# Relationen

## Diskrete Strukturen

Uta Priss
Informatik, Ostfalia

Wintersemester 2022

# Ihre Fragen

- Fragen zu Kapitel 6
  Stellen Sie die bitte im Forum oder fragen Sie jemanden aus Ihrer Diskussionsgruppe.
- Wie modelliert man „genau einen"
  Vergleichen Sie mit jemandem, der das letzte Woche mitgeschrieben hat.
- Können wir die Tabellen, die wir im Kapitel ausfüllen sollten, im Unterricht vergleichen?
  Ich würde empfehlen, dass Sie mit Leuten aus Ihrer Diskussionsgruppe vergleichen.

# Ihre Fragen

- Wieso ist „Für alle Hemden gibt es einen Käufer“ und „Es gibt einen Käufer für alle Hemden“ nicht gleichbedeutend?
  In der natürlichen Sprache ist das nicht immer klar. Logisch gesehen kann es im ersten Satz für alle Hemden einen anderen Käufer geben. Im zweiten Satz kauft ein Mensch alle Hemden.
- Wenn die linke Seite der Subjunktion falsch ist, dann ist die rechte immer wahr, richtig?
  Nein, dann ist die Subjunktion als Ganzes wahr.

# Ihre Fragen

- Hat man bei der Kontrollfragen mehrere Versuche oder zählt nur der erste?
  Der erste Versuch zählt.
- Dürfen wir zur Probeklausur einen Spickzettel mitbringen
  Ja
- Wenn setlX nicht Klausurrelevant ist, wieso müssen wir dann Aufgaben damit bearbeiten?
  Weil der Computer Ihnen Feedback gibt. Die mathematische Notation ist zu uneinheitlich um direkt von einem Computer ausgewertet zu werden.
- Ist es für die Prüfung relevant, auch Zusatzmaterialien zu lesen
  Nein

# Ihre Fragen

- Gibt es einen speziellen Begriff für Kanten, die eine Richtung besitzen (Pfeile)?
  Ja, Pfeile
- Muss eine Relation als Menge angegeben werden oder ist $<$ schon eine Relation?
  Eine Relation kann als Menge von Paaren geschrieben werden oder als eine Menge mit einer Operation, zB $(\mathbb{N}, <)$.
- Relation $I_A$ über einer Menge $A$ ...
  „über einer Menge“ bedeutet $I_A \subseteq A \times A$.
- Kann es eine Relation zwischen einer leeren Menge und einer anderen Menge geben?
  Eine Relation auf der leeren Menge wäre auch immer nur eine leere Menge.
- Gibt es Relationen die nicht umkehrbar sind?
  Nein.

# Ihre Fragen

- Zusammenhang Symmetrie, Anti- und Asymmetrie
- Zusammenhang Reflexiv und Anti- und Asymmetrie
- Verkettung
- Äquivalenzklassen
- Graphen lesen und schreiben
- SetlX-Aufgabe (in den Kontrollfragen)
- transitiv
- Ordnungsrelation

# SetlX

```
is_relation_over := procedure(rRelation, mSet, nSet) {
      return /* TODO */
};
```

A) return rRelation => mSet >< nSet;
B) return rRelation <==> mSet >< nSet;
C) return rRelation <= mSet >< nSet;
D) return rRelation in mSet >< nSet

Bestimmen Sie die Eigenschaften dieser Relationen und zeichnen Sie jeweils einen Graph.

- $R_1 = \{[1,1],[1,2],[2,2],[2,1],[3,3],[4,4]\}$
- $R_2 = \{[1,1],[1,3],[2,2],[2,1],[3,1],[1,2]\}$
- $R_3 = \{[a,b],[b,c],[c,d],[d,e],[e,a]\}$
- $R_4 = \{[a,b],[b,c],[a,c],[d,e],[f,g]\}$
- $R_5 = \{\}$ (auf der Menge $A = \{\}$ oder auf der Menge $A = \{1\}$)
- $R_6 = \{[a,a]\}$

# Unterschied zwischen antisymmetrisch und asymmetrisch

antisymmetrisch:
$\forall(a, b \in A \mid ([a, b] \in R \land [b, a] \in R) \longrightarrow a = b)$

asymmetrisch:
$\forall(a, b \in A \mid [a, b] \in R \longrightarrow [b, a] \notin R)$

symmetrisch:
$\forall(a, b \in A \mid [a, b] \in R \longrightarrow [b, a] \in R)$

Negieren Sie die 3 Definitionen formal.

