\mathcal{E}(I * S * \lambda) < \mathcal{E}(R * I * 1)) = \frac{I * S * \lambda}{I * S * \lambda + R * I} = \frac{\lambda S}{\lambda S + R}$$

Grâce à l’absence de géométrie du graphe et aux propriétés de la loi exponentielle, on a donc une formule explicite pour chacune des deux probabilités de transition, ce qui nous permet de simuler aisément le processus de chase-escape.

1.1.2. Vérification des résultats théoriques. — Les résultats qui suivent sont issus de [Kor15].

Notons E_{ext}^N l’évènement où il ne reste plus d’individus susceptibles. On commence par s’intéresser à la probabilité d’extinction $\mathbb{P}(E_{ext}^N)$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Proposition 1.1. — On a :

Si $0 < \lambda < 1$: $\mathbb{P}(E_{ext}^N) \rightarrow 0$.

Si $\lambda = 1$: $\mathbb{P}(E_{ext}^N) \rightarrow \frac{1}{2}$.

Si $\lambda > 1$: $\mathbb{P}(E_{ext}^N) \rightarrow 1$.

Ainsi, on assiste à une transition de phase autour de la valeur critique $\lambda = 1$, ce qui est plutôt intuitif puisque les deux types d'individus ont autant d'espace dans le graphe, ce qui entraîne que si un type de propagation a un taux strictement supérieur, alors il va l'emporter sur l'autre. De plus, si les taux sont égaux, alors par symétrie, les deux types de propagation semblent avoir autant de chance de l'emporter.

Par une méthode de Monte-Carlo, on peut estimer la probabilité d'extinction : pour chaque valeur de λ , on simule 1000 fois le processus pour $N = 1000$ et on calcule la proportion d'extinction.

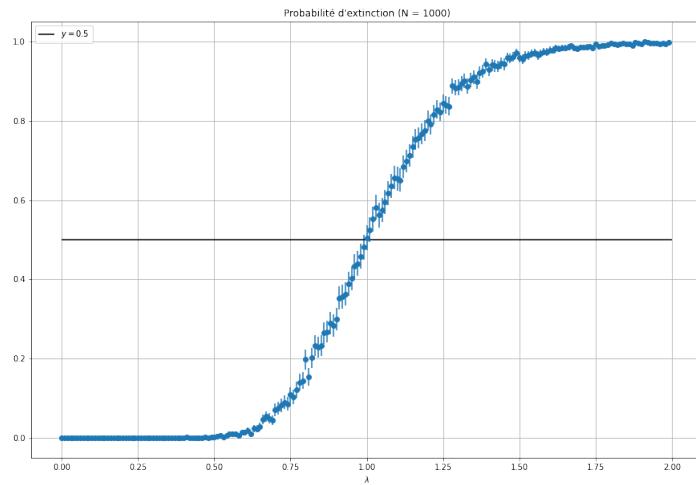


FIGURE 1. Probabilité d'extinction en fonction de λ

On a ensuite des résultats de convergence en loi (lorsque $N \rightarrow +\infty$) sur le nombre d'individus de chaque type à la fin de la propagation, avec encore une fois une trichotomie selon la valeur du paramètre λ :

Proposition 1.2. — On a :

Si $0 < \lambda < 1$: $\frac{S^{(N)}}{N^{1-\lambda}} \rightarrow \mathcal{E}(1)^\lambda$

Si $\lambda = 1$: $\forall i \geq 0, \mathbb{P}(S^{(N)} = i) \rightarrow \frac{1}{2^{i+1}}$

Si $\lambda > 1$: $S^{(N)} \rightarrow 0$

Par une méthode de Monte-Carlo, en simulant 1000 fois le processus pour λ fixé, on peut alors comparer les distributions théoriques avec les distributions empiriques.

Lorsque la statistique que l'on regarde prend un nombre fini de valeurs entières, on incrémente un compteur pour chaque valeur possible et on compare en chaque point la

proportion empirique avec la probabilité théorique.

Simons, on effectue un histogramme et on y superpose la densité théorique correspondante afin de vérifier la convergence en loi.

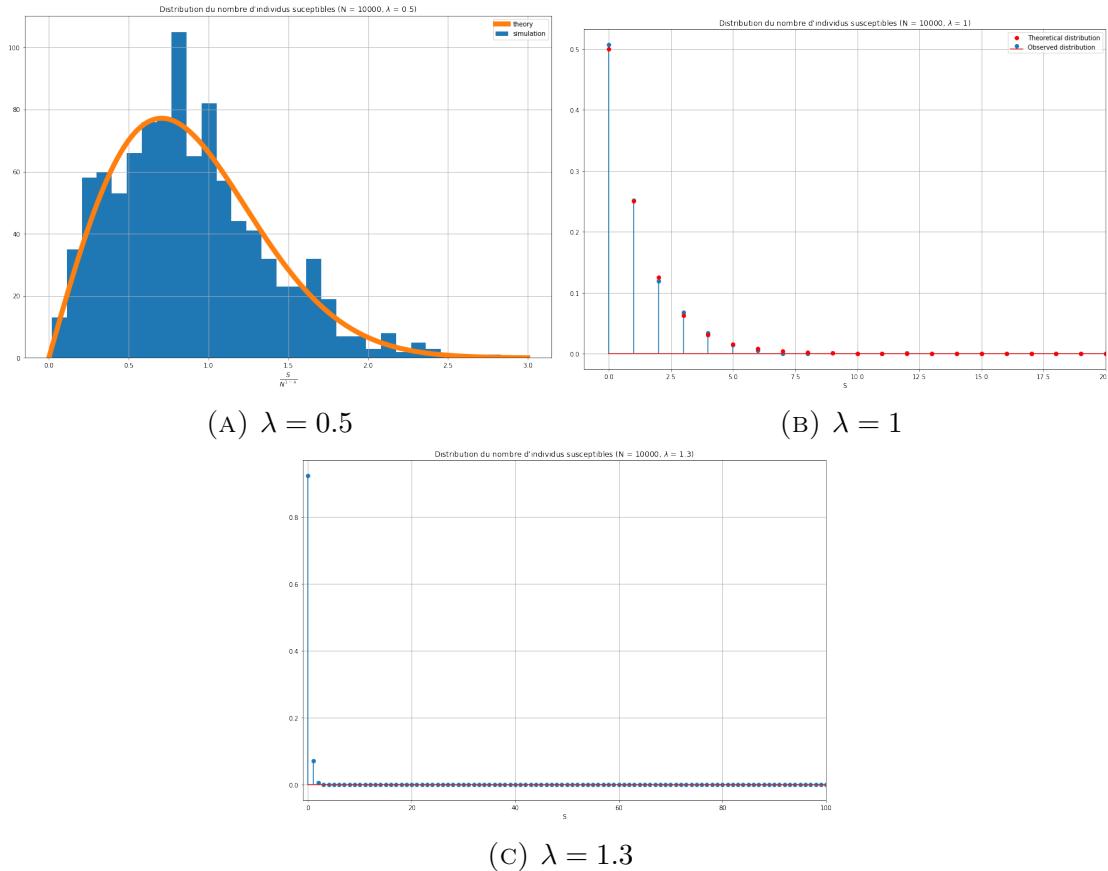


FIGURE 2. Distributions des fonctions de S ($N = 10000$, 1000 itérations)

On a ainsi une superposition assez satisfaisante entre les distributions théoriques et empiriques pour un graphe complet avec 10002 sommets en simulant 1000 fois le processus.

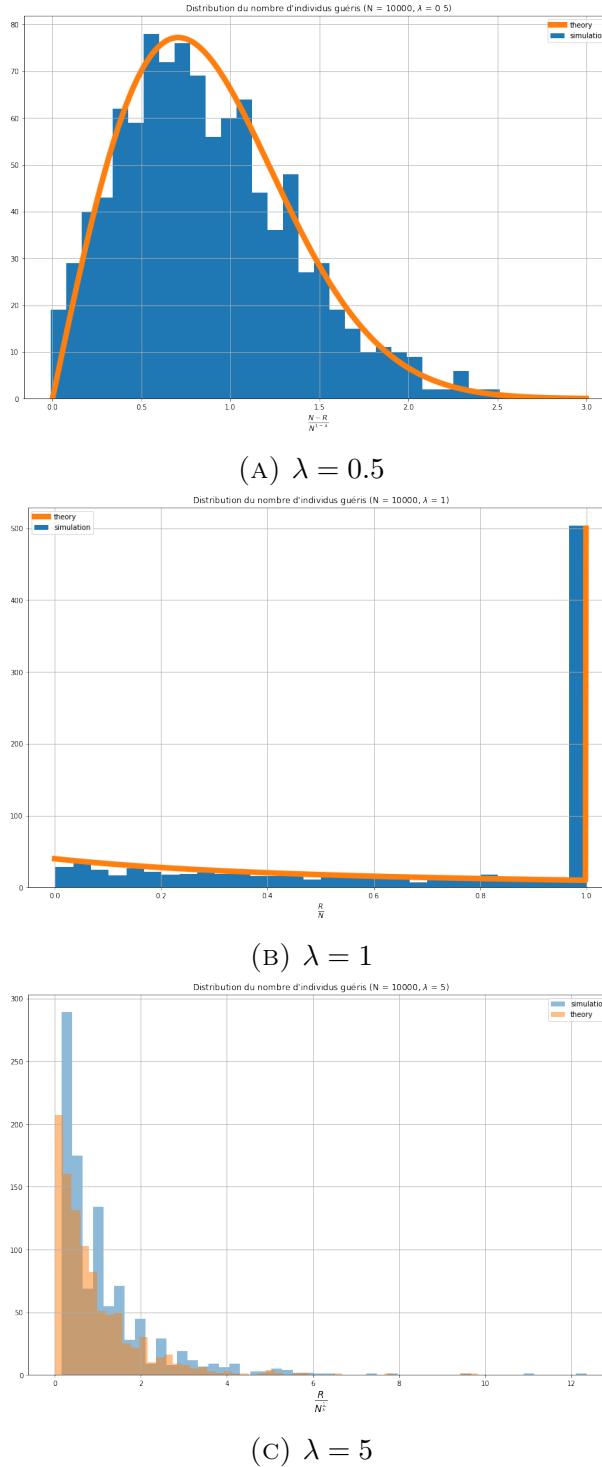
Ici, on a pu calculer la densité exacte de la loi $\mathcal{E}(1)^\lambda$ qui est $f(x) = \frac{1}{\lambda}x^{\frac{1}{\lambda}-1}e^{-x^{\frac{1}{\lambda}}}$ en dérivant la fonction de répartition que l'on obtient facilement à partir de celle de la loi exponentielle. Cependant, dans les théorèmes suivants, on rencontrera une loi dont on ne sait pas exprimer facilement la densité. On superposera alors un histogramme de cette loi obtenue par méthode de Monte-Carlo avec la distribution empirique du processus de chasse-escape.