# Beispiel: Negation der Antisymmetrie

antisymmetrisch: $\forall(a, b \in A \mid ([a, b] \in R \wedge [b, a] \in R) \longrightarrow a = b)$

Nicht antisymmetrisch:
$\neg\forall(a, b \in A \mid ([a, b] \in R \wedge [b, a] \in R) \longrightarrow a = b)$

Definition der Subjunktion anwenden:
$\neg\forall(a, b \in A \mid \neg([a, b] \in R \wedge [b, a] \in R) \vee a = b)$

Die Negation hinter den Quantor ziehen:
$\exists(a, b \in A \mid \neg(\neg([a, b] \in R \wedge [b, a] \in R) \vee a = b))$

De Morgan anwenden:
$\exists(a, b \in A \mid \neg\neg([a, b] \in R \wedge [b, a] \in R) \wedge a \neq b)$

Doppelte Negation anwenden:
$\exists(a, b \in A \mid [a, b] \in R \wedge [b, a] \in R \wedge a \neq b)$

Finden Sie jeweils ein Beispiel einer

- nicht antisymmetrischen
- nicht asymmetrischen
- nicht symmetrischen
- weder symmetrischen noch asymmetrischen
- sowohl symmetrischen als auch antisymmetrischen
- sowohl symmetrischen als auch asymmetrischen

Relation. Schreiben Sie die Relationen mit Mengenkonstruktor:
z.B. $\{[x, y] : x, y \in \text{MenschenMenge} \mid x \text{ verheiratetMit } y\}$

Welche dieser Relationen sind antisymmetrisch, asymmetrisch oder symmetrisch: „ist verheiratet mit“, „ist Vater von“, $\leq$, $<$.

Im Buch ist die Symmetrie so definiert:

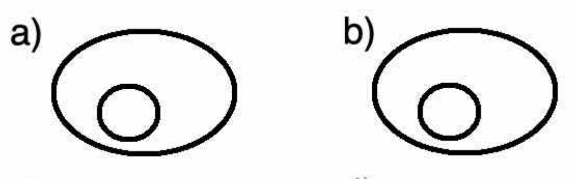
$$\forall(a, b \in A \mid [a, b] \in R \longleftrightarrow [b, a] \in R)$$

Ist das äquivalent zu:

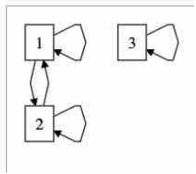
$$\forall(a, b \in A \mid [a, b] \in R \longrightarrow [b, a] \in R)$$

# Welches ist jeweils Teilmenge, welches Obermenge?

a) anti-/asymmetrische Relationen
b) Ordnungsrelation/strikte Ordnungsrelation



Warum ist transitiv richtig, obwohl keine Verbindung zu dem Punkt 3 besteht:



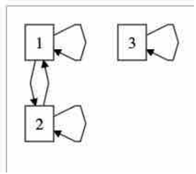

Wie kann man sich „transitiv" anschaulich vorstellen:

A) durch Verbindungen im Graphen

B) durch Kreise im Graphen

C) gar nicht

Warum ist transitiv richtig, obwohl keine Verbindung zu dem Punkt 3 besteht:




transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:
$[a, b] \in R \wedge [b, c] \in R \rightarrow [a, c] \in R$.

Ist $\{[0,1],[1,2],[2,0]\}$ auf der Menge $\{0,1,2\}$ transitiv?

transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:
$[a, b] \in R \land [b, c] \in R \to [a, c] \in R$.

Ist $\{[1,2]\}$ auf der Menge $\{0,1,2\}$ transitiv?

transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:
$[a, b] \in R \wedge [b, c] \in R \rightarrow [a, c] \in R$.

Siehe Übungsaufgabe SetlX: is_transitive_relation

# Äquivalenz

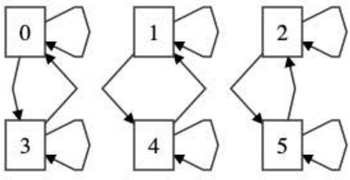
Wo haben Sie das Wort „äquivalent“ bisher im Lehrtext gesehen?