Proposition 1.3. — *On a :*

$$\text{Si } 0 < \lambda < 1 : \frac{N-R^{(N)}}{N^{1-\lambda}} \rightarrow \mathcal{E}(1)^\lambda$$

$$\text{Si } \lambda = 1 : \frac{R^{(N)}}{N} \rightarrow \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{(1+x)^2}1_{[0,1]}(x)dx$$

$$\text{Si } \lambda > 1 : \frac{R^{(N)}}{N^{\frac{1}{\lambda}}} \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{E}(1)^{\frac{1}{\lambda}})$$

FIGURE 3. Distributions des fonctions de R ($N = 10000$, 1000 itérations)

Encore une fois, les superpositions sont assez satisfaisantes, et la masse semble équitablement répartie entre le dirac en 1 et le reste de la distribution pour le cas où λ vaut 1.

Proposition 1.4. — On a :

Si $0 < \lambda < 1 : I^{(N)} \rightarrow 0$

$$Si \ \lambda = 1 : \frac{I(N)}{N} \rightarrow \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{(2-x)^2}1_{[0,1]}(x)dx$$

$$Si \ \lambda > 1 : \frac{N_I^{(N)}}{N^{\frac{1}{\lambda}}} \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{E}(1)^{\frac{1}{\lambda}})$$

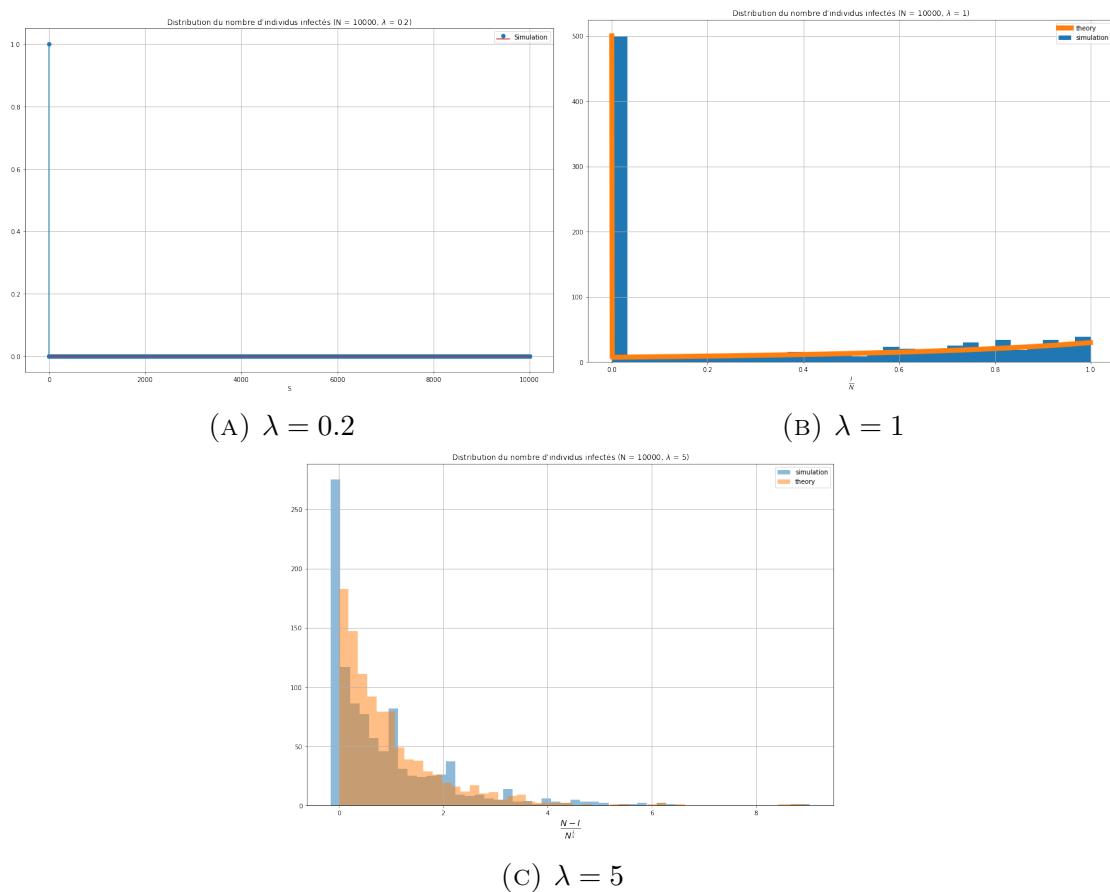


FIGURE 4. Distributions des fonctions de I ($N = 10000$, 1000 itérations)

On retrouve des distributions proches de celles des théorèmes précédents et la superposition est aussi bonne. De plus, on observe que pour $\lambda = 0.2$, le nombre d'itérations effectuées n'est même pas suffisant pour obtenir une occurrence où il y a un nombre non nul d'individus infectés à la fin de la propagation, signe que la convergence est rapide pour des petites valeurs de λ . Notons que pour $\lambda = 1.3$, lorsque l'on regarde le nombre d'individus susceptibles, la convergence est plus lente (cf plus haut) puisque 1.3 est assez proche de 1.

1.2. L’arbre d-aire. — Le modèle de l’arbre d-aire de dimension d est un arbre infini où chaque sommet a d fils. On le notera ici \mathbb{T}_d . Dans le modèle du chase-escape sur ce type de graphe, la situation initiale est la suivante : la racine de l’arbre est de couleur rouge, et on rajoute un sommet qui a la racine comme seul voisin et que l’on colorie en bleu. Cette situation est équivalente à n’importe quelle autre situation initiale.

1.2.1. Simulation du processus. — Pour simuler l’algorithme de chase-escape, la première méthode envisagée fut la méthode naïve, consistant en le calcul des temps de propagation de chaque arête concernée à chaque modification du graphe. Mais les propriétés de la loi exponentielle permettent une implémentation plus simple et plus rapide en temps de calcul.

Pour ce faire, on calcule à chaque itération de l’algorithme tout d’abord la probabilité que l’infection se propage avant le rétablissement, qui est $\mathbb{P}(I \text{ se propage avant } R) = \frac{\lambda \cdot \#\{\text{aretes } I-S\}}{\lambda \cdot \#\{\text{aretes } I-S\} + \#\{\text{aretes } I-R\}}$, $\{\text{aretes } I-S\}$ étant l’ensemble des arêtes du graphe reliant un sommet susceptible à un sommet infecté et $\{\text{aretes } I-R\}$ étant celui des arêtes entre un infecté et un rétabli. On tire ensuite selon une loi de Bernoulli de paramètre p , si le résultat est 1 on choisit uniformément une arête de $\{\text{aretes } I-S\}$, sinon on choisit uniformément une arête de $\{\text{aretes } I-R\}$. Dans l’arête retenue, on infecte le sommet susceptible ou rétablit le sommet infecté selon le cas. La loi exponentielle étant une loi sans mémoire, on peut itérer cette étape, ce qui permet de travailler avec un nombre discret d’itération plutôt qu’avec un paramètre de temps continu. On représentera l’état de chaque sommet par sa couleur : blanc pour susceptible, rouge pour infecté et bleu pour rétabli.

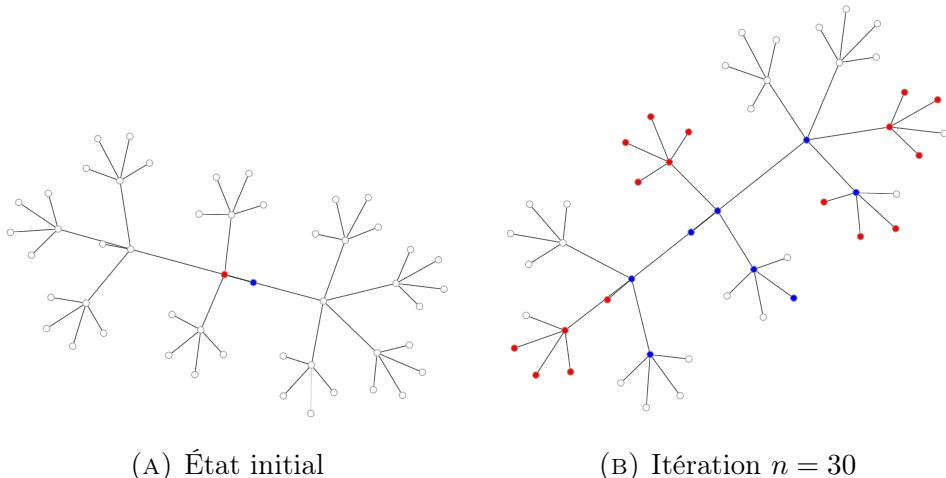


FIGURE 5. Simulation de l’algorithme sur l’arbre d-aire de dimension $d = 4$, avec $N = 50$

La majeure complication de cette situation par rapport au premier cas est l’infinitude du graphe. L’implémentation prend donc seulement en compte un graphe fini, sur lequel

il fait tourner un certain nombre d'itérations. Si au bout de ce nombre d'itérations, il reste encore des sommets rouges, on considère qu'il y a cohabitation. Cela implique donc d'avoir un nombre d'itérations en paramètre suffisamment grand pour estimer au mieux la situation de cohabitation et une taille de graphe suffisamment grande pour éviter que l'infection se propage jusqu'aux extrémités de l'arbre.

La méthode décrite ici sera utilisée avec tous les types de graphe qui vont suivre dans ce rapport.

1.2.2. Étude de $\lambda_c(\mathbb{T}_d)$. — La valeur de λ_c est énoncée et démontrée dans l'article [DJT20]. D'un point de vue terminologique, on désignera par A l'événement "les couleurs rouge et bleue coexistent à tout moment sur le graphe", et par $P_\lambda(A)$ la probabilité de cet évènement.

Proposition 1.5. — Dans l'arbre d -aire de dimension d avec $d \geq 2$,

$$\lambda_c(\mathbb{T}_d) = 2d - 1 - 2\sqrt{d^2 - d} \sim \frac{1}{4d}$$

et $P_{\lambda_c}(A) = 0$.

Afin de vérifier expérimentalement cette propriété, nous avons d'abord tracé la courbe de $P_\lambda(A)$ en fonction de λ pour différentes valeurs de d évaluée par méthode de Monte-Carlo.

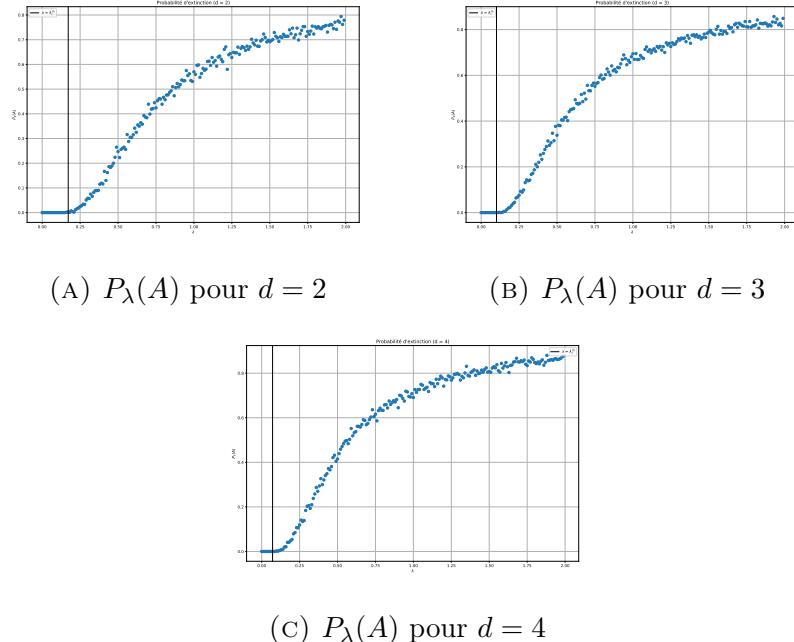


FIGURE 6. Probabilité d'extinction en fonction de λ pour différentes valeurs de d . En noir, la valeur théorique de $\lambda_c(\mathbb{T}_d)$

Comme attendu, cette probabilité d'extinction est croissante en lambda, et on peut bien constater qu'elle est nulle jusqu'à environ λ_c^{th} et monte dans le strictement positif juste après, on peut donc s'en servir pour estimer la valeur de λ_c de manière approchée. On peut déjà voir que $\lambda_c^{exp} \xrightarrow{d \infty} 0$ et que l'augmentation de $P_\lambda(A)$ est assez brutale (sa dérivée seconde est élevée) et ce phénomène semble s'accentuer quand d augmente.

Nous avons ensuite tracé la courbe de $\lambda_c^{experimental}(\mathbb{T}_d)$ en fonction de d et l'avons comparé à celle de $\lambda_c^{theorique}(\mathbb{T}_d)$.

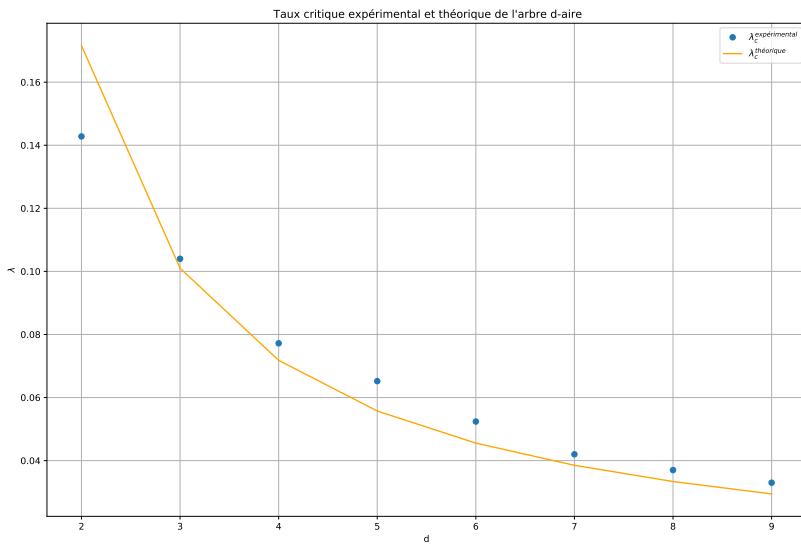


FIGURE 7. λ_c expérimental et théorique en fonction de d

Les valeurs expérimentales sont effectivement assez proches de la courbe théorique, même si le profil a l'air légèrement différent. Cette incertitude s'explique d'une part par la finitude du graphe implémenté, qui empêche l'infection de se propager au delà de ses limites et facilite son extinction, notamment pour les plus hautes dimensions (il aurait fallu augmenter la taille de l'arbre de manière exponentielle si on avait voulu s'assurer que la profondeur reste la même en augmentant la dimension ce qui aurait demandé trop de temps de calcul) ; d'autre part, la finitude du nombre d'itérations de l'algorithme peut amener à considérer certaines situations comme situations de coexistence alors que la probabilité d'extinction est peut être faible mais non nulle.

2. Chase-escape dans \mathbb{Z}^d

Dans [DJT20] Durrett, Junge, et Tang ont proposé un modèle de chase-escape sur \mathbb{Z}^d comme suit : A chaque moment, chaque site (un site est par définition un élément dans \mathbb{Z}^d) est soit libre, soit rouge, soit bleu. Dans le contexte de biologie, on peut regarder les deux couleurs comme étant représentantes de deux espèces en préation : Un site est rouge si il est occupé par une proie et il est bleu si occupé par un prédateur. Il est remarquable dans ce modèle que sous certaines conditions, les proies ont une chance de coexister avec les prédateurs même si le temps de passage pour les proies est stochastiquement strictement supérieure au temps de passage pour les prédateurs.

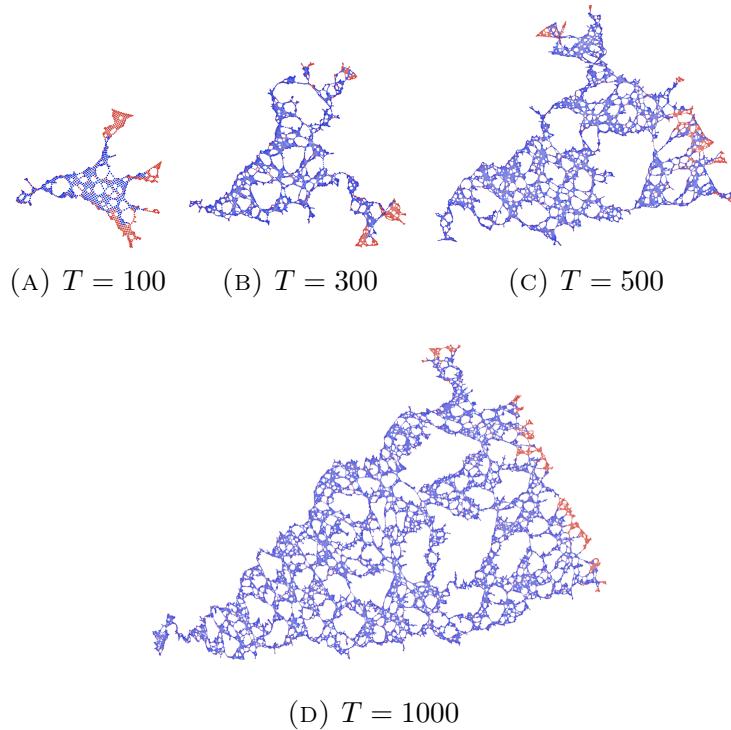


FIGURE 8. L'évolution au cours du temps ; $p = 0.7$, $m = 10$

Définition du modèle : Au moment 0, le site $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ est rouge et le site $(-1, 0, \dots, 0)$ est bleu, les autres sites étant sans couleurs. Au cours du temps, un site rouge ne peut que se diffuser dans des directions positives : si à un moment le site $x \in \mathbb{Z}^d$ est occupé par une proie, alors le prochain moment cette proie peut se diffuser vers les sites $(x + e_i)_{i=1}^d$, où les $(e_i)_{i=1}^d$ désignent la base standard de \mathbb{R}^d . On impose de même pour les sites bleus, et en plus que les sites bleus ne se déplacent pas vers des sites libres.