Äquivalent heißt, dass man nur gewisse Kriterien beachtet und alle anderen Details ignoriert.

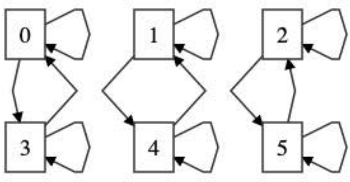
| Menge | beachtet | was wird ignoriert | Beispiel äquivalenter Elemente | wie viele Klassen? |
|---|---|---|---|---|
| Zeichen | Buchstaben | Schriftart | **A** $\sim$ *A* $\sim$ `A` | 2 * 26 |
| $\mathbb{N}$ | gerade/ungerade | Vielfache von 2 | $2 \sim 4 \sim 6 \sim \ldots, 1 \sim 3 \sim \ldots$ | 2 |
| Zeiteinheiten | Stunde, Min., Sek. | Datum | 21.5.22 11:40:59 $\sim$ 3.10.05 11:40:59 | 86400 |
| Aussagen | Wahrheitswerte | | $a \land 1 \sim a$ | 2 |
| Formeln | | Mathe oder SetlX | $2^4 \sim 2 * * 4$ | $\infty$ |
| $\mathbb{N}$ | | Vielfache von 7 | | 2 V 7 |
| $\mathbb{R}$ | | | $1.9999\ldots \sim 2 \sim \frac{4}{2}$ | $\infty$ |

Welche Zahlen sind äquivalent modulo 3 und was sind die Äquivalenzklassen?

Welche Zahlen sind äquivalent modulo 3 und was sind die Äquivalenzklassen?



Welche Zahlen sind äquivalent modulo 3 und was sind die Äquivalenzklassen?




Welches sind die Äquivalenzklassen auf $\{1, 2, 3, ...\}$ bezüglich „$=$“

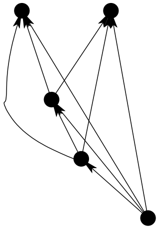
Definieren Sie eine Äquivalenzrelation für die folgenden Mengen von Äquivalenzklassen:

- $\{\{1, 3, 5, ...\}, \{2, 4, 6, ...\}\}$
- $\{\{\{1\}, \{3\}, \{17\}\}, \{\{3, 5\}, \{3, 8\}, \{17, 20\}\}, \{\{1, 5, 8\}, \{3, 4, 9\}\}\}$

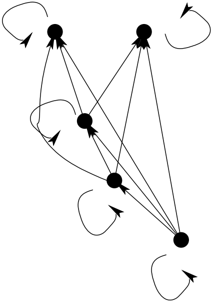
Definieren Sie jeweils die Relation und finden Sie eine Beschreibung für jede Äquivalenzklasse.

# Ordnungsrelation

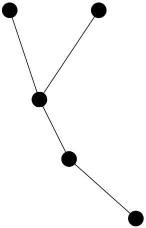
antisymmetrisch
und transitiv:



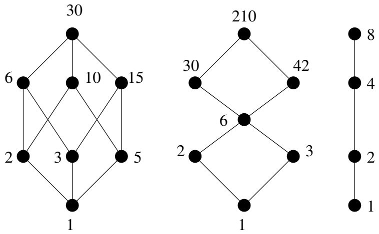
antisymmetrisch,
reflexiv und transitiv:



Hasse–Diagramm:



# Ordnungsrelation "teilt" als Hassediagramm




Wie kann man Multiplikation und Division ablesen?

Zeichnen Sie Diagramme für 27, 70 und 20.

# Verkettungen

Bilden Sie folgende Verkettungen: $R_4 \circ R_3$
$R_3^{-1} \circ R_4^{-1}$
$R_4 \circ R_3 \circ R_6$
$R_6 \circ R_3$

- $R_3 = \{[a, b], [b, c], [c, d], [d, e], [e, a]\}$
- $R_4 = \{[a, b], [b, c], [a, c], [d, e], [f, g]\}$
- $R_5 = \{\}$
- $R_6 = \{[a, a]\}$

Ist $\circ$ kommutativ und assoziativ?
Haben Sie eine Vermutung bezüglich Verkettung und Umkehrrelation?

Bilden Sie $R_3 \cap R_4$
$R_3 \times R_6$