Le temps de passage de chaque arrête (dénotée \vec{e}), pour chaque couleur (R et B), est mutuellement indépendant et suit la loi suivante

$$\begin{aligned} t_{\vec{e}}^R &\sim p\delta_1 + (1-p)\delta_\infty, \\ t_{\vec{e}}^B &\sim p\delta_0 + (1-p)\delta_m, \end{aligned}$$

où $p \in (0, 1)$ et $m \in (0, +\infty)$. On observe que p est la probabilité que la proie puisse passer par une arrête. En plus t_e^B est effectivement stochastiquement dominé par t_e^R car $0 < 1$ et $m < +\infty$.

Puisqu'il est possible (notamment si $m \in \mathbb{N}$) que le bleu veut occuper un site rouge au même moment où ce site veut diffuser sa couleur rouge vers ses voisins, pour que le modèle soit bien défini on impose que les rouges ne bougent qu'après que les bleus ont fini de se propager.

Un modèle similaire simulant la compétition à deux types fut introduit par Häggström et Pemantle [HP98], qui est une généralisation du modèle de Richardson [Ric73]. Leur modèle comprend également deux espèces, soient rouge et bleu, qui visent à occuper des sites libres dans \mathbb{Z}^2 . Plus précisément, la diffusion des deux espèces se fait de la manière suivante : chaque site libre se transforme en rouge (bleu resp.) à une vitesse égale au nombre de ses voisins rouges (bleus resp.) ; une fois qu'un site admet une couleur, il y reste dans le reste du temps. Ce modèle n'est manifestement pas un modèle de chase-escape. Il peut cependant être interprété comme la diffusion de deux types de virus, dont l'occupation d'un empêche celle de l'autre. Une autre réalisation consiste à regarder les espèces comme deux biens économiques en concurrence, par exemple le rouge représente les iPhones et le bleu représente les téléphones portables sous Android.

Dans le cas où initialement il n'y a qu'un site rouge et un site bleu, Häggström et Pemantle ont montré qu'avec une probabilité strictement positive, toutes les deux espèces parviennent à occuper une infinité de sites. Garet et Marchand [GM05] ont généralisé ce résultat aux temps de passages supposés stationnaires et ergodiques pour les transformations $((x, y) \mapsto (x + n, y + n))_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}}$, sous certaines conditions supplémentaires d'intégrabilité.

2.1. Percolation orientée. — Si dans la configuration initiale il n'y avait pas de site bleu, on reconnaîtrait le modèle de percolation orientée dans \mathbb{Z}^d : Chaque arrête est orientée selon la direction positive et est ouverte (resp. fermée) avec probabilité p (resp. $1 - p$) indépendamment l'une de l'autre. Si une arrête est ouverte, son temps de passage est supposé égal à 1. On dénote C l'événement qu'il existe un chemin formé des arrêtes ouvertes qui lie $\mathbf{0}$ à l'infini (ou de manière équivalente, qu'il y a une infinité de sites rouges).

2.1.1. Historiques et revue de littératures. — La percolation orientée fut introduite par Broadbent et Hammersley dans [BH57] afin de modéliser la diffusion de liquide dans les milieux poreux et d'expliquer éventuellement pourquoi un liquide pénètre certains rochers mais pas d'autres, ce qui est un phénomène intéressant pour ceux qui forraient pour l'huile. La pénétration du liquide d'un rocher peut s'interpréter comme l'événement C défini ci-dessus. Ce phénomène suggère donc qu'une transition de phase demeure dans le modèle de percolation orientée : il existe une probabilité critique $\vec{p}_c(d)$, telle que si $p > \vec{p}_c(d)$, on a $P(C) > 0$. Cela a été prouvé rigoureusement dans [Dur84].

Sans surprise, la valeur exacte de $\vec{p}_c(d)$ n'est pas connue. Cependant, de nombreux résultats en donnent des bornes inférieures ou supérieures.

Hammersley [Ham57] a démontré $\vec{p}_c(2) \geq 0.5176$. Son argument consiste à regarder le nombre N_n de sites rouges sur la ligne $x + y = n$. On pourra montrer $E[N_{mn}] \leq (E[N_n])^m$.

En effet, en prenant chaque site rouge sur la ligne $x + y = n$ comme le site de départ pour une nouvelle percolation orientée que l'on laisse évoluer pendant n itérations, on sait que chacun d'entre eux contribue en moyenne un nombre $E[N_n]$ de sites rouges. En sommant sur tous ses sites on obtient $E[N_{2n}] \leq (E[N_n])^2$. On montre ensuite par récurrence $E[N_{mn}] \leq (E[N_n])^m$. Or $P(C) \leq \inf_n E[N_n]$ car C implique $\{N_n \geq 1\}$. Donc $P(C) > 0$ entraîne $E[N_n] \geq 1$ pour tout n . Hammersley a déduit son estimation du fait que $E[N_2] = 4p^2 - p^4$.

Dhar [Dha82] ensuite a obtenu $\vec{p}_c(2) \geq 0.6298$. Cette borne inférieure n'est pas loin de la valeur donnée par des simulations numériques basées sur la méthode de Monte-Carlo : Kertész et Viseck [KV80] ont donné $\vec{p}_c(2) = 0.632 \pm 0.004$, Dhar et Barma [DB81] suggèrent $\vec{p}_c(2) = 0.6445 \pm 0.0005$, et Essam, Guttman and De'Bell [EGD88] ont obtenu $\vec{p}_c(2) = 0.644701 \pm 0.000001$, etc.

L'une des premières bornes supérieures fut obtenue par Durrett [Dur84] : $\vec{p}_c(2) \leq 0.84$, qui n'est toutefois pas très proche de 0.65 suggérée par des simulations. Balister, Bollobás et Stacey [BBS94] ont démontré $\vec{p}_c(2) < 0.6735$. Liggett a démontré $\vec{p}_c(2) < 2/3$ [Lig95] avec une nouvelle approche basée sur une idée de David Williams, qui avait conjecturé $\vec{p}_c(2) < 2/3$.

try [Kor15]

Pour les dimensions supérieures à 2, Cox et Durrett [CD83] décrivent le comportement asymptotique de $\vec{p}_c(d)$:

$$\vec{p}_c(d) = d^{-1} + d^{-3} + O(d^{-4}).$$

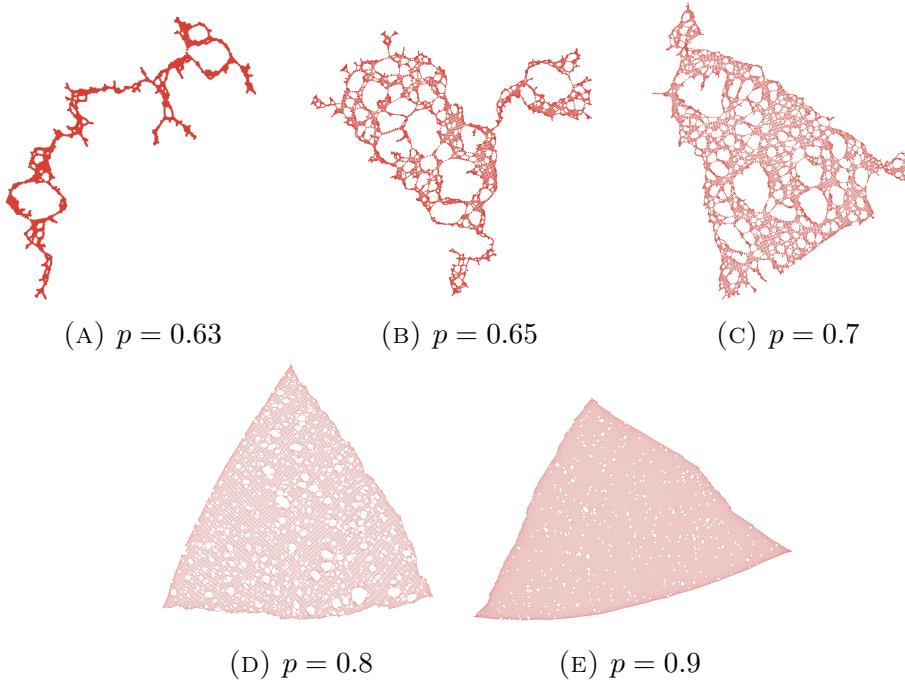


FIGURE 9. Essais pour différentes valeurs de p

Les images dans Figure 9 donnent une idée de l'évolution au cours du temps dans les cas sous-critique (A) et sur-critique (B,C,D,E) : pour $p = 0.63$, à chaque moment le nombre des nouveaux-colorés reste toujours petit si il n'est pas nul, ce qui conduit à ce que à coup sûr l'évolution se termine en temps fini ; pour $p = 0.65$, il est possible que le nombre des nouveaux-colorés augmente au cours du temps, donc il est possible qu'il y ait un chemin infini, ce phénomène devient de plus en plus visible lorsque p augmente (cf. (C), (D), (E)).

Une autre question d'intérêt consiste à regarder le nombre de sites qui sont accessibles par des arrêtes ouvertes depuis $\mathbf{0}$. On dénote l'événement qu'il y en a au moins n par C_n , i.e. $C_n = \{\sum_{k=1}^{\infty} N_k \geq n\}$. On a par exemple $\cap_{n=1}^{\infty} C_n = C$.

En dimension 2, les probabilités $(P(C_n))_n$ décroissent de manière exponentielle ou sous-exponentielle suivant que p est plus petit ou plus grand que $\vec{p}_c(2)$. Griffeath [Gri81] a d'abord montré que si $p < \vec{p}_c(2)$, alors il existe $\eta > 0$ dépendant de p , tel que $P(N_n > 0) \leq e^{-\eta n}$, ce qui implique ensuite qu'il existe $\bar{\eta} > 0$ tel que $P(C_n) \leq e^{-\bar{\eta}\sqrt{n}}$. Durrett [Dur84] a amélioré cette estimation à ce que si $p < \vec{p}_c(2)$, alors il existe $\gamma > 0$ dépendant de p , tel que

$$P(C_n) \leq e^{-\gamma n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(C_n) = -\gamma.$$

Pour le cas sur-critique, Durrett [Dur84] a démontré que pour tout $p \in (\vec{p}_c(2), 1)$, il existe $\alpha, \beta > 0$, dépendants de p , tels que

$$e^{-\alpha\sqrt{n}} \leq P(C_n \setminus C) \leq e^{-\beta\sqrt{n}}.$$

2.1.2. Résultats numériques sur $\vec{p}_c(2)$. — Pour voir de plus près la probabilité critique $\vec{p}_c(2)$, nous avons estimé avec une méthode de Monte-Carlo la valeur de $P_p(C)$ (l'indice p est utilisée pour exhiber explicitement la dépendance en p). Pour ce faire on estime la valeur de $P_p(C_N)$ où C_N désigne l'événement qu'il existe un chemin allant de $\mathbf{0}$ à un des sites dans l'ensemble $\{(n, N-n) \mid 0 \leq n \leq N\}$ et puis on choisit N tellement grand que $P(C) \approx P(C_N)$.

Estimation de $\hat{P}_p(C)$, $p = 0.63$					
N	$N = 100$	$N = 300$	$N = 500$	$N = 700$	$N = 900$
$\hat{P}_p(C_N)$	0.32 ± 0.02	0.16 ± 0.02	0.10 ± 0.02	0.05 ± 0.01	0.04 ± 0.01

Ici et dans tout ce qui suit, l'intervalle de confiance s'obtient par la méthode de «Wilson score interval».

On voit bien que la probabilité que la population s'éteigne décroît lorsque N augmente, ce qui est en accord avec $P(C) = 0$ pour $p = 0.63 < \vec{p}_c(2) \approx 0.6445$.

D'autre part, nous avons aussi simulé la percolation orientée avec $p = 0.65$, ce qui donne $P_p(C) \approx 0.42$ dans ce cas.

Estimation de $P_p(C)$, $p = 0.65$					
N	$N = 100$	$N = 300$	$N = 500$	$N = 700$	$N = 900$
$\hat{P}_p(C_N)$	0.50 ± 0.02	0.45 ± 0.02	0.43 ± 0.02	0.42 ± 0.02	0.42 ± 0.02

2.1.3. Probabilité de percolation en tant que fonction de p . — Nous avons aussi estimé la valeur de $P_p(C)$ pour $p = 0.7, 0.8, 0.9$, et tracé la Figure 10. On s'aperçoit que $P_p(C)$ est apparemment une fonction concave de p sur l'intervalle $(\vec{p}_c(2), 1)$.

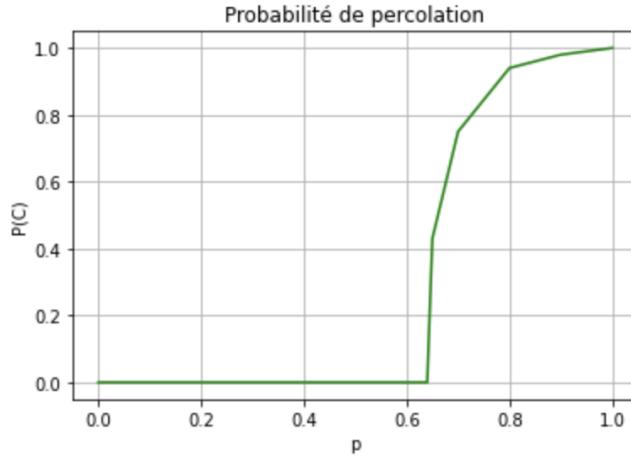


FIGURE 10. La probabilité de percolation $P(C)$ tracée en fonction de p

2.2. Chase-escape dans \mathbb{Z}^2 . — Nous revenons dans le cadre de chase-escape dans un réseaux et nous focalisons sur \mathbb{Z}^2 .

Remarquons d'abord que $p > \vec{p}_c(2)$ est nécessaire pour avoir la coexistence des deux espèces au tout moment. On dénote cet événement par A . On exhibe dans Section 2.2.3 une analyse théorique montrant $P_{p,m}(A) = 0$ pour m assez petit, ceci est inspiré par la remarque après [Dur84, Théorème 4]. Nous avons effectué des simulations qui vérifient cette proposition (voir la Section 2.2.3).

Dans la simulation on modifie un peu le modèle considéré de la manière suivante : on conditionne sur l'événement qu'au moment 0, le bleu ne bouge pas. Les résultats se traduisent facilement au modèle original car l'on sait que cet événement a lieu avec probabilité $1-p$. Sauf si énoncé autrement, tous les résultats numériques sont réalisés en conditionnant sur cet événement. Les discussions théoriques ne sont pas incluses dans cette convention.

2.2.1. Méthode de simulation. — Comme ce que l'on a fait pour estimer $P_p(C)$, on approche la valeur de $P_{p,m}(A)$ par $P_{p,m}(A_N)$ ($N \rightarrow \infty$), où A_N désigne l'événement qu'au moins un des sites dans l'ensemble $\{(n, N-n) \mid 0 \leq n \leq N\}$ est coloré rouge. Le choix du paramètre N est fait de sorte que $P_{p,m}(A_N)$ a convergé comme étant fonction de N .

A titre d'exemple, afin d'estimer $P_{0.7,10}(A)$, on estime $P_{0.7,10}(A_N)$ pour $N = 500, 1000, \dots, 3000$. Observons que $P_{0.7,10}(A_N)$ converge vers 0.61, on en conclut donc $P_{0.7,10}(A) \approx 0.61$.

Estimation de $P_{p,m}(A)$, $m = 10$, $p = 0.7$						
N	500	1000	1500	2000	2500	3000
$\hat{P}_{p,m}(A_N)$	0.62±0.02	0.62±0.02	0.63±0.02	0.63±0.02	0.61±0.02	0.61±0.02

2.2.2. Résultats numériques sur $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{p,m}(A)$. — Avec la méthode décrite ci-dessus nous parvenons à estimer $P_{p,m}(A)$ pour de différentes valeurs de m et p . On étudie en particulier $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{p,m}(A)$, que l'on estime en choisissant m assez grand.

Estimation de $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{p,m}(A)$, $p = 0.7$			
m	10	20	30
$P_{p,m}(A)$	0.61±0.02	0.74±0.02	0.74±0.02

On conclut du tableau ci-dessus que $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{p=0.7,m}(A) \approx 0.74$. Il est intéressant de noter que $P_{p=0.7}(C) \approx 0.75$ d'après des simulations, où on rappelle que C désigne l'événement que les rouges se propagent à l'infini dans le modèle de percolation orientée. Il est naturel d'identifier cet événement C avec l'événement que dans le modèle de chase-escape, le composant connexe du sous-graphe de \mathbb{Z}^2 formé des arrêtes qui sont ouvertes pour les rouges qui contient $\mathbf{0}$ est de cardinal infini. Par abus de notation on note ce dernier aussi comme C . Puisque $A \subset C$, il vient $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{p=0.7,m}(A | C) \approx 1$, ce qui veut dire que lorsque m est assez grand, la coexistence éventuelle a lieu certainement pourvu que les rouges puissent se diffuser à l'infini si les bleus n'existaient pas.

Nous avons fait de même pour $p = 0.65$, 0.8 , et 0.9 , d'où les tableaux ci-dessous.

Estimation de $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{p,m}(A)$, $p = 0.65$				
m	10	20	35	50
$P_{p,m}(A)$	0.38±0.02	0.40±0.02	0.42±0.02	0.43±0.02

Estimation de $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{p,m}(A)$, $p = 0.8$				
m	10	20	30	40
$P_{p,m}(A)$	0.71±0.02	0.86±0.02	0.90±0.01	0.92±0.01

Estimation de $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{p,m}(A)$, $p = 0.9$					
m	10	20	40	60	80
$P_{p,m}(A)$	0.28±0.02	0.47±0.02	0.91±0.01	0.97±0.01	0.97±0.01

Pour résumer,

Estimation de $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{p,m}(A)$				
p	0.65	0.7	0.8	0.9
$\lim_{m \rightarrow \infty} P_{p,m}(A_N)$	0.43±0.02	0.74±0.02	0.92±0.01	0.97±0.01

En comparant avec les résultats des simulations de percolation on conclut

$$\forall p \in (0, 1), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} P_{p,m}(A | C) \approx 1.$$

2.2.3. Résultats sur $P_{p,m}(A)$ pour petit m . — Des simulations donnent que $P_{p,m}(A)$ est nulle pour tout $m \leq m_c = 6.7 \pm 0.1$ et tout $p \in (0, 1)$. On remarque aussi que lorsque $m = 6.8$, $\arg \max_p P_{p,m=6.8}(A) \approx 0.7$.

Il vient immédiatement de la définition que si $m \leq 1$, la coexistence des deux espèces n'a pas lieu. Nous nous intéressons donc au cas $m > 1$ et montrerons que si m est proche de 1, la coexistence n'a toujours pas lieu : $P_{p,m}(A) = 0$. Des simulations n'ayant été faites qu'en dimension 2, la proposition ci-dessous traite aussi les grandes dimensions. Néanmoins, le résultat devient moins fort en grandes dimensions.

Proposition 2.1. — Soit A l'événement que les deux espèces coexistent dans le modèle de chase-escape sur percolation. En dimension 2, il existe un $m_c \in (1, +\infty]$ tel que pour tout $0 < m < m_c$ et tout $p \in (0, 1)$, $P_{p,m}(A) = 0$. En dimension $d \geq 3$, pour tout $p > 1 - \frac{1}{d}$ il existe m_c tel que pour tout $0 < m < m_c$, $P_{p,m}(A) = 0$.

Il est essentiel pour la preuve de considérer séparément les chemins suivant lesquels les particules peuvent partir vers l'infini. Considérons donc le modèle de chase-escape sur percolation dans \mathbb{Z} en oubliant l'espèce rouge et laissant l'espèce bleu occuper les sites libres : au moment 0, le site -1 est occupé et est marqué bleu tandis que les autres sites sont libres. Le bleu se diffuse toujours dans la direction positive : il passe du site i au site $i+1$, pour une durée 0 avec probabilité p et pour une durée $m > 0$ avec probabilité $1-p$, les temps de passage étant indépendant l'un de l'autre. On dénote T_n le premier moment où le bleu touche le site n .

Lemme 2.2. — Soit $m = \frac{1}{1-\delta}$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta \in (0, 1)$ et $C > 0$ tels que

$$P(T_n \geq n) \leq C\delta \left((1+\epsilon)(1-p) \left(\frac{p}{1-p} \right)^\delta \right)^n$$

pour tout $p \geq \frac{1}{2}$.

Démonstration. Si $T_n \geq n$, il y a au moins $\lceil \frac{n}{m} \rceil = \lceil (1-\delta)m \rceil$ arrêts sur lesquelles le temps de passage est égal à m . Par conséquent,

$$(2.2.A) \quad P(T_n \geq n) \leq \sum_{l=\lceil \frac{n}{m} \rceil}^n \binom{n}{l} (1-p)^l p^{n-l}.$$

Puisque $p \geq \frac{1}{2}$, on a pour tout $\lceil \frac{n}{m} \rceil \leq l \leq n$

$$(1-p)^l p^{n-l} \leq (1-p)^{\frac{n}{m}} p^{(1-1/m)n} = \left((1-p) \left(\frac{p}{1-p} \right)^\delta \right)^n.$$

D'autre part, puisque l'on suppose m proche de 1,

$$\sum_{l=\lceil \frac{n}{m} \rceil}^n \binom{n}{l} \leq C\delta n \binom{n}{\lceil \delta n \rceil},$$

où C est une constante. Par la formule de Stirling, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que lorsque n est assez grand,

$$n \binom{n}{\lceil \delta n \rceil} \leq (1+\epsilon)^n.$$

Pour conclure il suffit d'insérer toutes les inégalités ci-dessus dans (2.2.A). \square

Démonstration de Proposition 2.1. Soit R_n le nombre des sites à distance n du site $\mathbf{0}$ qui sont colorés rouges au moment n . Si A a lieu, alors $R_n \geq 1$ pour tout n , ce qui implique $E[R_n] \geq P_{p,m}(A)$ pour tout n . Dans ce qui suit nous allons montrer $\lim_{n \rightarrow \infty} E[R_n] = 0$ sous les conditions énoncées, ce qui va permettre de conclure $P_{p,m}(A) = 0$.

Pour un site $F \in \mathbb{Z}^d$ quelconque, soit $R(F)$ l'événement que F est coloré rouge au moment $\|F\|_1$. On a

$$E[R_n] = \sum_{\|F\|_1=n} E[\mathbb{1}_{R(F)}].$$

Pour un chemin γ allant de $\mathbf{0}$ à F , soit $R(\gamma)$ l'événement que l'espèce rouge esquive de l'espèce bleu sur ce chemin, alors

$$\mathbb{1}_{R(F)} \leq \sum_{\gamma} \mathbb{1}_{R(\gamma)},$$

où la somme est sur tous les chemins se terminant en F . On obtient ainsi

$$E[R_n] \leq \sum_{|\gamma|=n} P(R(\gamma)),$$

où la somme est sur tous les chemins de longueur n . On observe que Lemme 2.2 donne une borne sur $P(R(\gamma))$ car si $R(\gamma)$ a lieu, le temps que l'espèce bleu parcourt γ doit être supérieur à n , dont la probabilité est bornée par Lemme 2.2. Il vient

$$\begin{aligned} E[R_n] &\leq \sum_{|\gamma|=n} C\delta \left((1+\epsilon)(1-p) \left(\frac{p}{1-p} \right)^\delta \right)^n \\ &\leq C\delta \left(d(1+\epsilon)(1-p) \left(\frac{p}{1-p} \right)^\delta \right)^n. \end{aligned}$$

Il suffit que le terme entre parenthèses soit plus petit que 1 pour montrer la convergence $\lim_{n \rightarrow \infty} E[R_n] = 0$. On vérifie aisément que c'est bien le cas en dimension $d \geq 3$ sous les conditions énoncées dans la proposition.

En dimension 2, on observe que si $p < 0.6298 \leq \vec{p}_c(2)$, $P_{p,m}(A) = 0$ puisque l'espèce rouge ne survit pas même en absence de préation. Si $p \geq 0.6298$, le terme entre parenthèses dans l'équation ci-dessus est plus petit que 1 avec ϵ et δ bien choisis, ce qui permet aussi de conclure. \square

2.2.4. Pistes de réflexions sur $P_{p,m}(A)$ pour m grand. — Durrett, Junge, et Tang [DJT20] ont montré que pour d suffisamment grand, p proche de $\vec{p}_c(d)$, et m suffisamment grand $P_{p,m}(A) > 0$. Notre résultat complète leur résultat dans le sens où nous considérons d grand, p proche de 1, et m petit, au quel cas, $P_{p,m}(A) = 0$.

Notre résultat comprend en plus un aspect pour d petit. En particulier, pour $d = 2$, nous avons montré que pour tout $m < m_c$ et $p \in (0, 1)$, $P_{p,m}(A) = 0$. Il est donc naturel de chercher le comportement de $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{p,m}(A)$, que nous devinons être égale à $(1-p)P_p(C)$. Nous n'avons cependant pas réussi à prouver ce résultat, mais en donnons des pistes de réflexions.

2.2.5. Conclusion. — On a $P_{p,m}(A) = 0$ pour $p < \vec{p}_c(2) \approx 0.6445$.

Pour $p > \vec{p}_c(2)$, $P_{p,m}(A) = 0$ pour $m \leq m_c$ et $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{p,m}(A) \approx P_p(C)$, qui est une fonction croissante en p et est concave sur l'intervalle $(\vec{p}_c(2), 1)$. On en conclut donc l'existence d'une transition de phase par rapport à m .

Par ailleurs, des simulations suggèrent que $P_{p,m}(A)$ est une fonction croissante en m , ce qui reste une question ouverte en théorie.

3. Applications à des graphes plus généraux

3.1. L'arbre à attachement préférentiel. —

3.1.1. Le modèle. — Le modèle de l'arbre à attachement préférentiel est défini dans [Ala20]. Il se construit par induction : on initialise en créant un sommet 0, et à l'étape k du processus (où $k \geq 1$), on ajoute le sommet $k + 1$ à l'arbre en le liant à un seul sommet i déjà existant choisi selon une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{D_k(i)}{\sum_{j=0}^n D_k(j)}$ où $D_k(i)$ est le degré du sommet i dans le graphe obtenu à l'étape k . C'est un modèle qui peut permettre de modéliser plusieurs phénomènes, par exemple les relations dans un réseau social. On remarque une grande inhomogénéité des degrés dans les sommets du graphe.

Pour établir le modèle de propagation à la situation initiale, on choisit uniformément une arête du graphe et on choisit aléatoirement un des deux sommets associés que l'on colorie en rouge, et l'autre en bleu.

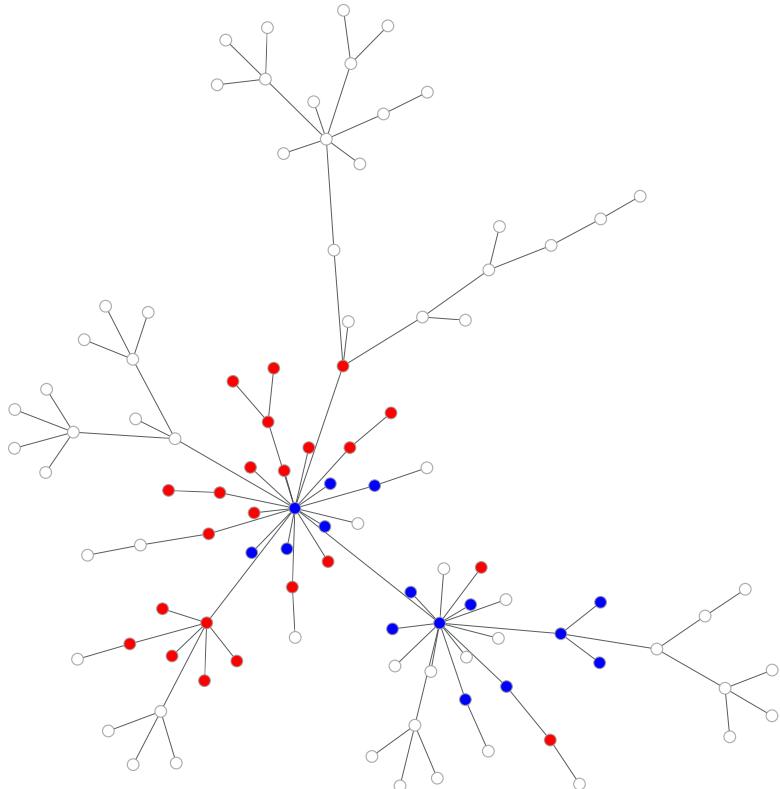


FIGURE 11. Exemple d'arbre à attachement préférentiel avec $N = 100$ et $\lambda = 1$.
On constate bien l'inhomogénéité du nombre de voisins.

3.1.2. Applications de l'algorithme. — Nous avons d'abord estimé expérimentalement λ_c en fonction de la taille du graphe.

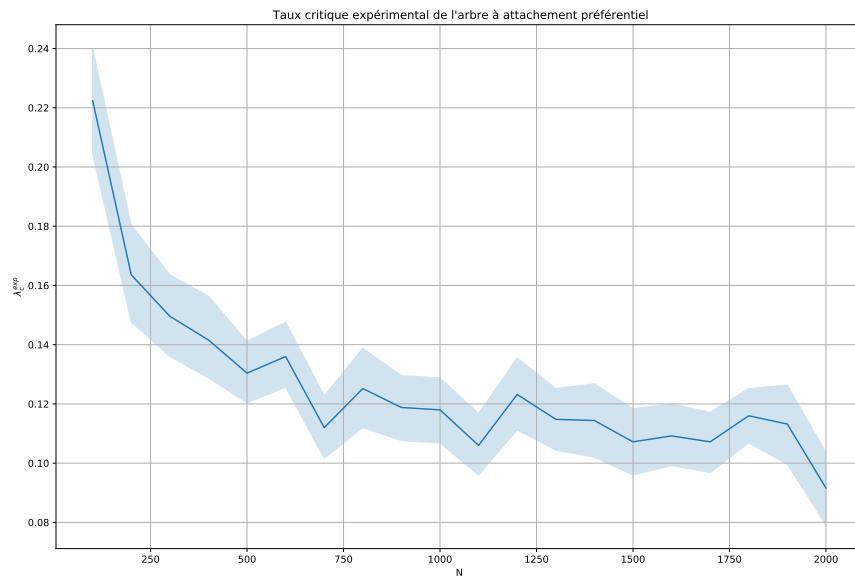


FIGURE 12. Estimation de λ_c en fonction de la taille de l'arbre. La zone bleue représente l'intervalle de confiance à 95%.

On se rend compte que la courbe semble ne pas dépendre uniquement de la taille de l'arbre : en effet, contrairement aux cas précédents où la condition initiale était toujours la même, ici l'infection peut être grandement avantage ou désavantage. Plus le sommet infecté à l'état initial a de voisins, plus il aura de facilités à se propager. A l'inverse, si le premier sommet n'a qu'un seul voisin (qui est donc le premier sommet bleu), alors peu importe la valeur de λ , l'infection sera éteinte dès la première itération de l'algorithme. On peut toutefois noter la tendance décroissante de la courbe : plus le graphe est grand, plus l'infection est facilitée.

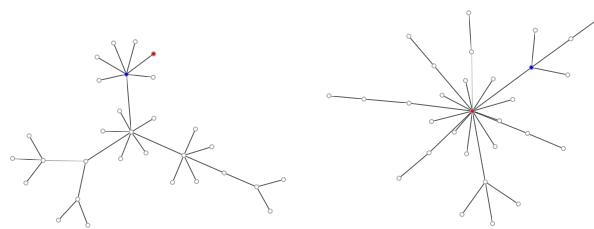


FIGURE 13. Deux états initiaux très inégaux.

Observons maintenant l'étendue de l'infection sur les arbres à attachement préférentiel, c'est-à-dire qu'il s'agit de regarder la proportion de sommets bleus à l'état final du graphe, en ayant fait tourner l'algorithme jusqu'à n'avoir plus de sommet rouge.

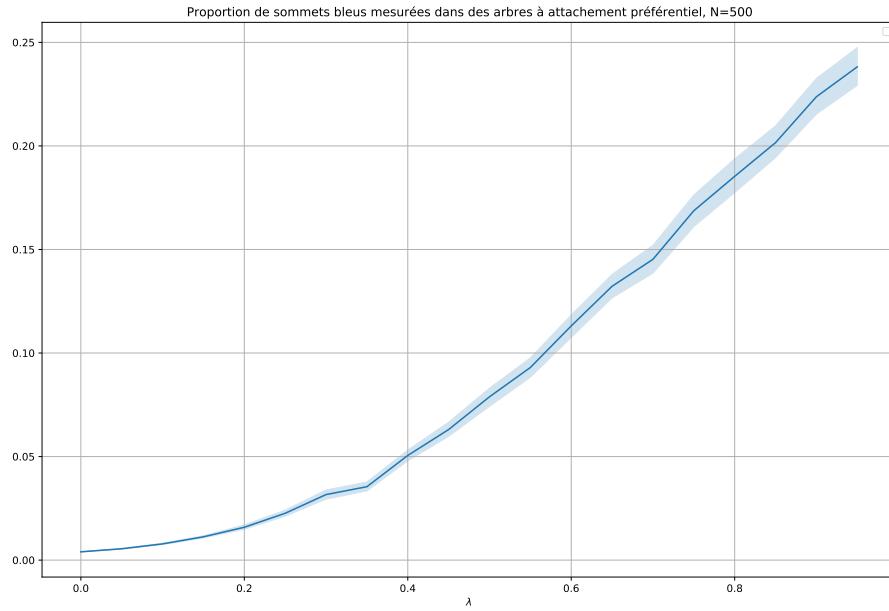


FIGURE 14. Proportion de sommets bleus pour un graphe de taille $N = 500$ au bout de $n_{iter} = 1000$ itérations de l'algorithme.

Ici la courbe semble bien plus dépendante de λ et être moins sensible à la condition initiale. On constate donc qu'effectivement, l'étendue de l'infection augmente avec λ . Donc l'influence de la condition initiale est donc modérée en moyenne.

3.2. Étude d'un graphe particulier : un réseau d'amis Facebook. — Après avoir bien étudié les mécanismes du processus de chase-escape, nous allons maintenant nous pencher sur un cas concret : nous avons récupéré un graphe créé à partir d'un Stochastic Block Model (dont on ne détaillera pas la construction ici) représentant le réseau d'amitiés Facebook de la promotion X2018. C'est donc un graphe avec beaucoup d'arêtes, qui contient des cycles, et où la majorité des sommets ont un grad nombre de voisins. Nous allons étudier la propagation d'une fausse rumeur ou d'une "fake news" au sein de la promotion sur Facebook, à l'aide de l'algorithme de chase-escape. Les sommets blancs seront les élèves n'ayant pas eu vent de la "fake news", les sommets rouges seront ceux qui l'ont vues et les bleus seront les élèves ayant eu vent de la fake news mais ayant ensuite appris de sa non véracité.

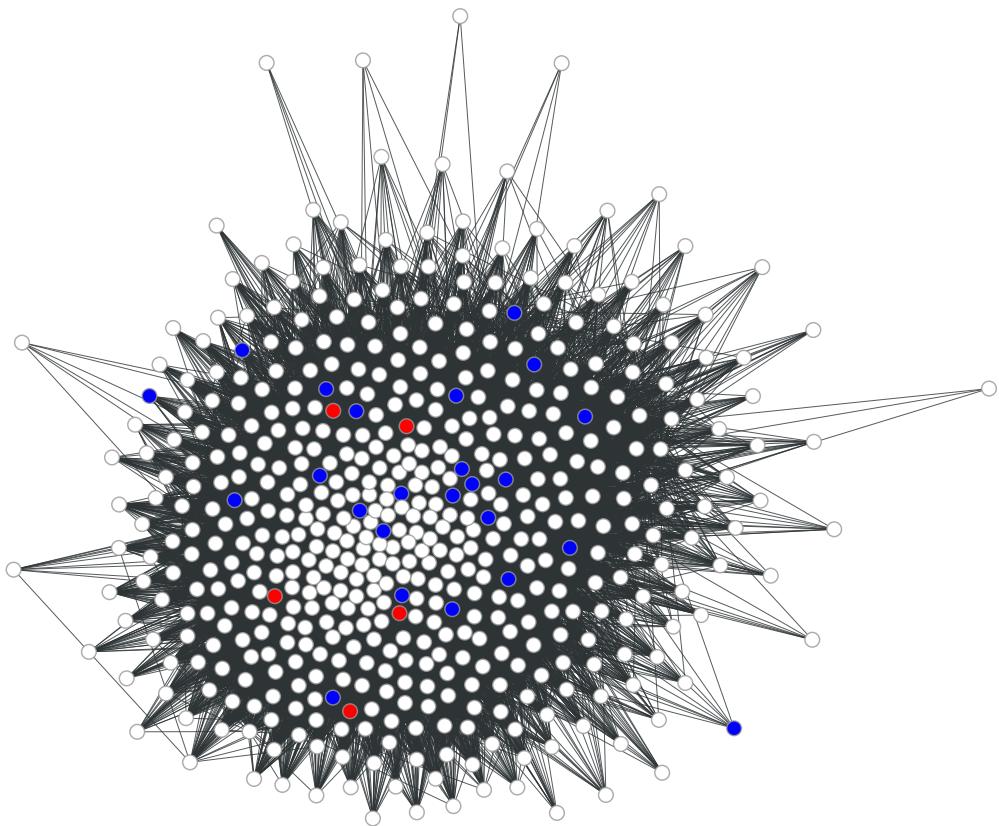


FIGURE 15. Plusieurs estimations de λ_c

Essayons tout d'abord d'estimer λ_c .

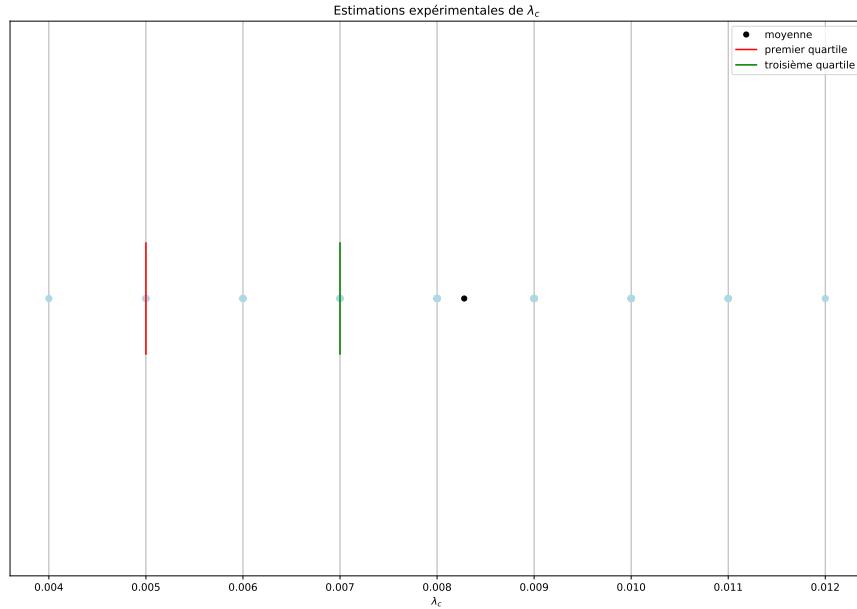


FIGURE 16. Plusieurs estimations de λ_c

On constate que malgré une certaine disparité des valeurs obtenues, $\lambda_c^{exp} \approx 0.083$ ce qui est assez petit devant 1. Autrement dit, la vitesse d'une fake news n'a besoin d'être que de $\lambda = 0.09$ pour pouvoir ne pas se faire rattraper et éradiquer par la vérité. Cela permet de comprendre pourquoi les fake news sont si fréquentes sur les réseaux sociaux et pourquoi tant d'efforts ont besoin d'être mis pour les dévoiler.

Regardons maintenant l'étendue de la propagation en fonction de λ , traduite par la proportion de sommets bleus après un nombre d'itérations suffisant.

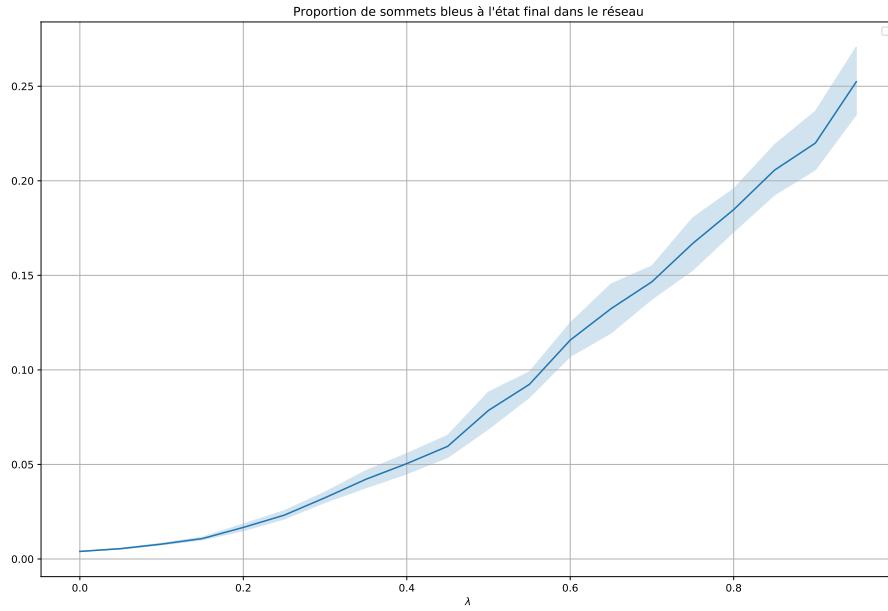


FIGURE 17. Proportion de sommets bleus au bout de $n_{iter} = 1000$ itérations de l'algorithme (ici $N = 528$).

On constate que la courbe obtenue est quasi-identique à celle que l'on avait eue pour le graphe à attachement préférentiel, il y a donc des similarités entre les deux modèles lorsqu'il s'agit de simuler des situations réelles.

Ainsi, dans le cas général, λ_c est souvent bien plus petit que 1, et plus il y a d'arêtes dans le graphe, plus la propagation de l'infection est étendue, même si la condition initiale a un rôle important sur le déroulement du processus.

Références

- [BH57] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. “Percolation processes I., II.” In: *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 53 (1957), pp. 629–641, 642–645.
- [Ham57] J. M. Hammersley. “Percolation processes: Lower bounds for the critical probability”. In: *Ann. Math. Statist.* 28 (1957), pp. 790–795.
- [Ric73] D. Richardson. “Random growth in a tessellation”. In: *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 74 (1973), pp. 515–528.
- [KV80] J. Kertéz and T. Vicsek. “Oriented bond percolation”. In: *J. Phys. C* 13 (1980), pp. L343–L348.
- [DB81] D. Dhar and M. Barma. “Monte Carlo simulation of directed percolation on a square lattice”. In: *J. Phys. C* 14 (1981), pp. L1–L6.
- [Gri81] D. Griffeath. “The basic contact process”. In: *Stochastic Process Appl.* 11 (1981), pp. 151–185.
- [Dha82] D. Dhar. “Diode-resistor percolation in two and three dimensions: I. Upper bounds on the critical probability”. In: *J. Phys. A* 15 (1982), pp. 1849–1858.
- [CD83] J. T. Cox and R. Durrett. “Oriented percolation in dimensions $d \geq 4$: bounds and asymptotic formulas”. In: *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 93 (1983), pp. 151–162.
- [Dur84] R. Durrett. “Oriented percolation in two dimensions”. In: *The Annals of Probability* (1984), pp. 999–1040.
- [EGD88] J. W. Essam, A. J. Guttmann, and K. De’Bell. “On two-dimensional directed percolation”. In: *J. Phys. A* 21 (1988), pp. 3815–3832.
- [BBS94] P. Balister, B. Bollobás, and A. Stacey. “Improved upper bounds for the critical probability of oriented percolation in two dimensions”. In: *Random Structures and Algorithms* (1994), pp. 573–589.
- [Lig95] T. M. Liggett. “Survival of discrete time growth models, with applications to oriented percolation”. In: *Ann. Appl. Probab.* (1995), pp. 613–636.
- [HP98] O. Häggström and R. Pemantle. “First passage percolation and a model for competing spatial growth”. In: *J. Appl. Probab.* 35.3 (1998), pp. 683–692.
- [GM05] O. Garet and R. Marchand. “Coexistence in two-type first-passage percolation models”. In: *Ann. Appl. Probab.* 15.1A (2005), pp. 298–330.
- [Bor14] C. Bordenave. “Extinction probability and total progeny of predator-prey dynamics on infinite trees”. In: *Electronic Journal of Probability* 19.0 (2014), pp. 1–20.
- [Kor15] I. Kortchemski. “A predator-prey SIR type dynamics on large complete graphs with three phase transitions”. In: *Stochastic Process. Appl.* 125.3 (2015), pp. 886–917.
- [Ala20] Nelly Alandou. “Attachement préférentiel”. In: *Mémoire d’initiation à la recherche* (2020).
- [DJT20] R. Durrett, M. Junge, and S. Tang. “Coexistence in chase-escape”. In: *Electron. Commun. Probab.* 25.22 (2020), pp. 1–14.